

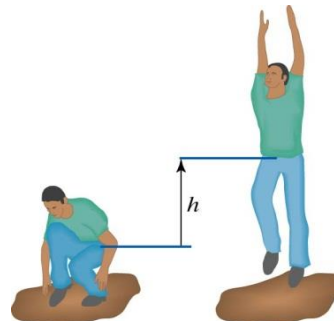
9. Translations-, Rotations- och Vibrationsenergi

Lärandemål:

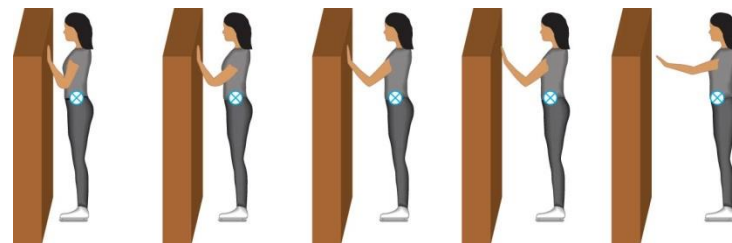
- Kunna analysera ett mångpartikelsystem: Kinetiska energin för masscentrum och den kinetiska energin relativt till masscentrum
- Kunna analysera ett mångpartikelsystem som en punktpartikel och ett utsträckt system och kombinera resultaten för att få information om systemets olika inre energier



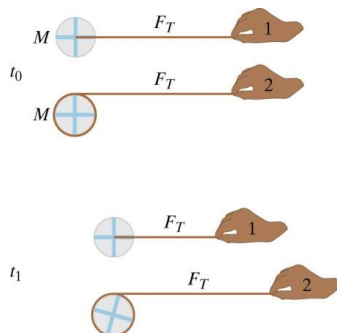
- Människa som hoppar upp från golvet



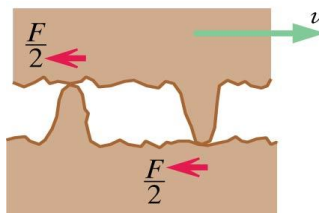
- Människa på skridskor trycker mot en vägg



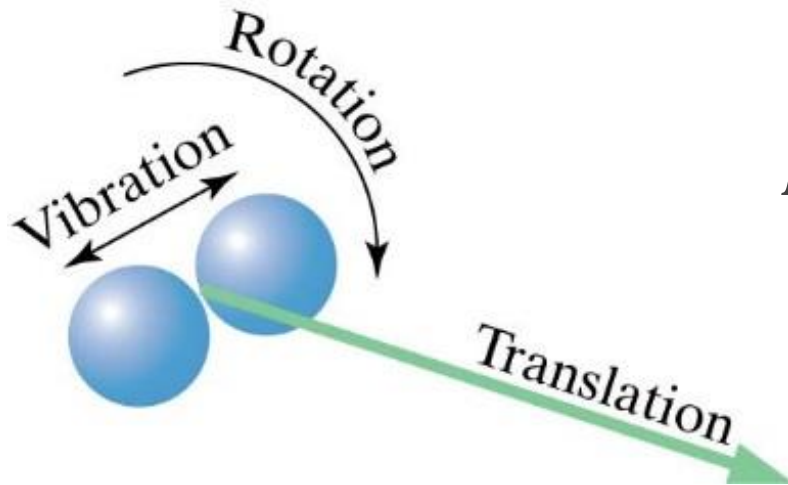
- Vi drar två puckar



- Friktionsmodell



Separation av ett mångpartikel systems energi



$$K_{Tot} = K_{Trans} + K_{Rel}$$

Masscentrums
rörelse

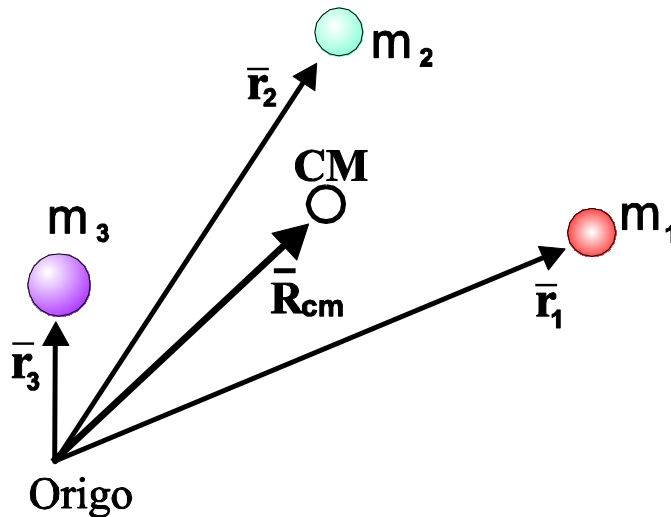


Masscentrum (massakeskus)

Masscentrum kallas för en punkt i rummet som är 'summamassans medelpunkt' för en samling av massor

Def:

$$\bar{\mathbf{R}}_{CM} = \frac{m_1 \bar{\mathbf{r}}_1 + m_2 \bar{\mathbf{r}}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_i m_i \bar{\mathbf{r}}_i}{\sum_i m_i}$$



$$X_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$
$$Y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$
$$Z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$



Masscentrums kinetiska energi

$$\bar{R}_{CM} = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Derivera som funktion av tiden $\sum_i m_i = M$

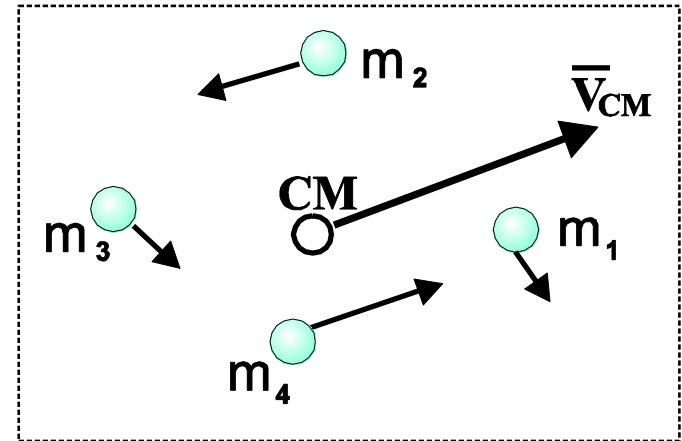
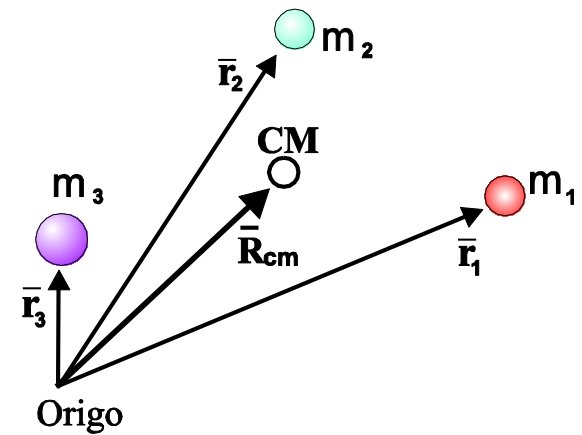
$$\Rightarrow \bar{V}_{CM} = \frac{m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 + \dots}{M}$$

$$\Rightarrow \boxed{M \bar{V}_{CM} = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 + \dots = \bar{P}}$$

Där P är systemets totala rörelsemängd

$$\Rightarrow \boxed{M \frac{d\bar{V}_{CM}}{dt} = \frac{d\bar{P}}{dt} = \bar{F}_{EXT}}$$

$$\boxed{K_{CM} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2}$$

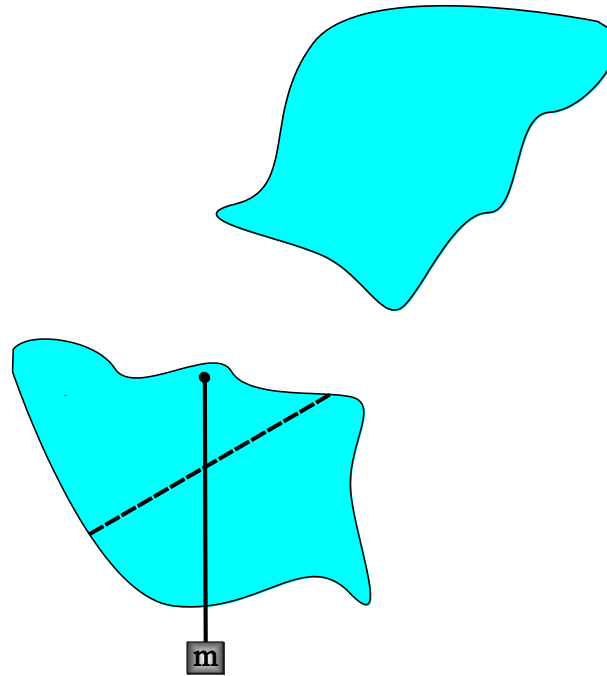
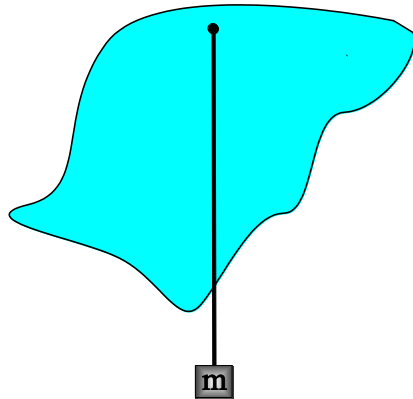


Masscentrum

Masscentrum för en kropp kan beräknas genom att integrera x-y- och z-komponenterna skilt

Kroppens form symmetriskt → lätt att bestämma masscentrum

Hur hitta masscentrum för en oregelbunden kropp?



$$\bar{R}_{CM} = \frac{\Delta m_1 \bar{r}_1 + \Delta m_2 \bar{r}_2 + \dots}{\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots} = \frac{\sum_i \Delta m_i \bar{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} = \frac{1}{M} \sum_i \Delta m_i \bar{r}_i$$

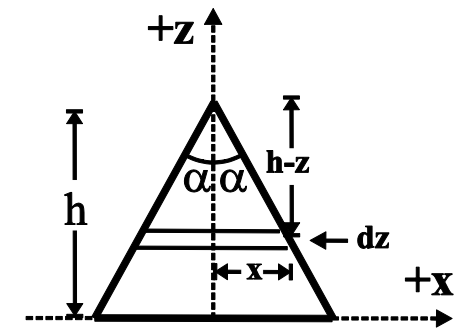
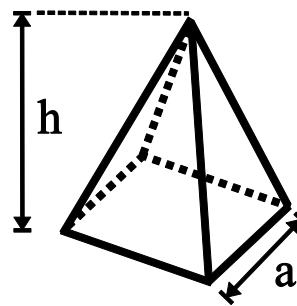
Ett masselement är volymelementet gånger densiteten: $\Delta m_i = \rho \Delta V_i$

➡ Masscentrum för en homogen fast kropp:

$$\bar{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \rho \Delta V_i \bar{r}_i = \frac{\rho}{M} \int \bar{r} \Delta V$$



Beräkna masscentrum för en pyramid med höjden **h** och där bredden på den fyrkantiga basen är **a**



Först, från masscentrums definition: $\bar{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \rho \Delta V_i \bar{r}_i = \frac{\rho}{M} \int \bar{r} \Delta V$

Ge masscentrums ekvation för höjdkoordinaten z

$$Z_{CM} = \frac{\rho}{M} \int_0^h z dV(z)$$

Hur ser volymelementet $dV(z)$ ut?

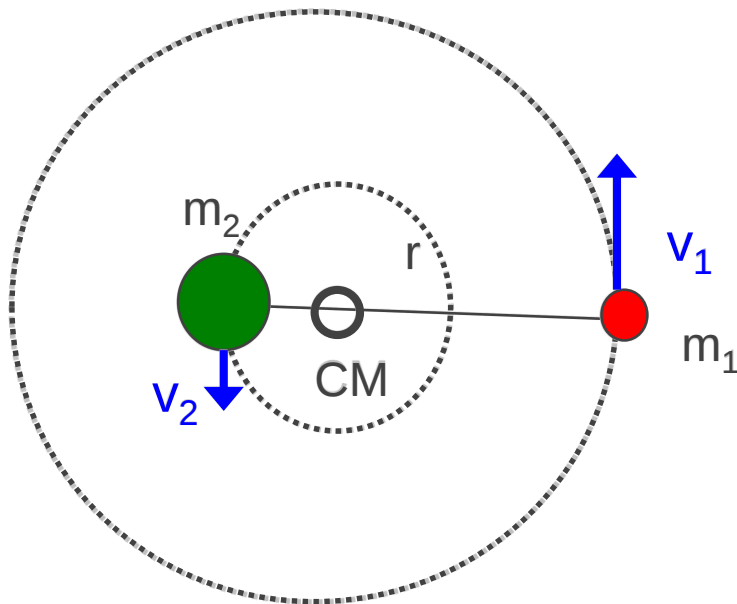
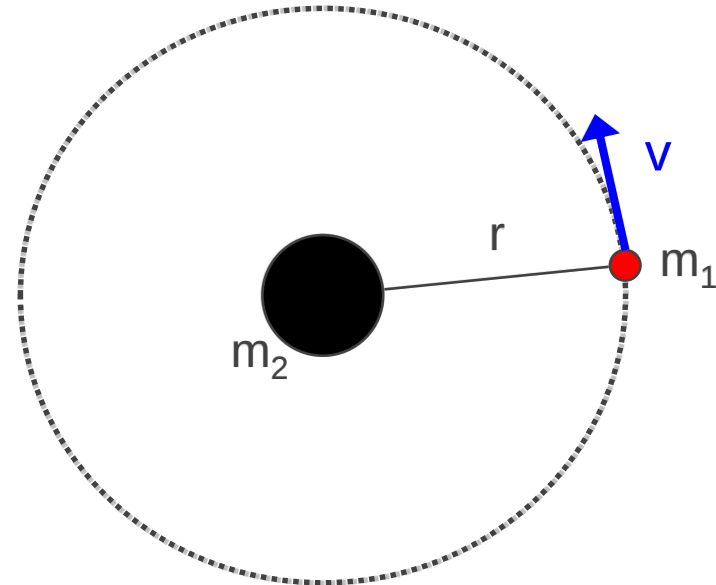
→ $Z_{CM} = h/4$



Tvåkroppsproblem (kahden kappaleen ongelma)

Två massor kretsar kring varandra:

- 1) Idealfall ($m_2 \gg m_1$)
- 2) Verklighet ($m_2 > m_1$)



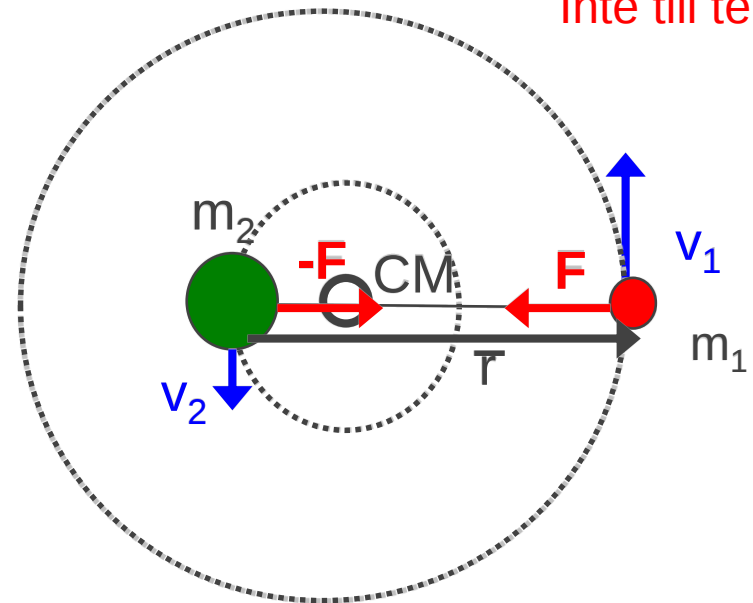
Hur lösa detta så lätt
som möjligt?



Lösning: Definiera reducerad massa

m_1, m_2 systemets reducerade massa:

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$



Accelerationerna för massorna: $\bar{a}_1 = \frac{\bar{F}}{m_1}$ $\bar{a}_2 = \frac{-\bar{F}}{m_2}$

Accelerationen hos kropp 1
betraktat från kropp 2

$$\bar{a} = \bar{a}_1 - \bar{a}_2 = \bar{F} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \bar{F} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) \Rightarrow \bar{F} = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \bar{a}$$

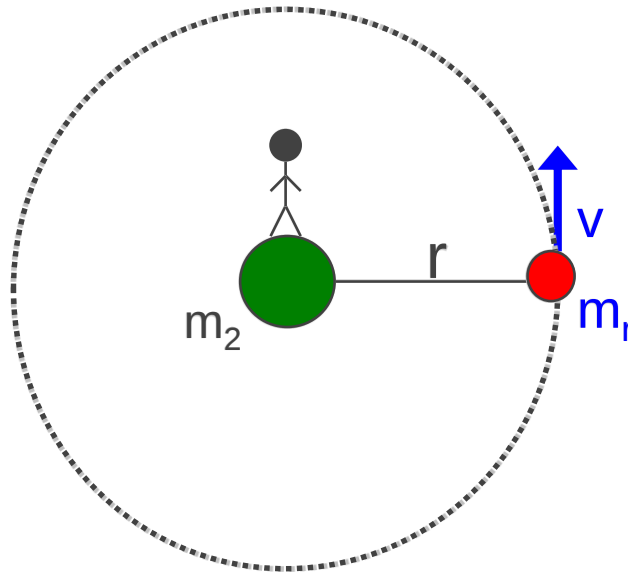
$$\bar{F} = m_r \bar{a} \quad \text{N2}$$



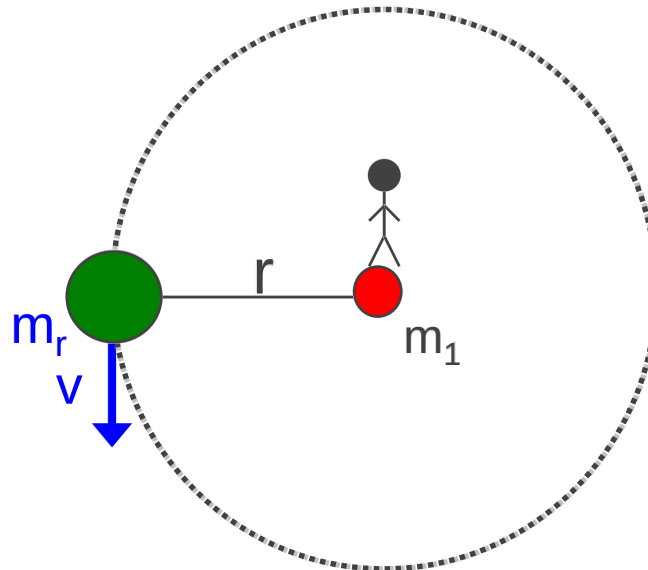
$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\bar{F} = m_r \bar{a}$$

Från massa 2 ser man:



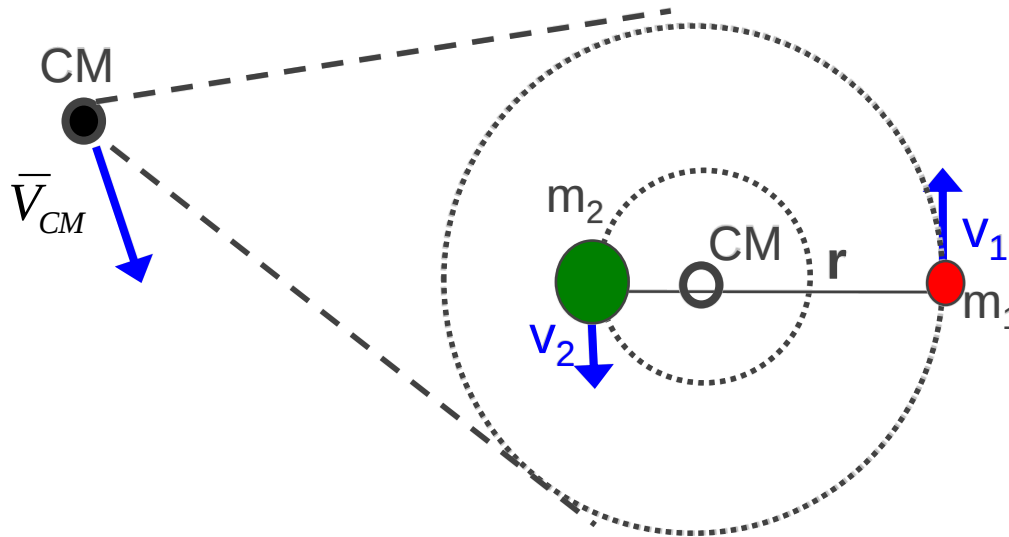
Från massa 1 ser man:



Kinetiska energin för ett mångpartikel system

$$\begin{aligned}
 K_{Tot} &= \sum_{i=1}^N K_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left| \frac{d}{dt} (\bar{r}_i) \right|^2 & \bar{R}_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{r}_i}{M} \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left| \frac{d}{dt} (\bar{R}_{CM} + \bar{r}_{i,CM}) \right|^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\bar{V}_{CM} + \bar{v}_{i,CM}|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\bar{V}_{CM} + \bar{v}_{i,CM}| \cdot |\bar{V}_{CM} + \bar{v}_{i,CM}| \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\bar{V}_{CM}^2 + 2\bar{V}_{CM} \cdot \bar{v}_{i,CM} + \bar{v}_{i,CM}^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \bar{V}_{CM}^2 + \bar{V}_{CM} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \bar{r}_{i,CM} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \bar{v}_{i,CM}^2 \\
 &= \boxed{\frac{1}{2} M \bar{V}_{CM}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \bar{v}_{i,CM}^2}
 \end{aligned}$$





Totala energin:

$$E_{Tot} = \left[\frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{CM}^2 \right] + \left[\frac{1}{2} m_1 v_{1,Rel}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,Rel}^2 + U(r) \right] + (m_1 + m_2) c^2$$

↑
Masscentrum

↑
Relativa rörelsen till CM för m_1 och m_2



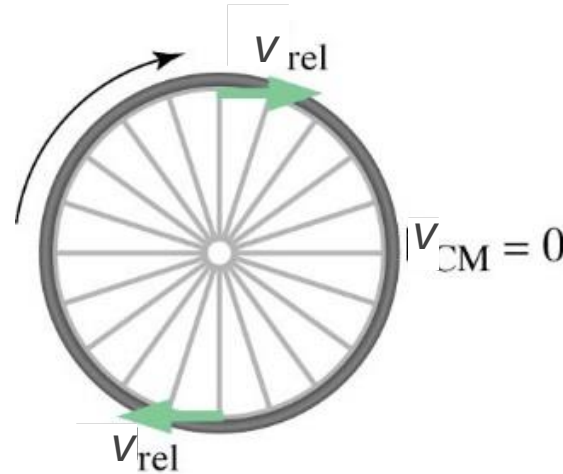
Vibrationsenergi

$$E_{Vib} = K_{Vib} + U_{\text{fjäder}}$$



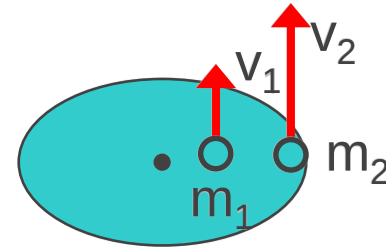
Rotationsenergi

$$K_{Rot} \approx \frac{1}{2} M v_{Rel}^2$$



Kinetiska energin för rotation

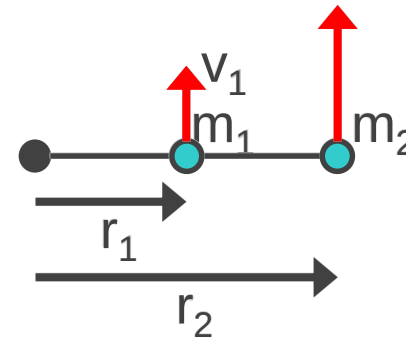
$$K_{rot} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \dots = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$



→ Alla massorna i en fast kropp roterar med samma vinkelhastighet

$$|\bar{\omega}| = \frac{|\bar{v}_i|}{|\bar{r}_i|} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$



$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

Definition: **Tröghetsmoment**

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

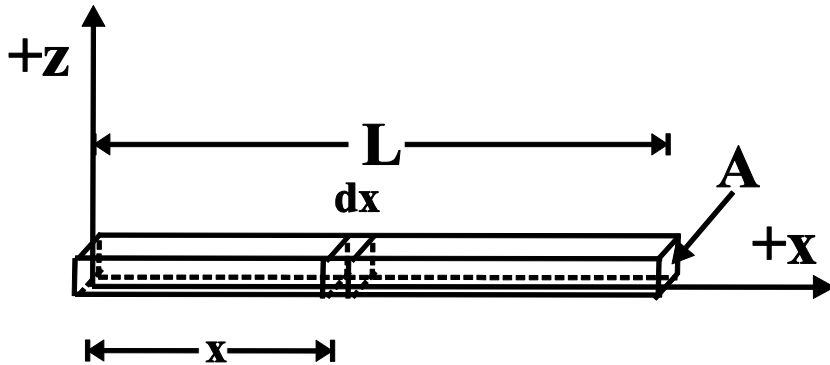
(Hitausmomentti)
eng: moment of inertia

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

jämför: $K = \frac{1}{2} m v^2$



Bestäm tröghetsmomentet för en homogen stav med längden L som roterar kring den ena ändan av staven



$$I_A = \sum_i m_i r_i^2$$

$$m_i = \Delta m_i = \rho dV$$

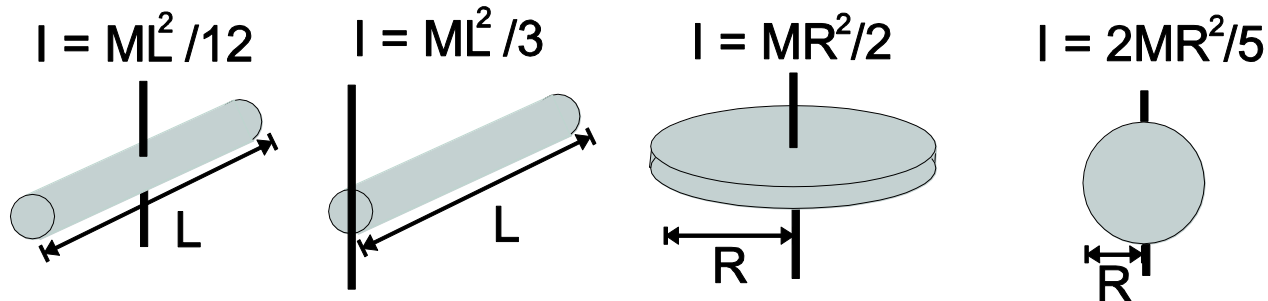
$$\Rightarrow I_A = \rho \int r^2 dV$$

$$dV = A dx$$

$$\text{Totala massan: } M = \rho AL$$

$$\Rightarrow I_A = \rho A \int_0^L x^2 dx = \rho A \Big|_0^L \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} \rho AL^3 = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$





Tröghetsmomentet (eng. moment of inertia), $[I] = \text{kgm}^2$, beskriver på vilket avstånd massa för en kropp är distribuerat runt rotationsaxeln

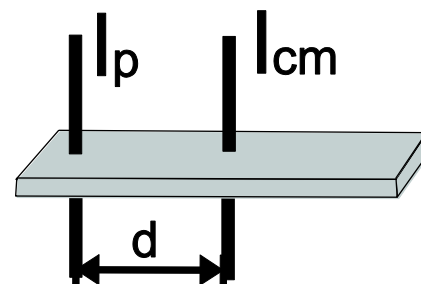
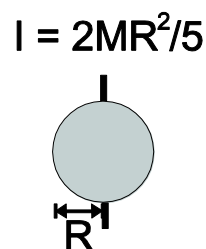
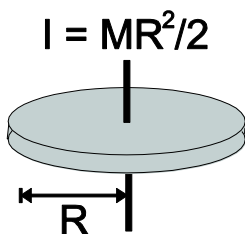
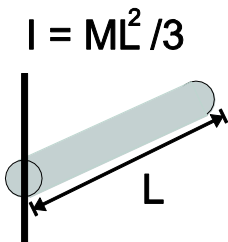
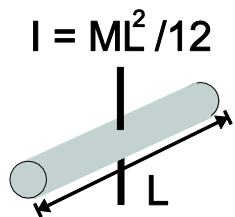
Tröghetsmomentet beror alltså på både kroppens form och genom vilken axel den roterar. Därför är det inte tillräckligt att bara säga att en kropps tröghetsmoment är nånting, utan man måste också specificera rotationsaxeln

→ **Samma kropp har olika tröghetsmoment genom olika rotationsaxlar**

$$I_P = \sum_i m_i r_i^2$$

där P betyder att kroppen roterar kring en axel vid punkten P





Parallell axiomet:

$$I_P = I_{CM} + Md^2$$

I_P = Tröghetsmomentet kring en godtycklig punkt

I_{CM} = Tröghetsmomentet kring masscentrum ($I_{CM} \parallel I_P$)

M = Kroppens massa

d = Avståndet mellan punkten P och masscentrum

Tröghetsmomentet kring masscentrum är minst



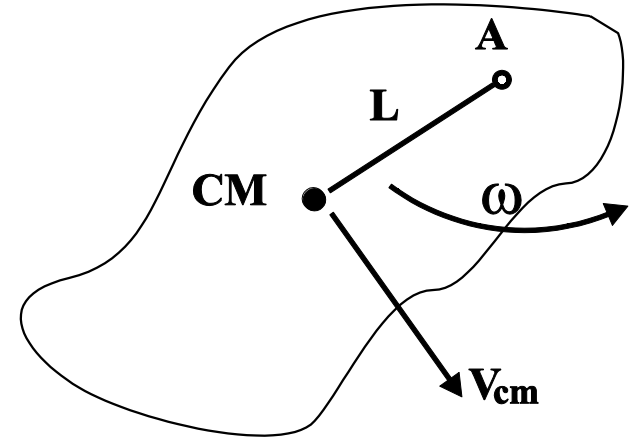
Fria kroppar roterar runt en axel genom massmedelpunkten



En kropp roterar kring punkten A:

Den kinetiska
rotationsenergin för
rotation kring A är:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I_A \omega^2$$



Parallell axiomet ($I_A = I_{CM} + ML^2$) ger:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} (I_{CM} + ML^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} ML^2 \omega^2$$

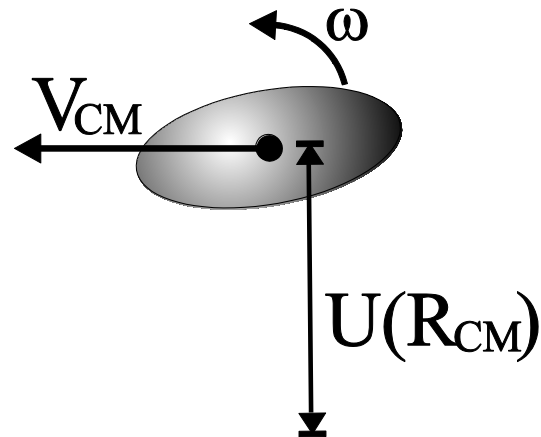
$$V_{CM} = L\omega \quad \Rightarrow \quad K_{rot} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

**Rotationen kring A är ekvivalent med att
kroppen roterar kring masscentrum och att
masscentrum har en hastighet V_{CM}**



Totala mekaniska energin för en roterande fast kropp är summan av **rotationsenergin**, **masscentrums rörelseenergi** och **masscentrums potentialenergi**

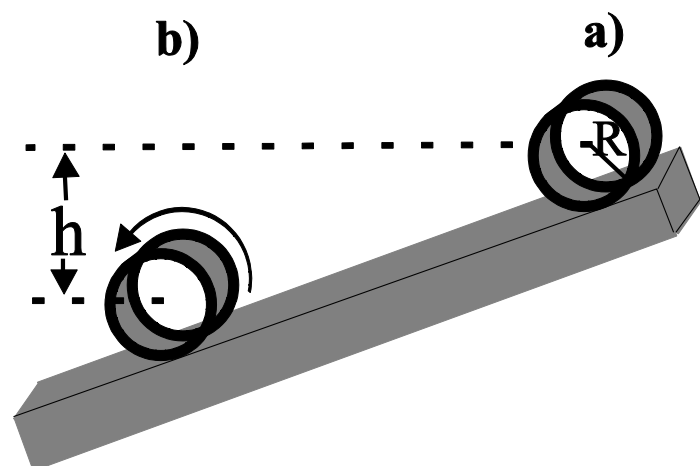
$$E = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + U(R_{CM})$$



En stillastående ihålig cylinder med radien R och trögets-
momentet $I = MR^2$ börjar rulla nedför en sluttning från punkten
a) till b).

Höjdskillnaden mellan a) och b) är h .

Vad är cylinderns hastighet vid punkten b)?



Totala mekaniska energin bevaras

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + U(R_{CM})$$

$$V_{CM} = \omega R \Rightarrow \omega = V_{CM} / R$$

Uppe

Nere

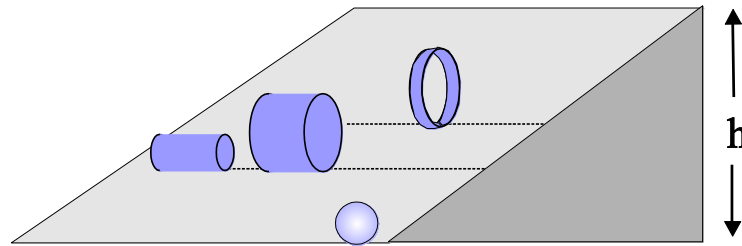
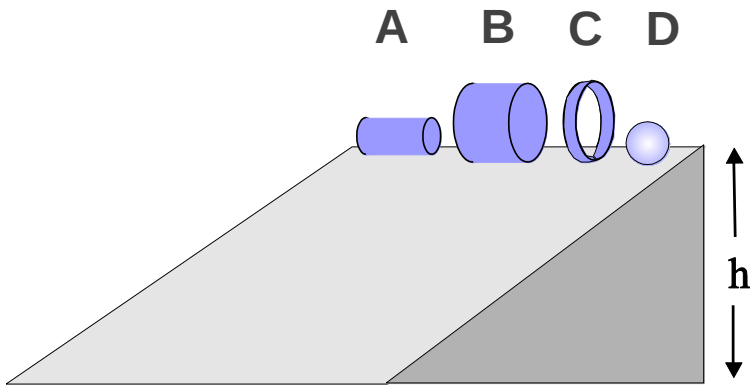
$$0 + 0 + Mgh = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + 0 = \frac{1}{2} (MR^2) \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V_{CM} = \sqrt{gh}}}$$

$$\text{Ifall } I = 0 \rightarrow V_{CM} = \sqrt{2gh}$$



Vilken av föremålen kommer först nedför kilen?



Föremålen	Radien	Tröghetsmoment I	$c \times (MR^2)$
solid sfär	$R/2$	$\frac{2MR^2}{5}$	$\frac{2}{5}$
ihålig cylinder	R	MR^2	1
solid cylinder	R	$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{1}{2}$
solid cylinder	$R/2$	$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{1}{2}$

Den som har högsta farten nere vinner

$$Mgh = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

$$I = c \cdot MR^2 \quad \omega = V_{CM} / R$$

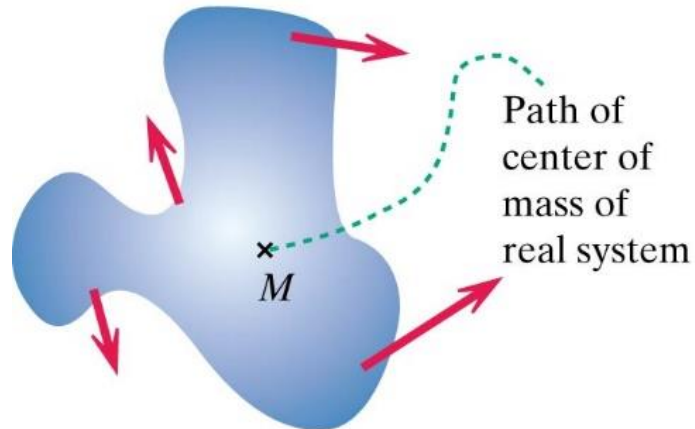
$$\Rightarrow Mgh = \frac{1}{2} c \cdot M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 (1 + c) \Rightarrow V_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}}$$



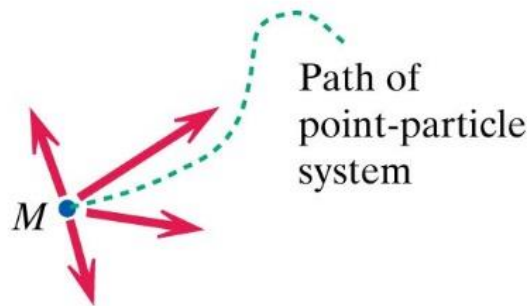
Strategin för att lösa komplicerade kroppars rörelse- och energiekvationer

Real system:

Forces act at different locations



Path of
center of
mass of
real system



Point-particle system:

All forces act at the same location

1) Masscentrum:

$$M \frac{d\bar{V}_{CM}}{dt} = \frac{d\bar{P}_{CM}}{dt} = \Sigma \bar{F}_{CM, Tot}$$

$$\Delta K_{CM} = \Delta\left(\frac{1}{2} M v_{CM}^2\right) = \int_i^f \Sigma \bar{F}_{CM, Tot} \cdot d\bar{r}_{CM}$$

2) Verkliga systemet:

$$\Delta E_{system} = W = \sum_i \int_i^f \bar{F}_{Yttre, i} \cdot d\bar{r}_i$$



Fjäder



1) Masscentrum: $M \frac{d\bar{V}_{CM}}{dt} = \frac{d\bar{P}_{CM}}{dt} = \Sigma \bar{F}_{CM, Tot}$

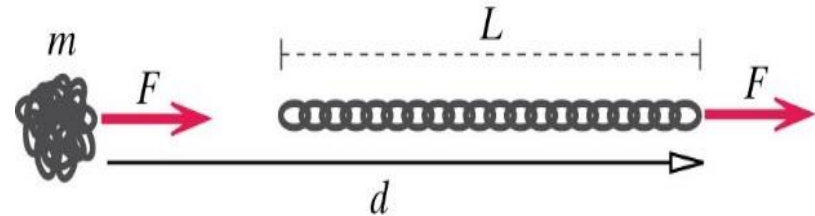
$$\Delta K_{CM} = \Delta\left(\frac{1}{2} M v_{CM}^2\right) = \int_i^f \Sigma \bar{F}_{CM, Tot} \cdot d\bar{r}_{CM} = 0$$

2) Verkliga systemet: $\Delta E_{system} = W = \sum_i \int_i^f \bar{F}_{Yttre, i} \cdot d\bar{r}_i$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k s^2 = F_v \Delta L + F_h \Delta L = 2F \Delta L$$



En kedja av metallänkar med en total massa $M = 7$ kg är lindad i en tät boll ligger på ett bord med låg friktion, se figuren. Du drar en länk vid ena änden av kedjan med en konstant kraft $F = 50$ N. Så småningom rätas kedjan ut till sin fulla längd $L = 2.6$ m, och du fortsätter dra kedjan tills du dragit den en total sträcka $d = 4.5$ m.

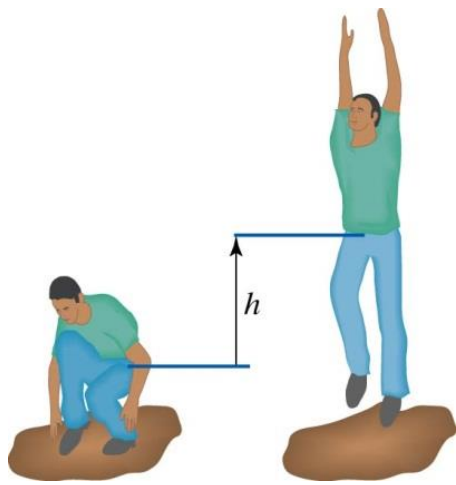


- Vad är kedjans hastighet i detta ögonblick?
- Vad är totala förändringen i kedjans energi?
- Under tiden du drar kedjan träffar metallänkarna varandra och kedjans temperatur ökar. Anta att processen är så snabb att det inte finns tillräcklig tid för en betydande överföring av energi från kedjan till bordet på grund av temperaturskillnaden, och ignorera den lilla mängd energi som utstrålas bort som ljud som produceras i kollisionerna. Beräkna ökningen i kedjans inre energi.

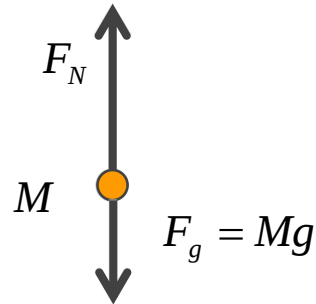
1) Masscentrum:
$$\Delta K_{CM} = \Delta\left(\frac{1}{2} M v_{CM}^2\right) = \int_i^f \Sigma \bar{F}_{CM, Tot} \cdot d\bar{r}_{CM}$$

2) Verkliga systemet:
$$\Delta E_{system} = W = \sum_i \int_i^f \bar{F}_{Yttre, i} \cdot d\bar{r}_i$$





1) Masscentrum



$$M \frac{d\bar{V}_{CM}}{dt} = \frac{d\bar{P}_{CM}}{dt} = \Sigma \bar{F}$$

$$\Sigma F = F_N - Mg$$

Kinetisk energi för masscentrum

$$\Delta K_{CM} = \Delta \left(\frac{1}{2} M v_{CM}^2 \right) = \int_i^f \Sigma \bar{F} \bullet d\bar{r}_{cm} \\ = \underline{\underline{(F_N - Mg)h}}$$

2) Verkliga systemet (hela människan)

- Kinetisk energi: masscentrum ΔK_{cm}
- Kinetisk energi: armar, ben, rotation ... ΔK_{andra}
- Termisk energi: kroppen blir varm $\Delta E_{termisk}$
- Kemisk energi: du blir hungrig ΔE_{kemisk}

$$\Delta E_{system} = W = \int_i^f \bar{F}_{yttre} \bullet d\bar{r} \quad \Rightarrow \quad \Delta K_{cm} + \Delta K_{andra} + \Delta E_{termisk} + \Delta E_{kemisk} = -Mgh$$

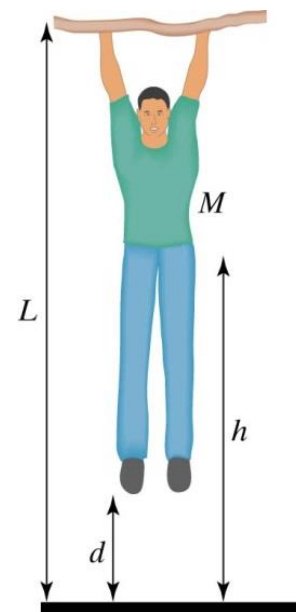
$$(F_N - Mg)h + \Delta K_{andra} + \Delta E_{termisk} + \Delta E_{kemisk} = -Mgh$$



$$\Delta K_{andra} + \Delta E_{termisk} + \Delta E_{kemisk} = -F_N h$$



Du hänger i en kvist som är på en höjd L över marken, ditt masscentrum är på en höjd h och fötterna en höjd d ovanför markytan, se bilden. Du släpper taget och faller till marken. Du absorberar stöten mot marken genom att böja knäna och hamnar tillfälligt i vila i en hopkrupen ställning med ditt masscentrum en höjd b ovanför marken. Din massa är M .



- Vad är din hastighet v i det ögonblick när dina fötter vidrör först marken?
- Vilken är den totala inre energiförändringen i din kropp (kemisk plus termisk) under händelsen?

Vad blir den totala inre energiförändringen om begynnelsestillståndet är a) fallet (du rör vid marken) och slutsituationen är densamma (du är i hopkrupen ställning)?

- Vilken är den approximativa medelkraften F från marken på dina fötter under den tid då knäna böjs?
- Hur mycket arbete utförs av denna kraft F ?

Hänger=roikut, kvist=oksa, marken=maa, släpper taget=päästät irti, faller=tiput, stöten=iskun, böja knäna=polvet taipuu, hamnar tillfälligt i vila=olet hetkellisesti levossa, hopkrupen ställning=kyykkyasennossa, ögonblick=sillä hetkellä, medelkraften=keskiarvoinen voima

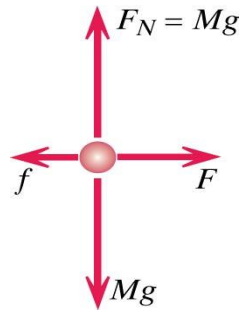
1) Masscentrum:
$$\Delta K_{CM} = \Delta\left(\frac{1}{2} M v_{CM}^2\right) = \int_i^f \Sigma \bar{F}_{CM, Tot} \cdot d\bar{r}_{CM}$$

2) Verkliga systemet:
$$\Delta E_{system} = W = \int_i^f \bar{F}_{yttre} \bullet d\bar{r}$$



Friktion Vi drar ett föremål med konstant fart längs en yta

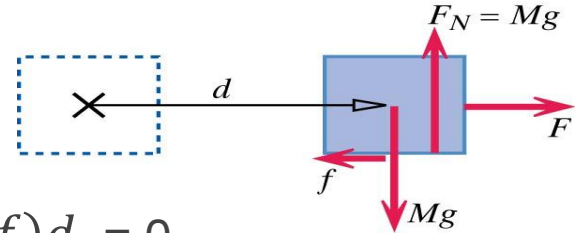
1) Masscentrum



$$\Delta K = (F - f)d = 0$$



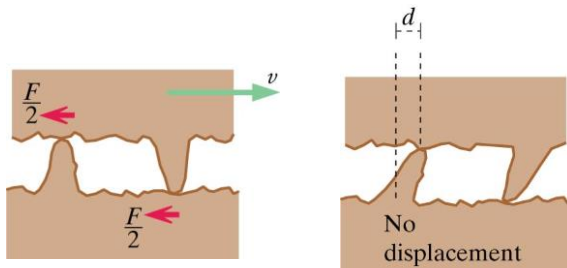
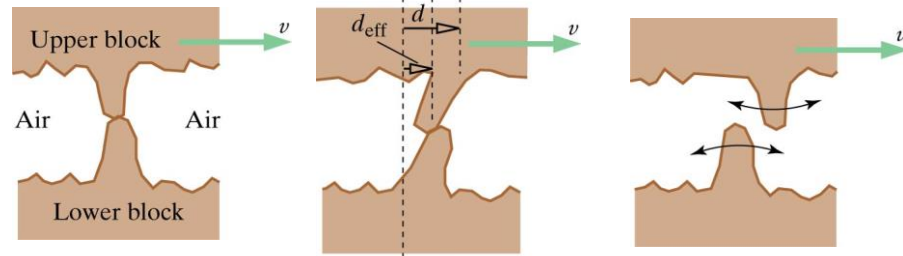
$$\underline{|f| = |F|}$$



2) Verkliga systemet: $\Delta K + \Delta E_{\text{värme}} = Fd + W_{\text{friktion}}$

$$\Rightarrow \Delta E_{\text{värme}} = Fd + W_{\text{friktion}}$$

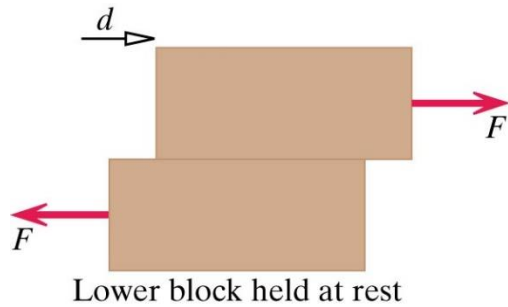
$$\Rightarrow \Delta E_{\text{värme}} = Fd + Fd_{\text{eff}}$$



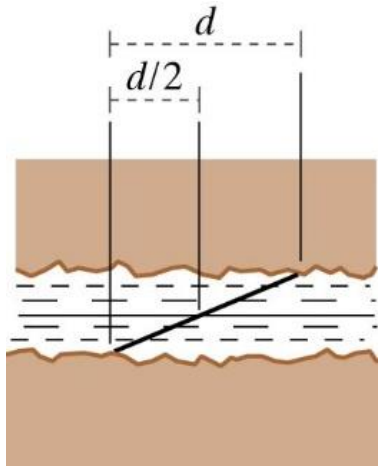
$$W_{\text{friktion}} = \left(-\frac{F}{2}\right)d + \left(-\frac{F}{2}\right)0 = -\frac{Fd}{2}$$



Modelloberoende exempel



$$\Delta E_{Inre,1} + \Delta E_{Inre,2} = Fd$$



Friktion med
smörjmedel



Lärandemål:

- Kunna analysera ett mångpartikelsystem: Kinetiska energin för masscentrum och den kinetiska energin relativt till masscentrum
- Kunna analysera ett mångpartikelsystem som en punktpartikel och ett utsträckt system och kombinera resultaten för att få information om systemets olika inre energier

