2. Rörelsemängdsprincipen (liikemääräperiaate)

Lärandemål:

- Kunna använda både analytiska och iterativa metoder för att förutspå rörelsen för en kropp som påverkas av en konstant kraft
- Kunna iterativt beräkna rörelsen för en kropp som påverkas av krafter som ändrar med tiden
- Kunna rita och analysera bilder där kroppens hastighet eller plats är ritad som en funktion av tiden
- Kunna beräkna kraften från en fjäder på en kropp
- Kunna beräkna approximativa gravitationskraften på en kropp nära jordytan

Storheter (suureita) som bevaras i fysiken:

- Rörelsemängden (liikemäärä)
- Rörelsemängdsmomentet (liikemäärämomentti)
- Energin

System: En eller flera objekt (i detta kapitel, ett objekt alltid systemet)

→

Allt som inte är en del av systemet är: Omgivningen (ympäristö)

→

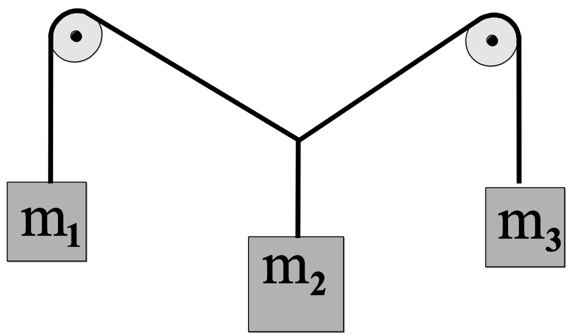
Systemets rörelsemängd kan ändras endast via växelverkan med omgivningen

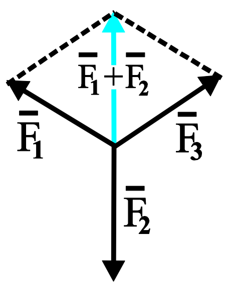
Då flera krafter påverkar en kropp, kan dessa summas till en summakraft

$$\boxed{\sum \overline{F} = \overline{F}_{tot}}$$

Detta skrivs i komponentform som:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum \overline{F}_x &= \overline{F}_{x,tot} \\ \sum \overline{F}_y &= \overline{F}_{y,tot} \\ \sum \overline{F}_z &= \overline{F}_{z,tot} \end{aligned}}$$



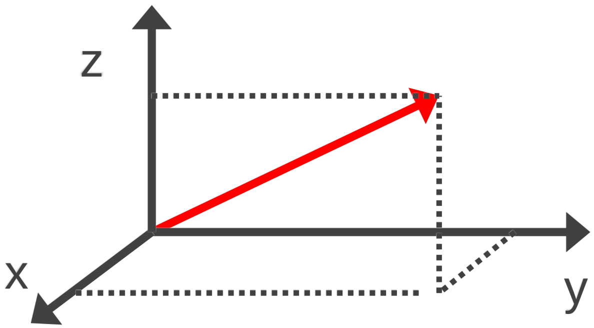


Punkten som sammanbinder de tre trådarna står stilla, vilket ger:

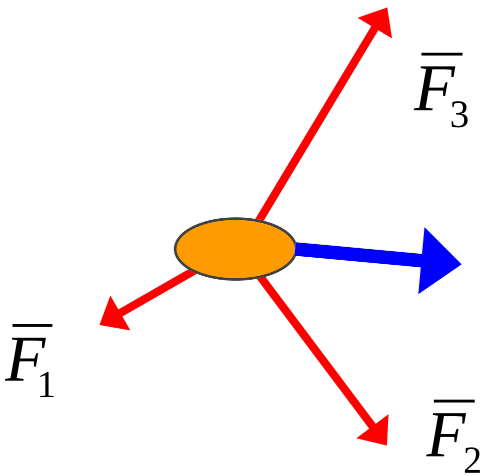
$$\overline{F}_2 = \overline{F}_1 + \overline{F}_3$$

Kraft

Kraften är en vektor med både **magnitud** och **riktning**

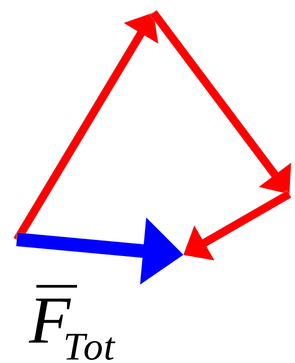


$$\overline{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$



$$\overline{F}_{Tot} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$

Den totala
kraften grafiskt



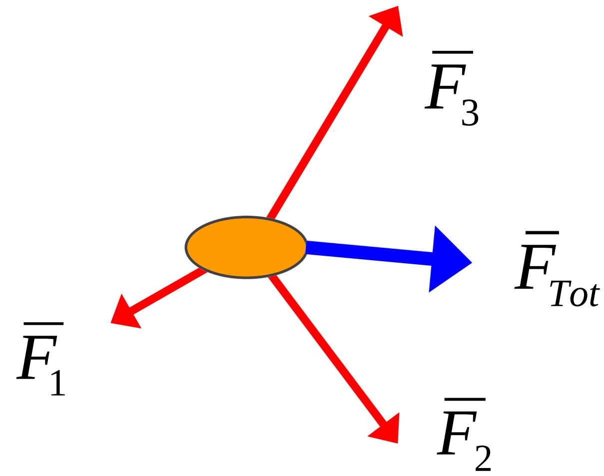
$$\overline{F}_1 = F_{1x}\hat{i} + F_{1y}\hat{j} + F_{1z}\hat{k}$$

Kraft

Kraft F	$N = kg\ m/s^2$
Gravitationskraften mellan solen och jorden	3.5×10^{22}
Lyftkraften för en raket vid starten	3×10^{7}
Vikten av en fullvuxen blåval	2×10^{6}
Maximala dragkraften för ett lok	9×10^{5}
Vikten av en människa	800
Vikten av ett äpple	1
Elektriska kraften mellan en proton och elektron i en väteatom	8×10^{-8}
Gravitationskraften mellan en proton och elektron i en väteatom	4×10^{-47}

Rörelsemängdsprincipen

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\bar{p} &= \bar{F}_{Tot}\Delta t \\ \overline{p_2} &= \overline{p_1} + \overline{F}_{Tot}\Delta t \end{aligned}}$$



$$p_{2,x} = p_{1,x} + F_{Tot,x}\Delta t$$

$$p_{2,y} = p_{1,y} + F_{Tot,y}\Delta t$$

$$p_{2,z} = p_{1,z} + F_{Tot,z}\Delta t$$

$$\overline{F} = \frac{d\,\overline{p}}{dt}$$

Kraft

Tid

$$\Delta\bar{p} = \underbrace{\bar{F}_{Tot}\Delta t}_{\text{Impuls}}$$

Impuls

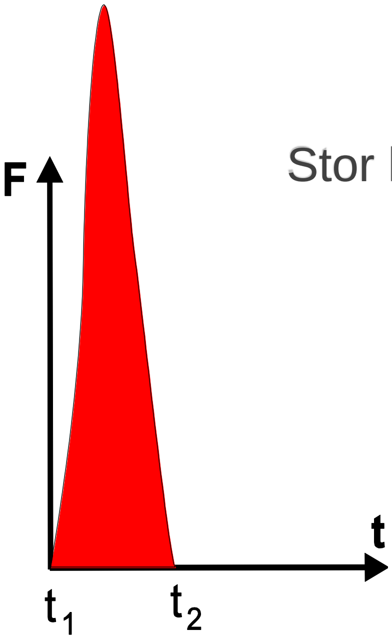
Vad är kraften då två bilar krockar?
Hur stor kraft behövs det för att stanna en bil?

$$dp = Fdt \Rightarrow \int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{t_1}^{t_2} Fdt$$

$$\Rightarrow p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} Fdt$$

Impulsen: $\boxed{\bar{J} = \bar{F}\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt = \bar{p}_2 - \bar{p}_1}$

~ 64 km/h



$$\boxed{\overline{J} = \overline{F}\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F} dt = \overline{p}_2 - \overline{p}_1}$$

$$\Delta\bar{p} = \bar{F}_{Tot}\Delta t$$

$$\bar{p} = \frac{m\bar{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Vid låga hastigheter är: $\bar{p} \approx m\bar{v}$

$$\Rightarrow$$

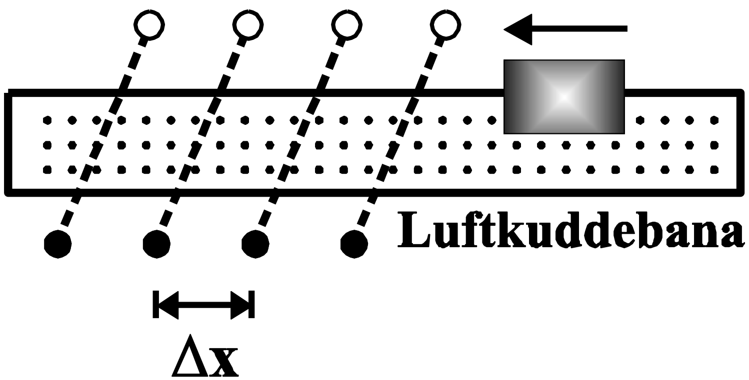
$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a}$$

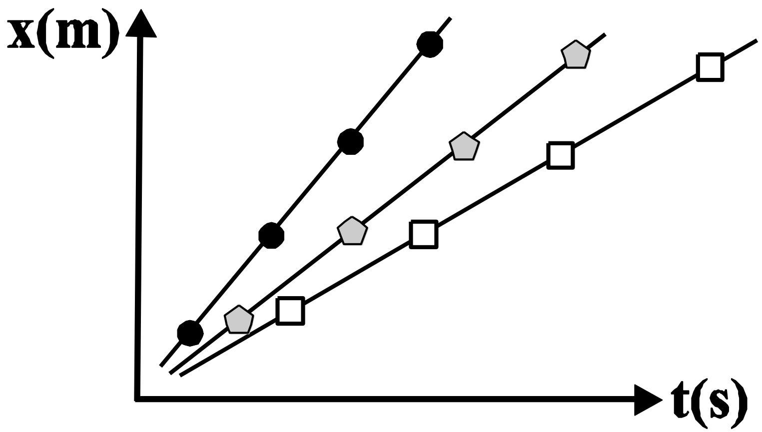
Bestämma relationen mellan kraft och acceleration

Newtons första lag, Galileis princip

En kropp rör sig rätlinjigt med konstant hastighet (som kan vara noll), ifall inga krafter påverkar den

Experimentellt ”bevis”



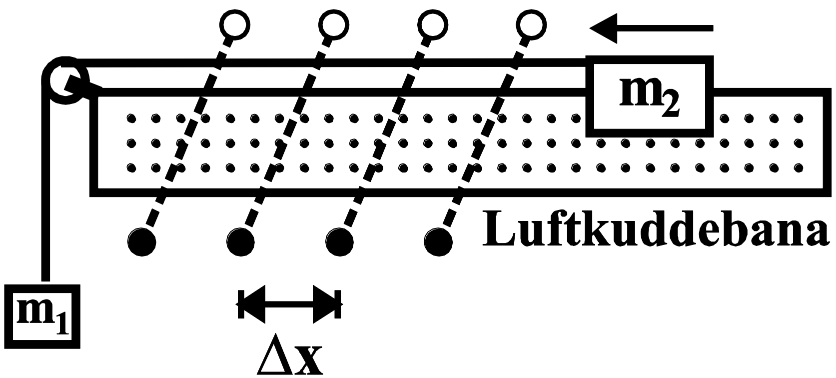


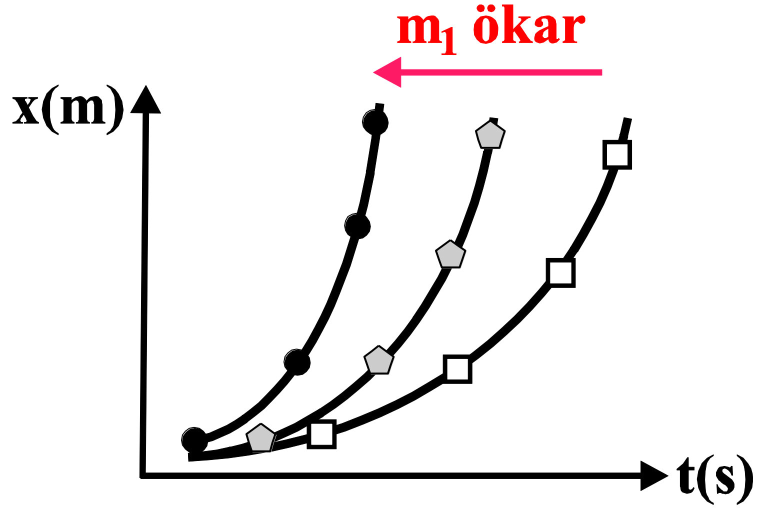
Hur många experiment behövs för att bevisa att en formel stämmer?

Hur många experiment behövs för att bevisa att en formel **inte** stämmer?

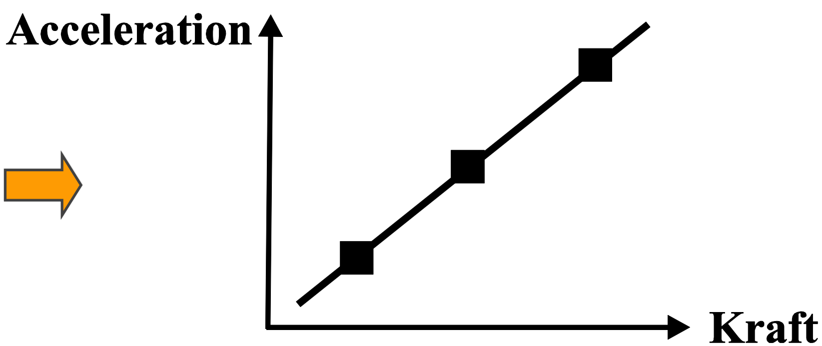
Inte till tenten

Newtons andra lag



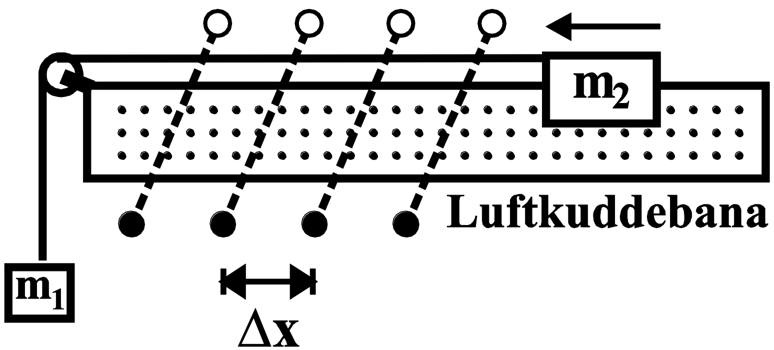


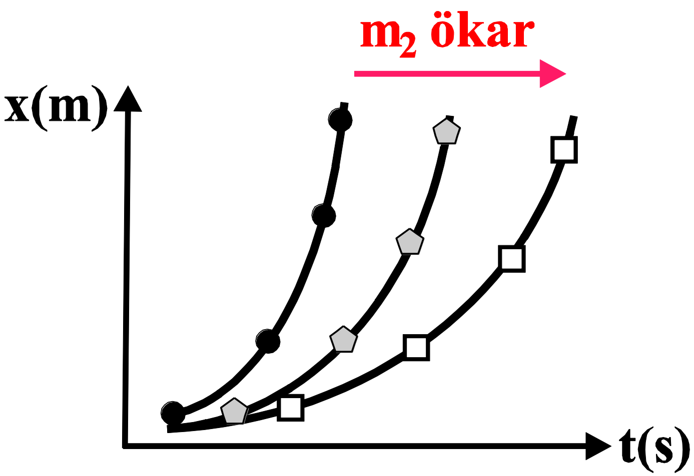
$$x = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$



$$\bar{a} \propto \bar{F}$$

Newtons andra lag





$$x = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

N2

$$\Rightarrow \quad a \propto \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad \bar{a} \propto \frac{\bar{F}}{m}$$

Inte till tenten

$$\bar{a} \propto \frac{\bar{F}}{m} \qquad \bar{a} = k\frac{\bar{F}}{m}$$

1) Väljer enheterna för F och m (basenheter), och bestämmer k experimentellt

2) Väljer enheterna för F och k (basenheter)
→ m som funktion av längd, tid och kraft

3) Väljer enheterna för m och k (basenheter)
→ F som funktion av m, tid och längd

⇒ $$\boxed{\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}}$$

SI enheterna (exempel)

Tid: *En sekund (s) är tiden då EM-strålningen som avges av cesium-133 atomen gör 9192631770 oscillationer*

Längd: *En meter (m) är den längd som ljus färdas i vakuum under tiden 1/299792458 delar av en sekund*

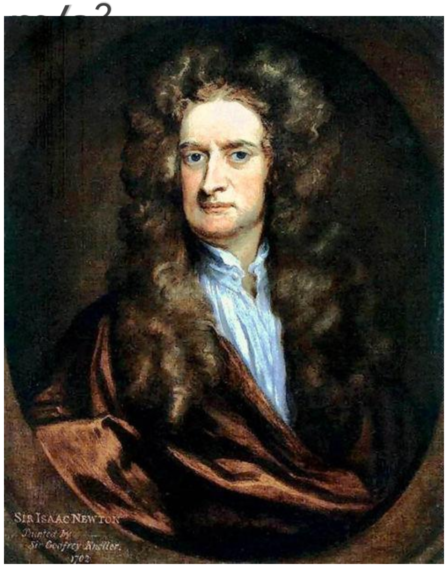
Massa: *GAMLA: En kilogram (kg) är massan på internationella standard platina-iridium cylindern som bevaras i Paris*

NYA: The kilogram, symbol kg, is the SI unit of mass. It is defined by taking the fixed numerical value of the Planck constant *h* to be 6.626 070 15 × 10^{-34} when expressed in the unit J s, which is equal to kg m^2 s^{-1}, where the meter and the second are defined in terms of *c* and cesium frequency $\Delta\nu_{Cs}$.

https://www.nist.gov/si-redefinition/kilogram-kibble-balance

Inte till tenten

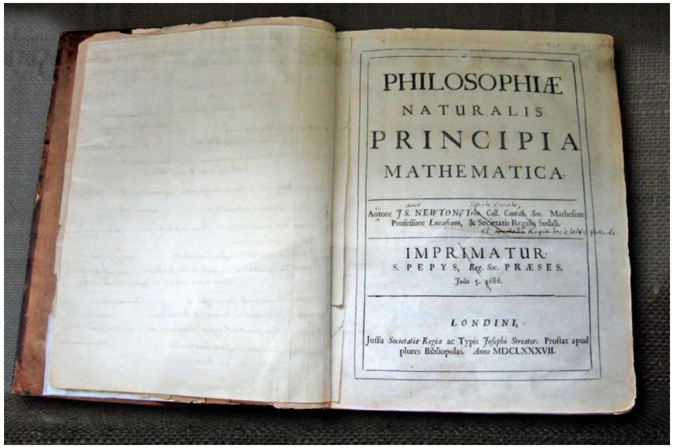
[F] = N (Newton) *En Newton är den kraft som behövs för att ge en kropp med massan 1 kg en acceleration på 1 m/s^2*



Sir Isaac Newton, 1642-1727
Engelsk fysiker och matematiker

Gravitationslagen, Kroppars rörelseekvationer

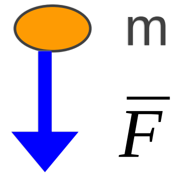
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica



1700 tals poet
Alexander Pope

"Nature and Nature's laws lay hid in night:
God said, Let Newton be! and all was light."

Kraft



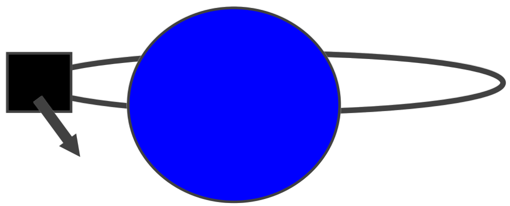
$$\overline{F} = m\overline{a} = m\overline{g}$$

$$W = m\overline{g}$$

W är kraften på kroppen i jordens dragningskraft, eller kroppens **vikt**

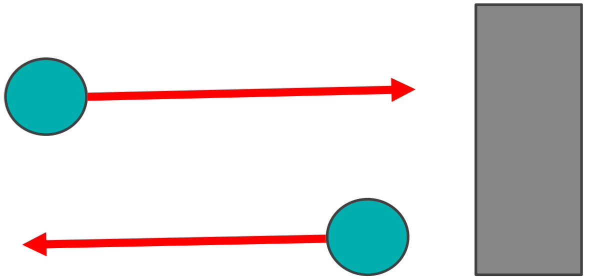
På jorden är det lätt att bestämma en kropps massa genom att väga den

Hur kan man bestämma en kropps massa i en rymdraket, där gravitationskraften inte kan användas?
Detta problem har man i rymdraket då man försöker se inverkan av gravitationslösheten på en människas kropp



$$\Delta\bar{p} = \bar{F}_{Tot}\Delta t$$

Kollision med väggen

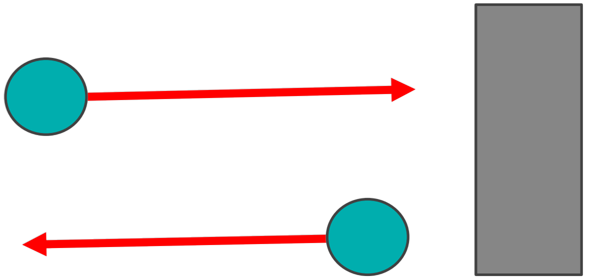


En tennisspelare slår en tennisboll med massan 0.057 kg, så att dess fart är 60 m/s. Bollen träffar en tegelvägg och studsar tillbaka med samma fart (60 m/s). Under tiden då tennisbollen växelverkar med väggen, fotograferas händelsen med en höghastighetskamera och man ser att bollen vid det ögonblicket då dess fart är noll, är tryckt ihop 2.0 cm. Beräkna den approximativa kraften med vilken väggen påverkar bollen, ifall vi antar att den är konstant under hela studsen. Tips: Hur länge räcker studsen mot väggen? Borde man ta gravitationen i beaktande under studsen?

slår=lyö, fart=nopeus, träffar en tegelvägg=osuu tiiliseinään, växelverkar=vuorovaikuttaa, händelsen=tapahtuma, ögonblicket=sillä hetkellä, tryckt ihop=puristettu kasaan, under hela studsen=koko pompun aikana, tips=vinkki, ungefär=suunnilleen, räcker=kestää, borde man ta i beaktande=pitäisikö ottaa huomioon

$$\Delta\bar{p} = \bar{F}_{Tot}\Delta t$$

Kollision med väggen



En tennisspelare slår en tennisboll med massan 0.057 kg, så att dess fart är 60 m/s. Bollen träffar en tegelvägg och studsar tillbaka med samma fart (60 m/s). Under tiden då tennisbollen växelverkar med väggen, fotograferas händelsen med en höghastighetskamera och man ser att bollen vid det ögonblicket då dess fart är noll, är tryckt ihop 2.0 cm. Beräkna den approximativa kraften med vilken väggen påverkar bollen, ifall vi antar att den är konstant under hela studsen. Tips: Hur länge räcker studsen mot väggen? Borde man ta gravitationen i beaktande under studsen?

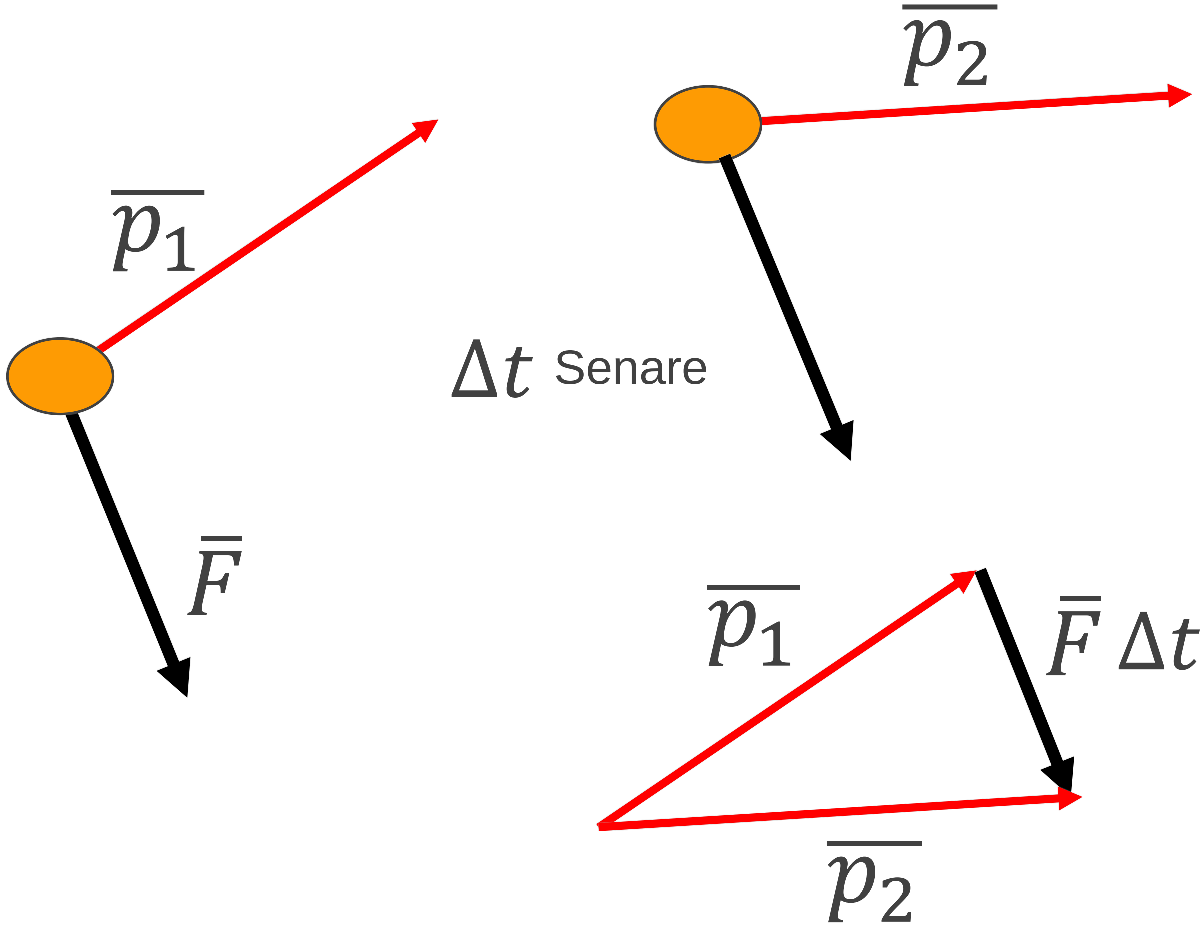
$$\Delta p = mv - (-mv) = 2mv \approx 6.84\ \mathrm{kgm/s}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\Delta v} \approx 2\ \frac{0.02\ m}{30 m/s} \approx 0.001333\ \mathrm{s}$$

$$\mathrm{F} \approx \frac{\Delta p}{\Delta t} \approx 5131.3 \frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2} \approx 5\ \mathrm{kN}$$

mg ~ 0.5 N

$$\overline{p}_2 = \overline{p}_1 + \overline{F}_{Tot}\Delta t$$



$$\bar{p} = \overline{p_0} + \bar{F}_1 \Delta t + \bar{F}_2 \Delta t + \bar{F}_3 \Delta t + \bar{F}_4 \Delta t + \ldots$$

Rörelseekvation?

1) Analytiskt

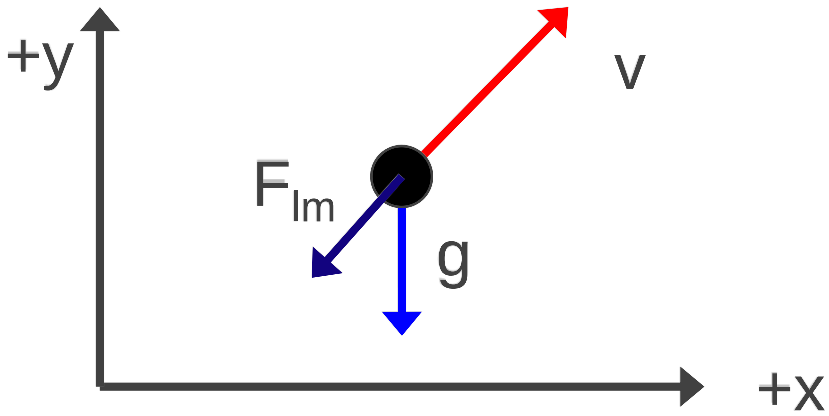
$$\Delta\bar{p}_1 + \Delta\bar{p}_2 + \Delta\bar{p}_3 + \cdots = \int_{t_i}^{t_f} d\bar{p} = \int_{t_i}^{t_f} \bar{F}_{Tot}\, dt$$

$$\Delta\bar{r}_1 + \Delta\bar{r}_2 + \Delta\bar{r}_2 + \cdots \quad = \int_{t_i}^{t_f} d\bar{r} = \int_{t_i}^{t_f} \bar{v}\, dt$$

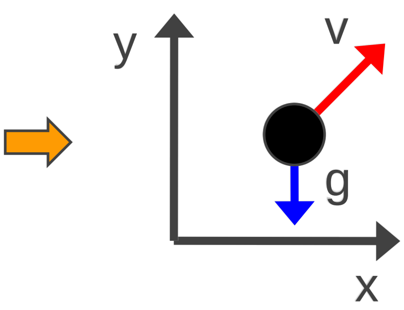
Funktioner kan deriveras analytiskt,
men integrering analytiskt fungerar bara i specialfall

Projektilrörelse (heittoliike)

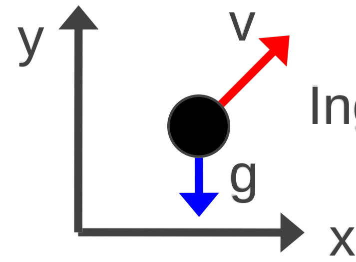
En **projektil** kallas en kropp som har givits en **begynnelsehastighet** och som sedan rör sig genom luft och påverkas endast av jordens **dragningskraft** och **luftmotståndet**



Först tittar vi på idealfallet att luftmotståndet **inte** påverkar projektilens bana



1) Rörelseekvationen analytiskt



Inget Luftmotstånd!

Rörelsen i två dimensioner: **x,y**
som en funktion av tiden **t**

$$\Delta\bar{p}_1 + \Delta\bar{p}_2 + \Delta\bar{p}_3 + \cdots = \int_{t_i}^{t_f} d\bar{p} = \int_{t_i}^{t_f} \bar{F}_{Tot}\, dt$$

$$\Delta\bar{r}_1 + \Delta\bar{r}_2 + \Delta\bar{r}_2 + \cdots = \int_{t_i}^{t_f} d\bar{r} = \int_{t_i}^{t_f} \bar{v}\, dt$$

Gravitationsaccelerationen konstant i –y riktning: ➡

$$F_{Tot,x} = 0$$

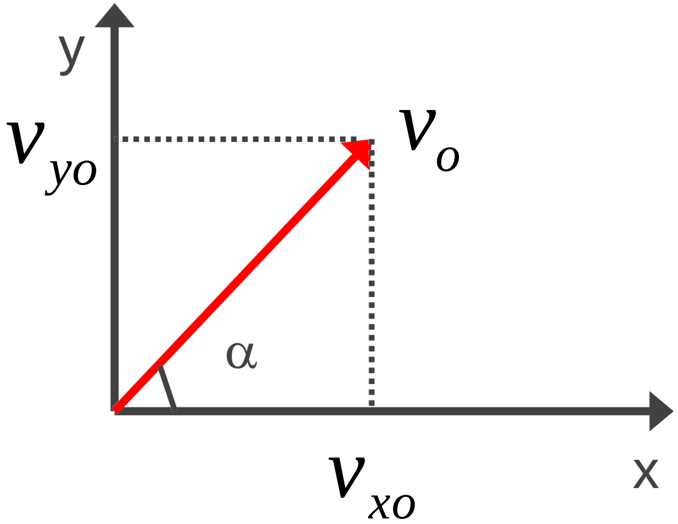
$$F_{Tot,y} = -mg$$

$$F_{Tot,x} = 0 \Rightarrow \quad p_x = p_{x,0}, \quad v_x = v_{x,0} \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + v_{x,0} \cdot t$$

$$F_{Tot,y} = -mg \Rightarrow \quad p_y = p_{y,0} - mgt \quad \Rightarrow \quad y = y_0 + v_{y,0} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x = v_{x0} t$$

$$y = v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2$$



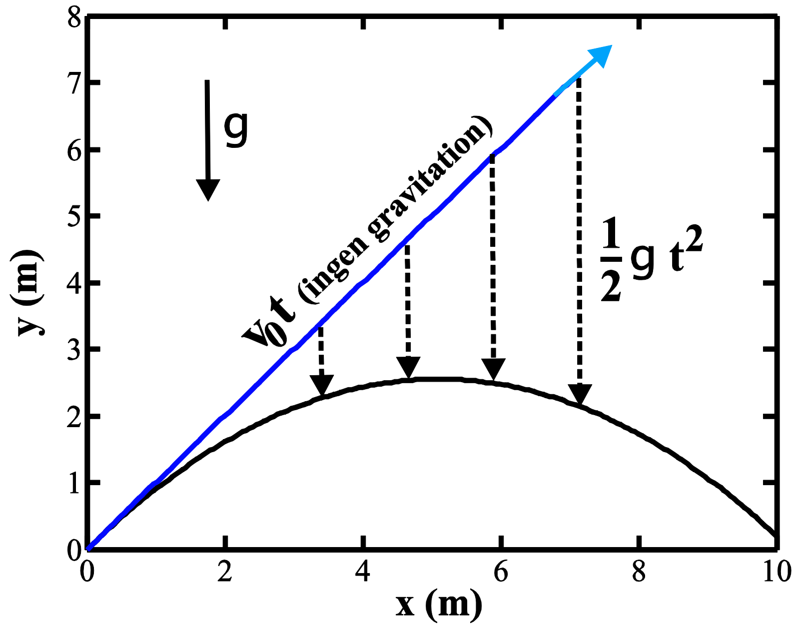
$$\Rightarrow \quad x = v_0 \cos(\alpha) t$$

$$y = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Hastighet: $v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos(\alpha)$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin(\alpha) - g t$$

$$x = v_0 \cos(\alpha)t$$
$$y = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$v_x = v_0 \cos(\alpha)$$
$$v_y = v_0 \sin(\alpha) - gt$$



Maximihöjd h_m då: dy/dt = 0

$$\Rightarrow \quad v_y = v_0 \sin(\alpha) - gT = 0$$

$$T = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \quad \Rightarrow \quad h_m = v_0 \sin(\alpha)T - \frac{1}{2}gT^2 = \boxed{\frac{v_o^2 \sin^2(\alpha)}{2g}}$$

Räckvidd: $R = v_0 \cos(\alpha)(2T)$ $= v_0 \cos(\alpha) \dfrac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$

$$= \frac{2v_0^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g} = \boxed{\frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}}$$

Projektilrörelse med luftmotstånd

Inte till tenten

Luftmotståndet för ett objekt som rör sig i luft- eller vätskelikt medium beror på kroppens form, yta, area och hastighet, men också av mediets densitet och viskositet

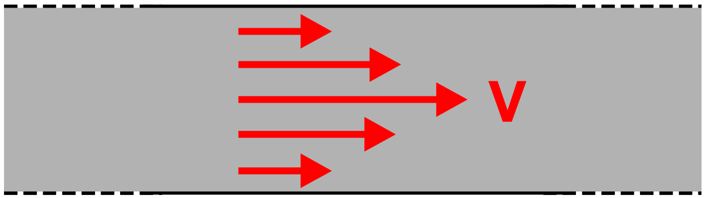
För att bestämma kroppens hastighetsberoende på luftmotståndet, tittar vi på det så kallade **Reynolds talet**

$$\boxed{R_e = \frac{L \cdot \rho \cdot v}{\eta}}$$

där

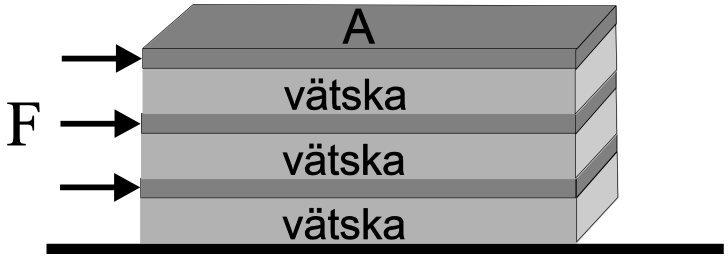
R_e	Reynolds tal, dimensionslöst
L	Kroppens längd (m) i riktning av hastigheten
ρ	Mediets densitet (kg/m^3)
v	Hastigheten för kroppen (m/s)
η	Mediets dynamiska viskositet (Ns/m^2 = kg/(sm))

Viskositet

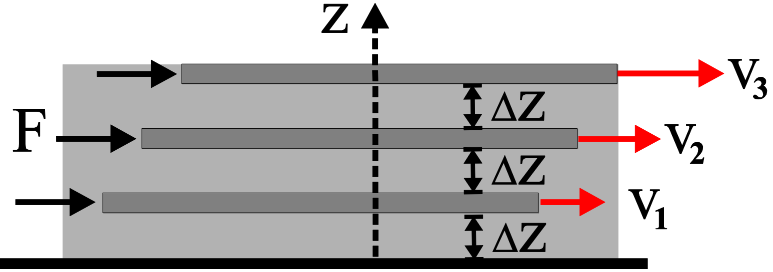


Viskositet:
Storleken på flödesresistans som en vätska ger

Viskos vätska (ex. sirap) flödar långsammare än en mindre viskos vätska (ex. vatten)



$$F = \eta A \frac{dv}{dz}$$



$$dv = \frac{Fdz}{\eta A}$$

Projektilrörelse med luftmotstånd

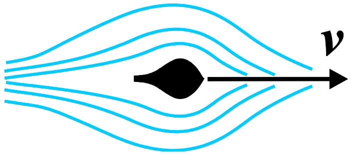
Inte till tenten

$$R_e = \frac{L \cdot \rho \cdot v}{\eta}$$

R_e	Reynolds tal, dimensionslöst
L	Kroppens längd (m) i riktning av hastigheten
ρ	Mediets densitet (kg/m^3)
v	Hastigheten för kroppen (m/s)
η	Mediets dynamiska viskositet (Ns/m^2 = kg/(sm))

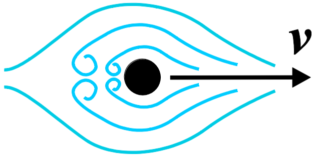
1) R_e < 1, laminart eller icke turbulet flöde

$$F_{lm} = k \cdot v$$



2) R_e > 1000, turbulet flöde

$$F_{lm} = \frac{C_{lm} \cdot A \cdot \rho}{2} v^2$$

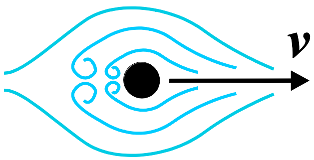


Projektilrörelse med luftmotstånd

Inte till tenten

R_e > 1000, turbulet flöde

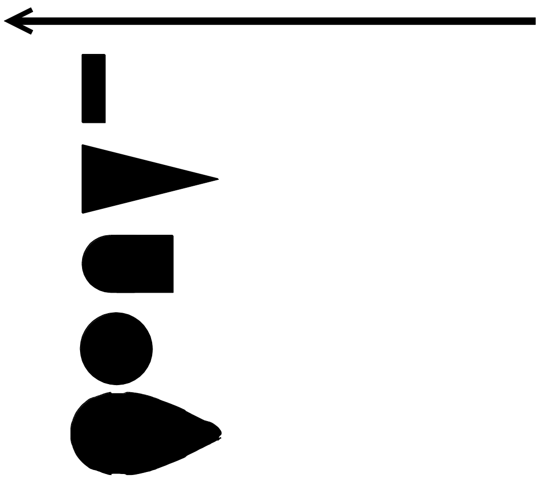
$$\boxed{F_{lm} = \frac{C_{lm} \cdot A \cdot \rho}{2} v^2}$$



Luftmotståndskoefficienten C_{lm} beror av projektilens form, area och yta

Projektil	C_{lm}
Platta	1.28
Prisma	1.14
Kula	0.30
Sfär	0.07-0.5
’utsträckt droppe’	0.045

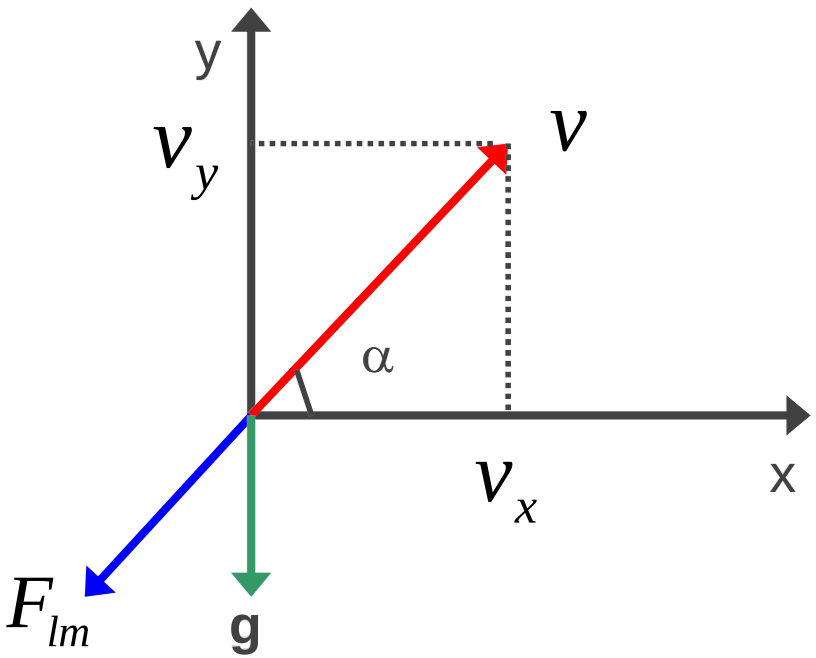
Riktning för hastigheten



2) Rörelseekvationen iterativt (numeriskt, datorsimulering)

Hur skall man lösa rörelseekvationen för projektilrörelse med luftmotstånd?

$$\overline{p_2} = \overline{p_1} + \overline{F}_{Tot} \Delta t$$



$$F_{lm} = -\frac{C_{lm} \cdot A \cdot \rho}{2} v^2$$

$$F_{lm} = -konst \cdot v^2$$

$$\alpha = \tan^{-1}(v_y / v_x)$$

$$F_{Tot,x} = F_{lm} \cdot \cos(\alpha)$$

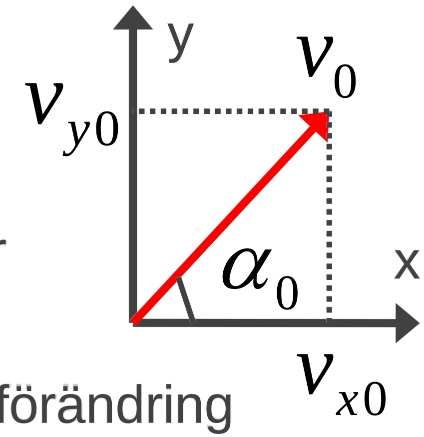
$$F_{Tot,y} = F_{lm} \cdot \sin(\alpha) - mg$$

$$p_{2,x} = p_{1,x} + F_{Tot,x} \Delta t$$

$$p_{2,y} = p_{1,y} + F_{Tot,y} \Delta t$$

T=0, $x=x_0$, $y=y_0$, $\alpha = \alpha_0$, $v=v_0$, $v_x=v_0\cos(\alpha)$, $v_y = v_0\sin(\alpha)$, $p_x=mv_x$, $p_y=mv_y$

Väljer ett konstant litet tidssteg Δt



$$F_{lm} = -konst \cdot v^2 \qquad \alpha = \tan^{-1}(v_y / v_x)$$
$$F_{Tot,x} = F_{lm} \cdot \cos(\alpha)$$
$$F_{Tot,y} = F_{lm} \cdot \sin(\alpha) - mg$$

x- och y-komponenter för luftmotståndet

$$p_x = p_x + F_{Tot,x}\Delta t \qquad p_y = p_y + F_{Tot,y}\Delta t$$

Rörelsemängdsförändring under tidssteget: Δt

$$v_{x,ny} = p_x / m \qquad v_{y,ny} = p_y / m$$

Nya hastigheterna ($v \ll c$)

$$v_{x,medel} = 0.5(v_x + v_{x,ny})$$
$$v_{y,medel} = 0.5(v_y + v_{y,ny})$$

Medelhastigheten under tidssteget: Δt

$$x = x + v_{x,medel}\Delta t \qquad y = y + v_{y,medel}\Delta t$$

Nya platserna

$$v_x = v_{x,ny} \quad v_y = v_{y,ny} \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

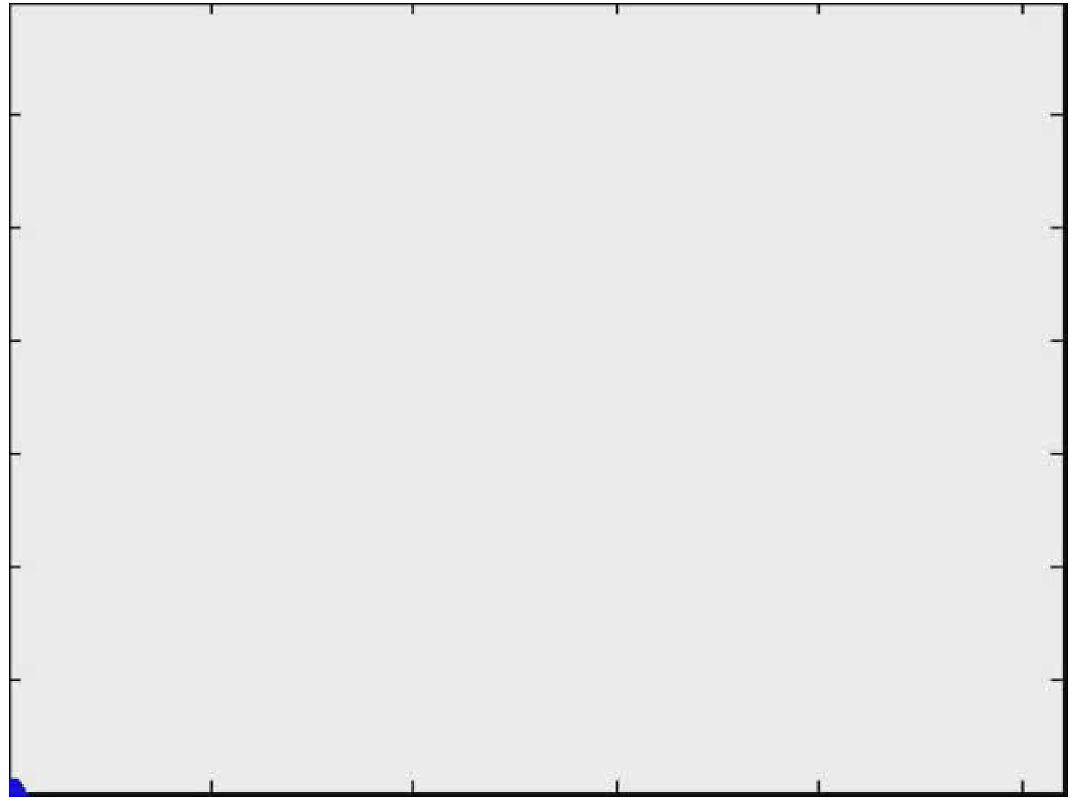
nej Är $y < 0$

ja

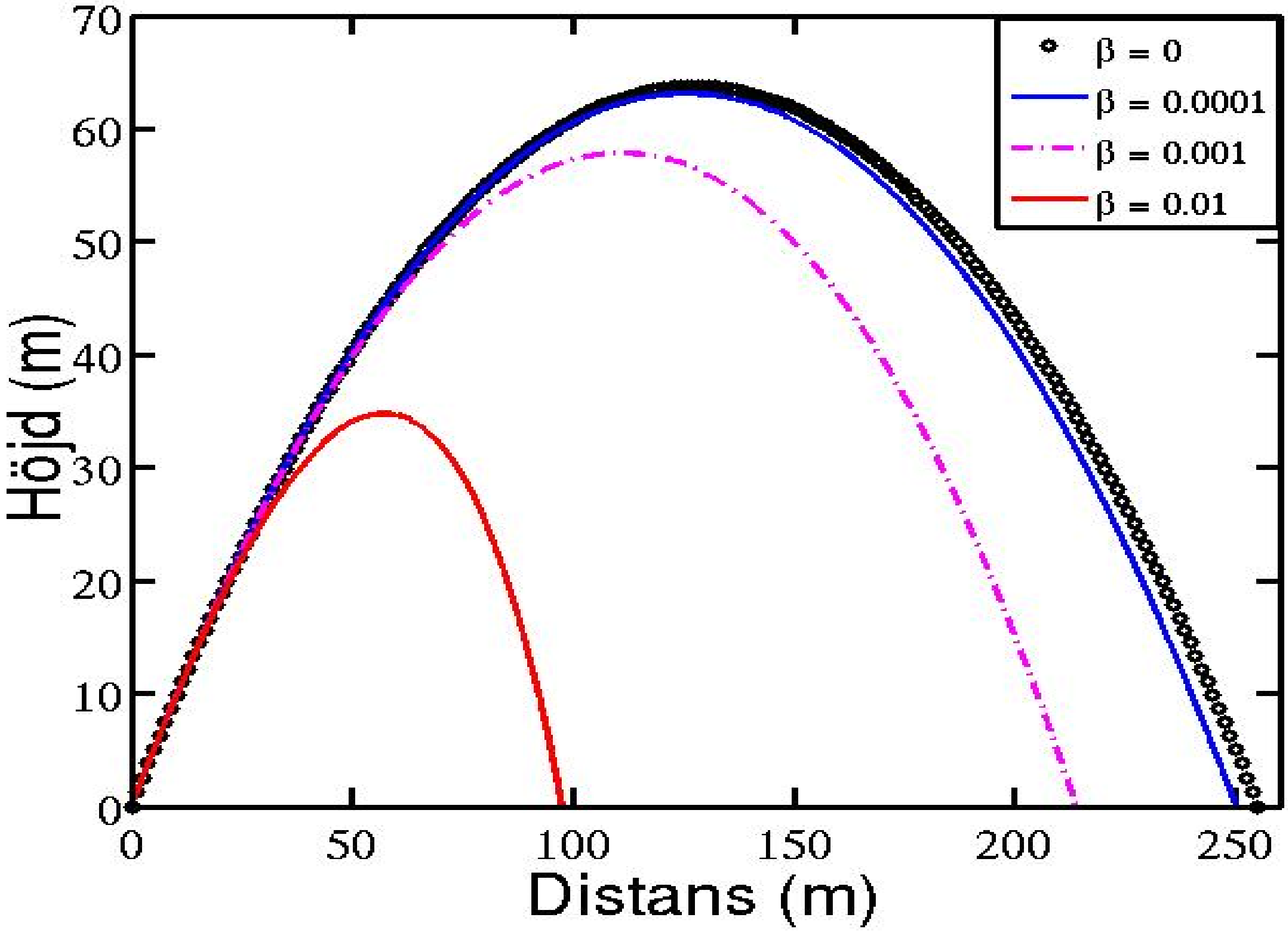
Begynnelsehastighet
50 m/s
45^{o} elevationsvinkel

β	Räckvidd (m)
0.01	97
0.001	214
0	255

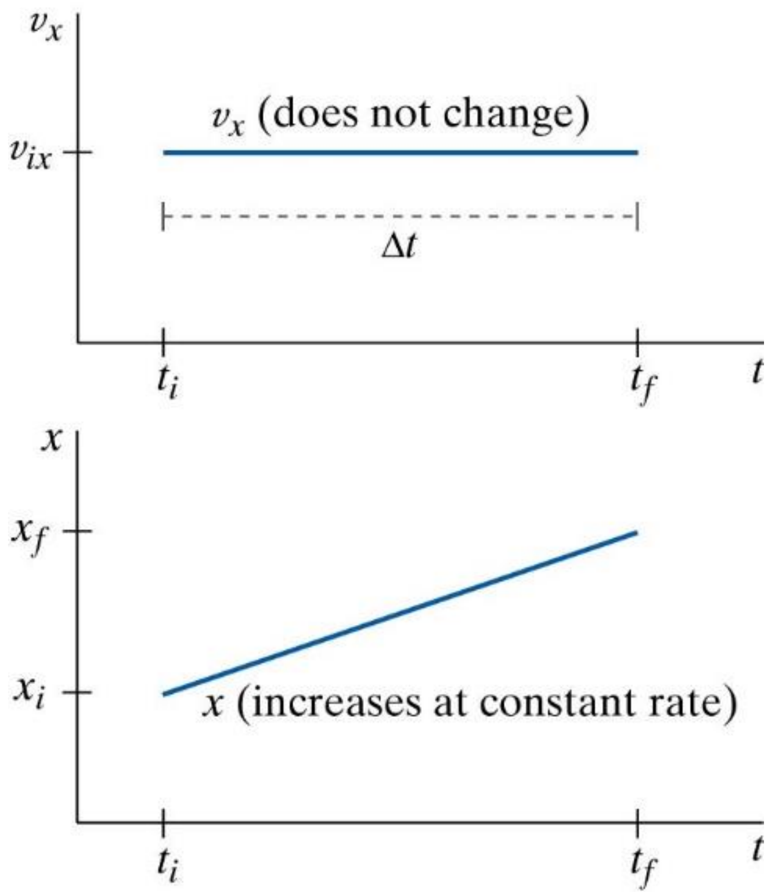
$$F_{lm} = -m \cdot \beta \cdot v^2$$

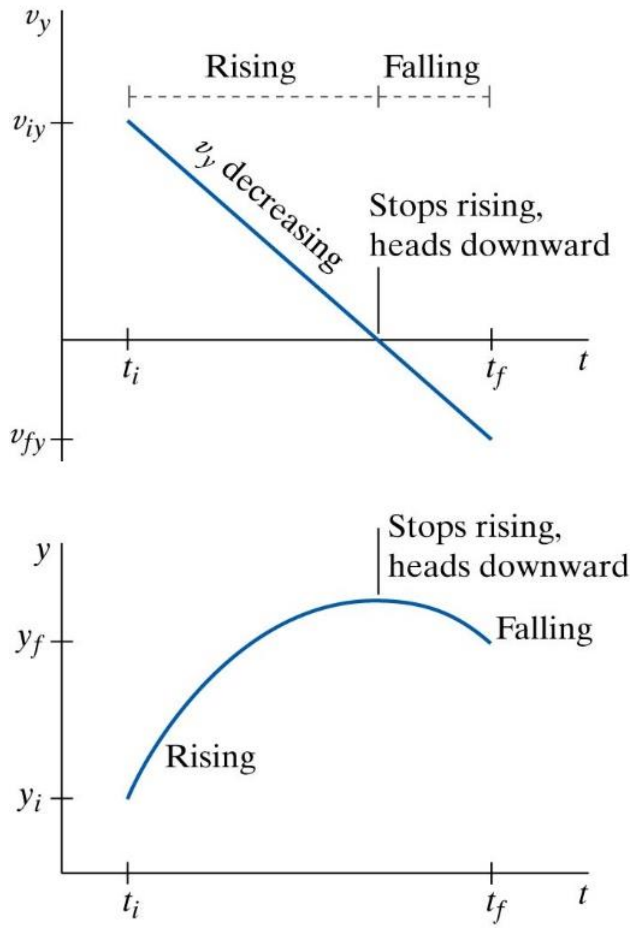


Helsingfors Universitet, Institutionen för fysik
T. Ahlgren


β = 0
β = 0.0001
β = 0.001
β = 0.01
Höjd (m)
Distans (m)
0
10
20
30
40
50
60
70
0
50
100
150
200
250

I boken (sidorna 64 - 75) har de bra förklarat hur man ritar och analyserar bilder där kroppens hastighet eller plats är ritad som en funktion av tiden. Där visar man också hur man beräknar kraften från en fjäder på en kropp.

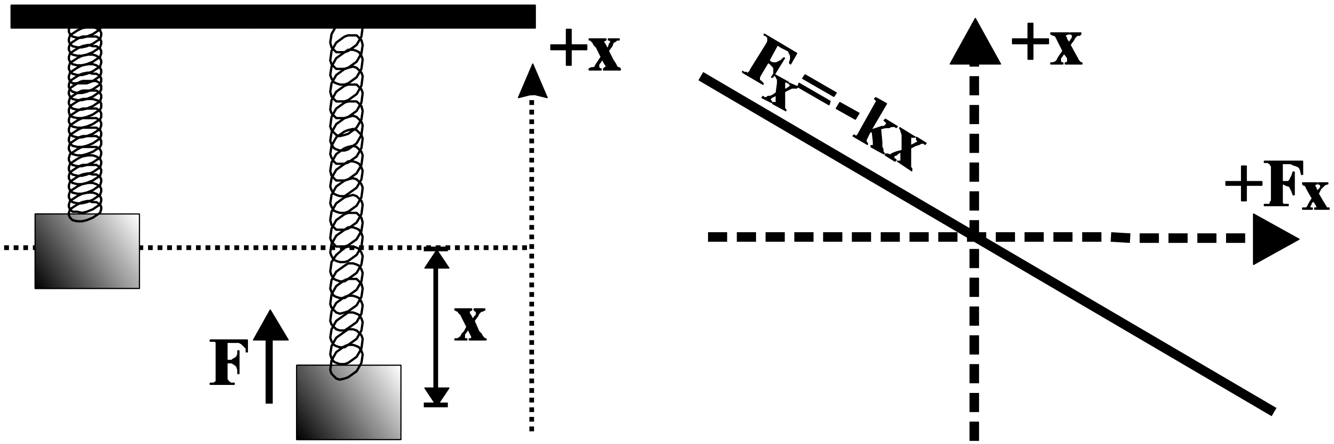




This is y vs. time t. It is not the path.

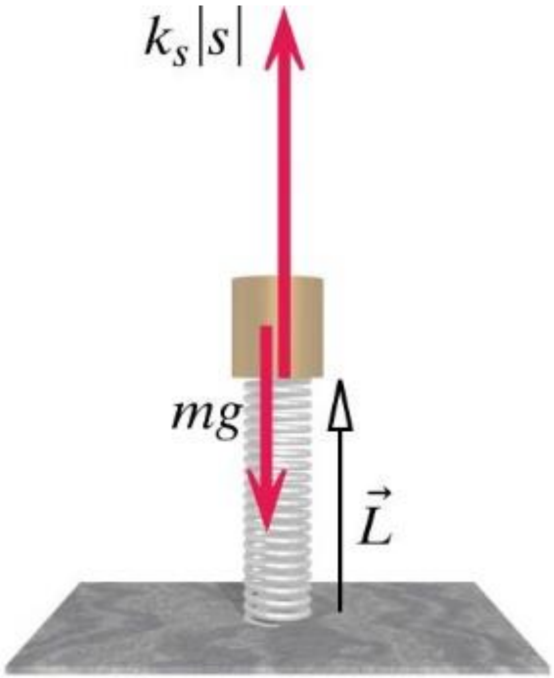
Kraften från en fjäden på en massa är proportionellt till negativa värdet av förskjutningen från jämviktspositionen

Hookes lag $\boxed{F_x = -k \cdot x}$ [k]=N/m är fjäderkonstanten



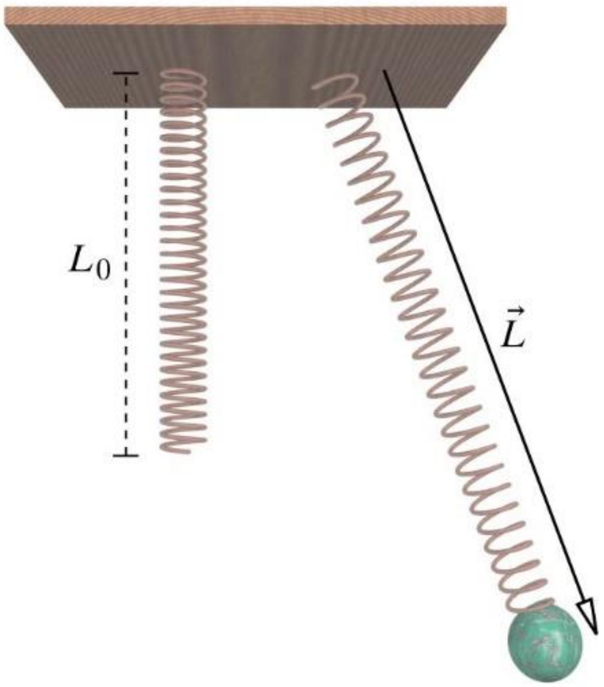
Fjäderns kraft som en funktion av förskjutningen x

I boken (sidorna 64 - 75) har de bra förklarat hur man ritar och analyserar bilder där kroppens hastighet eller plats är ritad som en funktion av tiden. Där visar man också hur man beräknar kraften från en fjäder på en kropp.



$$\bar{F} = -k_s s \bar{L}$$

$$s = |\bar{L}| - L_0$$



Grupparbeten

1) Simpel pendel (1 Dim)

2) Fjäder med luftmotstånd (1 Dim)

3) Kaströrelse med luftmotstånd (2 Dim)

Lärandemål:

- Kunna använda både analytiska och iterativa metoder för att förutspå rörelsen för en kropp som påverkas av en konstant kraft
- Kunna iterativt beräkna rörelsen för en kropp som påverkas av krafter som ändrar med tiden
- Kunna rita och analysera bilder där kroppens hastighet eller plats är ritad som en funktion av tiden
- Kunna beräkna kraften från en fjäder på en kropp
- Kunna beräkna approximativa gravitationskraften på en kropp nära jordytan