6. Energiprincipen (energiaperiaate)

Lärandemål:

- Kunna beräkna den totala energin (viloenergi + kinetisk energi) för en partikel
- Kunna beräkna den totala energin för ett mångpartikel system (viloenergi, kinetisk energi och gravitations och elektrisk potentiell energi)
- Kunna relatera förändringar i systemets energi till arbete som omgivningen gjort
- Kunna analysera i detalj processer som innebär förändringar i potentiell energi, kinetisk energi och viloenergi
- Kunna rita och förstå bilder där ett mångpartikel systems energi är ritad som funktion av separationen mellan partiklarna

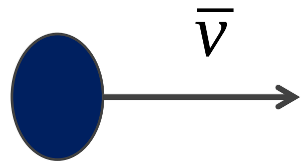
Totala energin är alltid konstant:

$$\boxed{\Delta E_{system} = -\Delta E_{omgivning}}$$

Relativistisk rörelsemängd för en partikel

$$\bar{p} = \frac{m\bar{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\bar{v}$$

lim v ⟶ 0



Vad är den relativistiska energin för en partikel?
Vad blir partikelns energi vid låga hastigheter?

Taylor serie

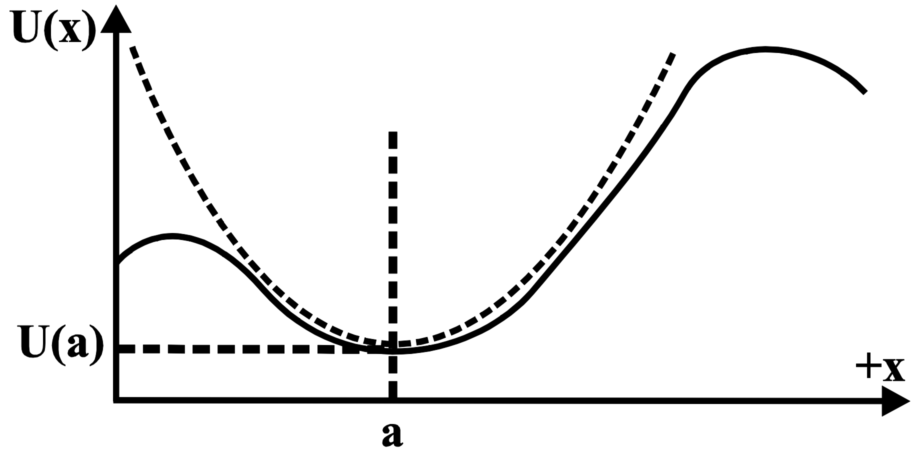
En godtycklig funktion kan skrivas som en Taylor serie

$$\boxed{U(x) = U(a) + \frac{(x-a)}{1!}\frac{dU_{(x=a)}}{dx} + \frac{(x-a)^2}{2!}\frac{d^2U_{(x=a)}}{dx^2} + \frac{(x-a)^3}{3!}\frac{d^3U_{(x=a)}}{dx^3} + \ldots}$$

Ifall funktionen har minimum vid x=a är: $\frac{dU_{(x=a)}}{dx} = 0$

Och ifall (x-a) är liten kan alla termer med potensen större än 2 lämnas bort

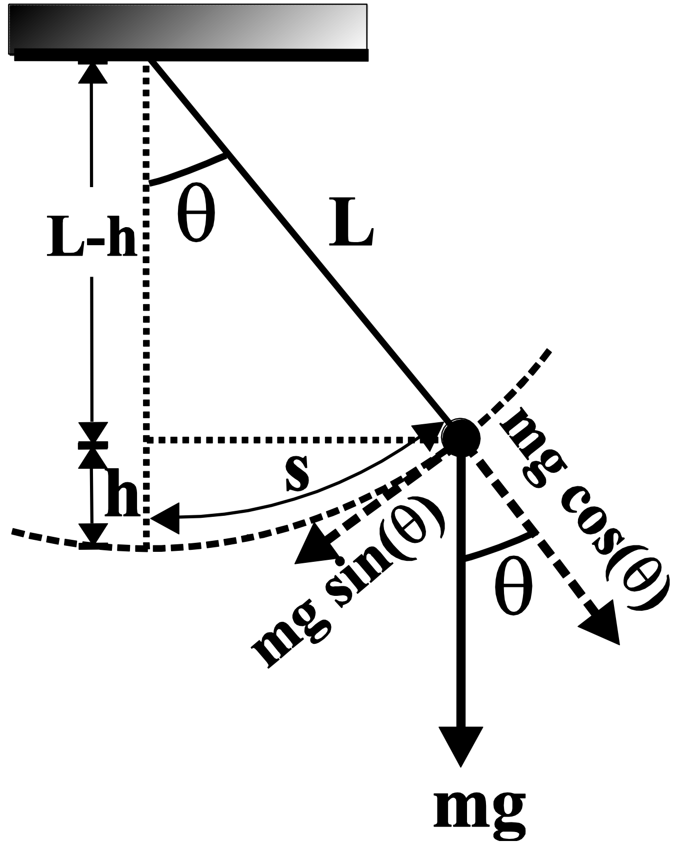
$$\Rightarrow \boxed{U(x) = U(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\frac{d^2U_{(x=a)}}{dx^2}}$$



Exempel

Visa att potentialenergi-funktionen för en simpel pendel ges av:

$$U(s) \approx \frac{mg}{2L} s^2$$



$$U = mgh \qquad \cos(\theta) = \frac{L-h}{L}$$

⇨ $U = mgL[1-\cos(\theta)]$

⇨ $h = L[1-\cos(\theta)]$

cos(θ) som en Taylorserie kring θ = 0

cos(θ) som en Taylorserie kring θ = 0

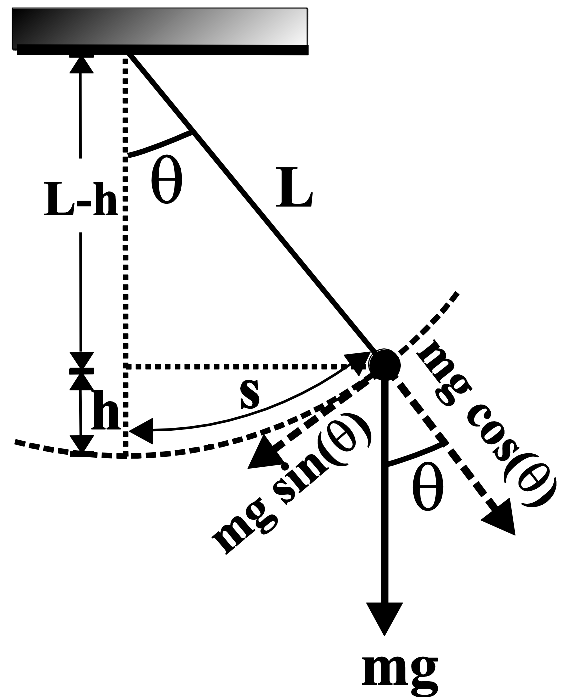
$$U(x) = U(a) + \frac{(x-a)}{1!}\frac{dU_{(x=a)}}{dx} + \frac{(x-a)^2}{2!}\frac{d^2U_{(x=a)}}{dx^2} + \frac{(x-a)^3}{3!}\frac{d^3U_{(x=a)}}{dx^3} + \ldots$$

$$\cos(\theta) \approx \cos(0) + \frac{(\theta-0)}{1!}\frac{d\cos(\theta)_{(\theta=0)}}{d\theta} + \frac{(\theta-0)^2}{2!}\frac{d^2\cos(\theta)_{(\theta=0)}}{d\theta^2} + \frac{(\theta-0)^3}{3!}\frac{d^3\cos(\theta)_{(\theta=0)}}{d\theta^3} + \frac{(\theta-0)^4}{4!}\frac{d^4\cos(\theta)_{(\theta=0)}}{d\theta^4}$$

$$\cos(\theta) \approx \cos(0) - \frac{\theta}{1!}\sin(\theta)_{(\theta=0)} - \frac{\theta^2}{2!}\cos(\theta)_{(\theta=0)} + \frac{\theta^3}{3!}\sin(\theta)_{(\theta=0)} + \frac{\theta^4}{4!}\cos(\theta)_{(\theta=0)}$$

$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!}$$

Visa att potentialenergi-funktionen för en simpel pendel ges av: $U(s) \approx \frac{mg}{2L} s^2$



$$U = mgh \qquad \cos(\theta) = \frac{L-h}{L}$$

$$\Rightarrow \quad U = mgL[1-\cos(\theta)]$$

$$\Rightarrow \quad h = L[1-\cos(\theta)]$$

cos(θ) som en Taylorserie kring θ = 0

$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!}$$

Definitionen för vinkeln θ=s/L

$$\Rightarrow \quad U \approx mgL\left[1-(1-\frac{\theta^2}{2})\right] = mgL\frac{\theta^2}{2} = mgL\frac{s^2}{2L^2} = \underline{\underline{\frac{mg}{2L}s^2}} \quad \square$$

Relativistisk energi för en partikel

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

$$\lim_{v \to 0} E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 \qquad (\text{inte}: \frac{1}{2}mv^2)$$

Expanderar relativistiska energin som Taylor (binomial) serie kring v^2/c^2

$$\Rightarrow E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{v^4}{c^4}\right) + \ldots\right]$$

Relativistisk energi för en partikel

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad = mc^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)+\ldots\right]$$

Första termen kroppens viloenergi: mc^2

Resten, kroppens kinetiska energi: $K = mc^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)+\ldots\right]$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = mc^2 + K}$$

$$v \ll c \quad \Rightarrow \quad E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\boxed{E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2}$$