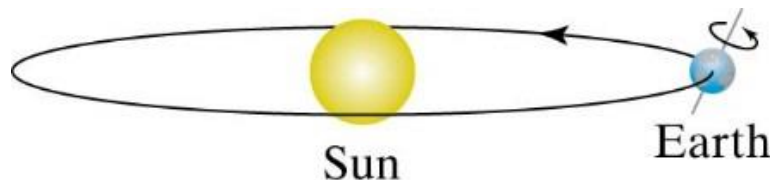


11. Rörelsemängdsmoment (liikemäärämomentti)

Lärandemål:

- Kunna beräkna både rörelsemängden och rörelsemängdsmoment i 3D
- Kunna använda rörelsemängdsmoment principen för att beräkna hur systemets rörelsemängdsmoment ändrar som funktion av tiden p.g.a. ett kraftmoment
- Kunna använda bevarande av rörelsemängdsmomentet för ett system med många partiklar
- Kunna beräkna positionen för roterande objekt



Jorden roterar kring solen och sig själv



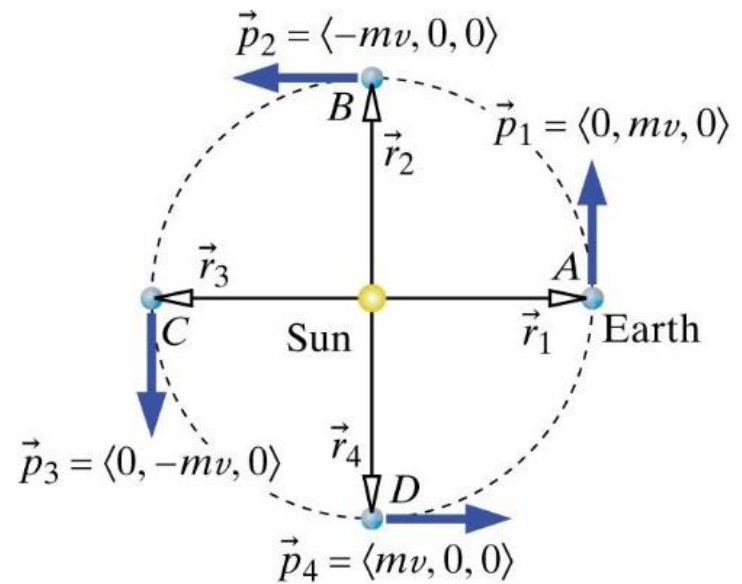
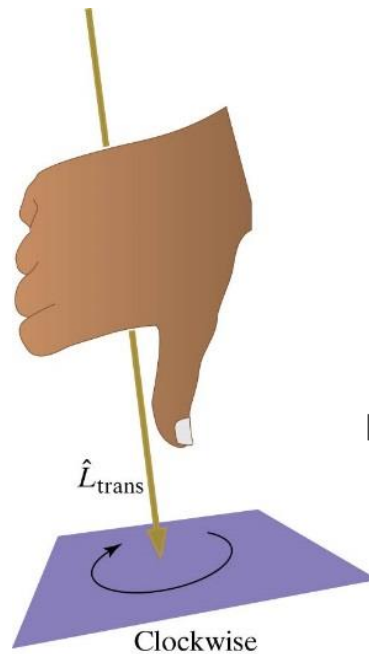
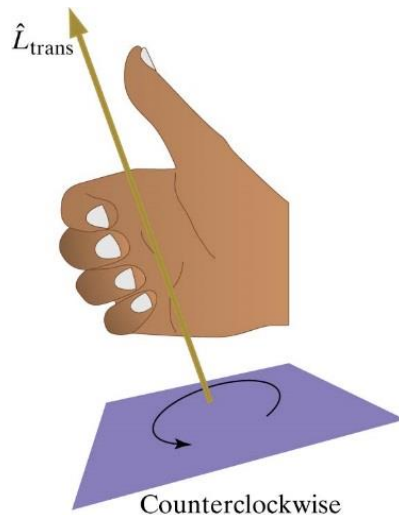
Rotationen kring solen

- Konstant fart (konstant längd av hastighetsvektorn)
- Motsols

Definierar: Rörelsemängdsmoment

$$|\bar{L}_{Rot.kring\ solen}| = |\bar{r}||\bar{p}|\sin(\theta)$$

Riktning?

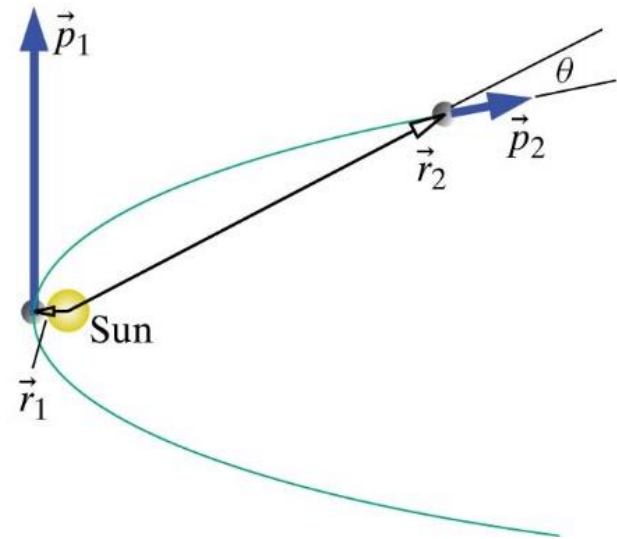
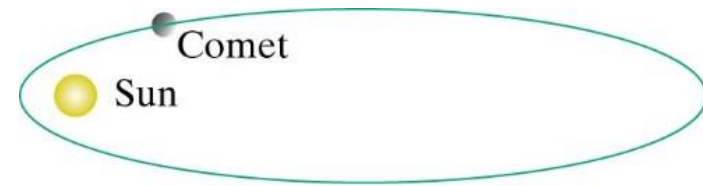
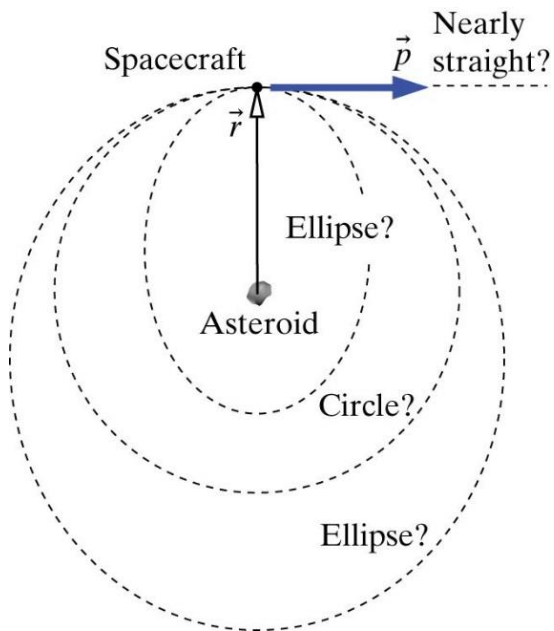


$$\bar{L}_{Trans,A} = \bar{r}_A \times \bar{p}$$



Halleys komet

Rörelsemängdsmomentet
samma i alla punkter på
kometens bana!



Hurudan bana
har raketten?



Rörelsemängdsmoment för roterande kroppar

Rörelsemängdsmomentet
för kroppen:

$$\bar{L} = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i$$

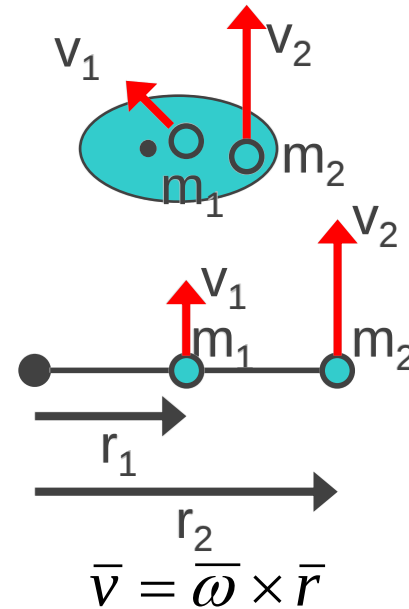
Alla massorna i en fast kropp
roterar med samma vinkelhastighet

⇒
$$\bar{L} = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \bar{\omega}$$

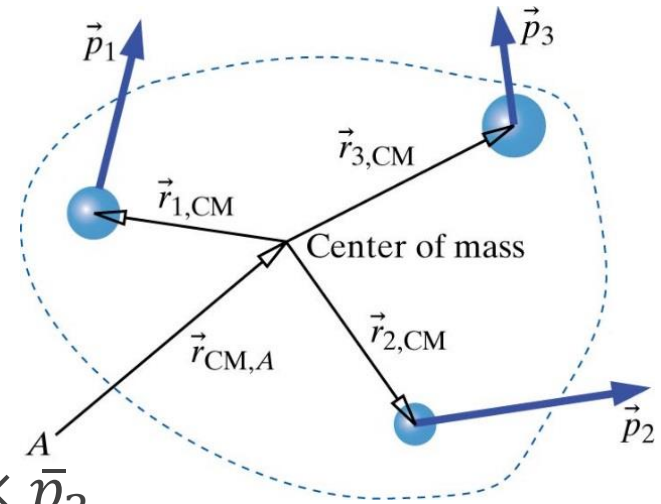
Tröghetsmoment:
$$I_A = \sum_i m_i r_i^2$$

Rörelsemängdsmomentet för en kropp
som roterar kring en axel vid punkten A:

$$\boxed{\bar{L} = I_A \bar{\omega}}$$



Totala rörelsemängdsmomentet



$$\bar{L}_A = (\bar{r}_{CM} + \bar{r}_{1,CM}) \times \bar{p}_1 + (\bar{r}_{CM} + \bar{r}_{2,CM}) \times \bar{p}_2 + (\bar{r}_{CM} + \bar{r}_{3,CM}) \times \bar{p}_3$$

$$= [\bar{r}_{CM} \times (\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3)] + [\bar{r}_{1,CM} \times \bar{p}_1 + \bar{r}_{2,CM} \times \bar{p}_2 + \bar{r}_{3,CM} \times \bar{p}_3]$$

$$= [\bar{r}_{CM} \times \bar{p}_{Tot}] + [\bar{r}_{1,CM} \times \bar{p}_1 + \bar{r}_{2,CM} \times \bar{p}_2 + \bar{r}_{3,CM} \times \bar{p}_3]$$

Translation

Rotation

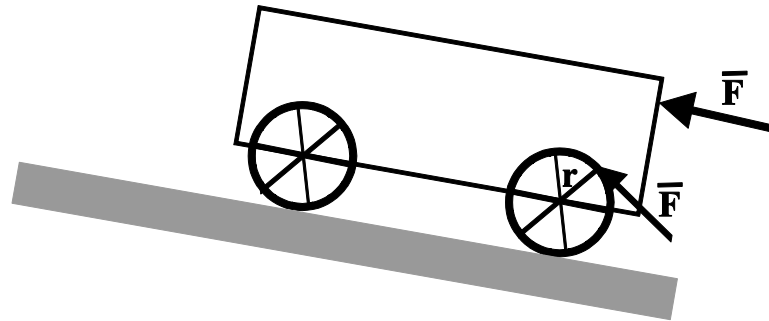
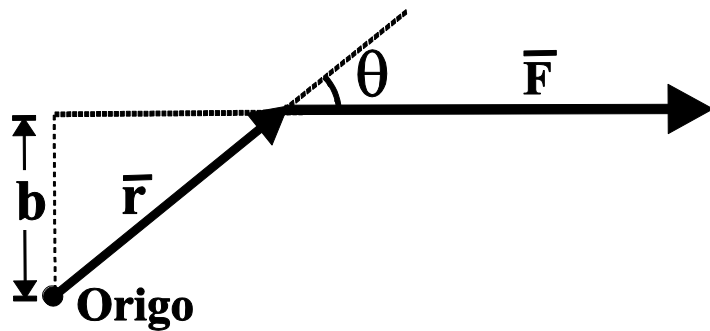
$$\bar{L}_A = \bar{L}_{Trans,A} + \bar{L}_{Rot}$$



Definition: **Kraftmomentet** relativt till origo (varifrån vektorn $\vec{r}$ börjar) definieras som

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Voiman momentti
(eng: Moment of force)

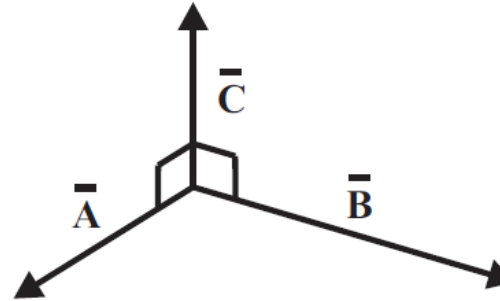


→ $|\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin(\theta) = |\vec{F}| b$



Vektorprodukt eller kryssprodukt av vektorer

Kryssprodukten $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ är en vektor, där längden $|\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\alpha)$



$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$= A_x B_x \hat{i} \times \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} + \dots$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$



Rörelsemängd: $\bar{p} = m\bar{v}$ Kraft: $\bar{F}$

Rörelsemängds moment: $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$ Kraftmoment: $\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}$

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$$

Totala kraften på massa m : $F = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d\bar{p}}{dt} \iff \bar{p} \text{ konstant}$$

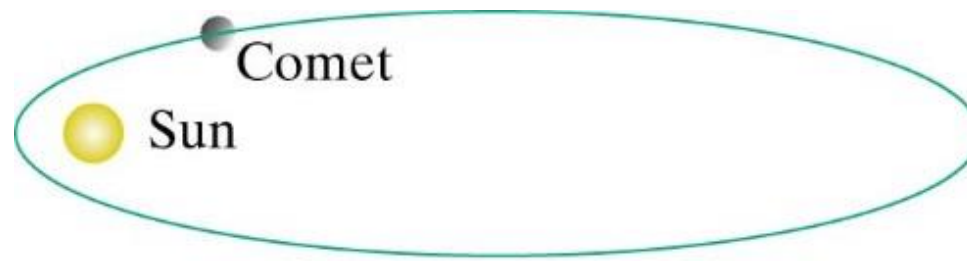
$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d(\bar{r} \times \bar{p})}{dt} = \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{p} = \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt} + \bar{v} \times (m\bar{v}) = \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt}$$

$$\Rightarrow \bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}$$

Totala kraftmomentet på massa m är noll

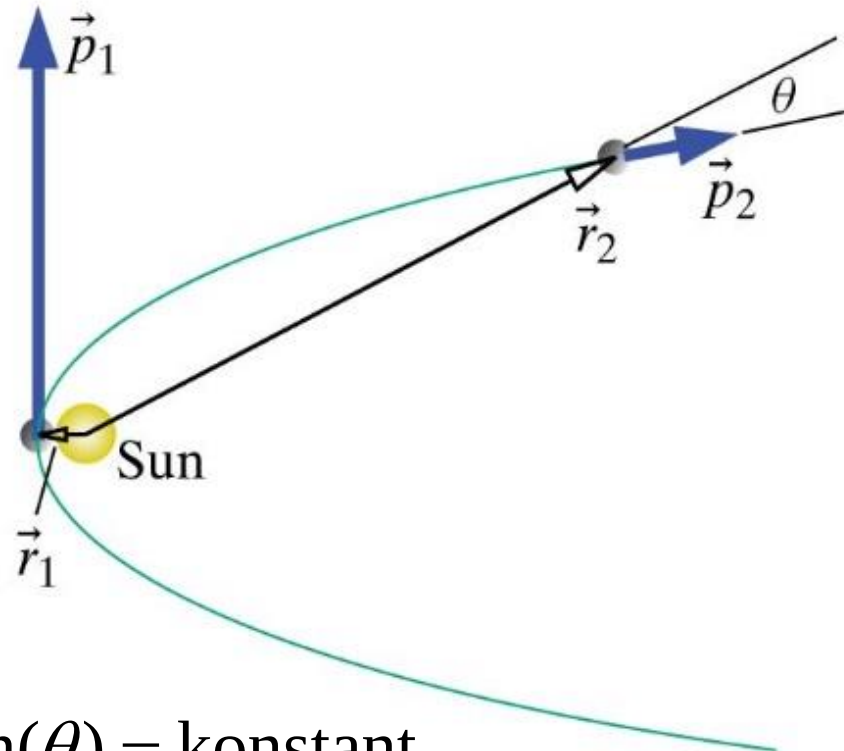
$$\Rightarrow 0 = \frac{d\bar{L}}{dt} \iff \bar{L} \text{ konstant}$$





$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$



$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin(\theta) = \text{konstant}$$



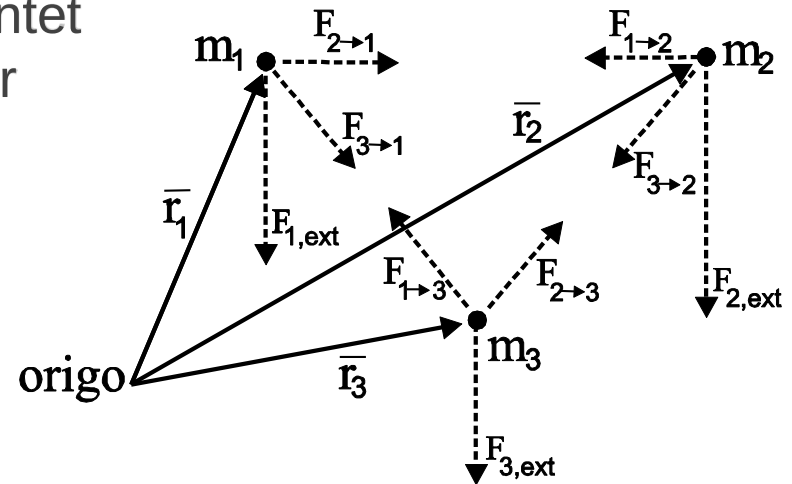
Rörelsemängdsmoment för system av partiklar

Tidsförändringen av rörelsemängdsmomentet eller kraftmomentet på partiklarna 1 till 3 är

$$\frac{d\bar{L}_1}{dt} = \bar{\tau}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{F}_{1,Ext} + \bar{r}_1 \times \bar{F}_{2 \rightarrow 1} + \bar{r}_1 \times \bar{F}_{3 \rightarrow 1}$$

$$\frac{d\bar{L}_2}{dt} = \bar{\tau}_2 = \bar{r}_2 \times \bar{F}_{2,Ext} + \bar{r}_2 \times \bar{F}_{1 \rightarrow 2} + \bar{r}_2 \times \bar{F}_{3 \rightarrow 2}$$

$$\frac{d\bar{L}_3}{dt} = \bar{\tau}_3 = \bar{r}_3 \times \bar{F}_{3,Ext} + \bar{r}_3 \times \bar{F}_{1 \rightarrow 3} + \bar{r}_3 \times \bar{F}_{2 \rightarrow 3}$$



Totala rörelsemängdsmomentet för hela systemet: $\bar{L} = \bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \bar{L}_3$

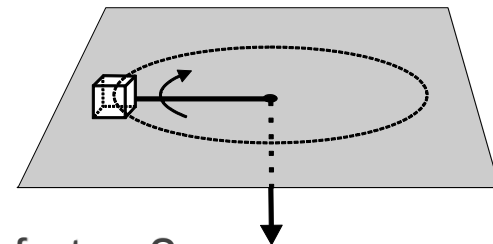
$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{r}_1 \times \bar{F}_{1,Ext} + \bar{r}_2 \times \bar{F}_{2,Ext} + \bar{r}_3 \times \bar{F}_{3,Ext} = \bar{\tau}$$

Ifall det yttre kraftmomentet på ett system är noll, så är systemets totala rörelsemängdsmoment konstant



En kub med massan 1.0 kg roterar friktionsfritt på ett bord p.g.a. en spänd tråd mellan kuben och ett hål i bordet.

Först rör sig kuben med den konstanta farten 1.0 m/s och rotationsradien 1000 mm. Sedan dras tråden nedåt tills kubens rotationsradie är 500 mm. Vad är kubens rotationsfart nu? Hur mycket mekaniskt arbete gjordes för att dra tråden nedåt?



Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$

Rörelsemängds moment: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mvr \rightarrow \vec{L}$ konstant

$$\rightarrow \vec{L} = mv_1 r_1 = mv_2 r_2 \rightarrow v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1 = \frac{1 \text{ m}}{0.5 \text{ m}} 1 \text{ m/s} \approx \underline{\underline{2 \text{ m/s}}}$$

Arbete: $W = \vec{F} \bullet d\vec{s}$? Samma som kinetiska energiförändringen

$$\begin{aligned} W = \Delta E = E_2 - E_1 &= \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{r_1}{r_2} v_1 \right)^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 \\ &= \frac{1}{2} mv_1^2 \left[\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 1 \right] \approx \underline{\underline{1.5 \text{ J}}} \end{aligned}$$



Fasta kroppar i jämvikt: statik Tacoma bridge disaster

För att en kropp skall stå stilla måste följande gälla:

$$\text{Rörelsemängden: } \bar{P} = 0$$

$$\text{Rörelsemängdsmomentet: } \bar{L} = 0$$

För att en kropp skall förbli stilla måste **summakraften** vara noll

$$\boxed{\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0}$$

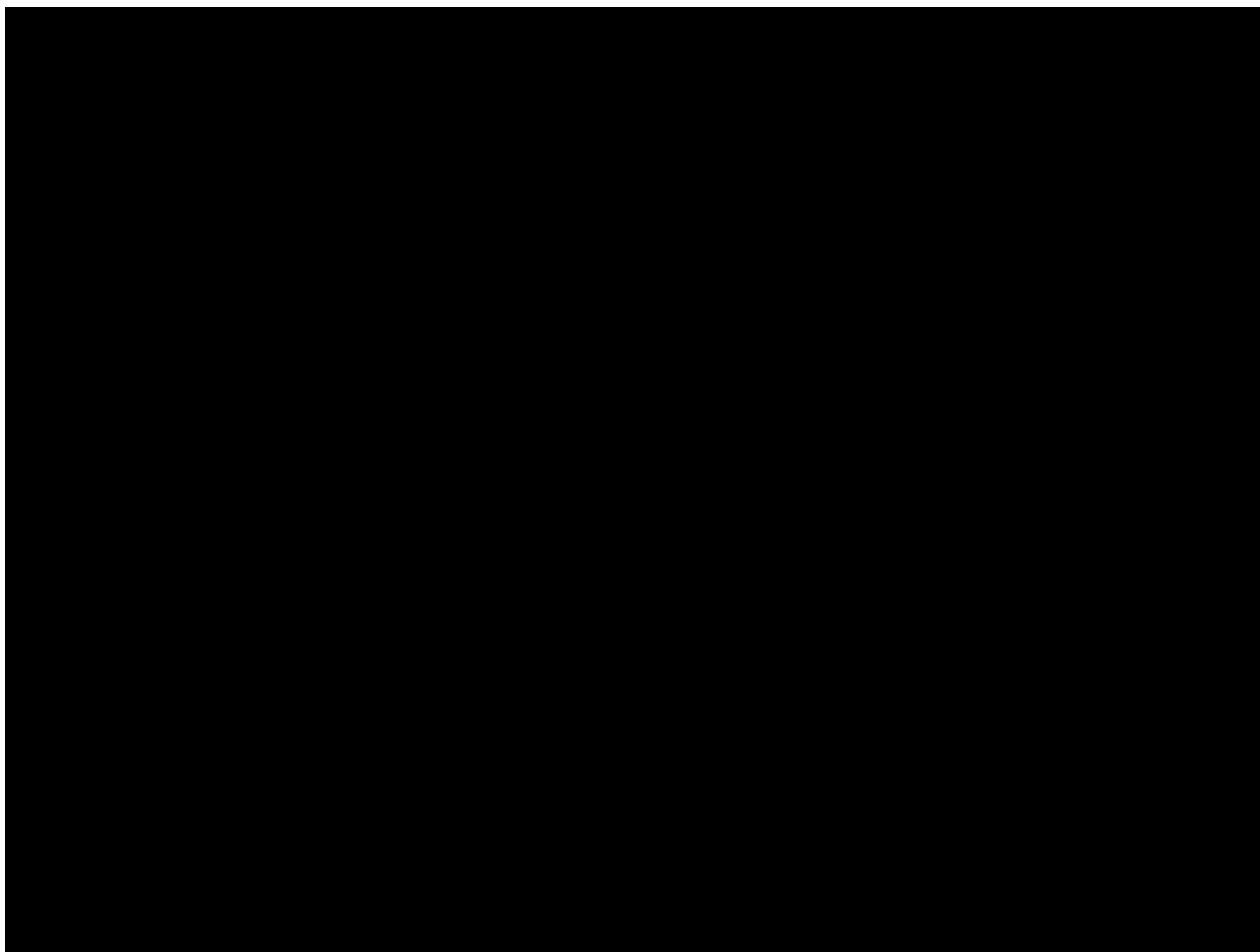
Vidare får kroppen inte börja rotera, vilket betyder att **rörelsemängdsmomentet L** inte skall ändra med tiden:

$$dL/dt = 0$$

Detta är det samma som att **summakraftmomentet** på kroppen skall vara noll:

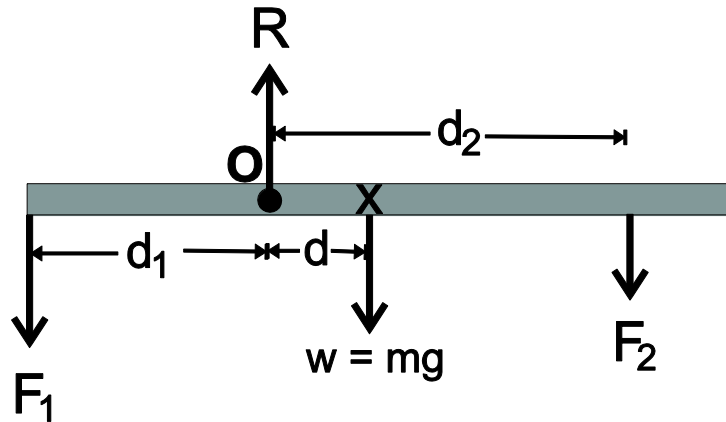
$$\boxed{\sum \bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F} = 0 \quad \text{Genom vilken punkt som helst}}$$





Betrakta staven nedan, på vilket fyra olika krafter påverkar.
Staven kan rotera kring punkten **O**.

Ge ekvationerna för att staven skall vara i jämvikt



$$\sum F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 + F_2 + mg + -R = 0$$

$$\underline{\underline{R = F_1 + F_2 + mg}}$$

$$\sum \bar{\tau} = 0$$


Kraftmomentet kring **O**

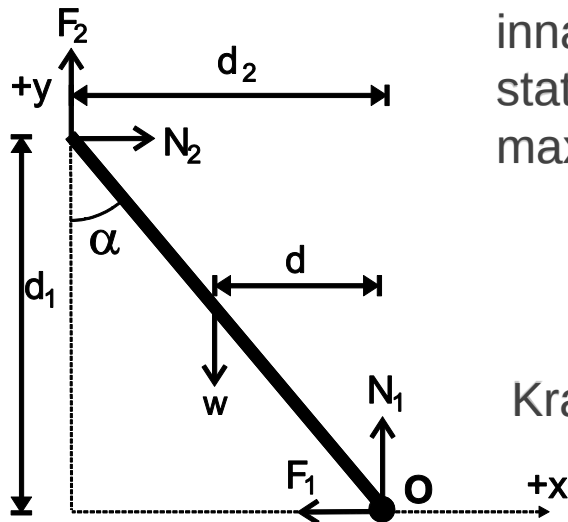
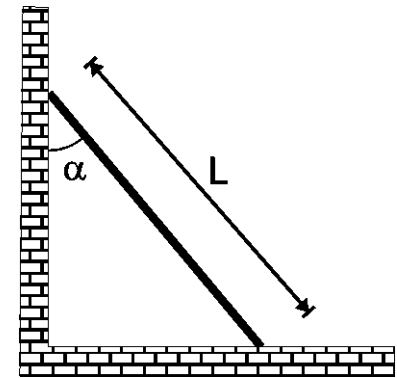
$$(d_1 \times F_1) - (d_2 \times F_2) - (d \times mg) + (0 \times R) = 0$$

$$d_1 \times F_1 = |d_1 \parallel F_1| \sin(\pi/2) = |d_1 \parallel F_1|$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{|d_1 \parallel F_1| - |d_2 \parallel F_2| - m |d \parallel g| = 0}}$$



En 2 m lång 10 kg tung stega står lutande mot en vägg. Ifall den statiska friktionskoefficienten mellan stegen och marken och mellan stegen och väggen är $\mu_s = 0.4$, så vad är den maximala vinkeln α innan stegen börjar glida?



innan stegen börjar glida når statiska friktionskrafterna maximum:

$$F_1 = \mu_s N_1$$

$$F_2 = \mu_s N_2$$

$$x: N_2 - \mu_s N_1 = 0$$

$$y: \mu_s N_2 + N_1 - mg = 0 \quad \rightarrow$$

$$N_1 = \frac{mg}{\mu_s^2 + 1}$$

$$N_2 = \frac{\mu_s mg}{\mu_s^2 + 1}$$

Kraftmomentet kring $\bigcirc$

$$mgd - N_2 d_1 - \mu_s N_2 d_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow mg \frac{L \sin(\alpha)}{2} - N_2 L \cos(\alpha) - \mu_s N_2 L \sin(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{mg \sin(\alpha)}{2} - N_2 \cos(\alpha) - \mu_s N_2 \sin(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\alpha) = \frac{2\mu_s}{1 - \mu_s^2}}{\alpha \approx 44^\circ}$$



En person befinner sig i viktlös tillstånd med tröghetsmomentet $I_a = 18.0 \text{ kgm}^2$ och rotationshastigheten 0.17 varv/s . Nu drar sig personen ihop (se bild) så att tröghetsmomentet minskar till $I_b = 5.5 \text{ kgm}^2$.

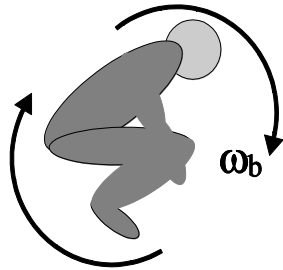
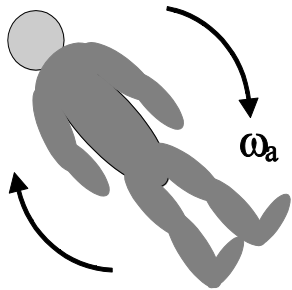
Vad blir rotationshastigheten? Beräkna också energiförändringen

$$\bar{L}_A = I_A \bar{\omega}$$

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}$$

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}$$



Vridmomentet = 0, $\tau = dL/dt = 0$

Rörelsemängdsmomentet
konstant: $\bar{L} = \bar{r} \times (m\bar{v}) = I\bar{\omega}$

$$|\bar{L}| = I_a |\bar{\omega}_a| = I_b |\bar{\omega}_b|$$

$$\Rightarrow \omega_b = \frac{I_a}{I_b} \omega_a = \frac{18 \text{ kgm}^2}{5.5 \text{ kgm}^2} 2\pi \cdot 0.17 \text{ rad/s} \approx 2\pi \cdot 0.56 \text{ rad/s} \quad \underline{0.56 \text{ varv/s}}$$

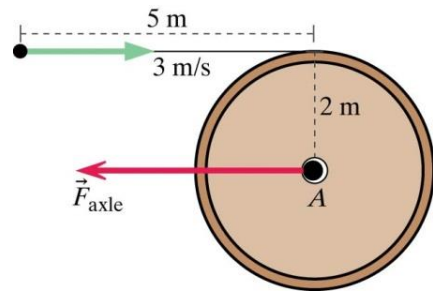
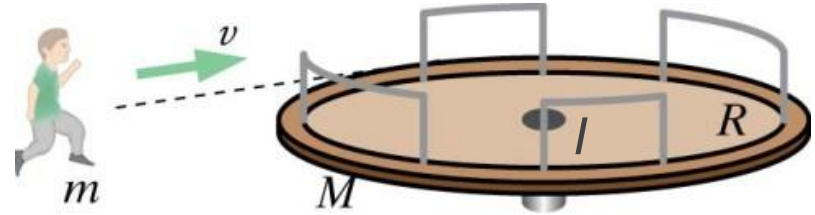
$$\Delta E = K_b - K_a = \frac{1}{2} I_b \omega_b^2 - \frac{1}{2} I_a \omega_a^2 \sim 33.6 \text{ J} - 10.3 \text{ J} = \underline{23.3 \text{ J}}$$



$$m = 40 \text{ kg}, \quad v = 3 \text{ m/s}$$

$$R = 2 \text{ m}, \quad M = 100 \text{ kg}, \quad I = 300 \text{ kgm}^2$$

Med vilken vinkelhastighet roterar systemet (barn+snurran) efter att barnet hoppat på snurran?



$$\bar{\tau} = \frac{\Delta \bar{L}}{\Delta t}$$



$$\bar{L}_{A,f} = \bar{L}_{A,i} + \bar{\tau}_A \cdot \Delta t$$

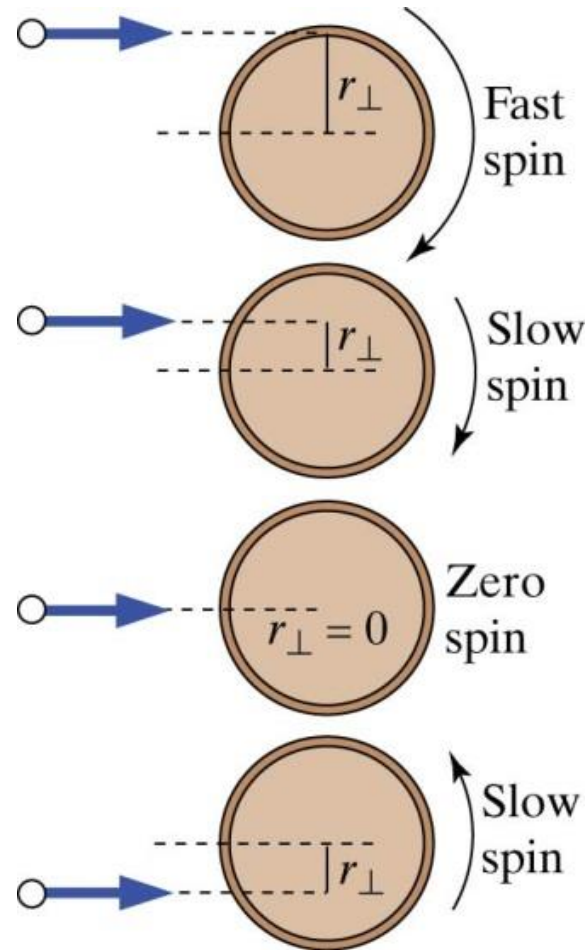
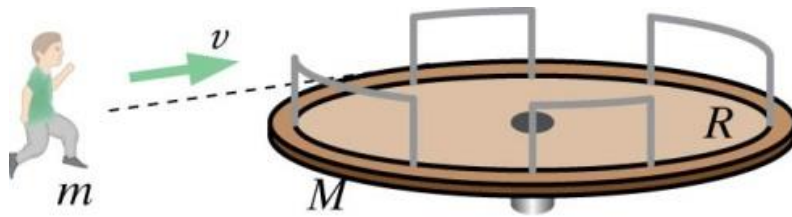
Rörelsemängdsmoment: $|\bar{L}_{A,i}| = |\bar{r} \times \bar{p}| = mvR$

$$\bar{\tau}_A = \bar{r} \times \bar{F}_{axle} = 0 \times \bar{F}_{axle} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{L}_{A,f} = \bar{L}_{A,i}$$

$$|\bar{L}_{A,f}| = I\omega + Rmu = I\omega + Rm\omega R = \omega(I + mR^2)$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{|\bar{L}_{A,i}|}{(I + mR^2)} = \frac{40 \cdot 3 \cdot 2 \text{ kgm}^2 / \text{s}}{(300 + 40 \cdot 2^2) \text{ kgm}^2} = \underline{\underline{0.522 \text{ rad/s} (\sim 30 \text{ grader/s})}}$$

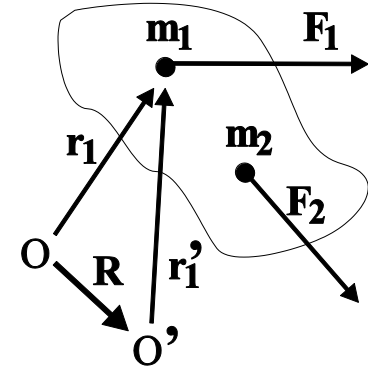




Vridmoment (vääntömomentti)

En godtycklig fast kropp påverkas av yttre krafter F_i

Det totala kraftmomentet p.g.a. krafterna relativt till origo O är:



$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{Tot} &= \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum_i (\bar{r}_i' + \bar{R}) \times \bar{F}_i \\ &= \sum_i \bar{r}_i' \times \bar{F}_i + \sum_i \bar{R} \times \bar{F}_i = \sum_i \bar{r}_i' \times \bar{F}_i + \bar{R} \times \left(\sum_i \bar{F}_i \right) \\ &= \bar{\tau}_{Tot}' + \bar{R} \times \bar{F}_{Tot}\end{aligned}$$

➡ Ifall totala kraften: $\mathbf{F}_{Tot}$ **på kroppen är noll**, är kraftmomentet relativt till **vilken punkt som helst** samma, vilket kallas för **vridmoment T**

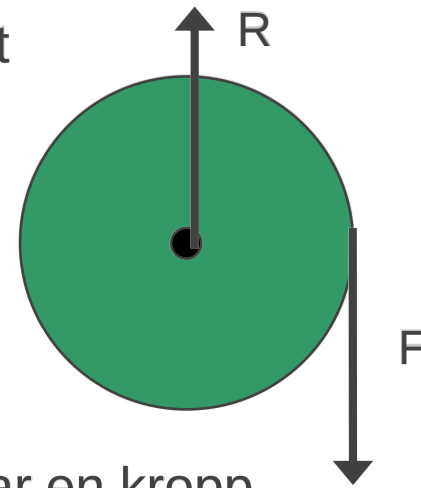
$$\bar{F}_{Tot} = \sum_i \bar{F}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\tau}_{Tot} = \bar{\tau}_{Tot}' = \bar{T}$$

Vääntömomentti
Eng: Torque



Vridmomentet T får kroppen att rotera på stället

$$\vec{F}_{Tot} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\tau}_{Tot} = \vec{\tau}'_{Tot} = \vec{T}$$

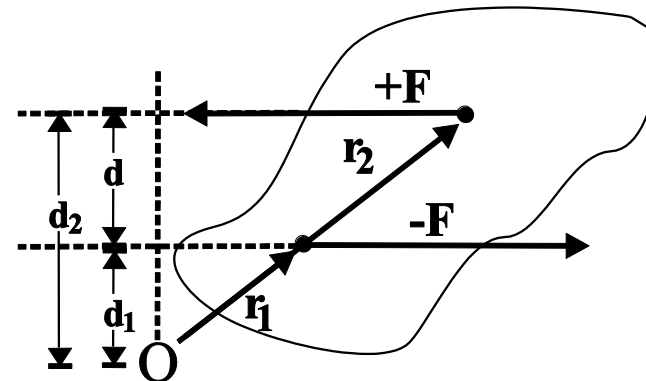


Två lika stora men antiparallella krafter påverkar en kropp

$$\vec{T} = \vec{r}_2 \times \vec{F} + \vec{r}_1 \times (-\vec{F})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\vec{T}| &= |\vec{r}_2| |\vec{F}| \sin(\theta) - |\vec{r}_1| |\vec{F}| \sin(\theta) \\ &= |\vec{F}| (d_2 - d_1) = |\vec{F}| d \end{aligned}$$

$$\boxed{|\vec{T}| = |\vec{F}| d}$$



Detta vridmomentet får kroppen att rotera på stället

$$\vec{F}_{Tot} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$



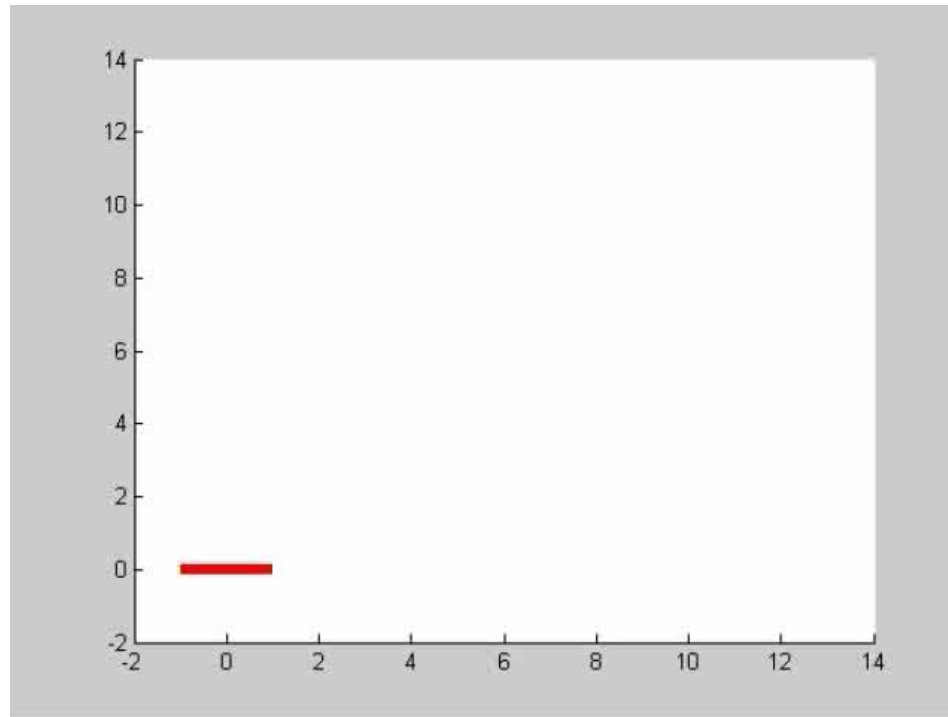
Rörelse av en fast kropp

Kaströrelse för en stav

Begynnefart: 15 m/s

Begynnevinkel: 75°

**Begynnevinkel-
hastighet:** 10 rad/s

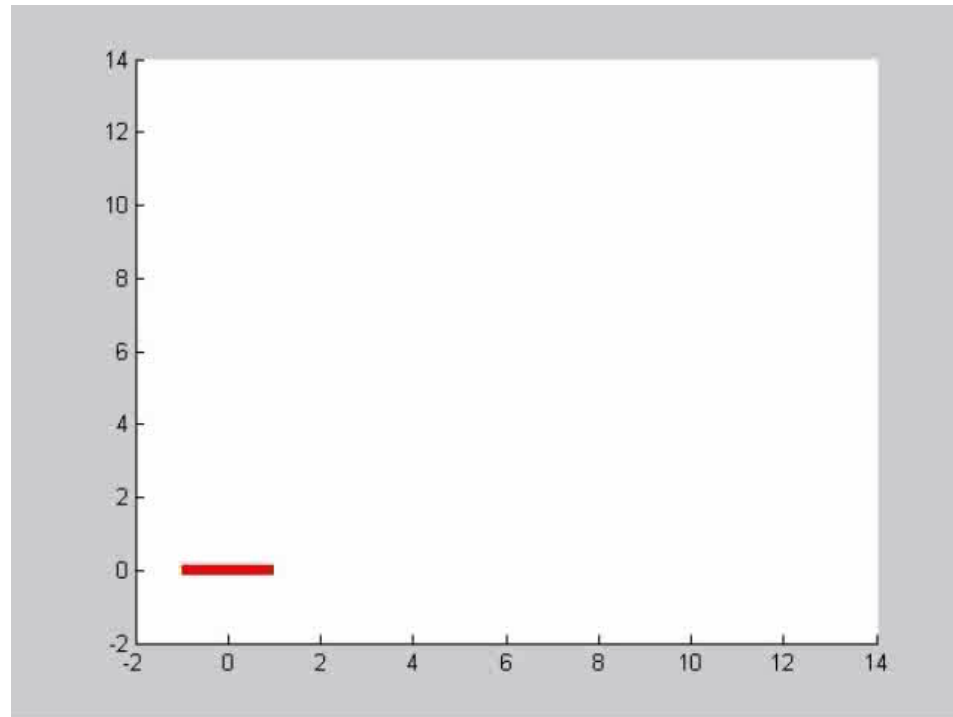


Kaströrelse för en stav

Begynnefart: 15 m/s

Begynnevinkel: 75°

**Begynnevinkel-
hastighet:** 10 rad/s

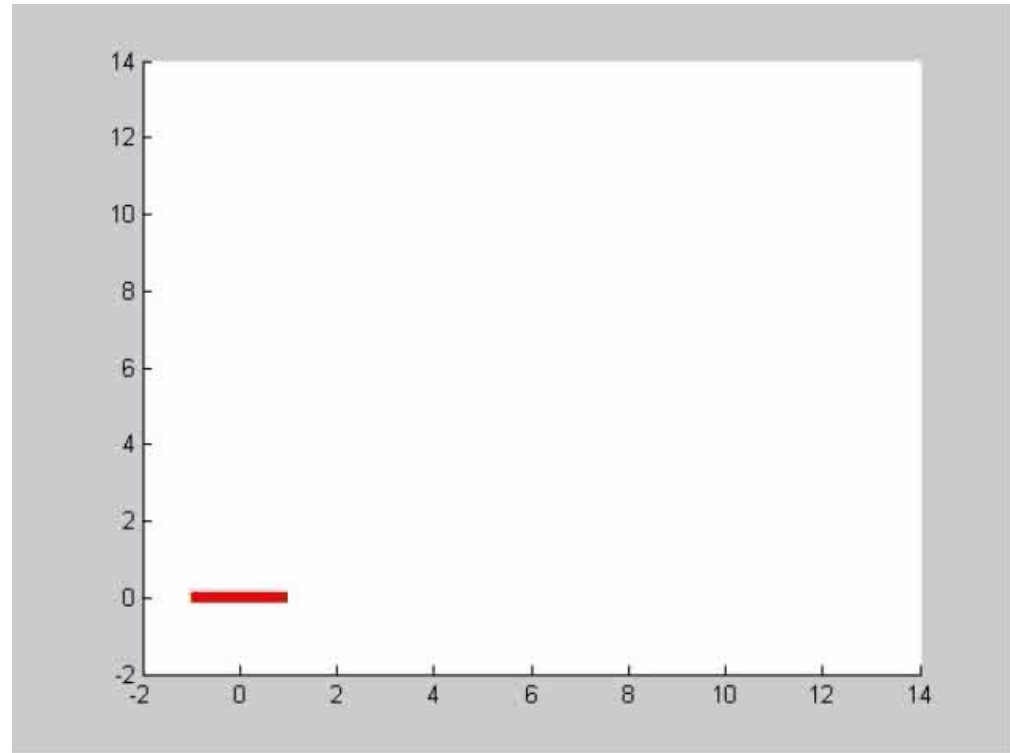


Kaströrelse för en stav

Begynnelsefart: 15 m/s

Begynnelsevinkel: 75°

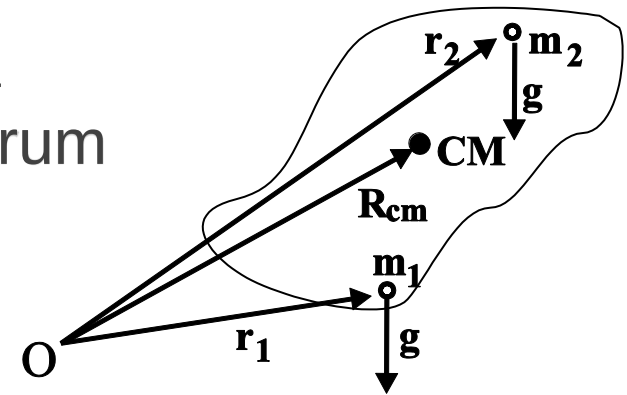
**Begynnelsevinkel-
hastighet: 10 rad/s**



Gravitationen på kroppen är detsamma som om hela massan fanns i masscentrum

Kraften på masscentrum:

$$\bar{F}_g = -M\bar{g} = M \frac{d\bar{V}_{cm}}{dt} \iff \frac{d\bar{V}_{cm}}{dt} = -\bar{g}$$



Masscentrum rör sig enligt
formlerna för kaströrelse:

$$x_{CM} = v_0 \cos(\alpha)t$$

$$y_{CM} = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Rotation kring masscentrum: ($R_{CM} = 0$ i masscentrum koordinatsystem)

$$\bar{\tau} = \bar{R}_{CM} \times (M\bar{g}) = 0 \times (M\bar{g}) = \frac{d\bar{L}}{dt}$$

Rörelsemängdsmomentet L kring masscentrum är konstant



Kroppen roterar med konstant vinkelhastighet runt masscentrum

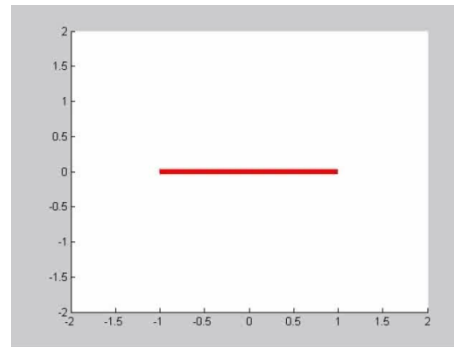
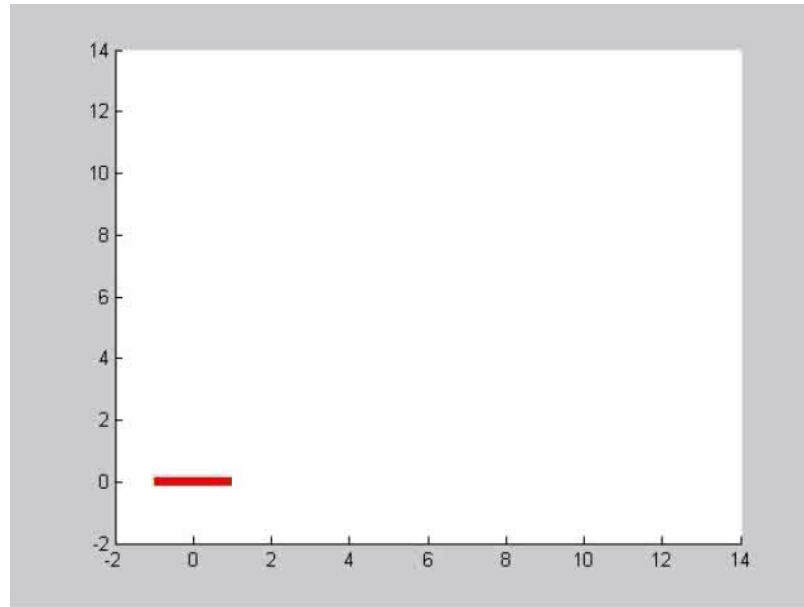


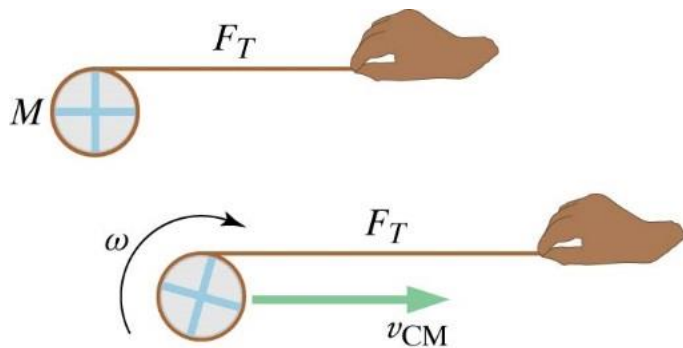
Kaströrelse för en stav

Begynnelsefart: 15 m/s

Begynnelevinkel: 75°

**Begynnelevinkel-
hastighet:** 10 rad/s





Beräkna:

- 1) accelerationen: $a_{CM} = dv_{CM}/dt$
- 2) vinkelaccelerationen: $\alpha = d\omega/dt$

$$\bar{L}_{Rot} = I\bar{\omega}$$

$$\bar{L}_{CM,A} = \bar{r}_{CM} \times \bar{p}_{CM}$$

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}$$

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}$$

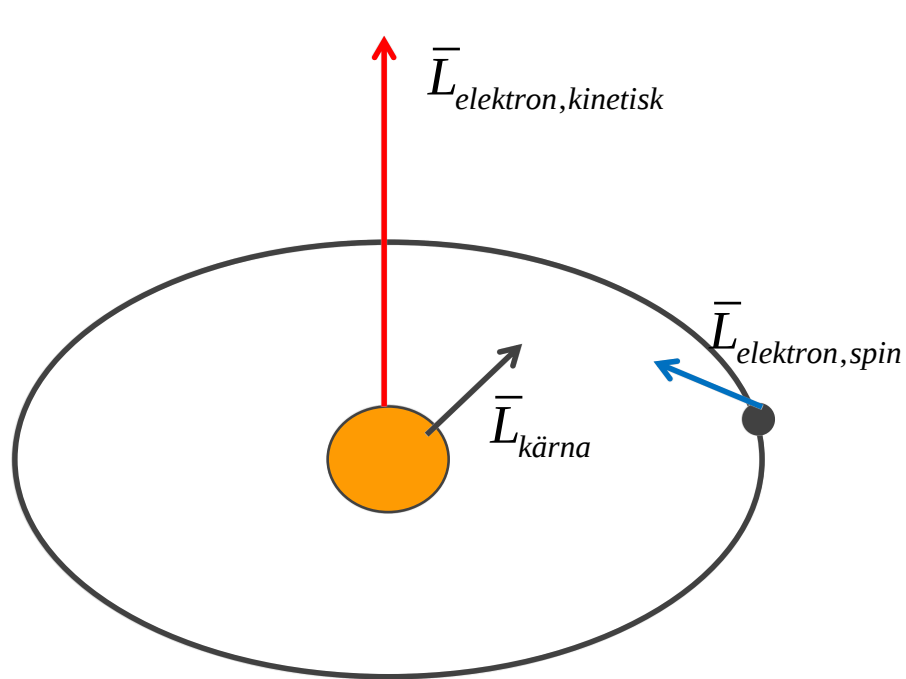
$$I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$$

$$\bar{L}_A = \bar{L}_{CM,A} + \bar{L}_{Rot}$$

Analysera sedan situationen också från en punkt där vridmomentet $T = dL/dt = 0$.



Rörelsemängdsmoment för atomen (Atomin liikemäärämomentti)



$$\vec{L}_{tot} = \sum \vec{L}$$



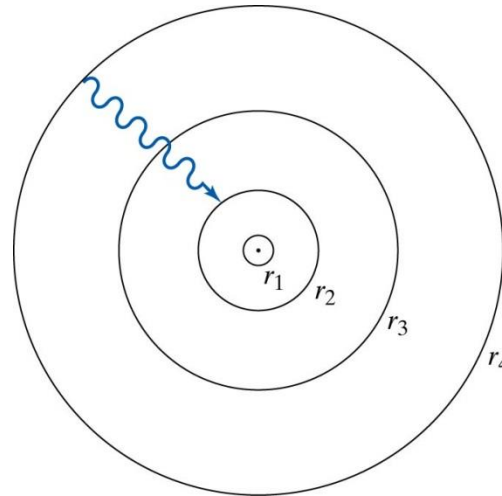
Kvantisering av rörelsemängdsmoment (Liikemäärämomentin kvantittuminen)

Atomens kinetiska rörelsemängdsmoment kan bara ha hela antal rörelsemängdsmoment kvanta:

Bohr atommodell

$$|L_{trans}| = rp = N\hbar$$

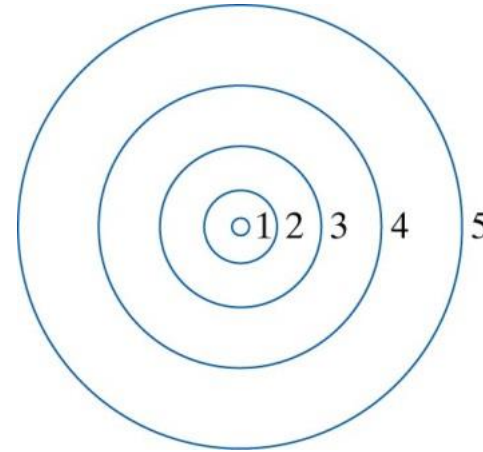
$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1.05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$



$$|F_{el}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{mr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

$$|L_{trans}| = rp = N\hbar \quad \Rightarrow \quad p^2 = \frac{N^2 \hbar^2}{r^2}$$



$$\Rightarrow r = \frac{N^2 \hbar^2}{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) e^2 m} \approx \underline{\underline{N^2 (0.53 \times 10^{-10} \text{ m})}} \quad \text{För väte}$$



$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

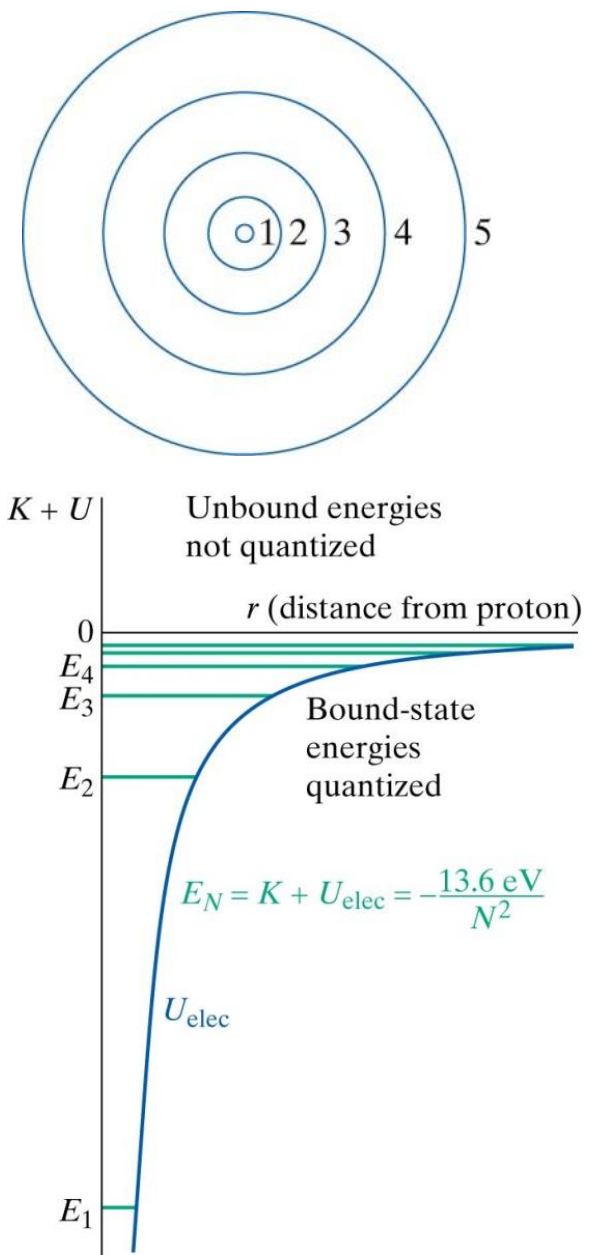
**Elektriska
potentiella
energin:**

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

$$E = K + U = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

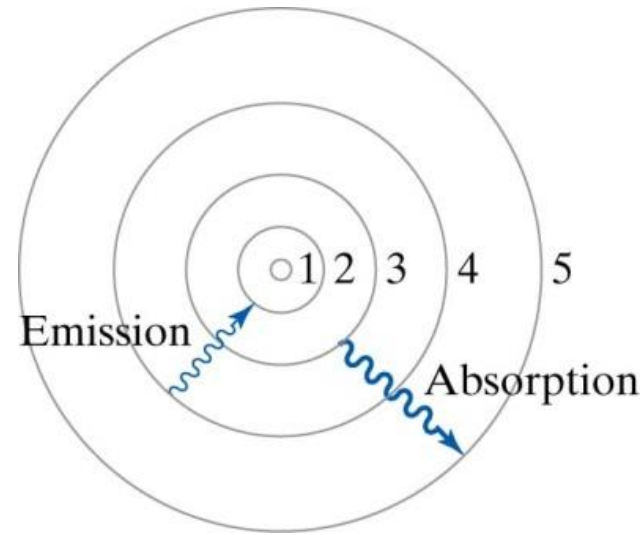
$$r = \frac{N^2 \hbar^2}{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) e^2 m}$$

$$\Rightarrow E \approx -\frac{2.17 \times 10^{-18} \text{ J}}{N^2} \approx -\frac{13.6 \text{ eV}}{N^2}$$



$$E \approx -\frac{2.17 \times 10^{-18} \text{ J}}{N^2} \approx -\frac{13.6 \text{ eV}}{N^2}$$

$$|L_{trans}| = rp = N\hbar$$

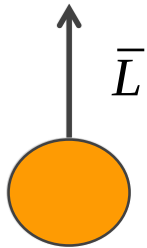


Begränsningar för bohrmodellen

- Elektronen är ett sannolikhetsmoln kring kärnan
- För grundtillståndet ($N=1$) är faktiskt atomens kinetiska rörelsemängdsmoment = 0!
- **Fotonen har rörelsemängdsmoment: $\hbar$**



Spin för partiklar



Partikel	Partikel spin (inre rörelsemängdsmoment) $\vec{L}$ (J eller S)
----------	---

Elektron	$\frac{1}{2} \hbar$
----------	---------------------

Kvark (u=upp d=down c=charm s=strange t=top b=bottom)	$\frac{1}{2} \hbar$
--	---------------------

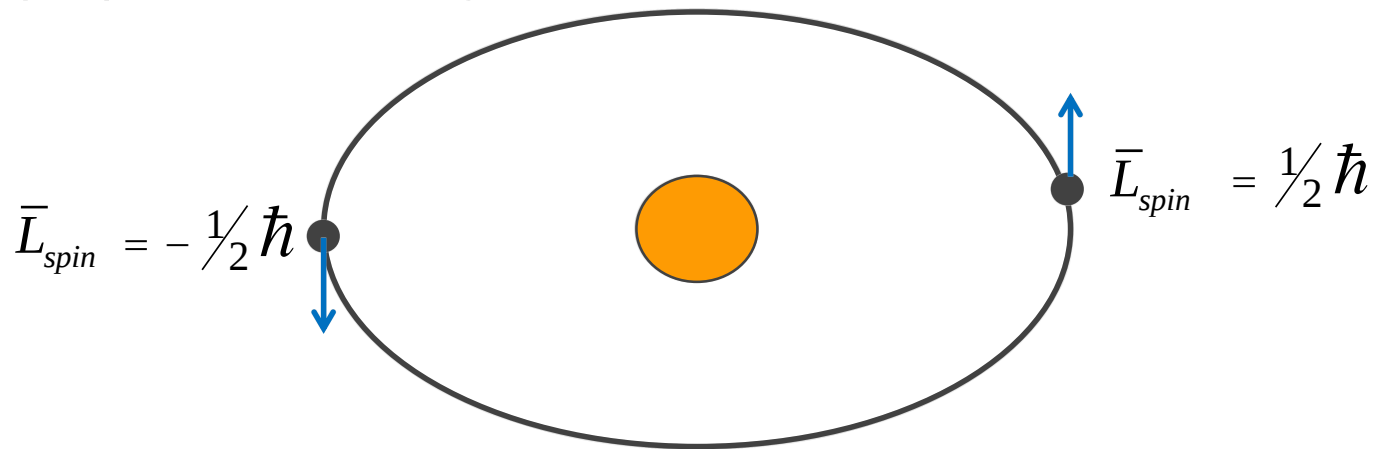
Proton (uud)	$\frac{1}{2} \hbar$
--------------	---------------------

Neutron (udd)	$\frac{1}{2} \hbar$
---------------	---------------------



Två lägsta elektronnivåerna har:

- 1) Kinetiska rörelsemängdsmomentet = 0
- 2) Spin rörelsemängdsmomentet = 0



Två fermioner ($\bar{L}_{spin} = \frac{1}{2}\hbar$) kan inte vara i samma kvanttillstånd (kallad Pauli princip)

Motsats till bosoner (hela antal spin) som alla kan vara i lägsta energitillståndet (Bose-Einstein kondensation)

$$L_x, L_y, L_z = s \cdot \hbar$$

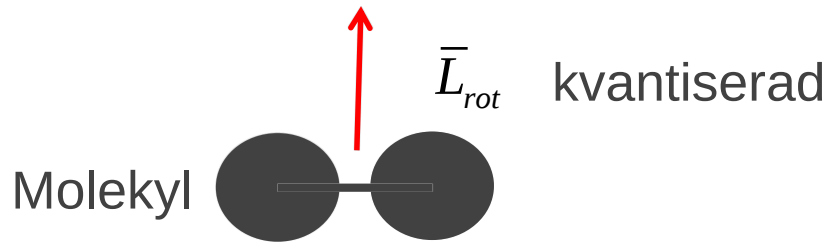
$$s = 0, 1, 2, \quad \text{eller} \quad s = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$$

...

$$L^2 = l(l+1)\hbar$$

$$l = 0, 1, 2, \dots \quad \text{eller} \quad l = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$$





→ Kinetiska rotationsenergin är kvantiserad $K = \frac{L_{rot}^2}{2I}$

$$L_x, L_y, L_z = s \cdot \hbar \quad s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$$

$$L^2 = l(l+1)\hbar \quad l = 0, 1, 2, \dots$$



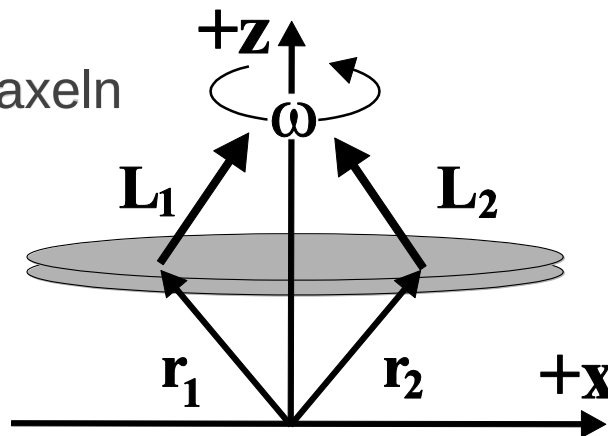
Rotationssymmetrisk kropp

Kroppen är **symmetriskt** format kring z-axeln



x- och y-komponenterna av rörelsemängds-momentena på motsatta sidorna tar ut varandra

Kroppens rörelsemängdsmoment är parallellt med symmetriaxeln och vinkelhastigheten



$$\bar{\mathbf{L}} = \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \times m_i \bar{\mathbf{v}}_i$$

$$\bar{\mathbf{L}} = I \bar{\boldsymbol{\omega}}$$

$$\bar{L}_z = I \bar{\omega}_z$$



En vridkraft kring z ökar vinkelhastigheten kring z (α_z = vinkelaccelerationen)

$$\bar{\tau}_z = \frac{d\bar{L}_z}{dt} = I \frac{d\bar{\omega}_z}{dt} = I \alpha_z$$



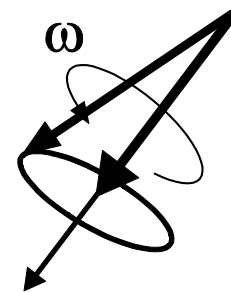
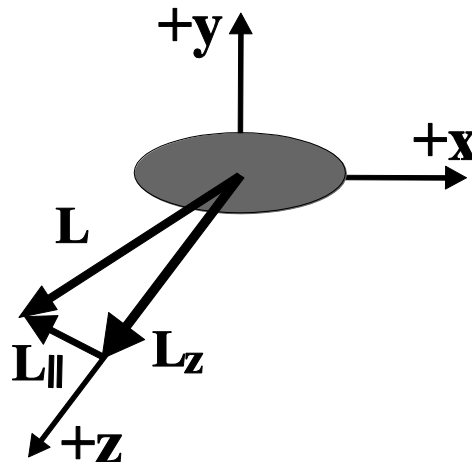
Inte rotationssymmetrisk kropp

Rotationsaxel inte är en symmetriaxel för kroppen



Rörelsemängdsmomentet för kroppen är **inte** parallell med rotationsaxeln

$$\frac{d\bar{L}_x}{dt} = \bar{\tau}_x \neq 0 \quad \frac{d\bar{L}_y}{dt} = \bar{\tau}_y \neq 0$$



→ Kroppen skakar då den roterar!

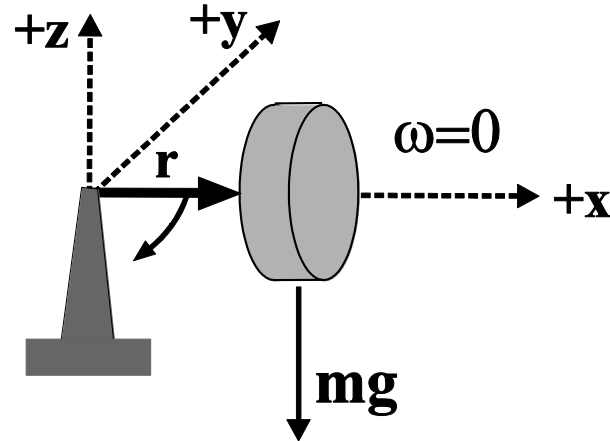


Precession

a) Svänghjulet roterar inte

Kraftmoment: $\bar{\tau} = \bar{r} \times (m\bar{g})$

→ $\bar{\tau}_y = \bar{r}_x \times (-m\bar{g}_z)$



$$\bar{\tau}_y = \frac{d\bar{L}_y}{dt}$$

$$\Delta\bar{L}_y = \bar{\tau}_y \Delta t$$

$$\bar{L} = I\bar{\omega} \quad \Delta\bar{\omega}_y = \frac{\Delta\bar{L}_y}{I}$$

Svänghjulet faller ner tills det träffar stativet



Precession

b) Svänghjulet roterar med vinkelhastigheten ω

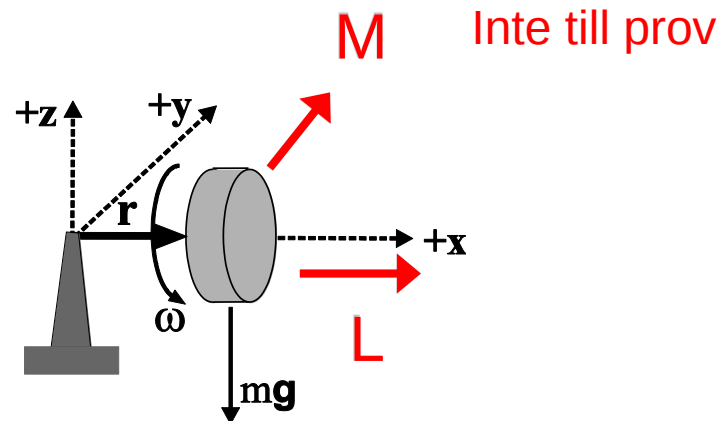
Tiden $t = 0$

Rörelsemängdsmomentet
i x-riktning

$$\bar{L} = I\bar{\omega}$$

Kraftmomentet
i y-riktning

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times (m\bar{g})$$



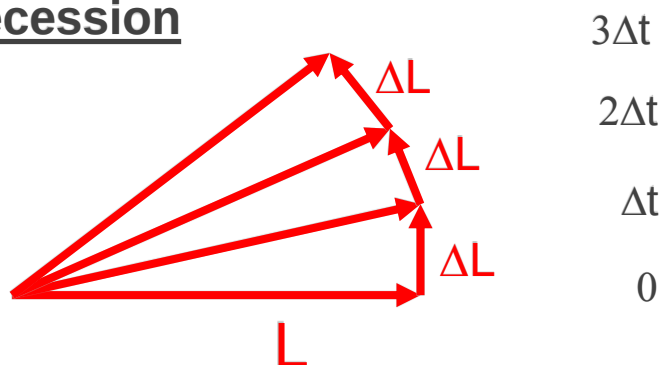
Tiden $t = \Delta t$

**Svänghjulet faller inte nedåt,
utan roterar horisontellt !!**

$$\bar{\tau} = \frac{\Delta \bar{L}}{\Delta t}$$

$$\Delta \bar{L} = \bar{\tau} \Delta t \quad \Rightarrow \quad \bar{L} = \bar{L} + \Delta \bar{L}$$

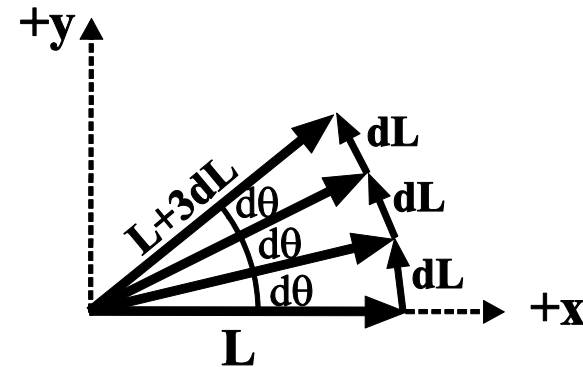
Precession



Precession

Vinkelhastigheten med vilken svänghjulet kommer att rotera kring z-axeln:

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{|dL|/|L|}{dt} = \frac{1}{|L|} \frac{|dL|}{dt} = \frac{|\tau|}{|L|} \\ &= \frac{|r \times (mg)|}{|I\omega|} = \frac{mrg}{I\omega}\end{aligned}$$



Vinkelhastighet för precession:

$$\Omega = \frac{mrg}{I\omega}$$

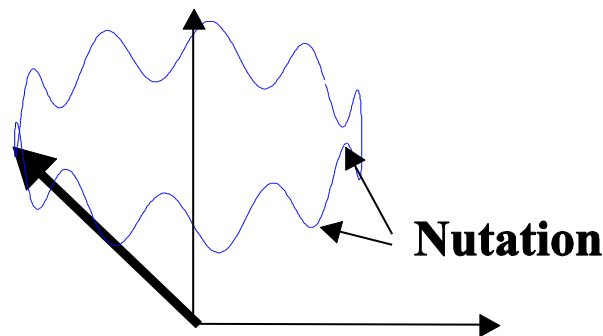
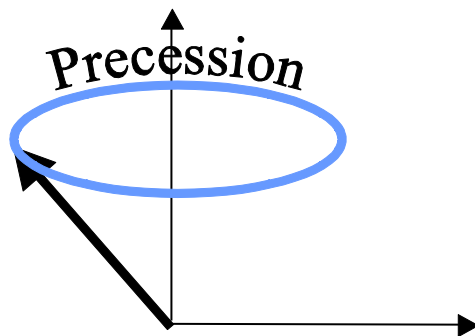


Precession

En noggrannare studie visar att rörelsemängdsmomentet inte helt bestäms av svänghjulet, utan också av en icke horisontell del associerat med precessionsrörelsen + friktion

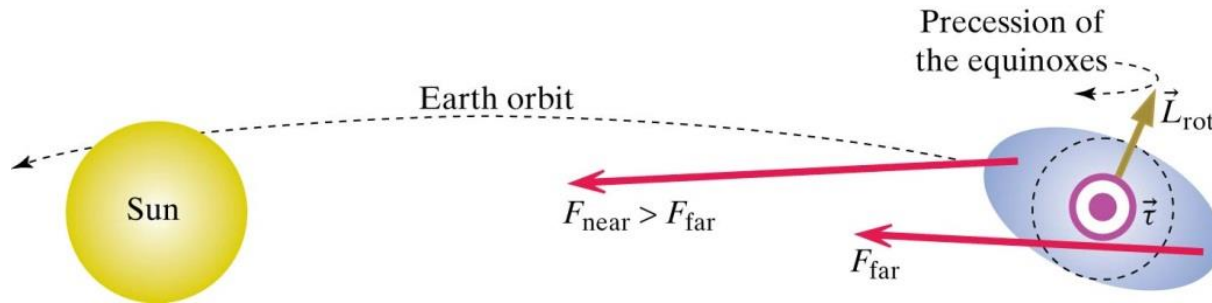
Denna effekt syns klarare ifall svänghjulets hastighet minskar och vinkelhastigheten för precession ökar

Då börjar svänghjulet också gunga upp och ner medan den precesserar. Denna upp och ner rörelse kallas för **nutation**

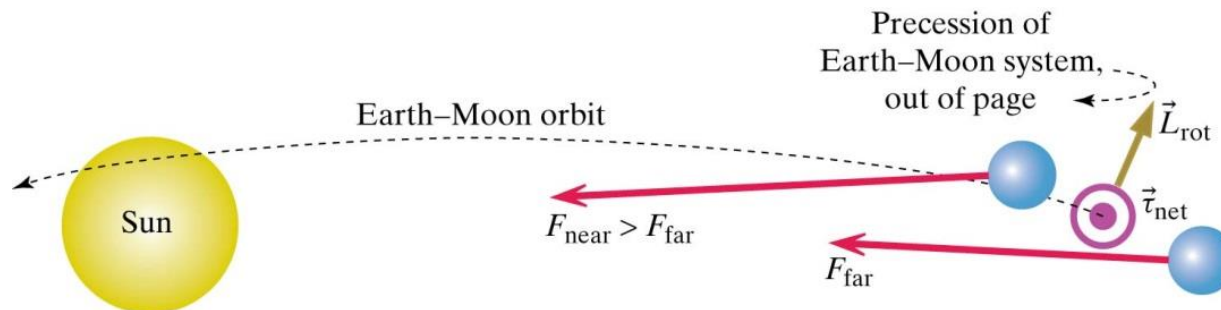


Vridkraft på jorden

- Jordens axelprecession sker med en cykel på 26 000 år

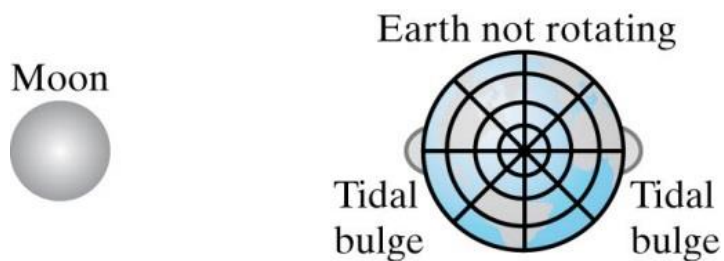


- Jorden-månen precession sker med en cykel på ca. 18 år



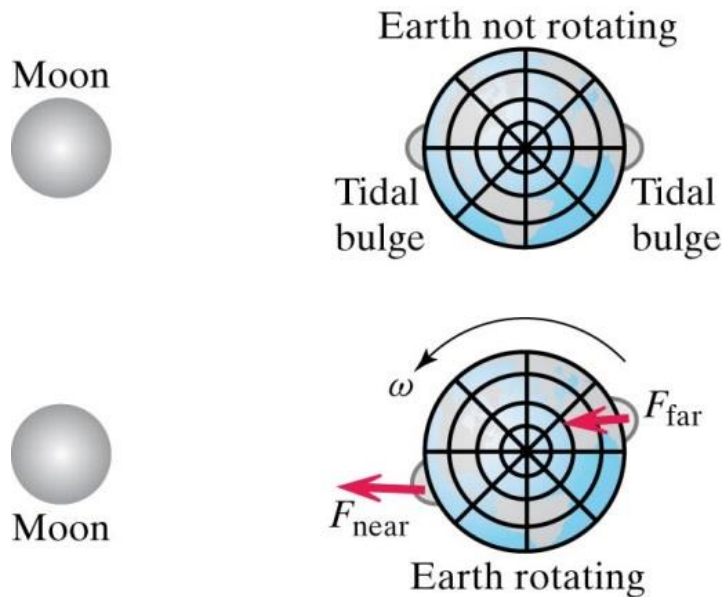
Vridkraft på jorden

- Jordens rotation blir långsammare och månens avstånd större p.g.a. ebb flod



Vridkraft på jorden

- Jordens rotation blir långsammare och månens avstånd större p.g.a. ebb flod



Lärandemål:

- Kunna beräkna både rörelsemängden och rörelsemängdsmoment i 3D
- Kunna använda rörelsemängdsmoment principen för att beräkna hur systemets rörelsemängdsmoment ändrar som funktion av tiden p.g.a. ett kraftmoment
- Kunna använda bevarande av rörelsemängdsmomentet för ett system med många partiklar
- Kunna beräkna positionen för roterande objekt

