4. Kontaktkrafter (Kosketusvoimat)

Lärandemål:

- Förstå och kunna berätta hur fjäder-boll modellen kan förklara många fenomen för fasta ämnen
- Matematiskt kunna beräkna densiteten, Youngs modul och ljudets hastighet i fasta ämnen genom att betrakta den interatomära kraften som en fjäderkraft
- Kunna analysera system som påverkas av spänning, kompression, friktion och lyftkrafter via rörelsemängdsprincipens derivata
- Kunna analytiskt och numeriskt (iterativt) förklara rörelsen för kroppar som påverkas av fjäderkraft
- Kunna bestämma ljudets hastighet i fasta ämnen utgående från materialets mikroskopiska och makroskopiska egenskaper

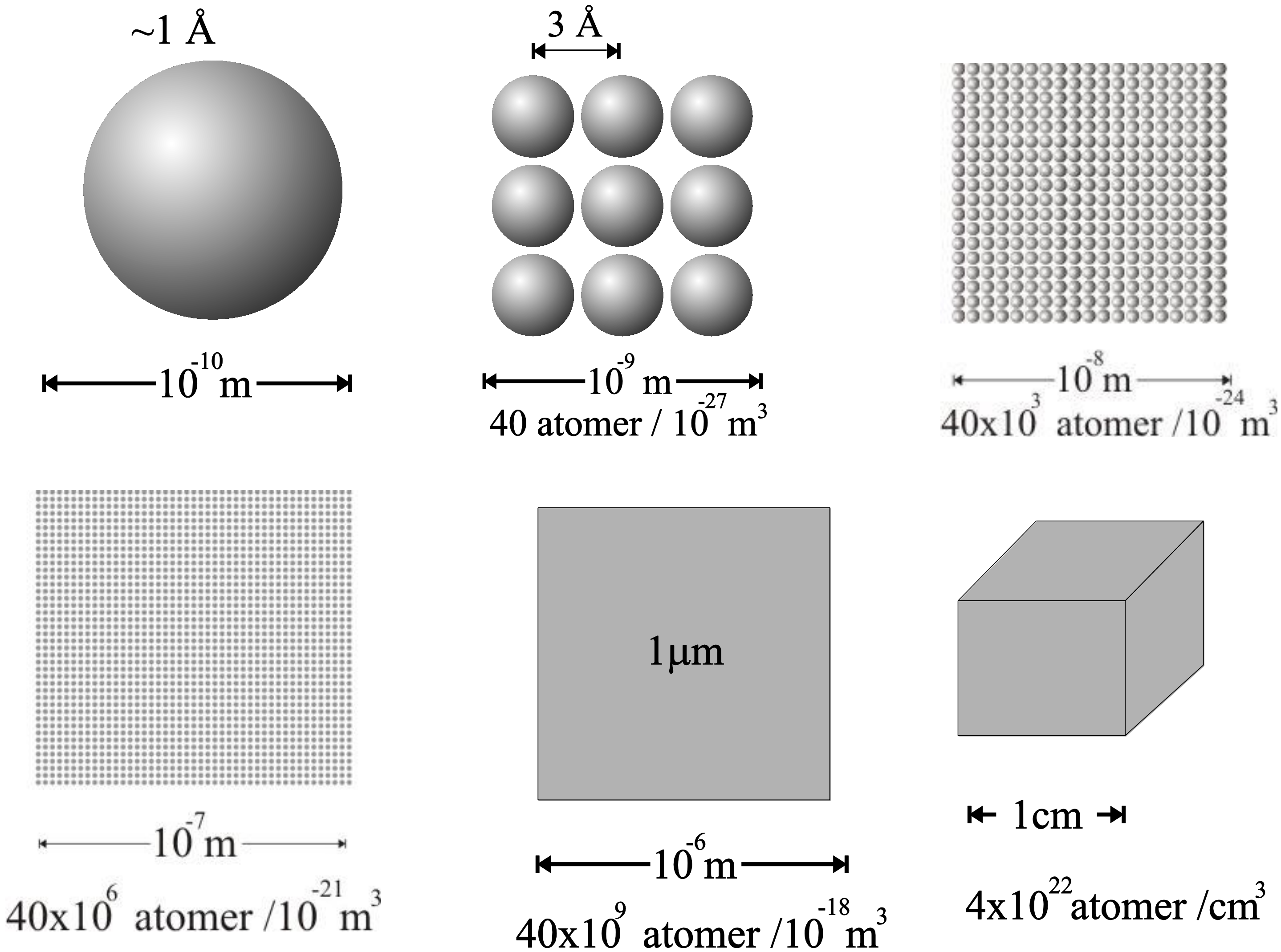
Utvidgning av partikelmodellen

Hittills har vi härlett rörelsen för kroppar från partiklar till stjärnor genom att bara betrakta dem som punktpartiklar

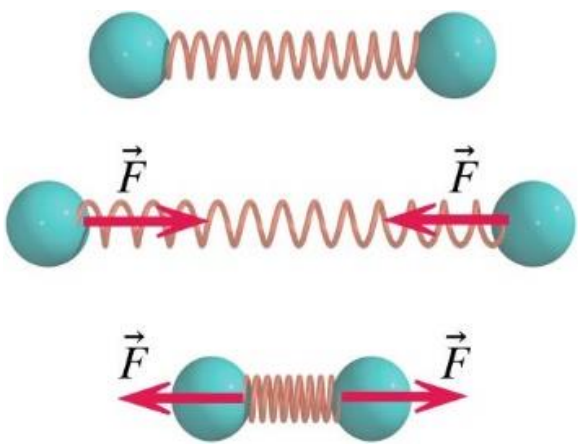
För kroppar eller partiklar som är i fysisk kontakt med varandra kan inte partikelmodellen mera användas

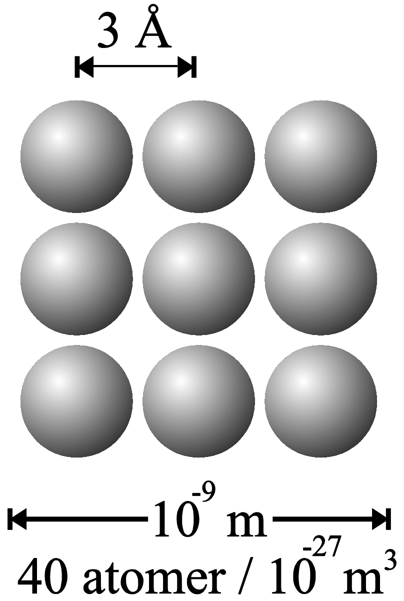
Punktpartiklar har ingen inre struktur och kan därför inte deformeras

Från atomer till fasta ämnen



Fjäder-Boll modellen av fasta ämnen

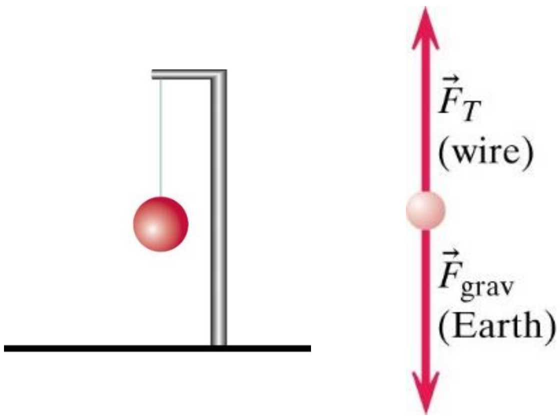




- Atomerna rör på sig hela tiden
- Atomerna attraherar varandra på ett visst avståndsområde
- Atomerna repellerar varandra om de kommer för nära varandra

Du har en metallbit i din hand. Hur kan du se att påståendena som att ”atomerna attraherar varandra” och ”atomerna repellerar varandra om de är för nära varandra” verkar att stämma?

Spänningskraft (Jännitysvoima)



$$\Delta p_y = (F_T - mg)(10\ s)$$

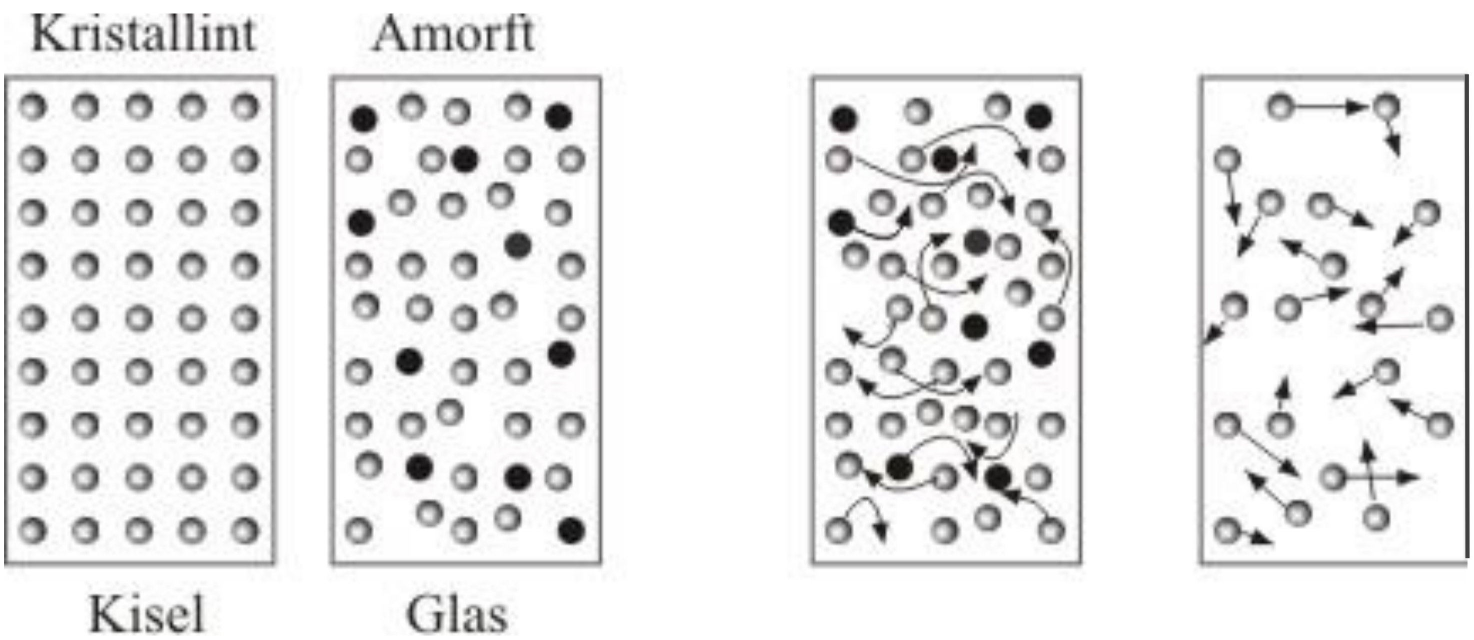
$$0 = (F_T - mg)(10\ s)$$

$$\Rightarrow \quad F_T = mg$$

Vad är spänningskraften om massan fördubblas?

Mikroskopiska bilden ges av atomer som påverkas av fjäderkrafter

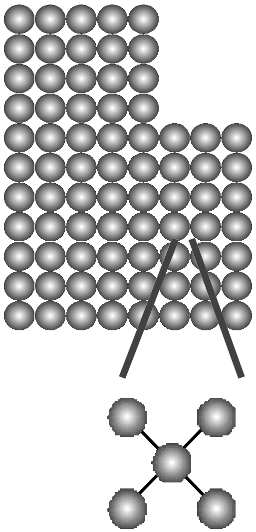
Materia indelas oftast i fasta ämnen, vätskor och gaser



Fasta ämnen

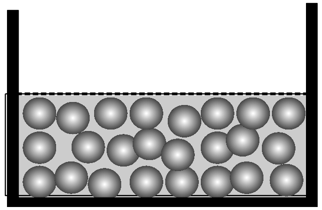
Vätskor

Gaser



Bindningarna är vinkelberoende,

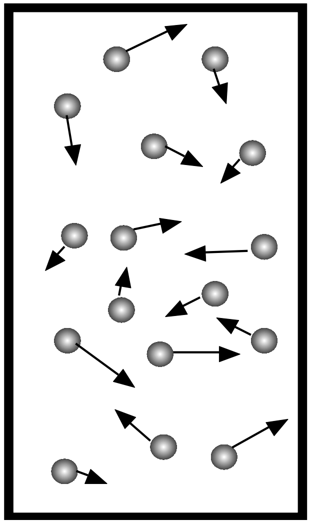
→ Fast kropp behåller sin form



Vätska har en väldefinierad yta

Atomerna i vätskan är så nära varandra dom kan

→ svårt att komprimera vätska



Gasatomerna (molekylerna) rör sig fritt

Atomerna långt från varandra → Lätt att komprimera gas

Gasatomerna kolliderar ibland med varandra och väggen

En viktig egenskap hos ett material är dess **densitet**, eller massa per volymenhet

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$$

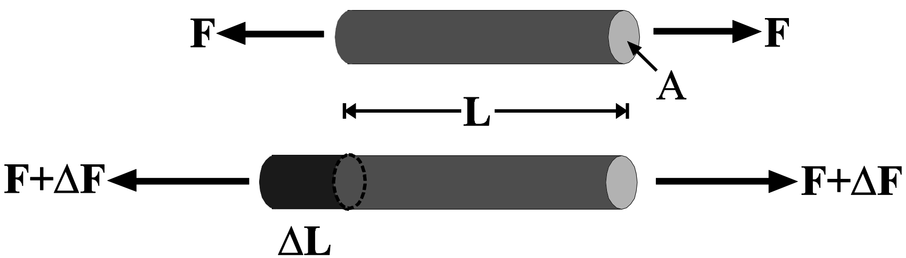
$[\rho] = kg/m^3$

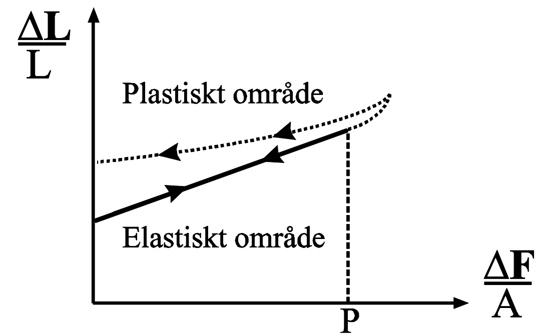
Inversa värdet av densitet kallas för: **specifik volym**

Ämne	Densitet kg/m^3
Luft (0^o C)	1.29
Is (0^o C)	917
Vatten (4^o C)	1000
Aluminium	2700
Bly	11400
Kvicksilver	13600
Guld & Wolfram	19300

Då en yttre kraft verkar på en fast kropp, ändras kroppens form och/eller volym

metalltråd med arean **A**





Kraften ökar från F till F+ΔF ⇨ Trådens längd ökar från L till L+ΔL

longitudinell **belastning** (eng. stress)

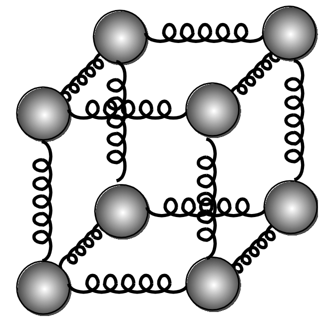
$$\boxed{\frac{\Delta F}{A} = E\,\frac{\Delta L}{L}}$$

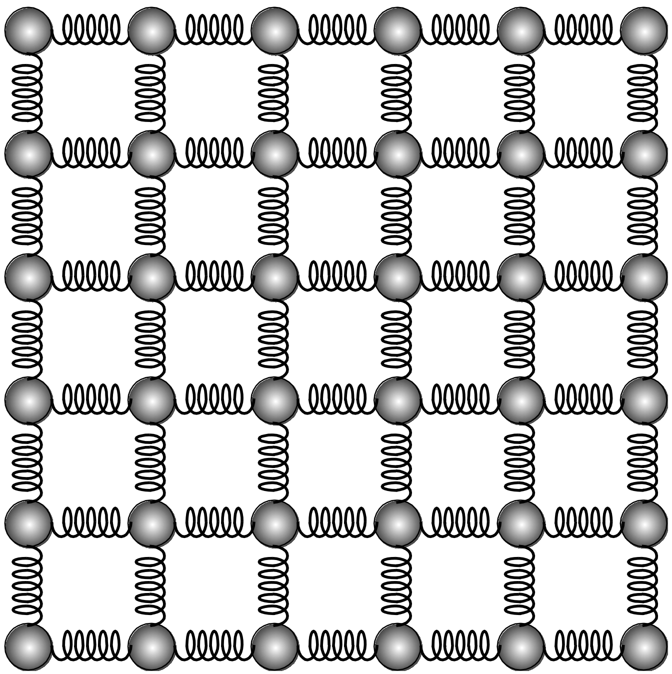
longitudinell längdökning, sträckning (eng. strain)

där ***E*** är materialets **Young modul**

Kristallina material kan ibland beskrivas som små atombollar, vilka är sammanbundna till andra atomer via små fjädrar

$3\times10^{-10}\,m$





$$\frac{\Delta F}{A} = E\,\frac{\Delta L}{L}$$

Young modul
E ~ 10^{11} N/m^2

$$\frac{\Delta F}{a^2} = E\,\frac{\Delta a}{a}$$

$$\Delta F = k\Delta a$$

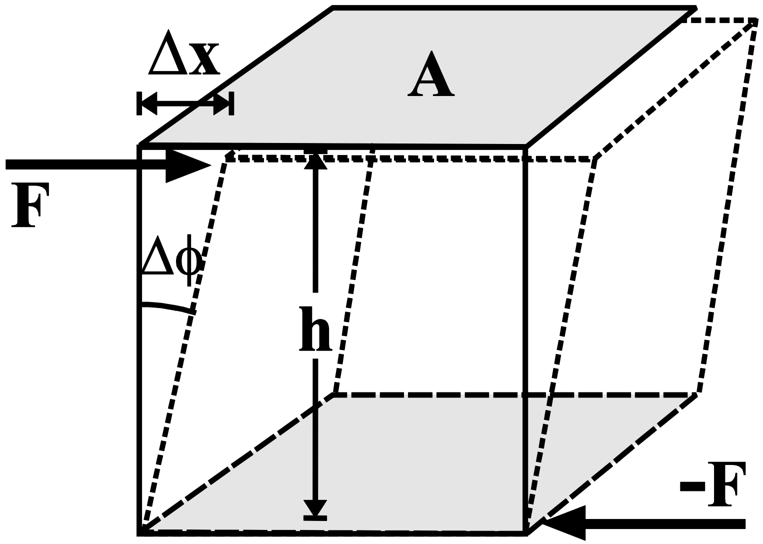
$$\frac{k\Delta a}{a^2} = E\,\frac{\Delta a}{a}$$

$$k = Ea \;\approx 10^{11}\,N/m^2\,3\times10^{-10}\,m$$

$$\approx \underline{\underline{30\;N/m}}$$

Vidare, kan vi ha
vridande belastning

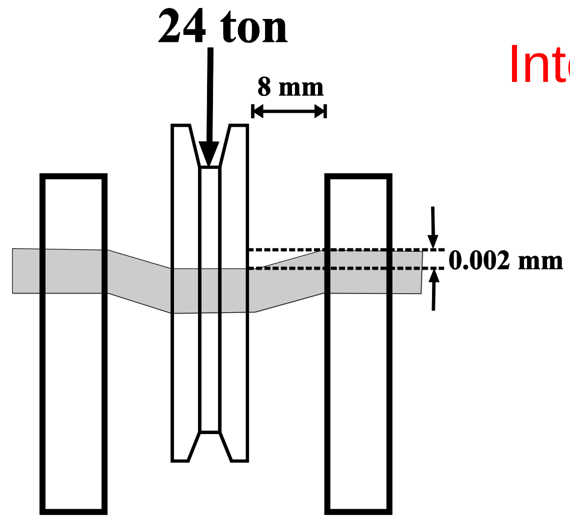
$$\boxed{\frac{\Delta F}{A} = G\frac{\Delta x}{h} = G\Delta\phi}$$



G är kroppens **vridmodul**

Inte till tenten

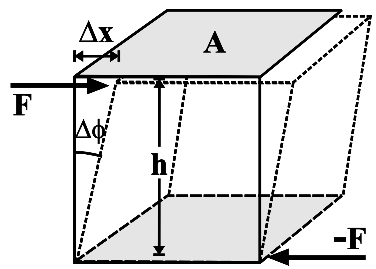
Lyftblocket på en lyftkran ligger på en axel mellan två kullager.
Hur tjockt (diameter) måste axeln som är gjord av stål minst vara för att den skall böjas maximalt 0.002 mm när 24 ton hänger i lyftblocket?
Vridmodulen G för stål är $7.5\text{x}10^{10}$ N/m^2



Vardera axeln måste bära halva vikten: $\Delta F = \dfrac{Mg}{2}$

$$\frac{\Delta F}{A} = G\frac{\Delta x}{h} = G\Delta\phi$$

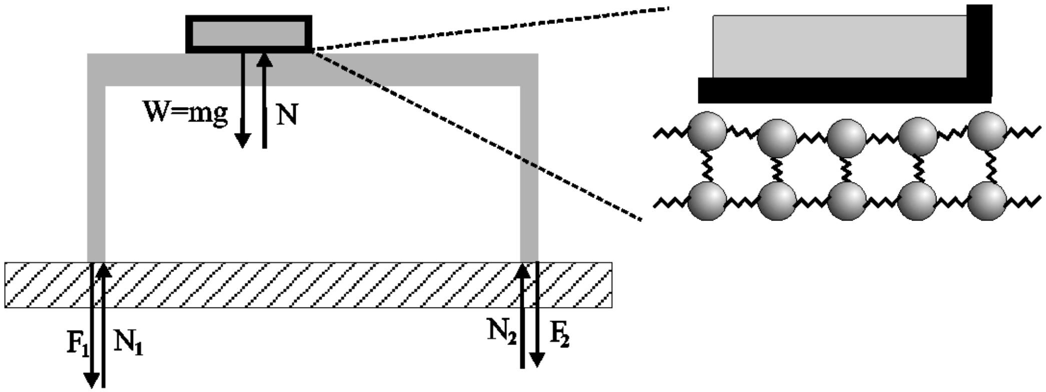
$G = 7.5\text{x}10^{10}$ N/m2
$h = 8$ mm
$\Delta x = 2$ μm



⇨ $$\frac{\Delta F}{A} = \frac{\Delta F}{\pi R^2} = G\frac{\Delta x}{h}$$

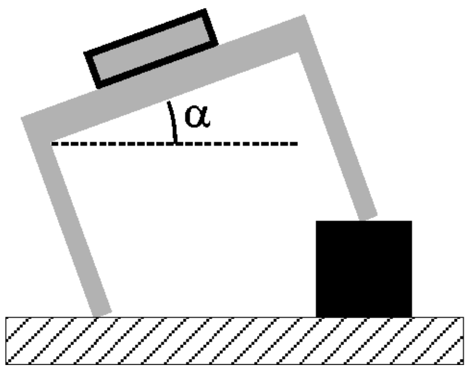
⇨ $$R = \sqrt{\frac{\Delta F \cdot h}{G\pi \cdot \Delta x}} \approx \sqrt{\frac{24\text{x}10^3\ \text{kg}\ 9.8\ \text{m/s}^2 \qquad 8\ \text{mm}}{7.5\text{x}10^{10}\ \text{N/m}^2 \quad 2 \quad \pi \quad 0.002\ \text{mm}}} \approx 4.5\ \text{cm}$$

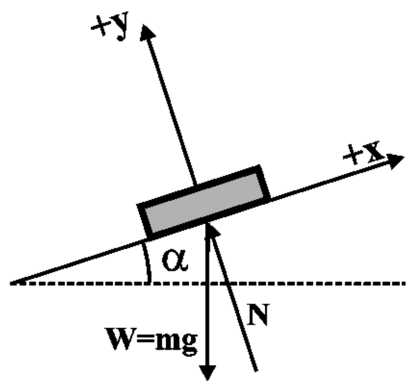
⇨ $$\underline{\underline{\text{Axelns diameter} \approx 9\ \text{cm}}}$$



Normalkraften på boken:

$$\boxed{N = -mg}$$





x: $F_x = -mg \cdot \sin(\alpha) + 0 \;\; = ma_x \;\; \Rightarrow \;\; a_x = -g \cdot \sin(\alpha)$

y: $F_y = |N| - mg \cdot \cos(\alpha) \; = 0 \;\; \Rightarrow \;\; |N| = mg \cdot \cos(\alpha)$

Friktion (kitka)

Friktion är en **kontaktkraft** som alltid finns när två olika kroppar rör varandra

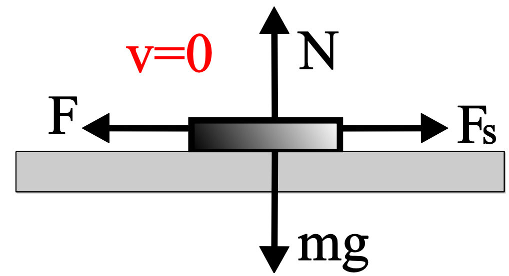
Ofta försöker man minimera friktionen, som till exempel i bilmotorer sliter motorn och ökar bensinförbrukningen

Men utan friktion, kunde vi inte gå på marken, och inga spikar skulle hållas på plats

Friktionen indelas i **statisk, kinetisk** och **rull** friktion

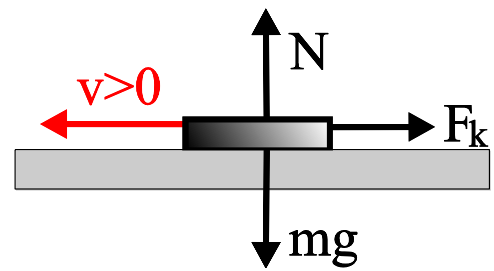
Statisk friktion $$|F_s| \le \mu_s |N|$$

μ_s statiska friktionskoefficienten



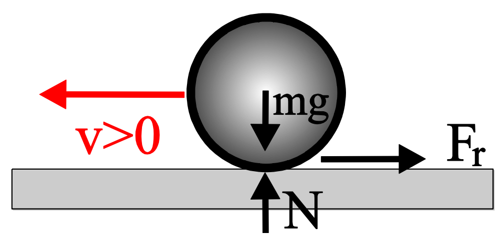
Kinetisk friktion $$|F_k| = \mu_k |N|$$

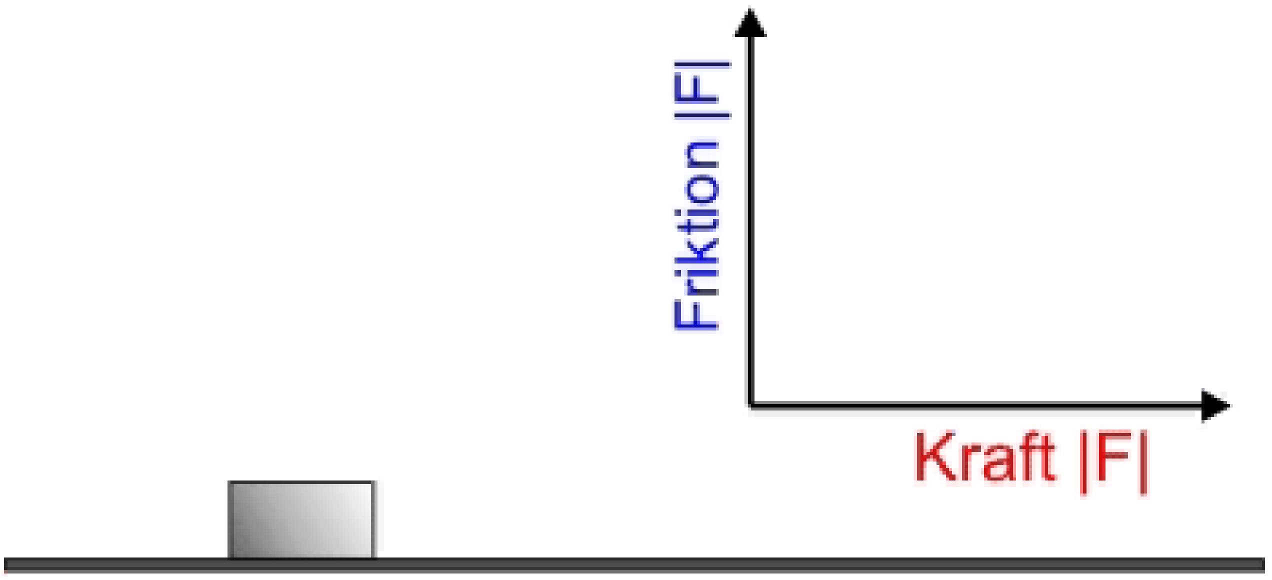
μ_k kinetiska friktionskoefficienten



Rull friktion $$|F_r| = \mu_r |N|$$

μ_r friktionskoefficienten för rullning





Det behövs mera kraft för att få en kropp att röra på sig, än att sedan hålla den i rörelse

Friktion

System	Statisk	Kinetisk	Rull
Teflon på teflon	0.04	0.04	
Stål på is		0.03	
Is på is	0.10	0.03	
Trä på snö	0.12	0.06	
Trä på trä	0.50	0.20	
Stål på stål (oljad)	0.10	0.05	
Stål på stål (torr)	0.80	0.60	0.002
Gummi på asfalt	1 - 2	0.80	0.02

En typisk bil väger ca. 1500 kg och är ca. 1.6 m bred och 1.4 m hög. Anta att bilens luftmotstånd är proportionellt till farten i kvadrat:

$$F_{lm} = \frac{C_{lm} \cdot A \cdot \rho}{2} v^2$$

där luftmotståndskoefficienten: C_{lm} ~ 0.29, luftens densitet: ρ ~ 1.2 kg/m^3, A är bilens tvärsnittsarea mot farten v.
Bilen känner också en rullfriktion mellan ringarna och vägen:

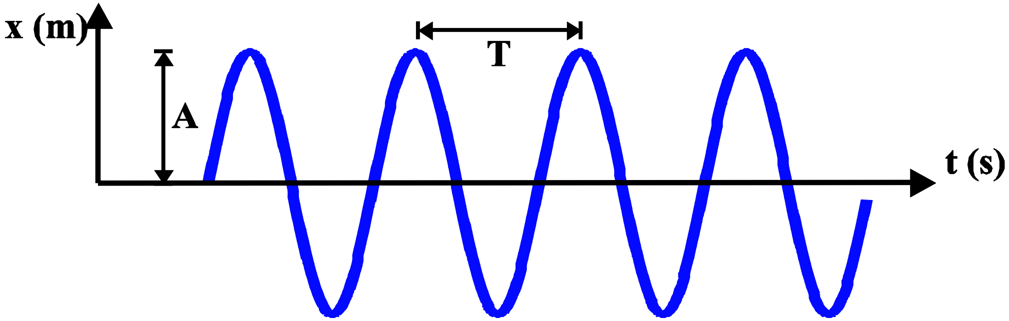
$$|F_r| = \mu_r |N|$$

där rullfriktionskoefficienten: μ_r = 0.01 och N är normalkraften på bilen. Vid vilken fart är luftmotståndet för bilen lika med dess rullfriktion?

$$v = \sqrt{\frac{\mu_r \cdot mg}{0.5 \cdot C_{lm} \cdot \rho \cdot A}} \approx \underline{\underline{19.4 \text{ m/s} (\sim 70 \text{ km/h})}}$$

Tidsberoende krafter: oscillerande rörelse
(ajasta riippuvat voimat: värähdysliike)

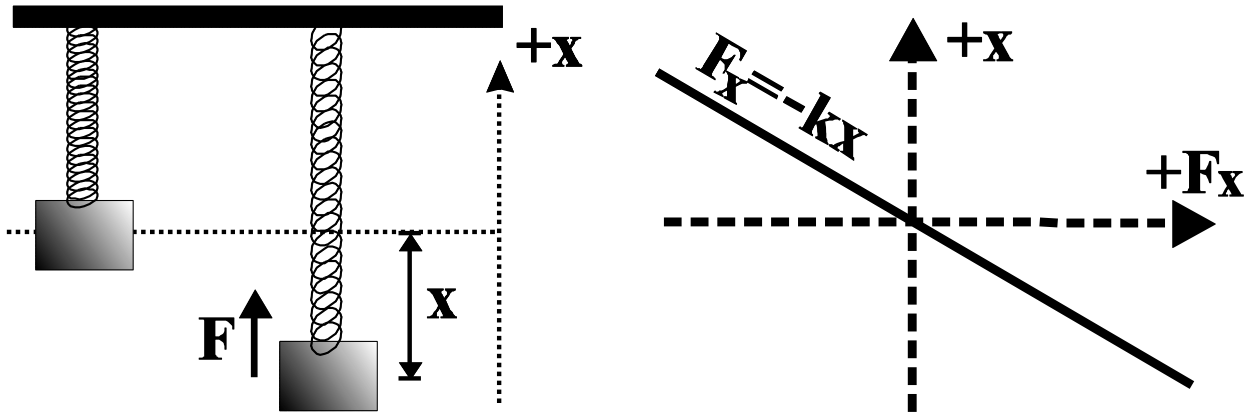
Många olika fenomen i naturen är **periodiska**



amplitud, A	Maximiförskjutning (m) eller maximiavståndet från jämviktspositionen
Cykel (jakso)	Ett helt kretslopp för systemet
Perioden, T	Tiden (s) för systemet att göra ett helt kretslopp eller cykel
Frekvens, f	Antal cykler per sekund ($f=1/T$), 1 hertz = 1 Hz = 1 cykel/s
Vinkelfrekvens, ω	Vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi f$ rad/s
Fasvinkel, ϕ (vaihekulma)	Fasvinkeln (rad) som säger oss vid vilken punkt oscillerande rörelse är vid tidpunkten noll

Simpel harmonisk rörelse (yksinkertainen harmoninen liike)

När **kraften** för ett system är proportionellt till negativa värdet av förskjutningen från jämviktspositionen får vi **simpel harmonisk rörelse**

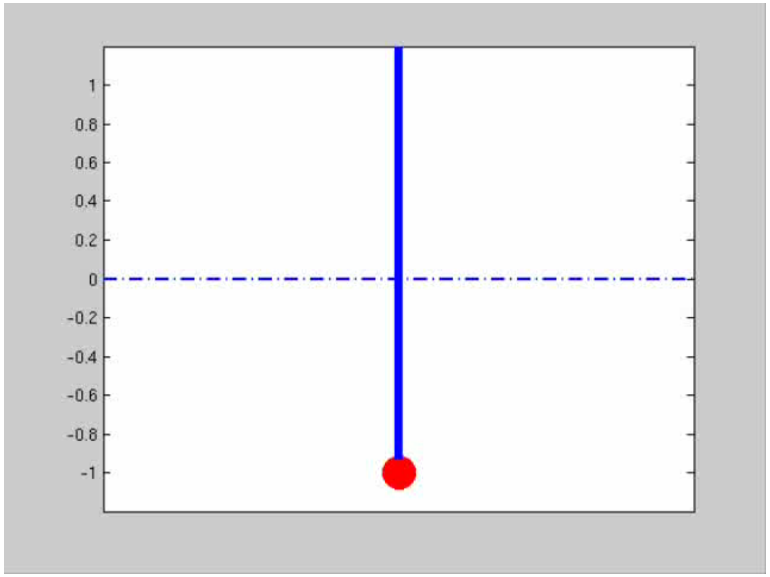


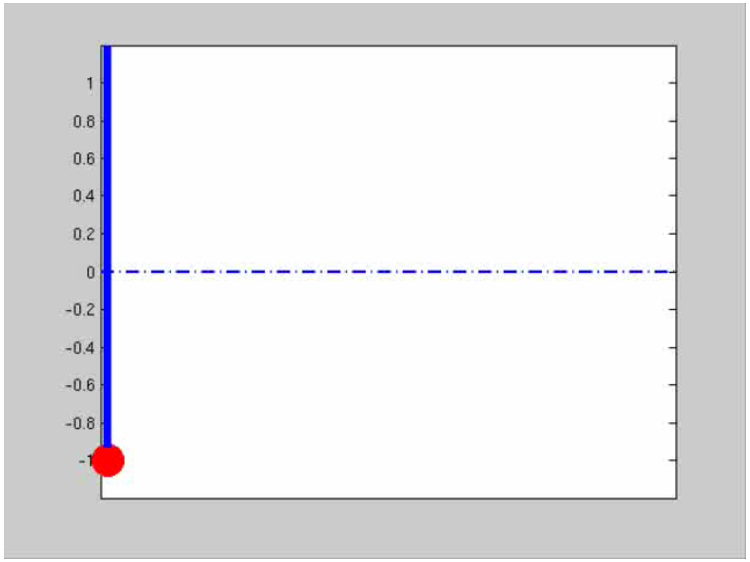
Fjäderns kraft som en funktion av förskjutningen x

Hookes lag $\boxed{F_x = -k \cdot x}$ [k]=N/m är fjäderkonstanten

Simpel harmonisk rörelse

$$F_x = -k \cdot x$$



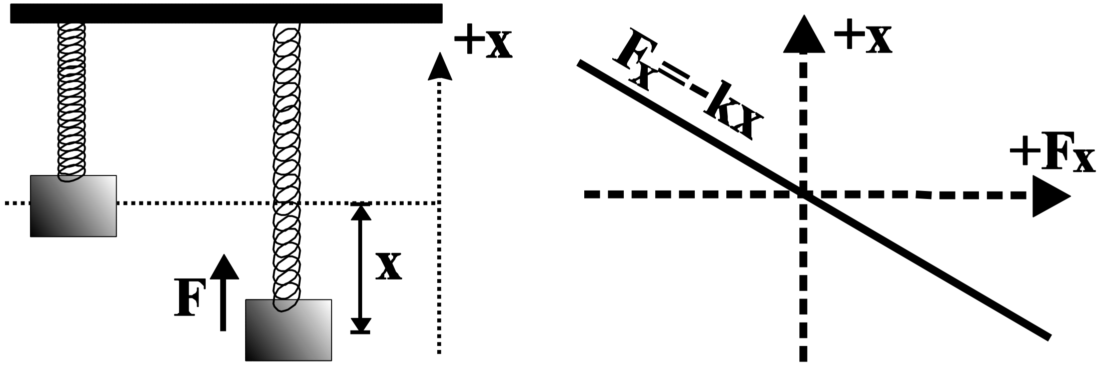


Simpel harmonisk rörelse

$$F = -k \cdot x$$

$$F = \frac{dp}{dt} = m \cdot a_x$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

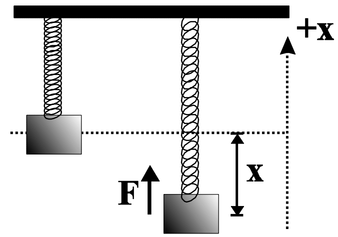


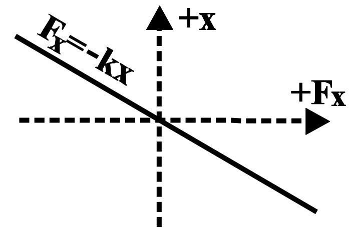
$$-k \cdot x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Vilket är en differentialekvation

$$F_x = -k \cdot x \; = m \cdot a_x$$





$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Ansats:
(yritelmä)

$$x = A\sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi)$$

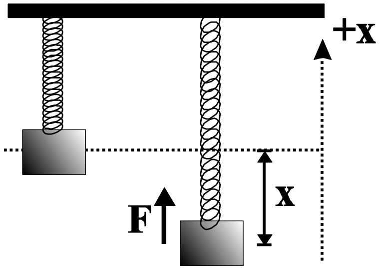
$$\Rightarrow \quad -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi) + \frac{k}{m}A\sin(\omega t + \phi) = 0$$

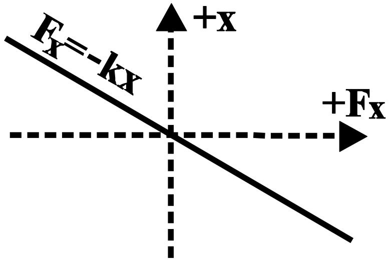
$$\Leftrightarrow \quad A\sin(\omega t + \phi)\left[-\omega^2 + \frac{k}{m}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

Simpel harmonisk rörelse

$$F_x = -k \cdot x \qquad = m \cdot a_x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$





Plats	$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$
Hastighet	$v(t) = \omega A\cos(\omega t + \phi)$
Acceleration	$a(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi)$
Vinkelhastighet	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

A maximiförflyttningen (Amplitud)

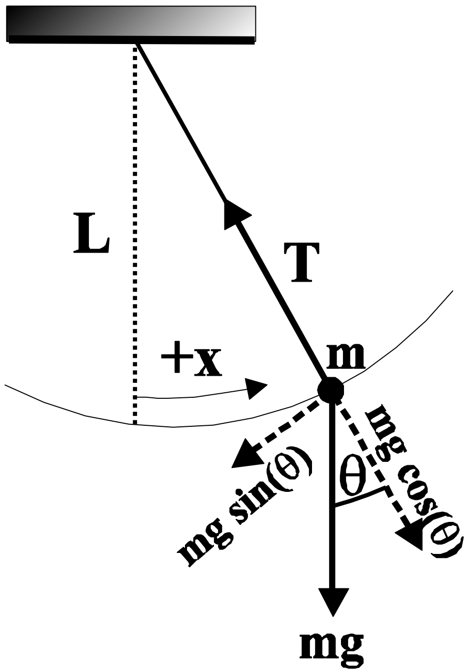
ϕ Fasvinkel som bestämmer vad x är vid tiden noll

Simpel pendel

Vi vill ha: $$m \cdot a_x = F_x \propto x$$

$$F_\theta = -mg \cdot \sin(\theta)$$

θ liten ger approximationen: $\sin(\theta) \approx \theta$



$$\Rightarrow \quad F_\theta \approx -mg \cdot \theta = -mg\frac{x}{L} = -\frac{mg}{L}x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Exempel

Vad är perioden och frekvensen för en simpel pendel som är 1.000 m lång som befinner sig vid en plats med g = 9.830 m/s²

Vinkelfrekvensen [rad/s] $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

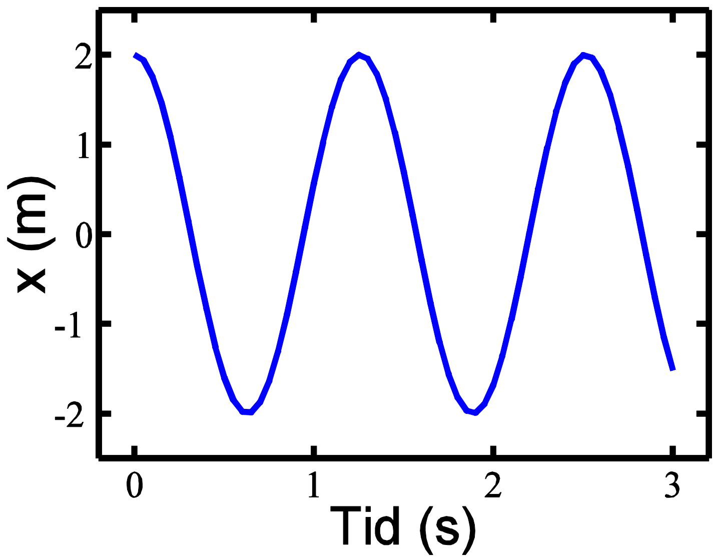
Perioden T [s]

Frekvensen f [f] = 1/s $\omega = 2\pi \cdot f$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.83\,\mathrm{m/s}^2}{1.0\,\mathrm{m}}} \approx \underline{0.499\ \mathrm{Hz}}$$

$$T = \frac{1}{f} \approx \underline{2.004\ \mathrm{s}}$$

Bestäm utgående från den nedre bilden **amplituden A**, **vinkelhastigheten ω**, **fasvinkeln ϕ** och **frekvensen f**



Amplituden: A = 2 m

Perioden T ~ 2.5 – 1.2 s ~ 1.3 s

Frekvensen: f ~ 1/1.3 s ~ 0.77 Hz

Vinkelfrekvensen ω = 2πf ~ 4.84 rad/s

Fasvinkel, ϕ ?

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$x(0) = 2 = 2\sin(\omega \cdot 0 + \phi) \quad \Rightarrow \quad \phi = \sin^{-1}(1) \approx 1.5708 (= \pi/2)$$

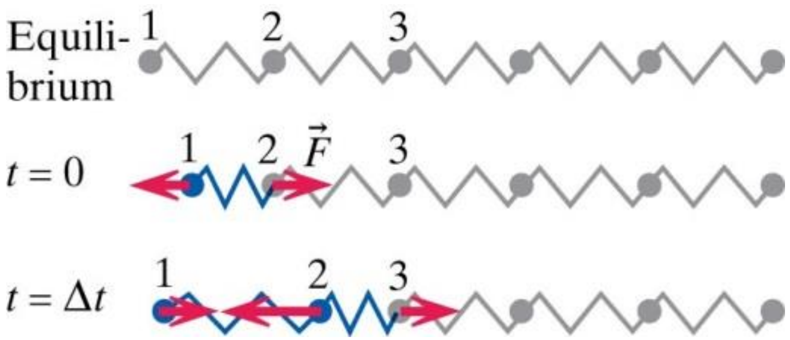
Klassiska vågor behöver ett medium via vilken den rör sig. Partiklar som har flyttats bort från sina jämviktspositioner i ett elastiskt medium, återvänder dit.
Alltså, vågorna transporterar inte materia utan energi.

Man brukar skilja på två olika vågtyper

Transversella: störningen från jämviktspositionen är vinkelrät mot vågens färdriktning.
Ex. vattenvågor

Longitudinella: störningen parallell till vågens färdriktning.
Ex. ljudvågor

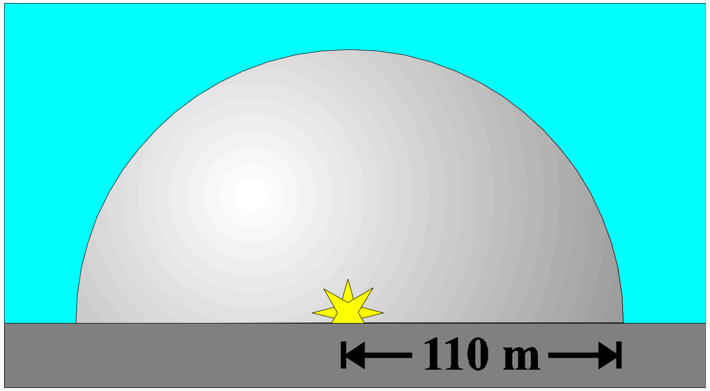
Medium för ljud	Hastighet (m/s)
Luft (0^o C)	331
Helium	1000
Vatten	1500
Granit	6000
Aluminium	6400



Ultraljud: f > 20 kHz → λ < 0.5 mm i vatten

Örat hör frekvenser mellan ca. 20 - 20 000 Hz

Dimensionsanalys



Anta att man filmar en atombombssprängning som görs på markytan. Bilden visar hur den halvsfäriska sprängningsfronten, radien är 110 m, 15 ms efter sprängningen

Chockvågens radie [**r**] = m efter sprängningen beror av:

- Den frigjorda energin, [**E**] = J = kg m^2/s^2
- Tiden efter sprängningen, [**t**] = s
- Luftens densitet, [ρ] = 1.293 kg/m^3

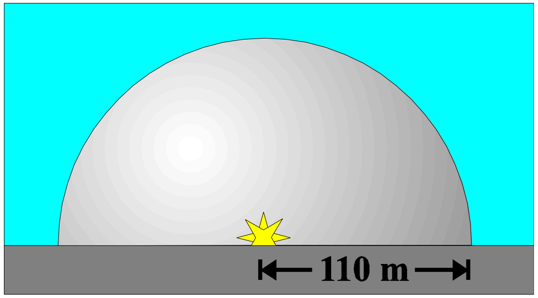
→ Ekvationen för chockvågens radie:

$$r = f(E, t, \rho) = K \cdot E^a \cdot t^b \cdot \rho^c$$

där *K* ~ 1, och *a, b* och *c* bestäms med hjälp av **dimensionsanalys** (DA)

Dimensionsanalys

$$r = K \cdot E^a \cdot t^b \cdot \rho^c$$



Enheterna bör vara samma på båda sidorna

$$\longrightarrow \quad m = \left(\frac{kg \cdot m^2}{s^2}\right)^a (s)^b \left(\frac{kg}{m^3}\right)^c$$

$$\longleftrightarrow \quad m^1 = \left(kg^a \cdot kg^c\right)\left(m^{2a} \cdot m^{-3c}\right)\left(s^{-2a} \cdot s^b\right)$$

$$\longleftrightarrow \quad kg^0 \cdot m^1 \cdot s^0 = kg^{a+c} \cdot m^{2a-3c} \cdot s^{b-2a}$$

kg: $a = -c$

$$\longrightarrow \quad m^1 = m^{-2c-3c} = m^{-5c}$$

$$\longrightarrow \quad s^0 = s^{b-2/5}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{c = -1/5}$$

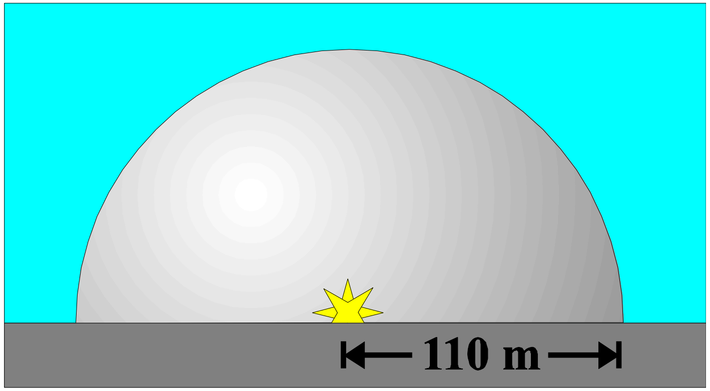
$$\underline{a = \ 1/5}$$

$$\underline{b = \ 2/5}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{E^{1/5} \cdot t^{2/5}}{\rho^{1/5}}$$

Dimensionsanalys

$$r = \frac{E^{1/5} \cdot t^{2/5}}{\rho^{1/5}}$$



$$\Rightarrow \quad E = \frac{r^5 \cdot \rho}{t^2}$$

Chockvågens radie: [**r**] = 110 m
Luftens densitet: [**ρ**] = 1.293 kg/m3
Tiden efter sprängningen: [**t**] = 15 ms
Den frigjorda energin: [**E**] = J = kg m²/s²

$$\Rightarrow \quad E = \frac{(110\,\mathrm{m})^5 \cdot 1.293\,\mathrm{kg/m}^3}{(15\times10^{-3}\,\mathrm{s})^2} \approx \underline{1.4\times10^{12}\ \mathrm{J}}$$

Ljudets hastighet (äänen nopeus) analytiskt

Ljudets hastighet i luft är ca. 330 m/s

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

Vinkelhastighet $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ rad/s ([k]=N/m=kg/s^2)

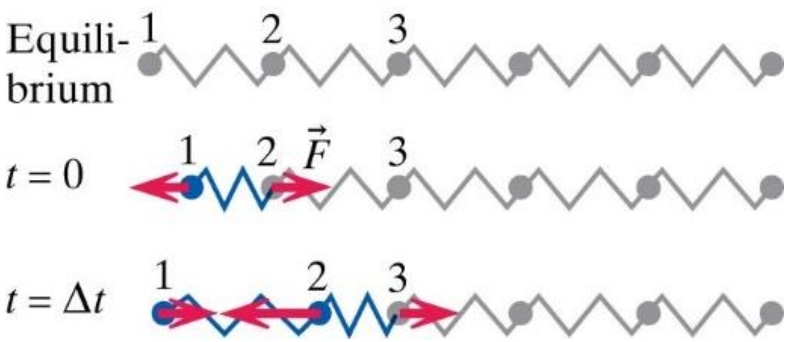
Ljudets hastighet (m/s): $v \propto \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

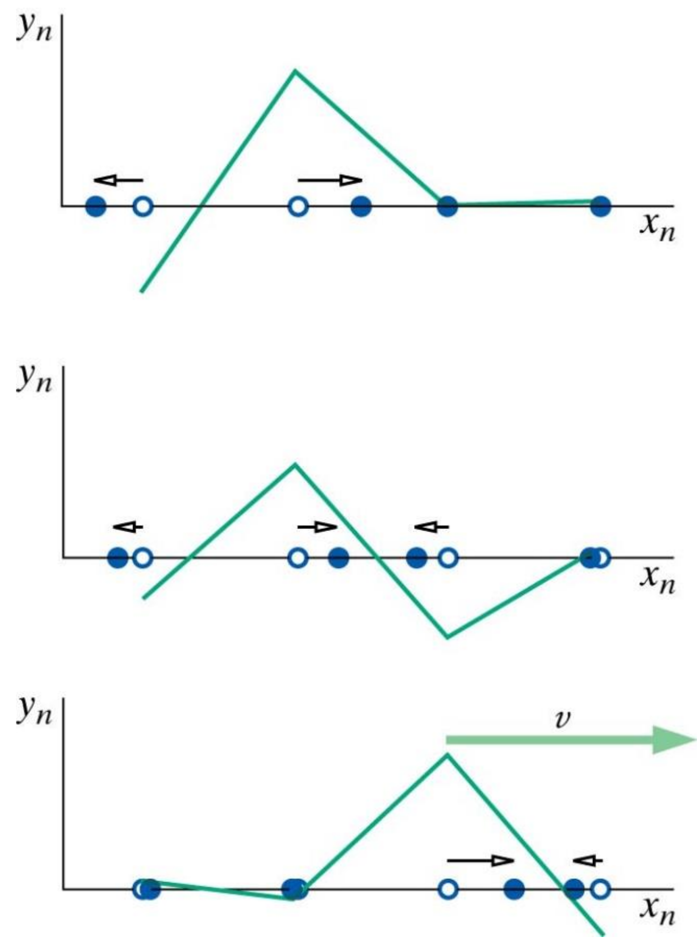
Dimensionsanalysen ger att proportionalitetskoefficienten är d som står för avståndet mellan atomerna

$$v = d\sqrt{\frac{k}{m}}$$

d : avstånd mellan atomerna
k : ”kraft/avstånd” mellan atomerna
m : massan för atomen

Ljudets hastighet iterativt

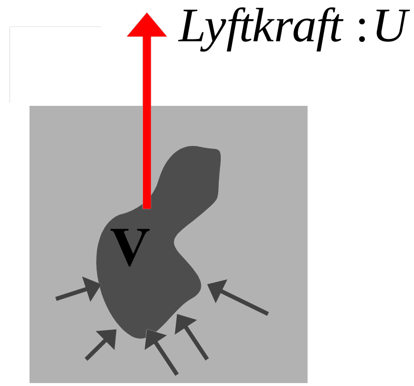




Matlab exempel

Archimedes princip

Då en kropp nedsätts i en vätska, undantränger den vätska, och känner en lyftkraft från vätskan omkring den



Att beräkna denna lyftkraft från kroppens form och trycket från vätskan på olika djup, är extremt svårt

Vi gör följande tankeexperiment

ρ_k : densitet för kroppen
ρ_v : densitet för vatten

Vi sänker en kropp med volymen V i vatten

$Lyftkraft : U\ ?$

Anta att kroppen tas nu bort, och det kvarblivna tomrummet fylls med vatten av samma form och volym

⇨ ***U* samma som förut**

Vattnet står stilla

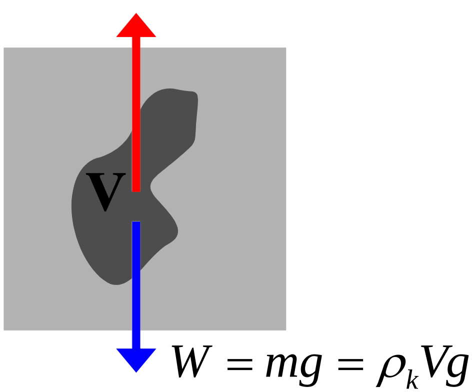
⇨ $U = W = \rho_v Vg$

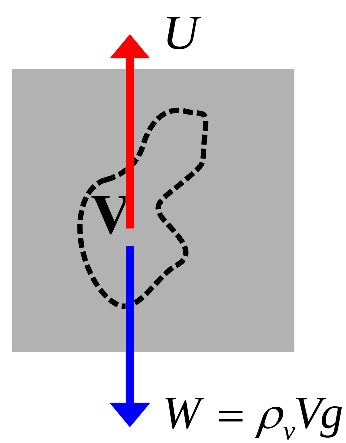
Nu kan kroppen igen sättas på sin plats utan att lyftkraften ändras

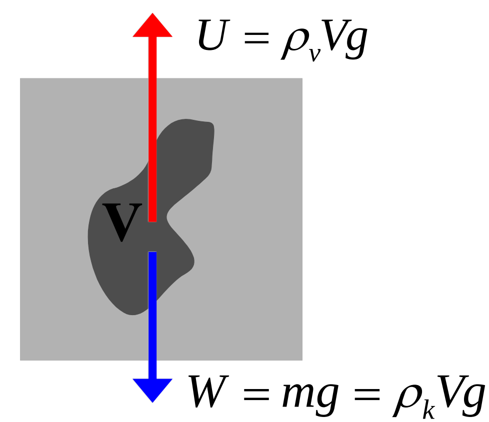
Totala kraften på kroppen är

$F_{tot} = U - W = \rho_v Vg - \rho_k Vg$

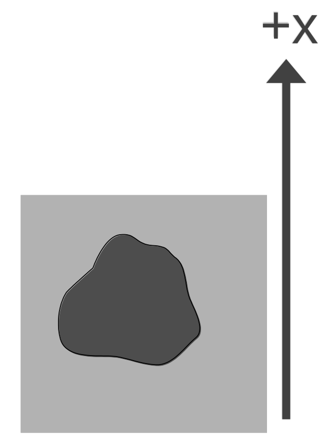
⇨ $\boxed{F_{tot} = Vg(\rho_v - \rho_k)}$





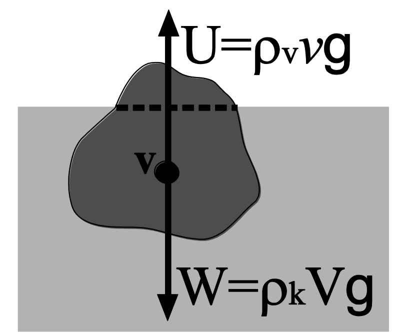


Exempel



Ett isberg är i havet.
Beräkna hur stor del av isbergets volym är under vattenytan.
Isens densitet ρ_i = 917 kg/m^3 och vattnets ρ_v = 1000 kg/m^3

$$F_{tot} = Vg(\rho_v - \rho_i) \qquad \rho_v > \rho_i \quad \Rightarrow \quad \text{Isen flyter}$$



Vikten neråt är samma som förut, men eftersom volymen nedsänkt i vatten nu är v blir den totala kraften på isberget

$$F_{tot} = \rho_v vg - \rho_i Vg \quad = 0$$

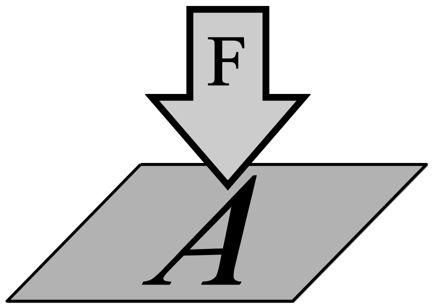
$$\Rightarrow \quad v = \frac{\rho_i}{\rho_v} V \qquad \text{Volymen nedsänkt i vatten}$$

$$\frac{v}{V} = \frac{\rho_i}{\rho_v} \approx \frac{917\ \mathrm{kg/m^3}}{1000\ \mathrm{kg/m^3}} \approx \underline{\underline{91.7\,\%}}$$

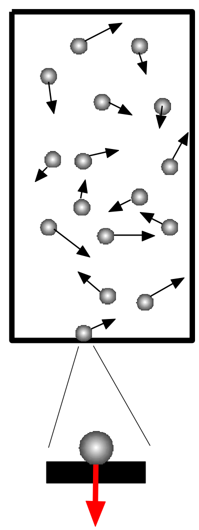
Tryck (paine)

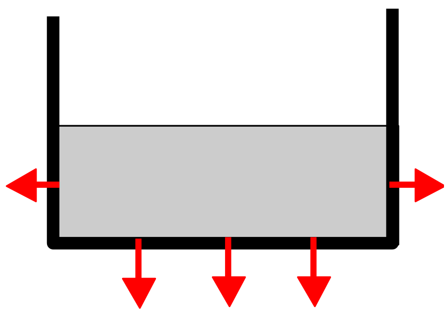
Tryck definieras som kraft per areaenhet (eng. pressure)

$$\boxed{P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}}$$



$[P]$ = N/m^2 = Pa





Lärandemål:

- Förstå och kunna berätta hur fjäder-boll modellen kan förklara många fenomen för fasta ämnen
- Matematiskt kunna beräkna densiteten, Youngs modul och ljudets hastighet i fasta ämnen genom att betrakta den interatomära kraften som en fjäderkraft
- Kunna analysera system som påverkas av spänning, kompression, friktion och lyftkrafter via rörelsemängdsprincipens derivata
- Kunna analytiskt och numeriskt (iterativt) förklara rörelsen för kroppar som påverkas av fjäderkraft
- Kunna bestämma ljudets hastighet i fasta ämnen utgående från materialets mikroskopiska och makroskopiska egenskaper