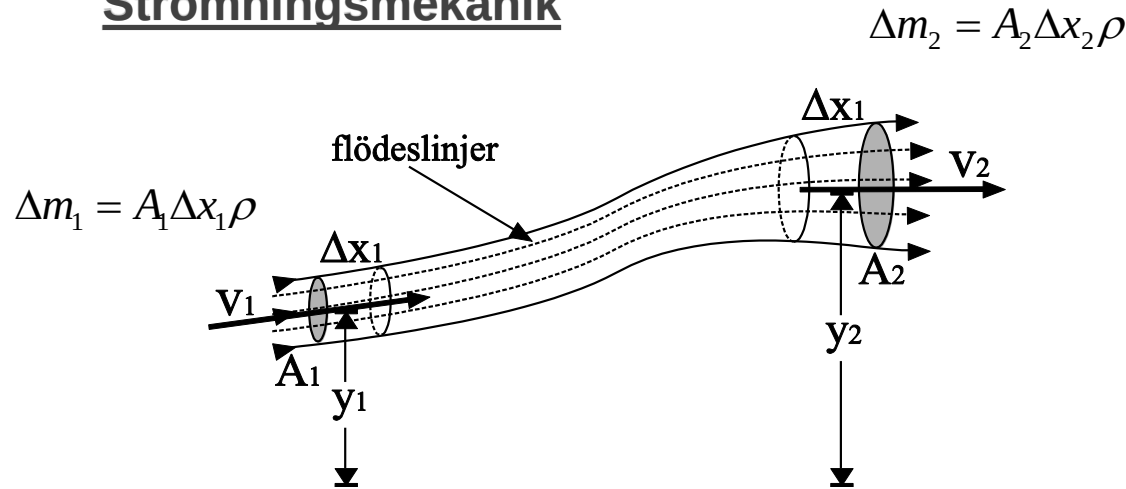




Strömningsmekanik



Vätska flödar till
höger i en tub

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = A_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta t} \rho = A_1 v_1 \rho$$

$$\frac{\Delta m_2}{\Delta t} = A_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta t} \rho = A_2 v_2 \rho$$

Den mängd vätska Δm per tidsenhet Δt som flödar genom area A_1 måste vara samma som flödar genom area A_2

➔
$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = A_1 v_1 \rho = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} = A_2 v_2 \rho$$

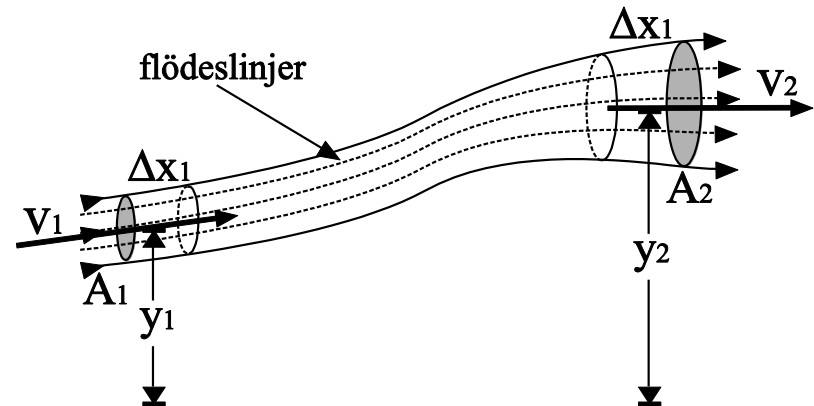
➔
$$\boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2}$$

Kontinuitetsekvationen,
gäller för okomprimerbara vätskor



Strömningsmekanik

Det mekaniska arbetet som görs för att 'trycka' en tub med volymen ΔV av vätska till höger under tiden Δt



$$\Delta W = P\Delta V = P_1 A_1 \Delta x_1 - P_2 A_2 \Delta x_2 = P_1 A_1 v_1 \Delta t - P_2 A_2 v_2 \Delta t$$

Detta arbete är det samma som summan av kinetiska och potentiella energin som Δm har fått

$$P_1 A_1 v_1 \Delta t - P_2 A_2 v_2 \Delta t = \left[\frac{1}{2} \Delta m v_2^2 + \Delta m g y_2 \right] - \left[\frac{1}{2} \Delta m v_1^2 + \Delta m g y_1 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 A_1 v_1 \Delta t}{\Delta m} - \frac{P_2 A_2 v_2 \Delta t}{\Delta m} = \left[\frac{1}{2} v_2^2 + g y_2 \right] - \left[\frac{1}{2} v_1^2 + g y_1 \right] \quad \begin{aligned} \Delta m_1 &= A_1 \Delta x_1 \rho = A_1 v_1 \Delta t \rho \\ \Delta m_2 &= A_2 \Delta x_2 \rho = A_2 v_2 \Delta t \rho \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{\rho} - \frac{P_2}{\rho} = \left[\frac{1}{2} v_2^2 + g y_2 \right] - \left[\frac{1}{2} v_1^2 + g y_1 \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + g \rho y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + g \rho y_2}$$

Bernoulli ekvationen



Exempel

En vätska står stilla, vad
ger Bernoulli ekvationen?

$$v_1 = v_2 = 0$$



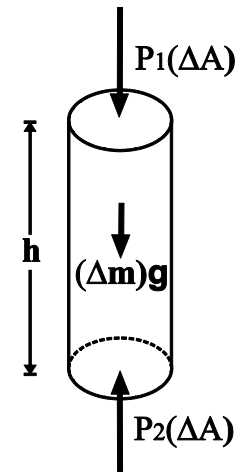
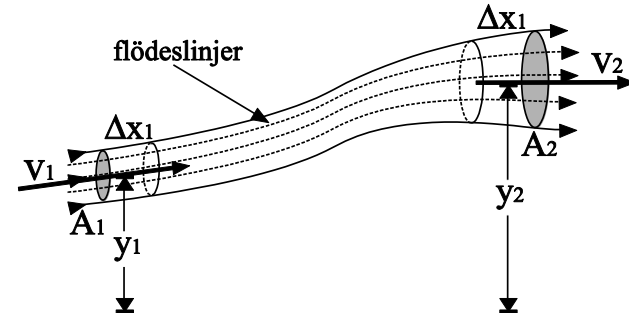
$$P_1 + g\rho y_1 = P_2 + g\rho y_2$$



$$P_1 = P_2 + g\rho(y_2 - y_1)$$

vilket också var resultatet tidigare,
trycket ökar proportionellt till 'djupet'

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + g\rho y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + g\rho y_2$$





Exempel

Anta att vi har vätska som rör sig horisontellt, vad ger Bernoulli ekvationen nu?

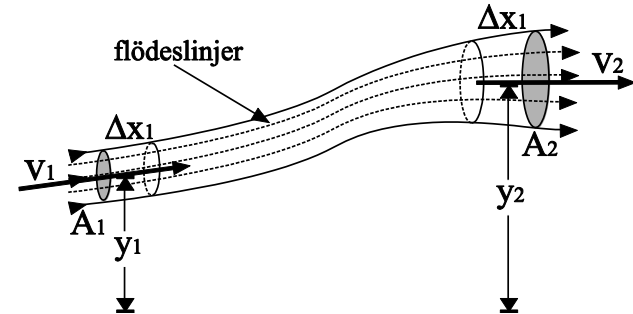
$$y_1 = y_2 = 0$$



$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

vilket säger att det område där hastigheten för vätskan är större, är trycket mindre

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + g \rho y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + g \rho y_2$$



Flygplans vinge

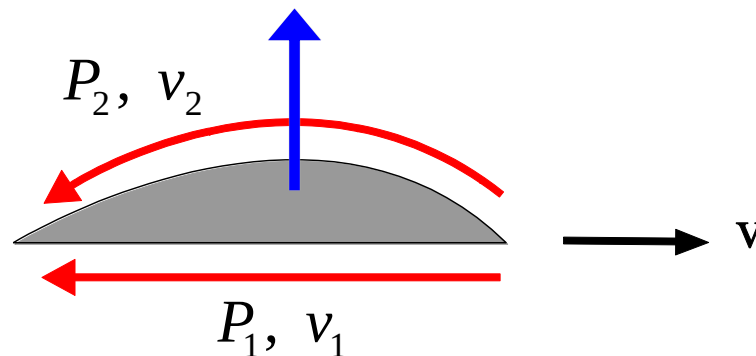
$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$$



$$P_2 < P_1$$

Lyftkraft: $F = A(P_1 - P_2)$

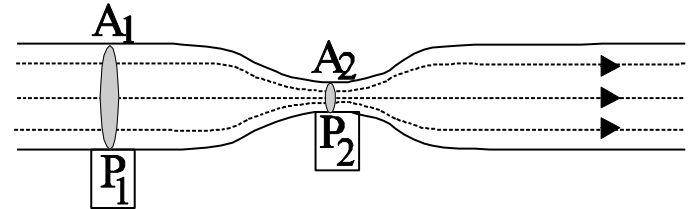
där A är
vingens
area





Exempel

För att mäta en vätskas hastighet i ett rör (area A_1), har man gjort en anordning så att röret är smalare (area A_2) vid ett ställe. Trycket mäts både vid den breda (P_1) och vid den smalare (P_2) delen av röret. Härled ett uttryck för vätskans hastighet i den bredare delen av röret som en funktion av areorna och trycken.



Materiens bevarande ger: $A_1 v_1 = A_2 v_2$ $y_1 = y_2$

Bernoulli: $P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + g \rho y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + g \rho y_2$ $\Rightarrow$ $P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2} \rho [v_1^2 - v_2^2] = P_2 - P_1$ $\left(v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} \right)$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} \rho \left[v_1^2 - v_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] = P_2 - P_1$

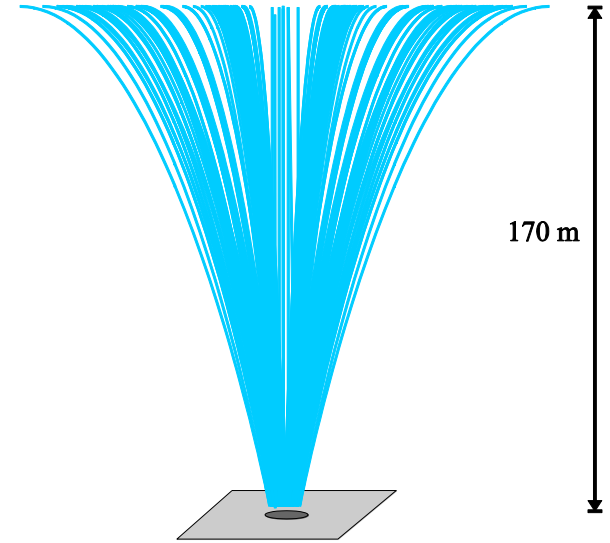
$\Rightarrow$ $v_1^2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] = \frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}$ $\Rightarrow$ $v_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left[\left(A_1 / A_2 \right)^2 - 1 \right]}}$



http://www.fountainhillsguide.com/attrac_fountain.html

Världens högsta fontän skjuter vatten till höjden 170 m, med vattenmängden 26000 liter/min.

Vad är vattnets hastighet vid foten och vid höjden 150 m? Vad är vattenkolumnens diameter vid foten och vid 150 m? Luftmotståndet tas inte i beaktande.



$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} \approx \underline{\underline{58 \text{ m/s}}}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg \cdot 150 \text{ m} + \frac{1}{2}mv_{150}^2 \rightarrow v_{150} = \sqrt{v_0^2 - 2g \cdot 150 \text{ m}} \approx \underline{\underline{20.6 \text{ m/s}}}$$

Area vid foten: $26 \text{ m}^3 / \text{minut} \rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{26 \text{ m}^3}{60 \text{ s}}$

$$\Delta V = \Delta y A_0 = v_0 \Delta t A_0 \rightarrow A_0 = \frac{\Delta V}{v_0 \Delta t} = \frac{26 \text{ m}^3}{58 \text{ m/s } 60 \text{ s}} \approx 7.5 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \rightarrow \text{Diameter} \sim \underline{\underline{10 \text{ cm}}}$$

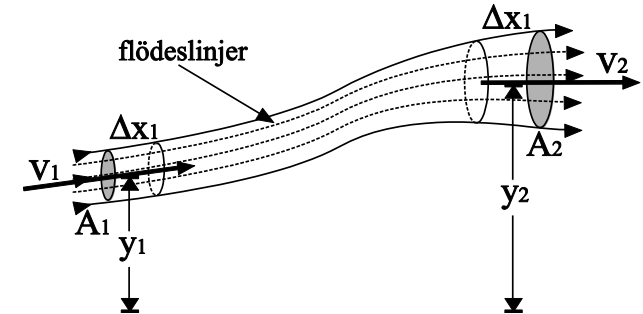
Area vid 150 m: $A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow A_{150} = \frac{v_0}{v_{150}} A_2 \rightarrow \text{Diameter} \sim \underline{\underline{16 \text{ cm}}}$



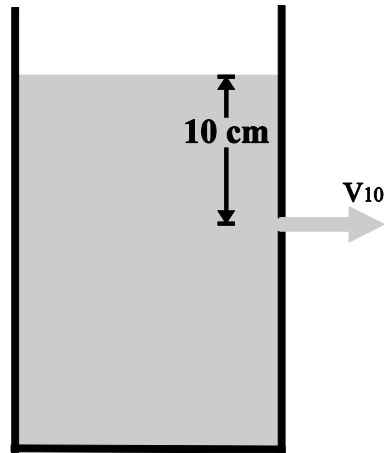
Exempel

Betrakta bilden av en vattenbehållare med ett hål 10 cm under vattenytan. Med vilken begynnelsehastighet sprutar vattnet ut från hålet?

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + g \rho y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + g \rho y_2$$



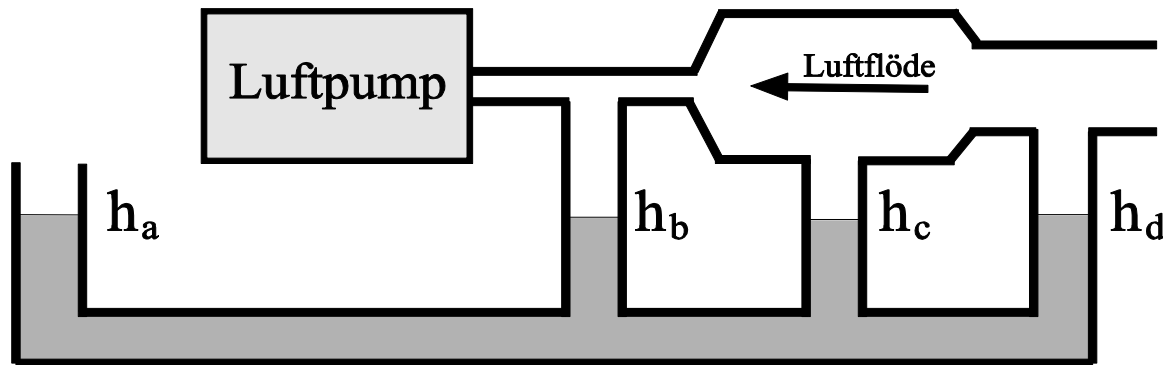
Betrakta en vattenbehållare med ett hål 10 cm under vattenytan.



$$P_{y_{\text{tan}}} + \frac{1}{2} \rho v_{y_{\text{tan}}}^2 + g \rho y_{y_{\text{tan}}} = P_{10} + \frac{1}{2} \rho v_{10}^2 + g \rho y_{10}$$

$$1 \text{ atm} + \frac{1}{2} \rho (0)^2 + g \rho (0) = 1 \text{ atm} + \frac{1}{2} \rho v_{10}^2 + g \rho (-0.1 \text{ m})$$

$$\Rightarrow v_{10} = \sqrt{2 g \text{ m/s}^2 \cdot 0.1 \text{ m}} \approx \underline{\underline{1.4 \text{ m/s}}}$$



Bestäm pelarnas höjdordning

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + g \rho y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + g \rho y_2$$

- A) $h_b < h_d < h_c < h_a$
- B) $h_a = h_b > h_c > h_d$
- C) $h_a = h_b = h_c = h_d$
- D) $h_b > h_d > h_c > h_a$
- E) $h_d > h_b > h_a > h_c$

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$\text{D) } h_b > h_d > h_c > h_a$$