

S1. Gaser och maskiner

Inte till tenten

Lärandemål:

- Kunna använda gasens mikroskopiska egenskaper för att beräkna flödet av en gas genom ett hål
- Kunna bestämma förändringar i gasens temperatur och tryck då gasen komprimeras eller förtunnas
- Kunna bestämma effektiviteten för en värmemaskin



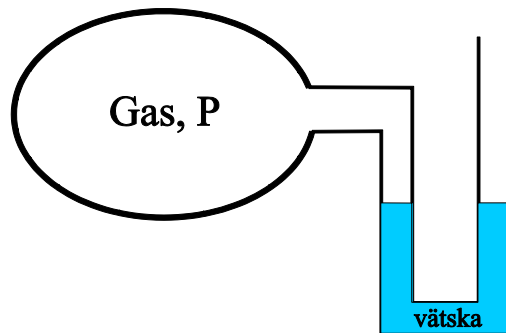
S1. Gaser och maskiner

Krafterna mellan gasatomer eller molekyler är så liten att gasen måste omges av väggar för att gasen inte skall försvinna

Gasernas tryck varierar mycket långsamt med höjden

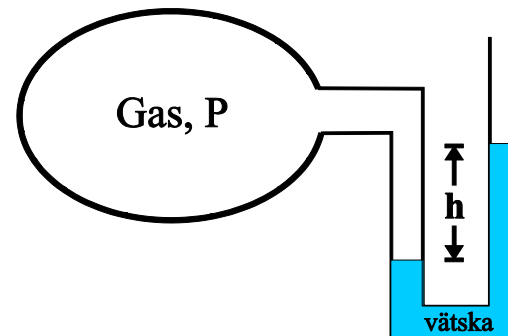
Lyftkraften p.g.a. gaserna är mycket liten

Hur mäta gasens tryck?



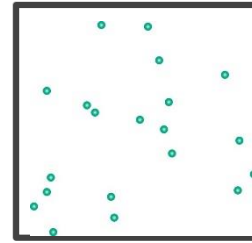
Övertryck

$$P = 1 \text{ atm.} + \rho gh$$

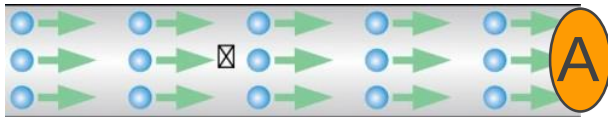


Densitet av molekyler

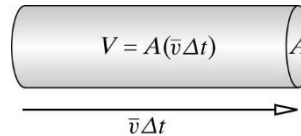
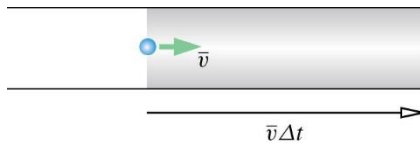
$$n = \frac{N}{V}$$



1D flödes hastighet



1D flödes hastighet
(molekyler/s) $nA\langle v \rangle$



$$N = nV = n(Av\Delta t)$$

Antal molekyler som korsar
en area A per sekund:

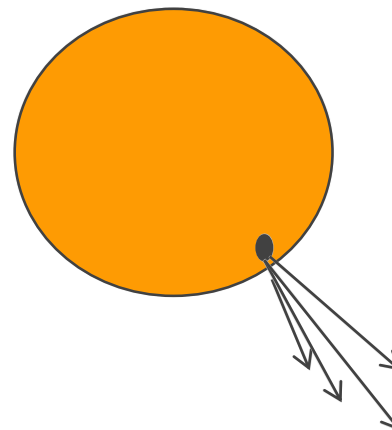
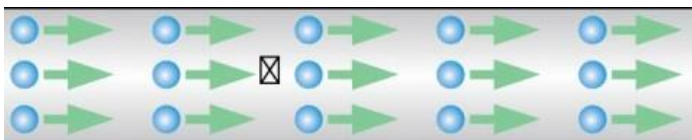
$$n_1 A v_1 + n_2 A v_2 + n_3 A v_3 + \dots$$

Medelhastighet

$$\langle v \rangle = \frac{n_1 v_1 + n_2 v_2 + \dots}{n}$$



Gasen läcker ut genom ett hål



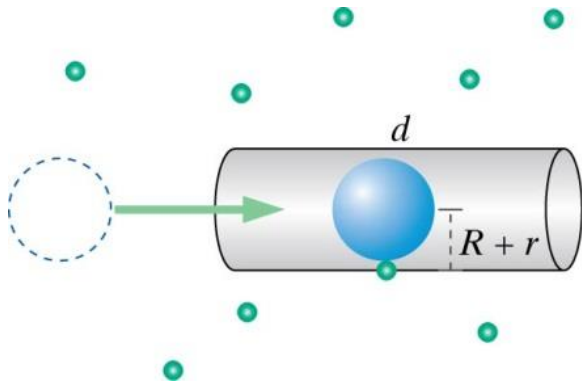
$$\text{3D flödes hastighet} = \frac{1}{4} n A \bar{v}$$

(molykyler/s)

Vad händer med temperaturen inne i ballongen under tiden då gas sipprar ut från hålet?



Fria medelväglängden (mean free path)



d är medelväglängden mellan kollisioner för den blåa atomen

$$d \approx \frac{1}{nA} = \frac{1}{n[\pi(R+r)^2]}$$

Hur lång sträcka är det i medeltal mellan krockar för en kvävemolekyl?

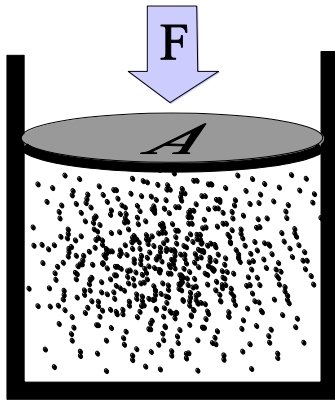
$$d \approx \frac{1}{2.68 \times 10^{25} \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} \pi (2 \times 2 \times 10^{-10} \text{ m})^2} \approx \underline{\underline{7 \times 10^{-8} \text{ m}}}$$



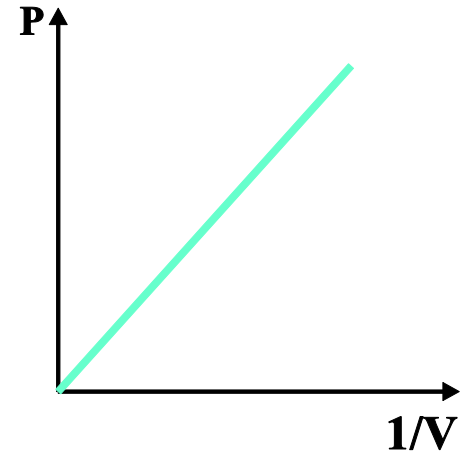
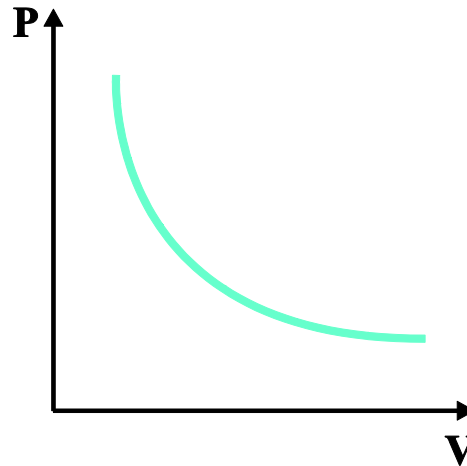
Idealgaslagen

Gasens volym kan också lätt ändras genom att trycka ihop den

Om gasen trycks ihop ökar dess tryck



Tryck: $P = \frac{F}{A}$



Idealgaslagen:

$$PV = C$$



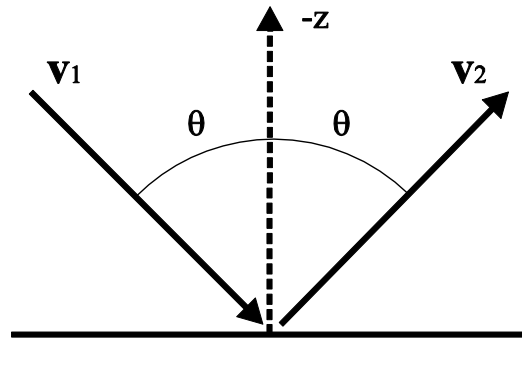
Mikroskopiska teorin för gasers tryck

Man kan hypotetiskt definiera en idealgas följande:

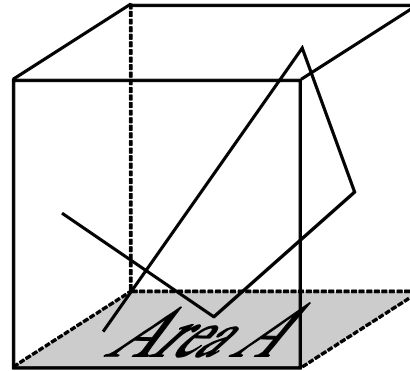
- ★ Gasen består av ett väldigt stort antal atomer eller molekyler som kan antas vara hårda 'bollar' med samma massa
- ★ Molekylernas storlek är mycket mindre än medelavståndet mellan molekylerna
- ★ Molekylernas kollisioner med varandra och behållarens väggar är helt elastiska (ingen kinetisk energiförlust)
- ★ Kraften mellan molekylerna har mycket kort räckvidd, vilket leder till att de rör sig linjärt mellan kollisionerna



Vi betraktar en kollision mellan molekylen och väggen



h



Tiden mellan
2 kollisioner?

$$T = \frac{2h}{v_z}$$

Elastisk kollision: $|v_1| = |v_2|$

Rörelsemängdens z-komponent

Före: $p_z = p \cos(\theta)$

Efter: $p_z = -p \cos(\theta)$



En molekyl kolliderar $\frac{v_z}{2h}$
gångar med väggen/s

Kraften på väggen från en molekyl



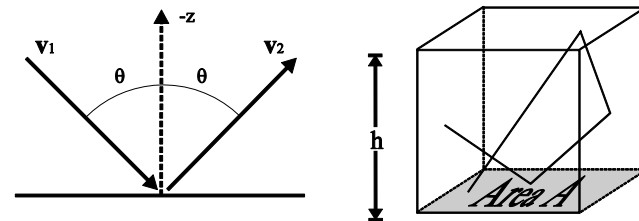
Rörelsemängden
väggen får vid en
kollision: $p_{z, \text{väggen}} = 2p_z$

$$F_{\text{vägg}} = \frac{\Delta p_z}{\Delta t} = \frac{2p_z v_z}{2h} = \frac{p_z v_z}{h}$$



Kraften på väggen
från en molekyl

$$F_{z,\text{vägg}} = \frac{p_z v_z}{h}$$



Summakraften på väggen från alla **N** stycken molekyler är

$$\Rightarrow F = \frac{p_{z,1} v_{z,1}}{h} + \frac{p_{z,2} v_{z,2}}{h} + \dots + \frac{p_{z,N} v_{z,N}}{h} = \frac{N}{h} \left[\frac{p_{z,1} v_{z,1} + \dots + p_{z,N} v_{z,N}}{N} \right] = \frac{N}{h} \langle p_z v_z \rangle$$

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k} \\ \bar{v} &= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \end{aligned} \Rightarrow \bar{p} \bullet \bar{v} = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z \Rightarrow \langle p_x v_x \rangle = \langle p_y v_y \rangle = \langle p_z v_z \rangle = \frac{1}{3} \langle \bar{p} \bullet \bar{v} \rangle$$

$$\Rightarrow P = \frac{F}{A} = \frac{N}{hA} \frac{1}{3} \langle \bar{p} \bullet \bar{v} \rangle \quad \boxed{\bar{p} \bullet \bar{v} = m \bar{v} \bullet \bar{v} = m v^2} \Rightarrow P = \frac{N}{V} \frac{1}{3} m v^2$$

$$\Rightarrow P = \frac{N}{V} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{V} \frac{2}{3} \left(N \frac{1}{2} m v^2 \right) \Rightarrow \boxed{PV = \frac{2}{3} U = C}$$



$$\Rightarrow P = \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{2}{3} n \left(\frac{3}{2} k_B T \right) = n k_B T$$

$$P = n \cdot k_B T$$

$$PV = N \cdot k_B T$$

Antalet atomer eller molekyler **N** vanligen enormt stor

Vi definierar en storhet för stora mängder atomer, molekyler, elektroner mm. (storleksordning $\sim 10^{23}$)

En atoms vikt är ca. $A m_N$, A är massnumret = antalet neutroner + protoner

$$\Rightarrow \text{Antal atomer i } 1 \text{ g } {}^1\text{H} = \text{antal atomer i } 4 \text{ g } {}^4\text{He} = \text{antal atomer i } 12 \text{ g } {}^{12}\text{C}$$

Definitionen **1 mol är antalet enheter (atomer, molekyler ..) som är lika många till antalet som det finns atomer i 12 g ${}^{12}\text{C}$**

Antalet partiklar i 1 mol kallas för **Avogadros tal**

$$N_A \approx 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$



$$PV = \frac{2}{3}U = C$$

$$U = \left(N \frac{1}{2} mv^2 \right)$$

Gasens "inre" energi

Antalet partiklar i 1 mol
(**Avogadros tal**)

$$N_A \approx 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$



Antal mol i systemet:

$$n = \frac{N}{N_A}$$

Molär volym: $v_m = \frac{V}{n}$

Molär intern
energi:

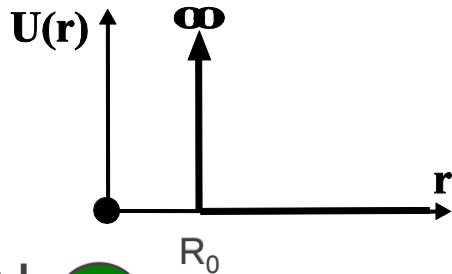
$$u_m = \frac{U}{n}$$

$$PV = \frac{2}{3}U \iff Pv_m = \frac{2}{3}u_m$$



Idealgas
(hårda bollar): $Pv_m = \frac{2}{3} u_m$

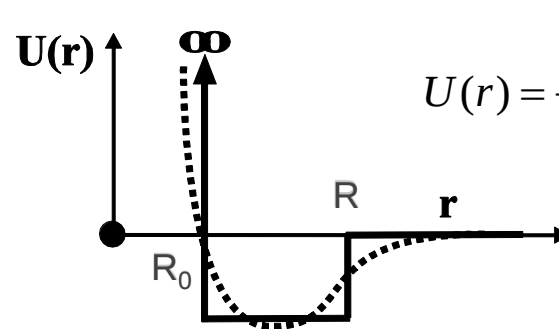
En mera realistisk växelverkan mellan
molekylerna med en ändlig storlek



R_0 2*radien
för atomen

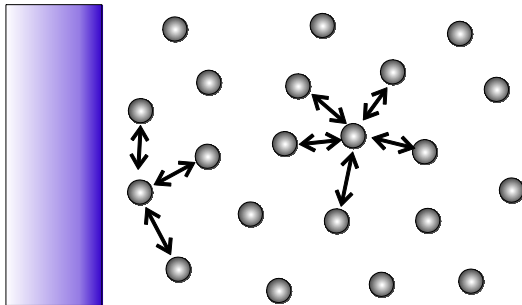


Ändlig storlek



$$U(r) = \begin{cases} \infty & \text{för } r \leq R_0 \\ -E & \text{för } R_0 < r \leq R \\ 0 & \text{för } r > R \end{cases}$$

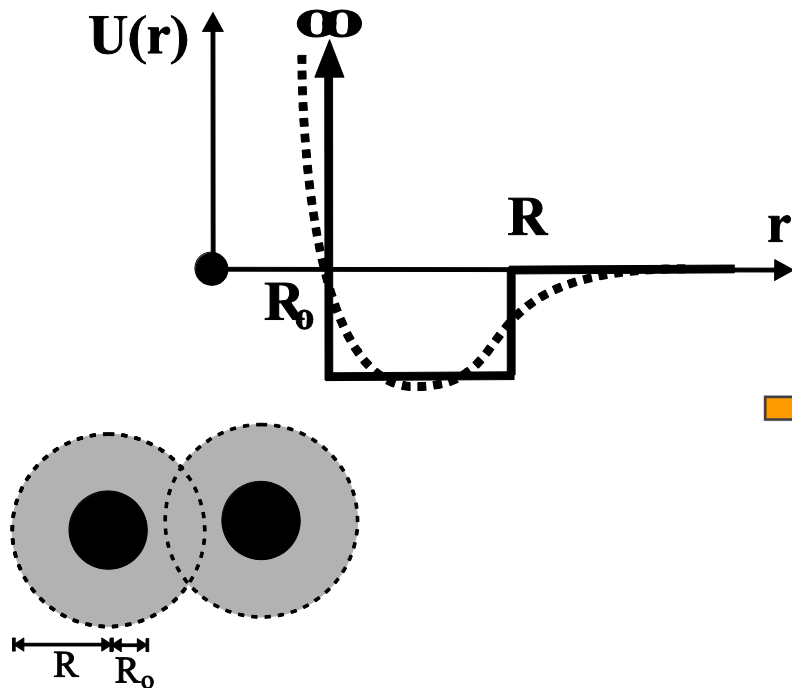
Approximativ
"brunnpotential"
för att beskriva
växelverkan



$$P = \frac{2}{3} \frac{u_m}{v_m} - P_i$$

P_i Inre tryck





Sannolikheten för
växelverkan mellan
vilket atompar som helst
(N atomer)

$$\frac{NV_1}{V}$$

Sannolikheten för att en
atom som är nära väggen
påverkas av någon av de
resterande (N-1) atomer är

Verkningsvolymen för en atom,
innanför vilken en annan atom
känner en kraft:

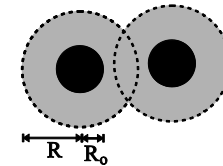
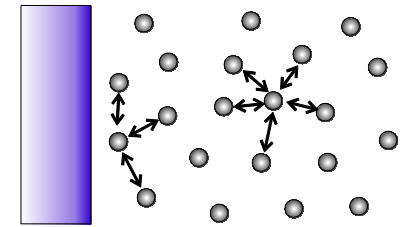
$$V_1 = \frac{4}{3}\pi(R^3 - R_0^3)$$

$$\propto (N-1) \frac{NV_1}{V} \propto \frac{N^2}{V}$$



Sannolikheten för att en atom som är nära väggen, känner en kraft av någon av de resterande (N-1) atomerna

$$\propto \frac{N^2}{V}$$



$\alpha_1 \rightarrow 0$, då $R \rightarrow R_0$

Kraften på väggen (idealgas)

$$F = \frac{N}{h} \frac{1}{3} \langle \bar{p} \cdot \bar{v} \rangle \quad \Rightarrow \quad F = \frac{N}{h} \frac{1}{3} \langle \bar{p} \cdot \bar{v} \rangle - \alpha_1 \frac{N^2}{V}$$

$$P = \frac{F}{A} = \frac{N}{Ah} \frac{1}{3} \langle \bar{p} \cdot \bar{v} \rangle - \alpha_1 \frac{N^2}{VA} = \frac{N}{Ah} \frac{1}{3} (mv^2) - \alpha_1 h \frac{N^2}{VAh} = \frac{N}{V} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) - \alpha \frac{N^2}{V^2}$$

$$P = \frac{1}{V} \frac{2}{3} U - \alpha \frac{N^2}{V^2}$$

$$P + \alpha \frac{(nN_A)^2}{V^2} = \frac{1}{V} \frac{2}{3} (n \cdot u_m) = \frac{1}{v_m} \frac{2}{3} u_m$$

$$\Rightarrow \left(P + \frac{\alpha N_A^2}{v_m^2} \right) v_m = \frac{2}{3} u_m \quad \Rightarrow \quad \left(P + \frac{a}{v_m^2} \right) v_m = \frac{2}{3} u_m$$

Antal mol i systemet: $n = \frac{N}{N_A}$

Molär intern energi: $u_m = \frac{U}{n}$

Molär volym: $v_m = \frac{V}{n}$



$$\left(P + \frac{a}{v_m^2}\right)v_m = \frac{2}{3}u_m \quad V_1 = \frac{4}{3}\pi(R^3 - R_0^3)$$

Vid stora tryck är inte effektiva volymen för gastanken mera V , utan: $V \rightarrow V - NV_1$

Molär volym: $v_m = \frac{V}{n} \rightarrow \frac{V}{n} - \frac{NV_1}{n} = \frac{V}{n} - N_A V_1 = v_m - b$

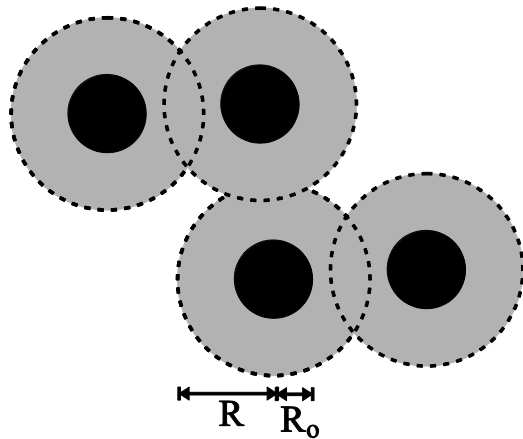
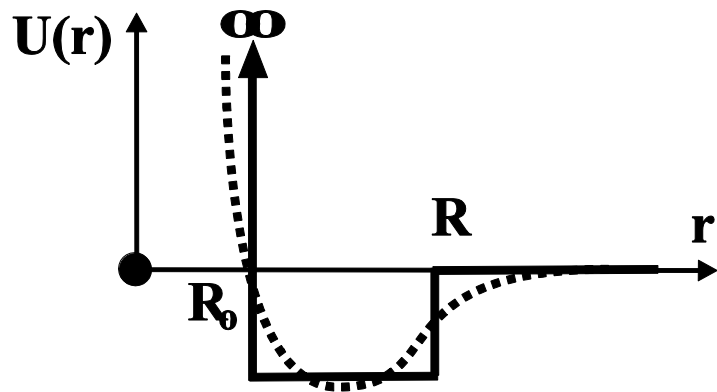


van der Walls ekvationen:

$$\left(P + \frac{a}{v_m^2}\right)(v_m - b) = \frac{2}{3}u_m$$

a, b experimentella konstanter





$$V_1 = \frac{4}{3} \pi (R^3 - R_0^3)$$

När gasen tryck ökar, ökar
mängden atomer per volymenhet

Då totala verkningsvolymen
närmar sig systemets volym

$$NV_1 \rightarrow V$$

börjar de enskilda molekylerna
eller atomerna att klumpa ihop
sig till aggregat.

När sedan densiteten ytterligare
ökar, formar aggregaten
kondenserad material, amorft
eller kristallint

Amorfa materialet är
mycket svåra att beskriva



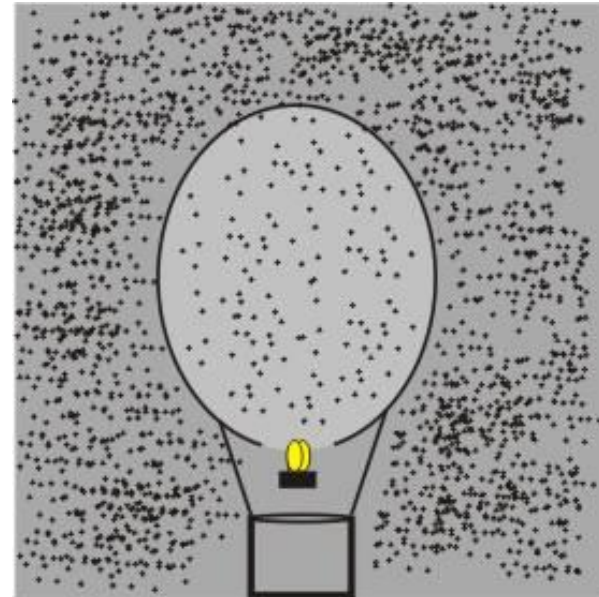
Termisk expansion

Gaser **expanderar** mycket kraftigt då temperaturen höjs och trycket hålls konstant,

där proportionalitetskoefficienten kallas för den kubiska expansionskoefficienten

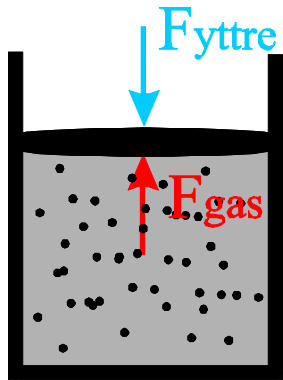
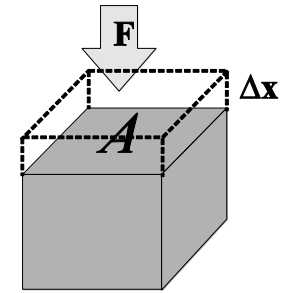
$$\Delta V \propto V \cdot T$$

$$\alpha_V = \frac{1}{V} \left(\frac{\delta V}{\delta T} \right)_{P=\text{konstant}}$$

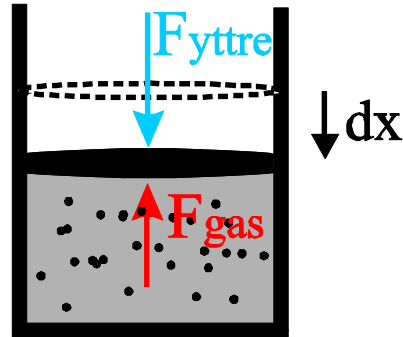


Arbetet för att trycka ihop en gas

$$F\Delta x = F \frac{\Delta V}{A} = P\Delta V$$

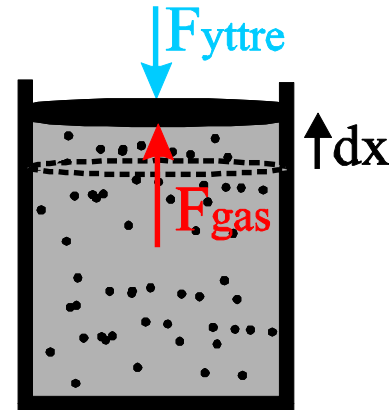


Inget
arbete görs



Positivt arbete
görs på gasen

$$\Delta W = F\Delta x > 0$$



Negativt arbete
görs på gasen

$$\Delta W = F\Delta x < 0$$

$$F_{gas} = -F_{yttre}$$



$$W_{gas} = -W_{yttre}$$

Yttre arbetet
på gasen:

$$F_{yttre} \parallel dx \Rightarrow dV < 0 \Rightarrow$$

$$W = \int_A^B F dx = - \int_{V_1}^{V_2} P dV$$



Mekaniska energin för systemet: $E = K + U$ K Kinetisk, U Potentiell

W_{kons} Konservativa krafter ändrar potentiella energin: $W_{kons} = -\Delta U$

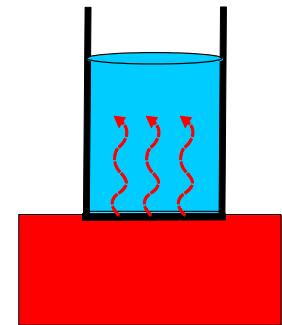
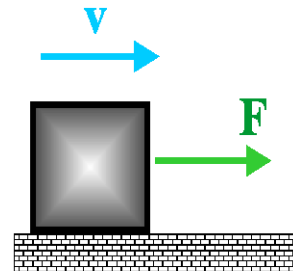
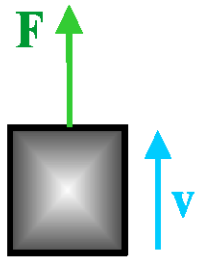
W_{frik} Icke-konservativa krafter ökar termiska energin: $W_{frik} = -\Delta E_{term}$

W_{yttre} Yttre arbete från omgivningen

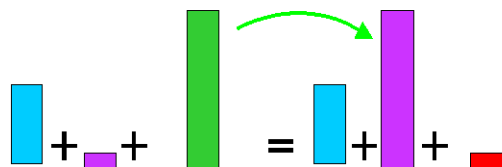
Q_{yttre} Yttre värmeenergi från omgivningen

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{term} = W_{yttre}$$

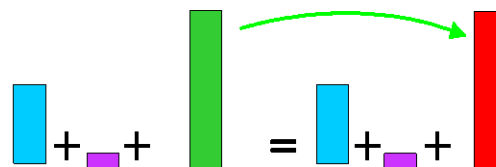
→ $\Delta K + \Delta U + \Delta E_{term} = W_{yttre} + Q_{yttre}$



$$K + U + W_{yttre} = K + U + E_{term}$$



$$K + U + W_{yttre} = K + U + E_{term}$$



$$K + U + W_{yttre} \neq K + U + E_{term}$$



Termodynamikens första lag

För fasta kroppar går nästan all värme som ges materialet till atomernas rörelse eller inre energi

värmekapacitet

$$C = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta U}{\Delta T} \right)$$

För gaser är situationen mera komplicerad!

Ifall gasens volym ändras, görs arbete: $\Delta W = P\Delta V$

➔ Energiekvationen för en gas, kallad **termodynamikens första lag**

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W = \Delta U + P\Delta V$$

ΔQ : Energin man ger eller tar från systemet

ΔU : Förändringen av gasens inre energi

$\Delta W = P\Delta V$: Arbetet som görs för att ändra volymen

➔ Värmekapacitet för gaser:

$$C_V = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_{V=\text{Konstant}} = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T} \right)_{V=\text{Konstant}}$$
$$C_P = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_{P=\text{Konstant}}$$



$$Q = nC_V\Delta T \quad \text{Vid konstant volym}$$

$$Q = nC_P\Delta T \quad \text{Vid konstant tryck}$$

Molära värmekapaciteter för gaser (J/molK)

Gas	C_P	C_V	$C_P - C_V$
He	20.8	12.5	8.3
Ne	20.8	12.5	8.3
Ar	20.8	12.5	8.3
H ₂	28.7	20.4	8.3
N ₂	29.1	20.8	8.3
O ₂	29.2	20.9	8.3

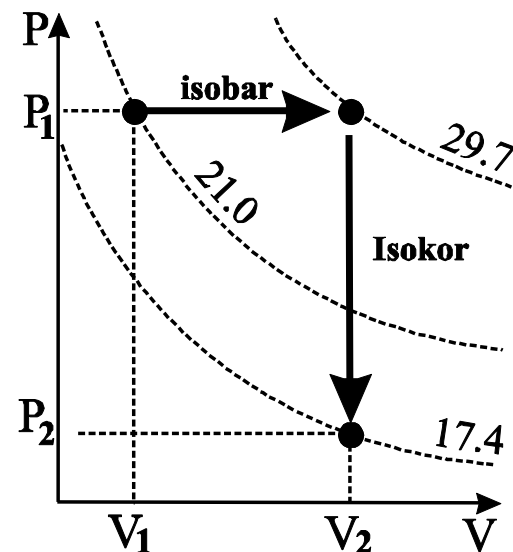
Till två mol av H₂ gas vid 21.0°C tillförs 500 J värmeenergi vid konstant tryck. Sedan tas samma mängd värmeenergi från gasen vid konstant volym. Vad blir gasens sluttemperatur? Illustrera processen i en PV diagram.

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{Q}{nC_P} = \frac{500 \text{ J}}{2 \text{ mol } 28.7 \text{ J/molK}} \approx 8.7 \text{ K}$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 + 8.7^\circ \text{C} = 29.7^\circ \text{C}$$

$$\Delta T = T_3 - T_2 = \frac{Q}{nC_V} = \frac{-500 \text{ J}}{2 \text{ mol } 20.4 \text{ J/molK}} \approx -12.3 \text{ K}$$

$$\Rightarrow T_3 = T_2 - 12.3^\circ \text{C} = \underline{\underline{17.4^\circ \text{C}}}$$



Termodynamikens första lag $\Delta Q = \Delta U + \Delta W = \Delta U + P\Delta V$

$$C_V = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T} \right)_{V=\text{Konstant}}$$

ΔQ : Energin man ger eller tar från systemet

$$C_P = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_{P=\text{Konstant}}$$

ΔU : Förändringen av gasens inre energi

$\Delta W = P\Delta V$: Arbetet som görs för att ändra volymen

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_{P=\text{Konstant}} = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T} \right)_{P=\text{Konstant}} + P \left(\frac{\Delta V}{\Delta T} \right)_{P=\text{Konstant}}$$

interna energin
beror bara av
temperaturen

$$\Rightarrow C_P = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T} \right)_{P=\text{Konstant}} + P \left(\frac{\Delta V}{\Delta T} \right)_{P=\text{Konstant}}$$

$$\Rightarrow C_P = C_V + P \left(\frac{\Delta V}{\Delta T} \right)_{P=\text{Konstant}}$$

kubiska
expansionskoefficienten

$$\alpha_V = \frac{1}{V} \left(\frac{\delta V}{\delta T} \right)_{P=\text{konstant}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_P = C_V + \alpha_V PV}$$



Idealgaslagen gav: $PV = \frac{2}{3}U = KT \quad \Rightarrow \quad V = \frac{KT}{P}$

kubiska expansionskoefficienten

$$\alpha_V = \frac{1}{V} \left(\frac{\delta V}{\delta T} \right)_{P=\text{konstant}} = \frac{1}{V} \left(\frac{\delta \left(\frac{KT}{P} \right)}{\delta T} \right)_{P=\text{konstant}} = \frac{1}{V} \frac{K}{P} = \frac{1}{T}$$

Exempelvis vid 0°C är den kubiska expansionskoefficienten för en idealgas $1/273 \sim 0.0037 \text{ K}^{-1}$

$$C_P = C_V + \alpha_V PV$$

$$\Rightarrow C_P = C_V + \frac{1}{T} PV$$

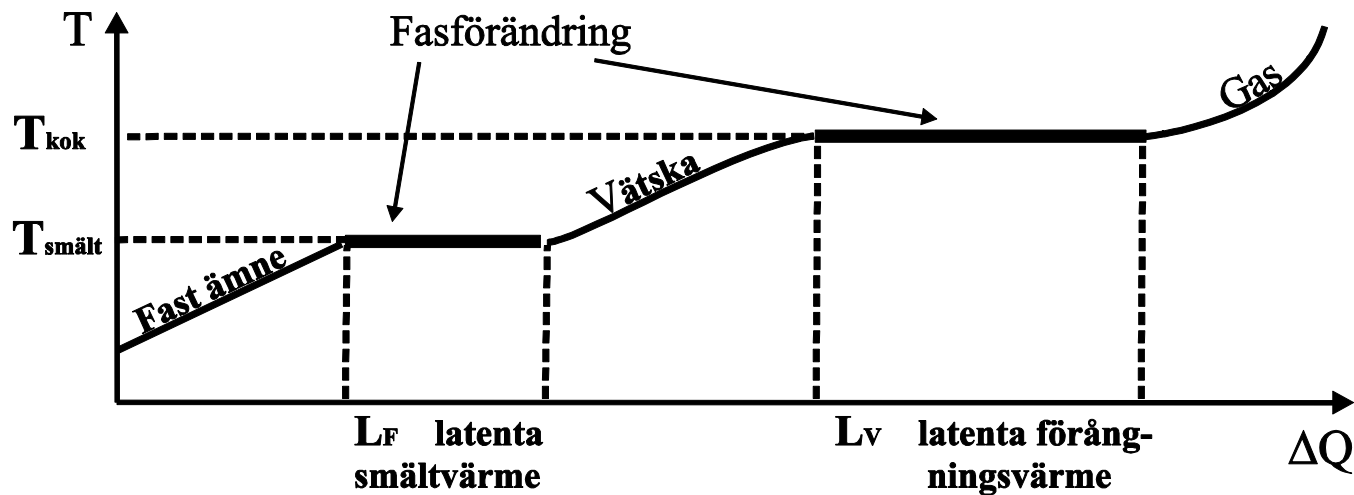


$$PV = (C_P - C_V)T$$



$$C_P - C_V = K$$





1) Fast ämne, massan m , vars temperatur stiger då vi ger det energi

$$\Delta U = c \cdot m \cdot \Delta T$$

c specifika värmekapaciteten

2) Fasförändring från **fast** ämne till **vätska**

$$U = l_F m$$

l_F latent smältvärme
eller smältentalpitet

3) Vätskans temperatur stiger då energi tillförs

$$\Delta U = c_v \cdot m \cdot \Delta T$$

4) Fasförändring från vätska till gas

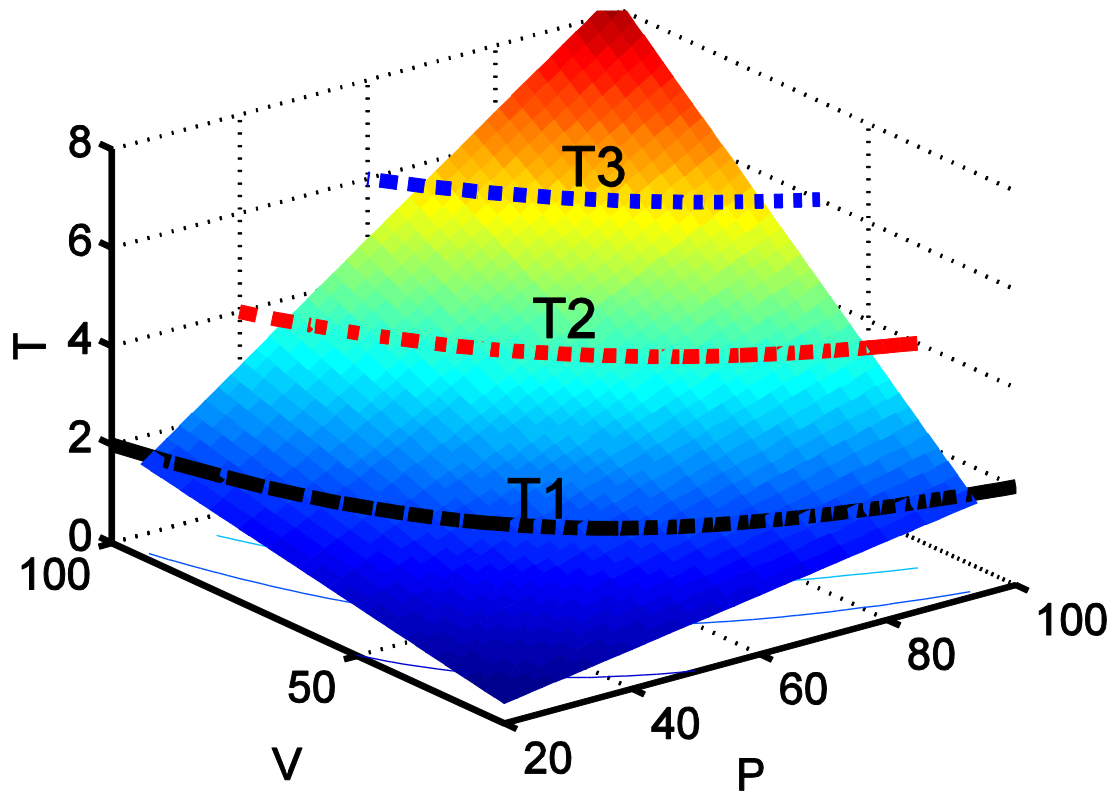
$$U = l_v m$$

l_v latent förångningsvärme
eller ångbildningsentalpitet



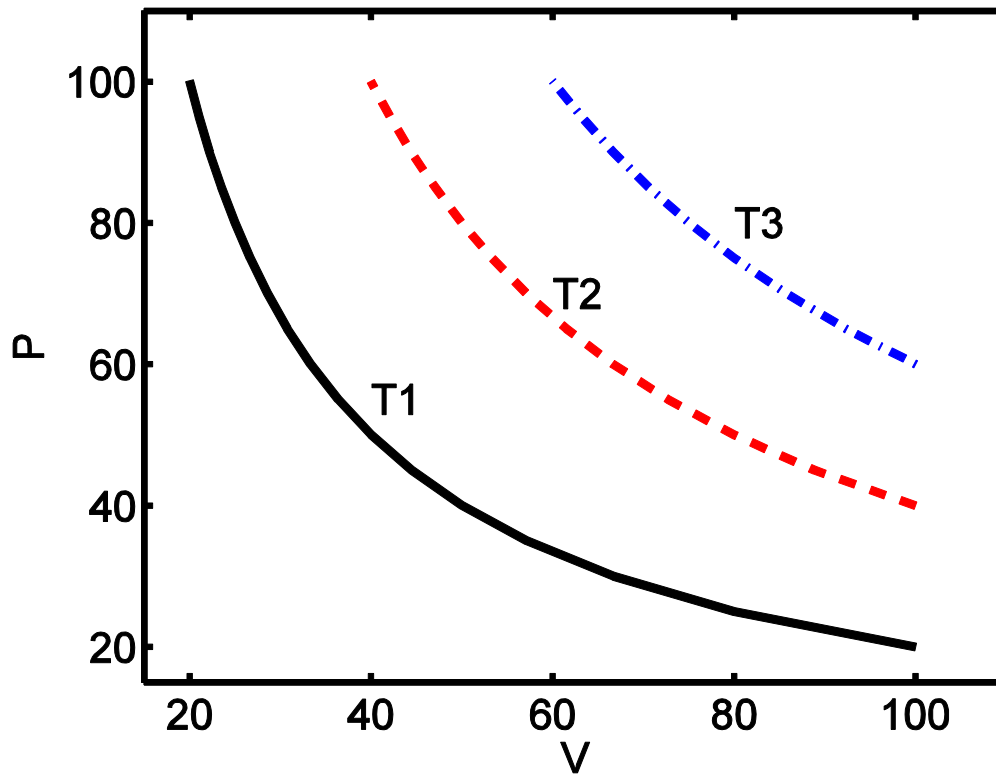
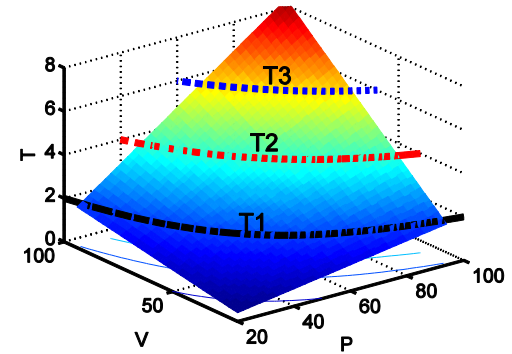
Tillståndsekvation

Gasens tillstånd vid ett ögonblick ges av dess **tryck**, **volym** och **temperatur** och kallas för gasens **tillståndsekvation**: $F(P, V, T)$



Tillståndsekvation

Vanligen ritar man dock P-V-diagram som består av ökande temperaturlinjer (**isotermer**)



$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V$$

Viktiga termer

Namn för processen	Gränsvärde där processen sker
isotermisk	Vid konstant temperatur
isobarisk	Vid konstant tryck
isokorisk	Vid konstant volym
adiabatisk	Inget energiutbyte ($\Delta Q = 0$) med omgivningen eller så snabb process att hinner inte utbyta energi med omgivningen



Exempel (isotermisk och isobarisk process)

$$PV = KT$$

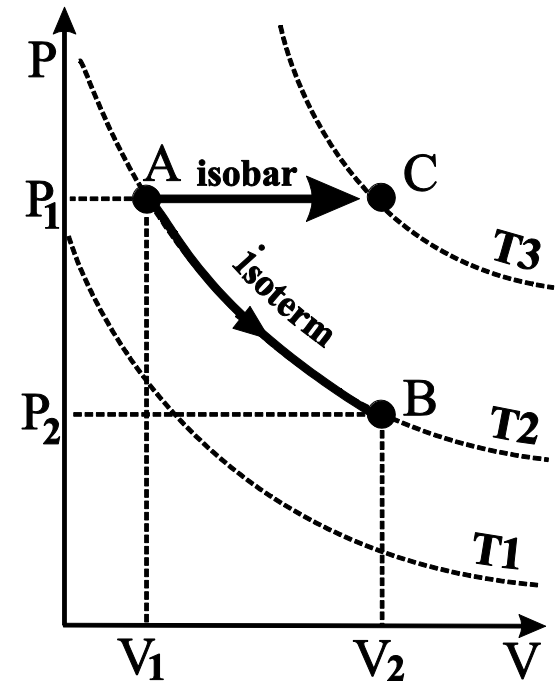
- 1) Vad är det mekaniska arbetet för att expandera gasen från punkt A till B på isothermen?

$$P = \frac{KT_2}{V}$$

$$\begin{aligned} W &= -\int_{V_1}^{V_2} P dV = -KT_2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \\ &= -KT_2 \left[\ln(V) \right]_{V_1}^{V_2} \\ &= -KT_2 [\ln(V_2) - \ln(V_1)] = \underline{\underline{-KT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}} \end{aligned}$$

- 2) Vad är det mekaniska arbetet från punkt A till C på isobaren?

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} P dV = -P_1 \int_{V_1}^{V_2} dV = -P_1 [V_2 - V_1] = \underline{\underline{-P_1 [V_2 - V_1]}}$$



Adiabatisk process

$$0 = \Delta Q = \Delta U + P\Delta V$$

$$C_V = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T} \right)_{V=\text{Konstant}}$$

$$\Delta U = C_V \Delta T$$



$$0 = C_V \Delta T + P\Delta V$$



$$\Delta T = -\frac{P}{C_V} \Delta V$$

$$PV = (C_P - C_V)T$$



$$P \frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial P}{\partial T} V = (C_P - C_V)$$



$$P\Delta V + V\Delta P = (C_P - C_V)\Delta T$$



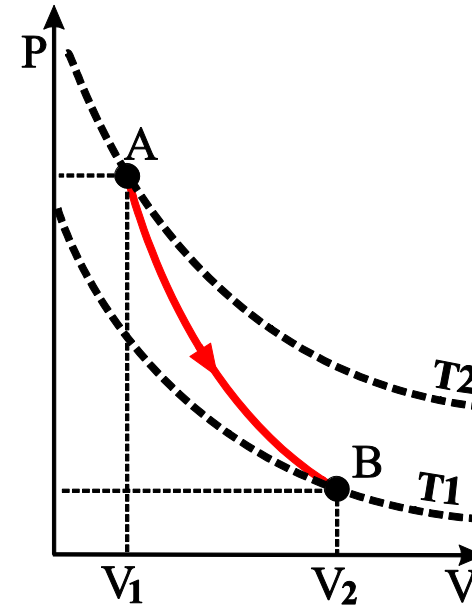
$$P\Delta V + V\Delta P = -(C_P - C_V) \frac{P}{C_V} \Delta V$$



$$P\Delta V + V\Delta P = -\frac{C_P}{C_V} P\Delta V + P\Delta V$$



$$V\Delta P + \frac{C_P}{C_V} P\Delta V = 0$$



Adiabatisk process

$$V\Delta P + \frac{C_P}{C_V} P\Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta P}{P} + \frac{C_P}{C_V} \frac{\Delta V}{V} = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{\Delta P}{P} + \frac{C_P}{C_V} \int \frac{\Delta V}{V} = \int 0$$

$$\Rightarrow \ln(P) + \frac{C_P}{C_V} \ln(V) = \text{konst}$$

$$\Rightarrow \ln(P) + \gamma \ln(V) = \text{konst}$$

$$\Leftrightarrow \ln(P) + \ln(V^\gamma) = \text{konst}$$

$$\cdot \exp \quad \Leftrightarrow \ln(PV^\gamma) = \text{konst}$$

$$\Rightarrow PV^\gamma = e^{\text{konst}}$$

$$\boxed{PV^\gamma = K_1}$$

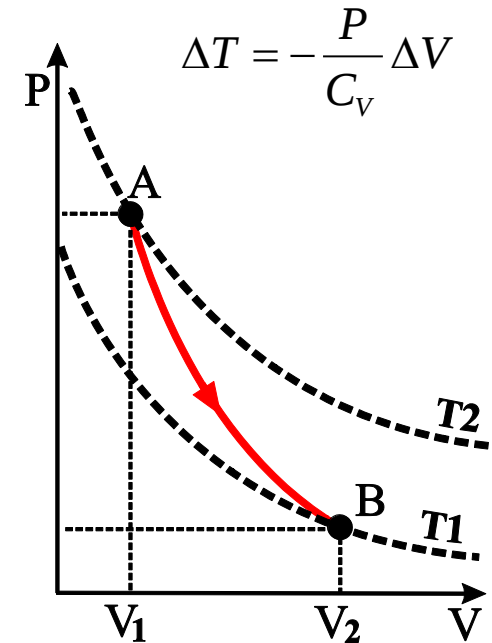
$$\Rightarrow (C_P - C_V)V^\gamma V^{-1}T = e^{\text{konst}}$$

$$\boxed{TV^{\gamma-1} = K_2}$$

$$\boxed{\frac{C_P}{C_V} = \gamma}$$

$$\frac{C_P}{C_V} = \gamma$$

$$PV = (C_P - C_V)T \quad \Rightarrow \quad P = (C_P - C_V)V^{-1}T$$



Atmosfärstrycket vid havsnivån är ca 10^5 Pa (1 bar). En cykel däck pumpas vanligtvis upp till ca 3.5 bar övertryck, som ger totala trycket 4.5 bar. Ifall du vid 20°C , snabbt pumpar upp en cykel däck från atmosfärstryck till 4.5 bar, vad blir luftens temperatur i ringen? Förklara vilka approximationer och antaganden du gör. Specifika värmekapaciteten för luft vid 300 K är: $C_p=1.005$ och $C_v=0.718$ kJ $\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$

$$PV = N \cdot k_B T \quad PV^\gamma = K_1 \quad PV = N \cdot k_B \cdot T \quad \frac{C_p}{C_v} = \gamma$$

Antar att pumpningen går snabbt, inget utbyte av värme sker med omgivningen: Adiabatisk process $\Delta Q = 0 \Rightarrow T_1 V_1^{\gamma-1} = K = T_2 V_2^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow V = \frac{N \cdot k_B \cdot T}{P} \Rightarrow T_1 \left(\frac{N \cdot k_B \cdot T_1}{P_1} \right)^{\gamma-1} = K = T_2 \left(\frac{N \cdot k_B \cdot T_2}{P_2} \right)^{\gamma-1}$$

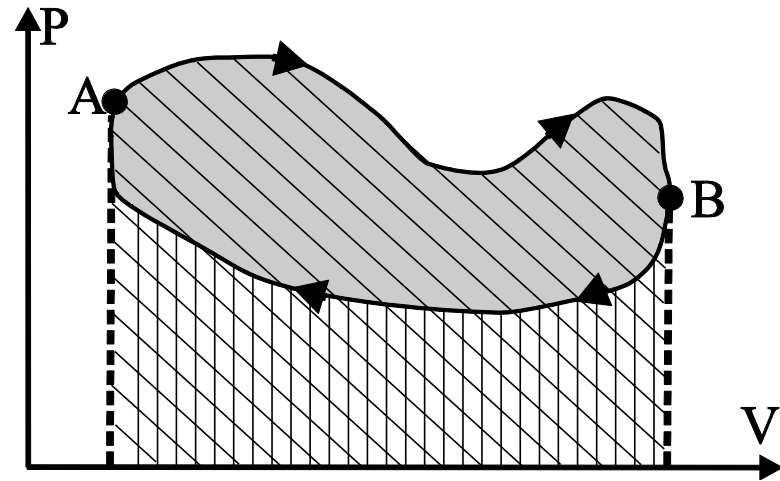
$$\Rightarrow \frac{T_1^\gamma}{P_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2^\gamma}{P_2^{\gamma-1}} \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 293 \text{ K} \left(\frac{4.5 \text{ bar}}{1 \text{ bar}} \right)^{\frac{0.4}{1.4}} \sim 450.298 \text{ K} \sim \underline{177^\circ\text{C}}$$

Antog också att γ konstant för alla temperaturer mellan 293 och 450 K



Carnot kretslopp

$$W_{A \rightarrow A} = - \oint_{A \rightarrow A} P dV$$

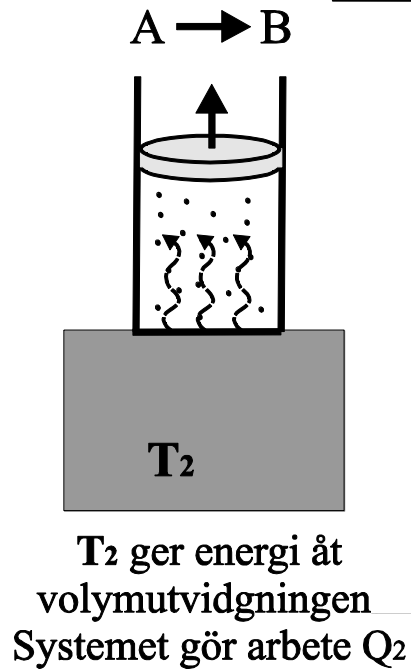
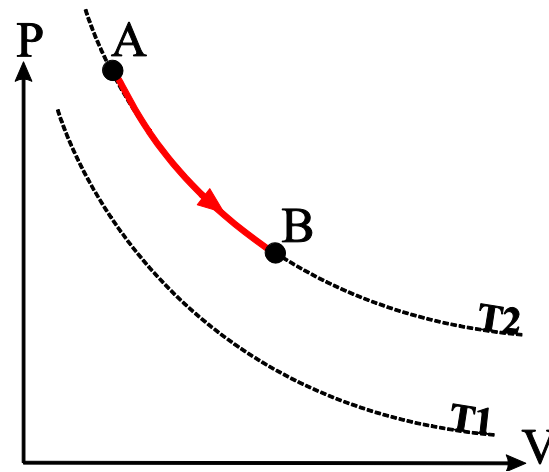


Medsols: **Värme → mekaniskt arbete**

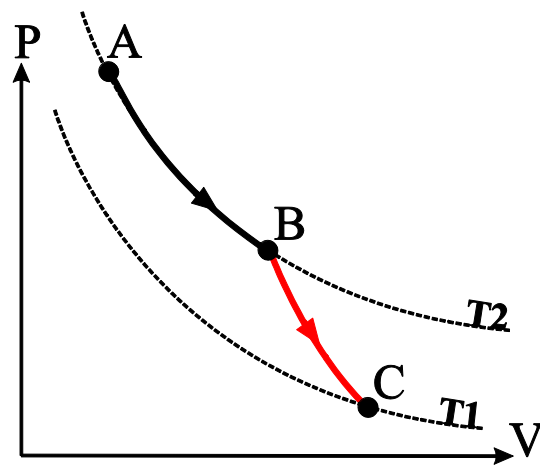
Motsols: **Mekaniskt arbete → värme**



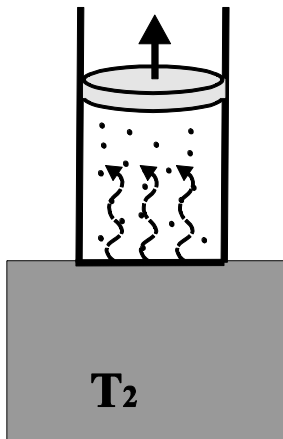
Carnot kretslopp



Carnot kretslopp

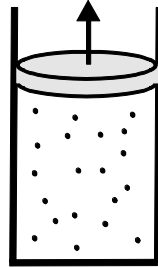


A $\rightarrow$ B



T_2 ger energi åt
volymutvidgningen.
Systemet gör arbete Q_2

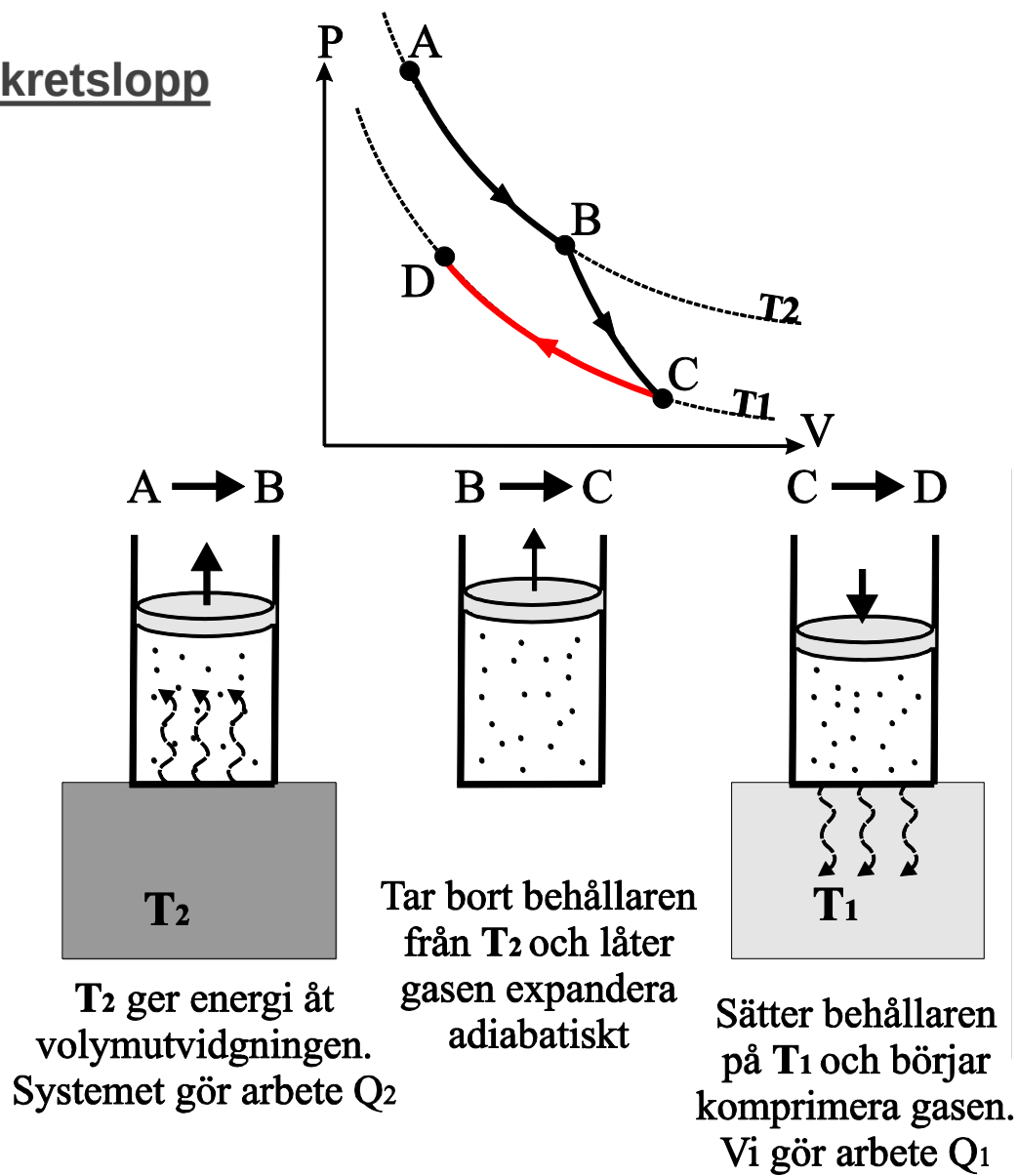
B $\rightarrow$ C



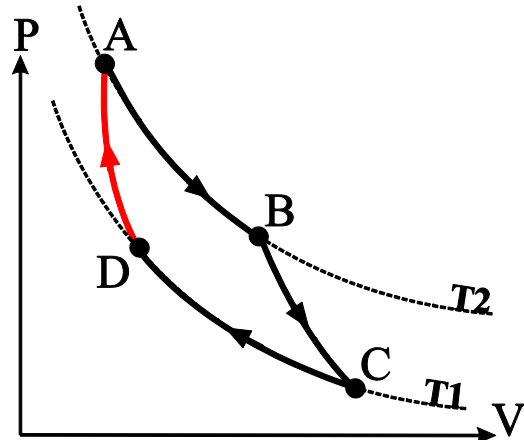
Tar bort behållaren
från T_2 och låter
gasen expandera
adiabatiskt



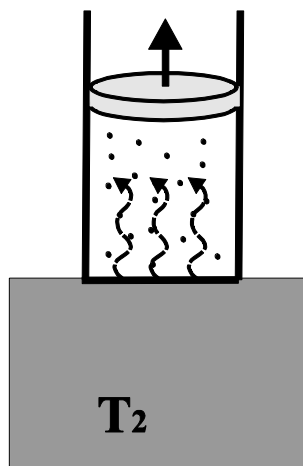
Carnot kretslopp



Carnot kretslopp

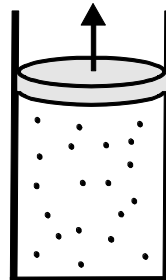


A → B



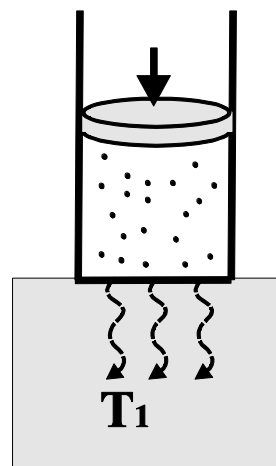
T_2 ger energi åt
volymutvidgningen.
Systemet gör arbete Q_2

B → C



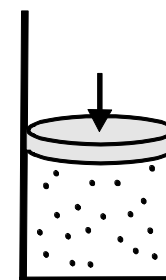
Tar bort behållaren
från T_2 och låter
gasen expandera
adiabatiskt

C → D



Sätter behållaren
på T_1 och börjar
komprimera gasen.
 V_1 gör arbete Q_1

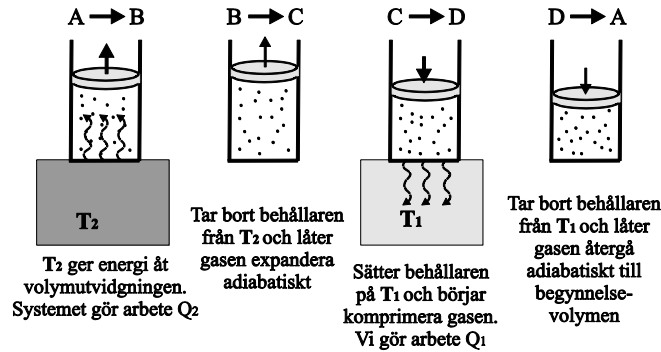
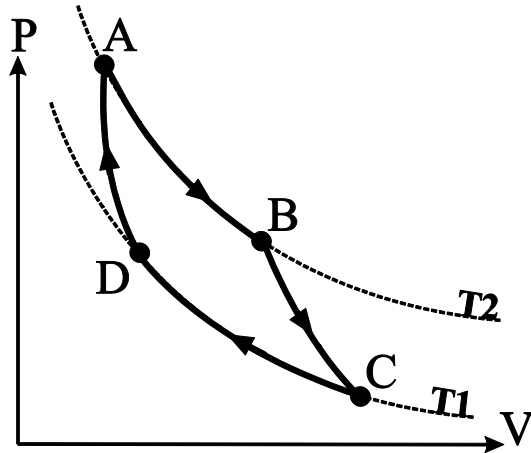
D → A



Tar bort behållaren
från T_1 och låter
gasen återgå
adiabatiskt till
begynnelse-
volymen



Carnot kretslopp



$$W_{A \rightarrow B} = - \int_A^B P dV$$

$$PV = KT$$

$$P = \frac{KT}{V}$$

Isotermiska processer från punkt A till B och från punkt C till D

$$W_{A \rightarrow B} = -KT_2 \int_A^B \frac{dV}{V} = -KT_2 \int_A^B \ln(V)$$

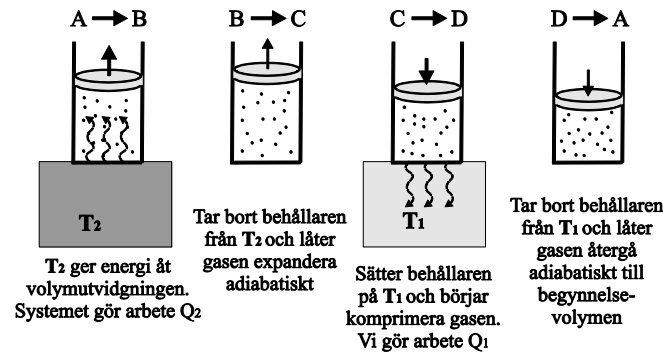
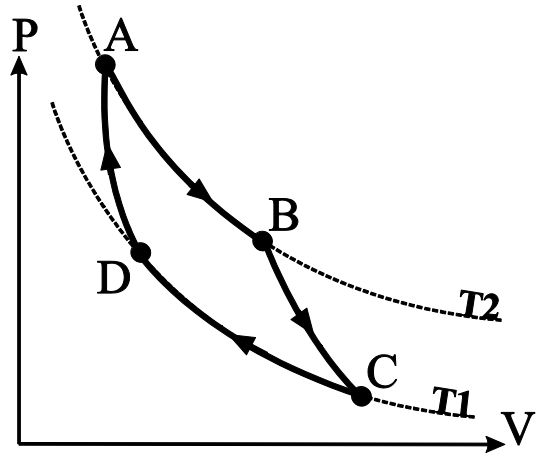
$$= -KT_2 [\ln(V_B) - \ln(V_A)] = -KT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$\Delta Q_2 = W_{A \rightarrow B} = -KT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$\Delta Q_1 = W_{C \rightarrow D} = -KT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$



Carnot kretslopp



$$TV^{\gamma-1} = K_2$$

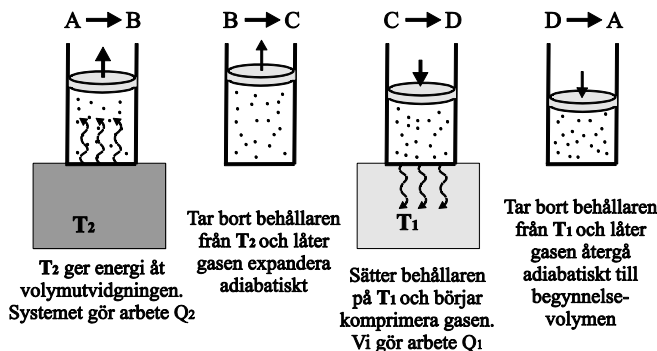
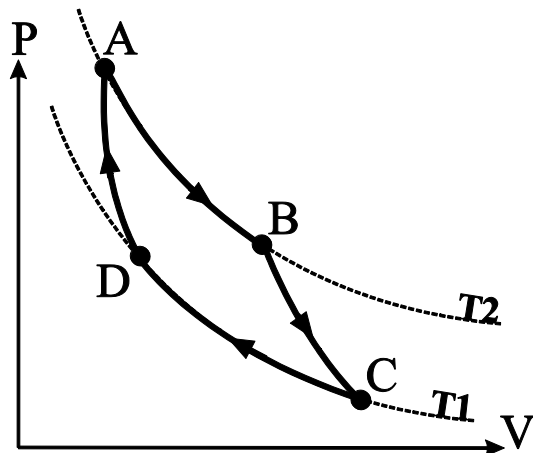
$$\frac{C_P}{C_V} = \gamma$$

Adiabatiska processer från punkt B till C och från punkt D till A

$$\begin{aligned}
 B \Rightarrow C \quad T_2 V_B^{\gamma-1} &= T_1 V_C^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^{\gamma-1} \\
 D \Rightarrow A \quad T_1 V_D^{\gamma-1} &= T_2 V_A^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_A}{V_D} \right)^{\gamma-1}
 \end{aligned}
 \Rightarrow \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_D} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$



Carnot kretslopp



$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

$$\Delta Q_2 = W_{A \rightarrow B} = -KT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$\Delta Q_1 = W_{C \rightarrow D} = -KT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

$$\Delta Q_1 = W_{C \rightarrow D} = KT_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)$$

$$\frac{|\Delta Q_2|}{|\Delta Q_1|} = \frac{T_2}{T_1}$$

Det totala arbetet som kretsloppet bidrog till är

$$W = Q_2 - Q_1$$

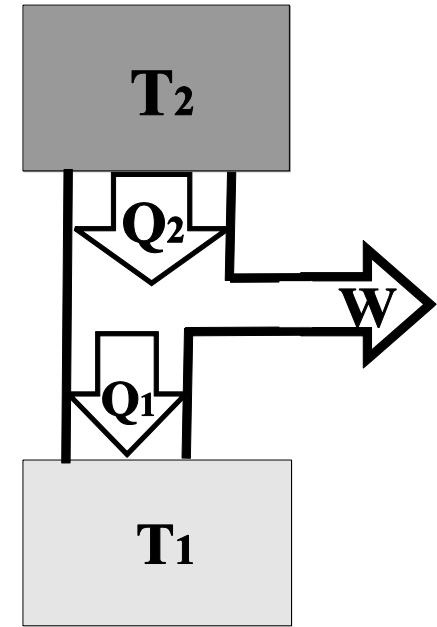


Effektiviteten för en gammalmodig ångmaskin är ca. 15%.

Beräkna den teoretiska effektiviteten för en ångmaskin vars ånga hålls vid $T_2 = 500^\circ\text{C}$ och lufttemperaturen T_1 är 20°C

Effektiviteten för ett Carnot-kretslopp definieras som det erhållna mekaniska arbetet dividerat med energin tagen från värmebadet

$$\text{Effektivitet} = \frac{W}{Q_2}$$



$$\Rightarrow \frac{W}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

$$\Rightarrow \text{Den teoretiska effektiviteten för en ångmaskin vid givna temperaturer är } = 1 - \frac{293 \text{ K}}{773 \text{ K}} \approx \underline{\underline{0.62}}$$



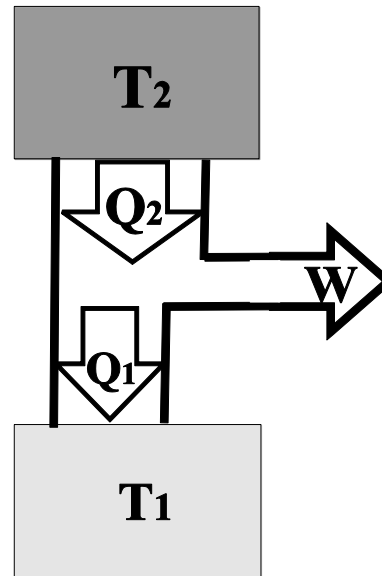
Effektivitet

$$\frac{W}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Entropiförändring

$$\Delta S = \frac{\Delta Q_2}{T_2} + \frac{\Delta Q_1}{T_1}$$

$$W = Q_2 - Q_1$$



Carnot kretslopp
(reversibel maskin)

$$\frac{|\Delta Q_2|}{|\Delta Q_1|} = \frac{T_2}{T_1}$$

Entropiförändring

För Carnot kretslopp
(reversibel maskin)

$$\Delta S = -\frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_1}{T_1} = 0$$



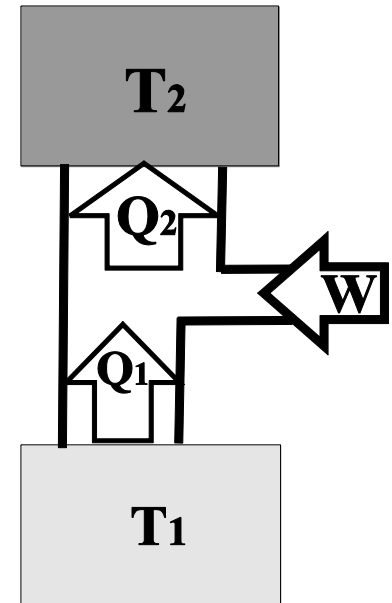
En husägare använder Carnot maskinen bakfram för att ta in värme från utsidan där temperaturen är -10°C in i huset med temperaturen 20°C

Hur mycket energi måste tillföras (arbete göras), för att pumpa in 4.18 kJ värme in i huset?

$$\frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{T_1}{T_2} Q_2 \quad Q_2 = Q_1 + W$$

Arbetet värmepumpen måste utföra:

$$\Rightarrow W = Q_2 - Q_1 = Q_2 \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right) \approx 4.18 \text{ kJ} \left(1 - \frac{263 \text{ K}}{293 \text{ K}} \right) \approx \underline{\underline{0.42 \text{ kJ}}}$$



Lärandemål:

- Kunna använda gasens mikroskopiska egenskaper för att beräkna flödet av en gas genom ett hål
- Kunna bestämma förändringar i gasens temperatur och tryck då gasen komprimeras eller förtunnas
- Kunna bestämma effektiviteten för en värmemaskin

