1.3 Relativitetsteorin (suhteellisuusteoria)

Detta kapitel inte till tenten förutom relativistiska rörelsemängden!

Man antar att rymd och tid går att mäta med godtycklig noggrannhet

Vad är relativitet?

Einstein
$E = mc^2$
Svarta hål

Galilei transformationerna:
Mekanikens lagar är relativa
(rörelsen beror på referenssystemet)

$$x = x' + ut$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

Relativism verkade vara i konflikt med elektromagnetismen och rörelsen för ljuset!

Einstein: **Alla fysikaliska lagar är relativistiska**

Den speciella relativitetsteorin (erityinen suhteellisuusteoria)

Den speciella relativitetsteorin publicerades 1905 av Albert Einstein, och den gäller bara för kroppar långt från gravitationsfält och inte i accelererad rörelse (alltså ganska speciell rörelse)

Relativitetens grund ligger i att ljuset har en konstant hastighet

$$\boxed{\textbf{c = 299 792 458 m/s i vakuum}}$$

oberoende från vilket koordinatsystem vi mäter den.
Ljushastigheten kallas **invariant** vid byte av referenssystem

1800 talet: Ljuset är vågrörelse med hastigheten $c = 3.00 \times 10^8$ m/s (Maxwells ekvationer)
Vad är mediet som ljuset färdas i? Eter?
Elektromagnetismens lagar gällde bara i detta Eter, som ingen hade kunnat mäta.

Relativitetsprincipen

Alla fysikaliska lagar har samma form i alla inertiella koordinatsystem

- Maxwells ekvationer (Elektromagnetism) gäller i alla inertiella referenssystem
- Maxwells ekvationer säger att ljusets hastighet är: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
- Ljusets hastighet i alla inertiella koordinatsystem är: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s

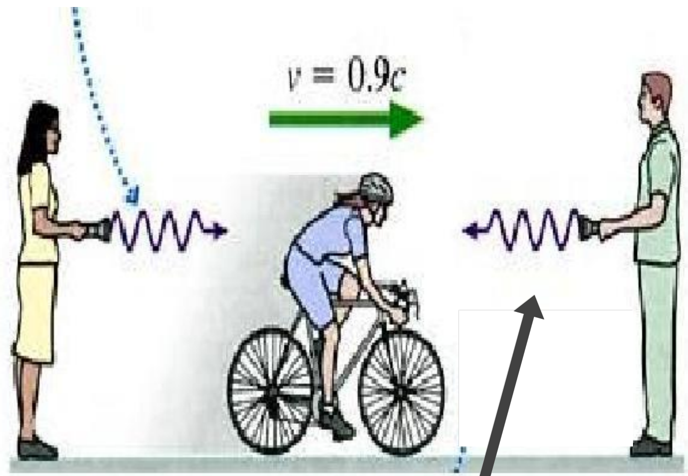
Enligt Galilei transformationen, är hastigheten beroende av referenssystemets hastighet

Ljudets hastighet i luft är **331 m/s**

Ifall vindhastigheten är 40 m/s,
blir ljudhastigheten 331 m/s + 40 m/s = 371 m/s i medvind
och 331 m/s - 40 m/s = 291 m/s i motvind

Ljuset hastighet
relativt till Maria är c   **Inte: c – 0.9c = 0.1 c**

Ljusets hastighet
relativt till Petra är c



Ljusets hastighet
relativt till Göran är c

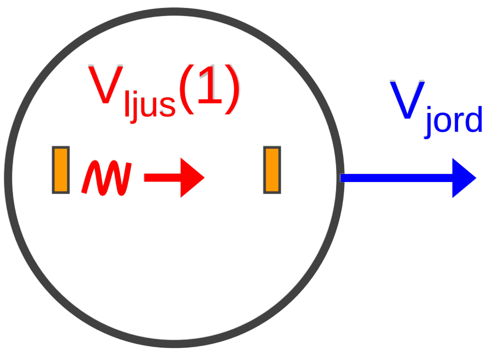
Petra   Maria   Göran

Ljuset hastighet
relativt till Maria är c   **Inte: c + 0.9c = 1.9 c**

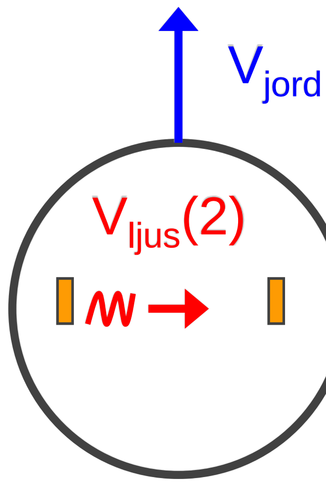
Michelson och Morley försökte i början av 1880 talet mäta 'etervinden', genom att mäta hastighetsskillnaden för ljuset i jordens färdriktning och vinkelrät till denna

Jordens färdhastighet runt solen ~ 30 km/s

1) I jordens färdriktning



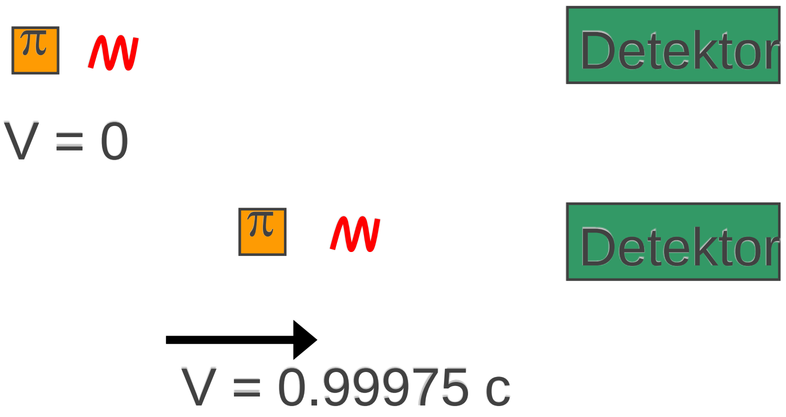
2) Vinkelrät till jordens färdriktning



Resultat:
$|V_{ljus}(1)-V_{ljus}(2)| < 5$ km/s

Senare noggrannare mätningsresultat:
$|V_{ljus}(1)-V_{ljus}(2)| < 3$ m/s

Sönderfall av π-meson (hajoaminen)



<u>Båda mätningarna gav att ljusets hastighet från sönderfallet i laboratoriekoordinatsystemet är c</u>

Hur är detta möjligt?

Hastighet längd- och tidsmätning

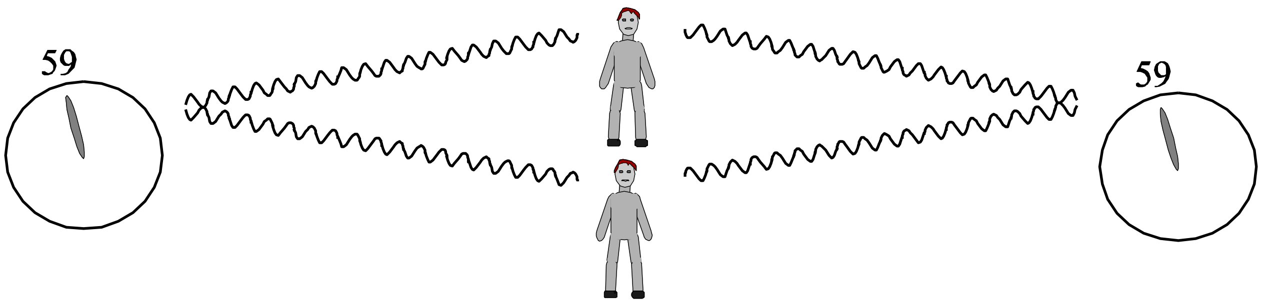
$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \qquad v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$x = x' + ut \Rightarrow \Delta x \neq \Delta x'$$

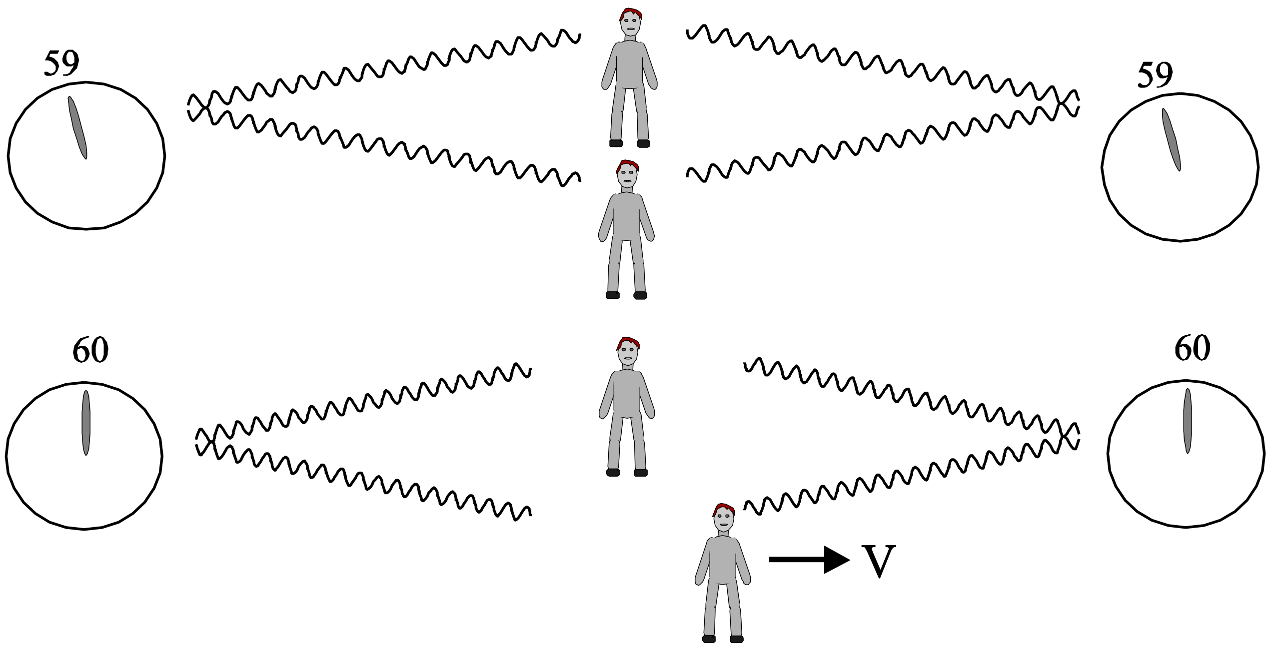
$$c = c' \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t \neq \Delta t'}$$

Tid (aika) Samtidighet? (samanaikainen)

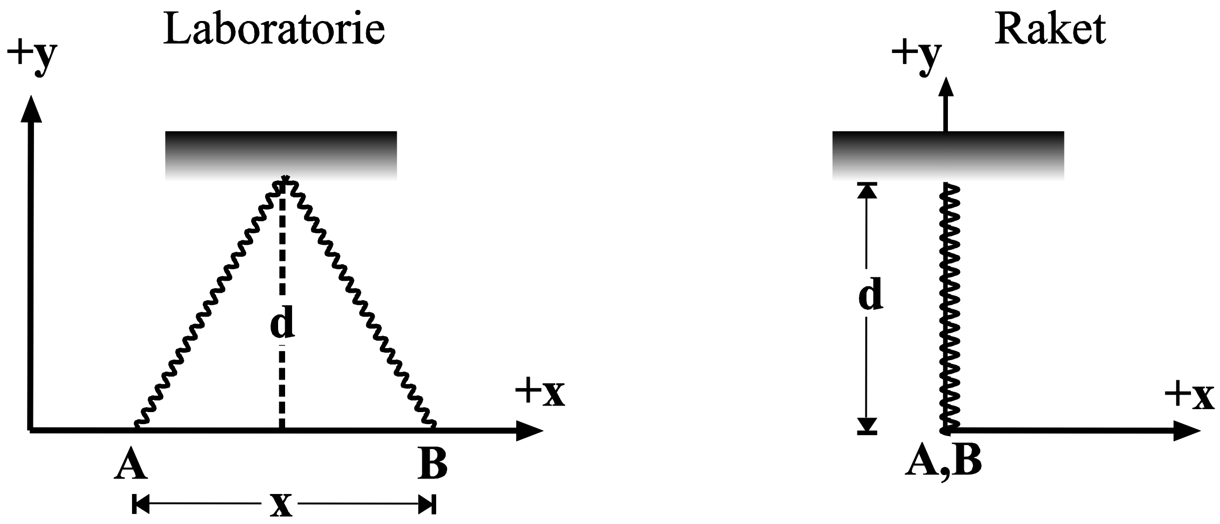


Tid Samtidighet? Samtidighet förlorar sin mening!

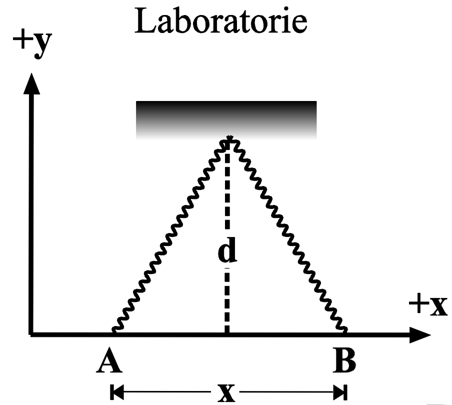


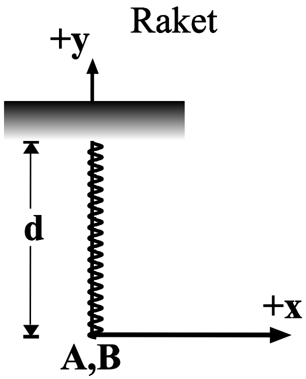
Tidsmätning?

Vi har en raket som rör sig med hög hastighet mot höger.
Vid punkten **A** emitteras en ljusglimt från raketen mot en spegel.
Vid punkten **B** mottar raketen den reflekterade ljusglimten



Raketens hastighet relativt till det stationära laboratoriekoordinatsystemet är: $v = x/t_{lab}$





Distansen som ljusglimten har färdats under denna tid blir:

$$2\left[d^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

Distansen som ljusglimten har färdats I raketens koordinatsystem: $2d$

Ljusets hastighet är c, vilket ger tiden mellan ljusglimtens emission och mottagning i laboratoriekoordinatsystemet:

$$t_{lab} = \frac{2}{c}\left[d^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

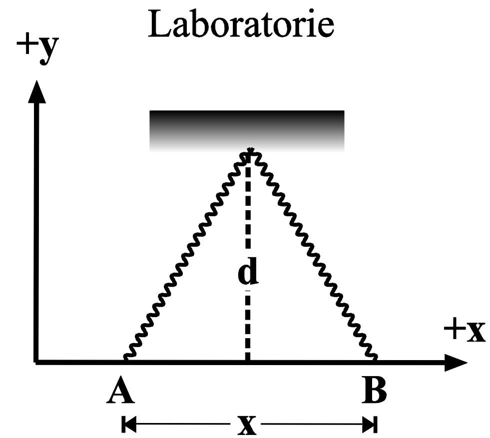
Tiden mellan ljusglimtens emission och mottagning i raketkoordinatsystemet:

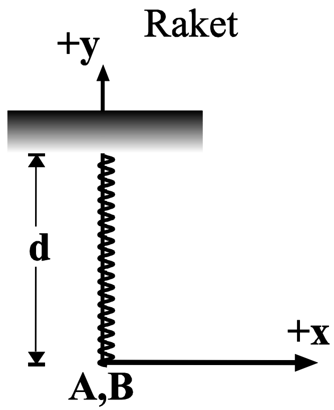
$$t_{raket} = \frac{2d}{c}$$

➡ **Tiden i laboratoriekoordinatsystemet är längre än i raketens koordinatsystem för samma händelse**

$\boxed{\text{Tiden är inte absolut}}$

Raketens hastighet relativt till det stationära laboratoriekoordinatsys-temet är: $v = x/t_{lab}$





$$t_{lab} = \frac{2}{c}\left[d^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right]^{1/2} \qquad t_{raket} = \frac{2d}{c}$$

$$\frac{t_{lab}}{t_{raket}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$\boxed{\mathrm{t} = \frac{t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

gammafaktor $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$

Tidsdilation (ajan hidastuminen)

Tiden går olika i raketsystemet jämfört med laboratoriesystemet

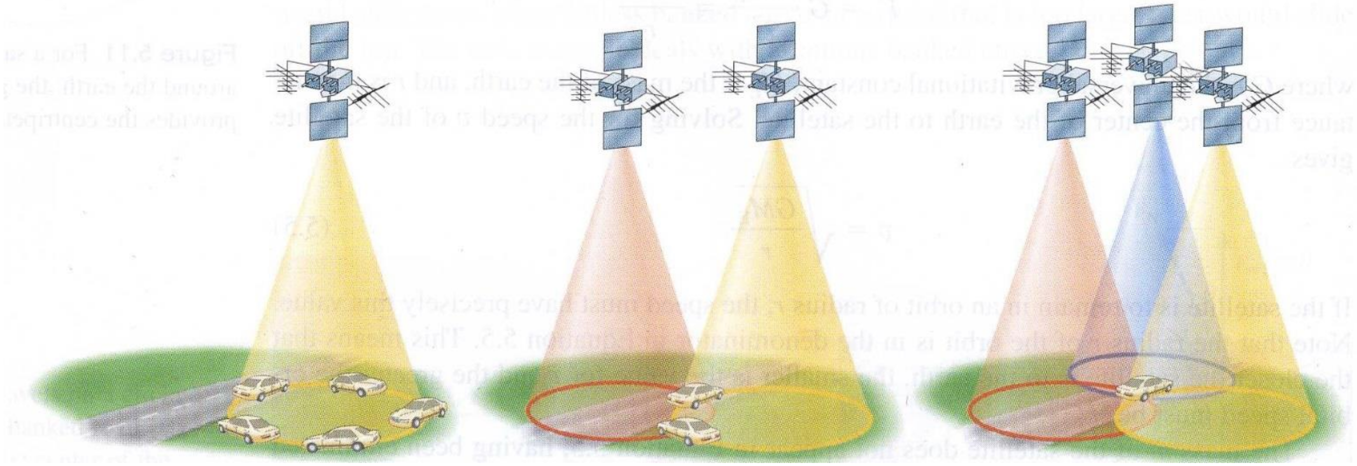
$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Vi har två tvillingar, Terra och Astra, som båda är 20 år gamla då Astra startar med en raket från jorden.
Astras raket färdas med en exceptionell hastighet av 0.98c.
Då 5 år har förlöpt enligt Astras klocka i raketen, återvänder han till jorden.
Hur mycket har hans tvillingbror Terra åldrats?

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{5\,\text{år}}{\sqrt{1-(0.98c/c)^2}} \approx \underline{\underline{25\,\text{år}}}$$

GPS (global positioning system)

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$



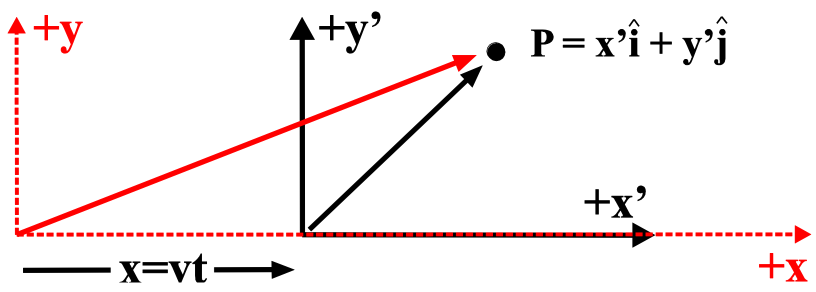
Satelliterna skickar kontinuerligt EM signal med följande data

- Tiden då signalen sänds från satelliten
- Satellitens position då signalen sänds

- Hur fungerar GPS?
- Vad blir Δt p.g.a. satellitens fart?
- Vad blir Δt p.g.a. gravitationsskillnaden?

Lorentz transformation

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$



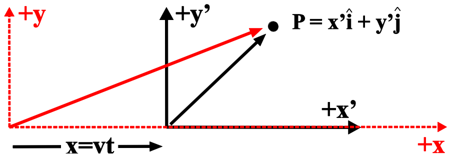
Ekvationerna för **inversa Lorentz transformation**

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{aligned}}$$

Lorentz transformation

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned}}$$

Fitzgerald-Lorentz kontraktion



En raket rör sig med hastigheten **v** relativt till en observatör i vila

Raketens längd: I raketen: $L' = x'_2 - x'_1$

För observatören: $L = x_2 - x_1$

$$L' = \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1) \quad = \gamma x_2 - \gamma v t_2 - \gamma x_1 - \gamma v t_1$$

x_2 och x_1 mäts samtidigt i laboratoriekoordinatsystemet

$t_1 = t_2$ $$L' = \gamma(x_2 - x_1) \quad = L$$

$$\boxed{L = L'\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Lorentz transformation

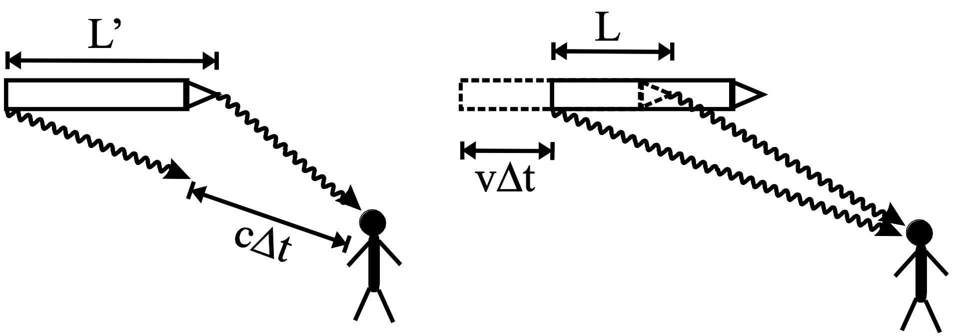
$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



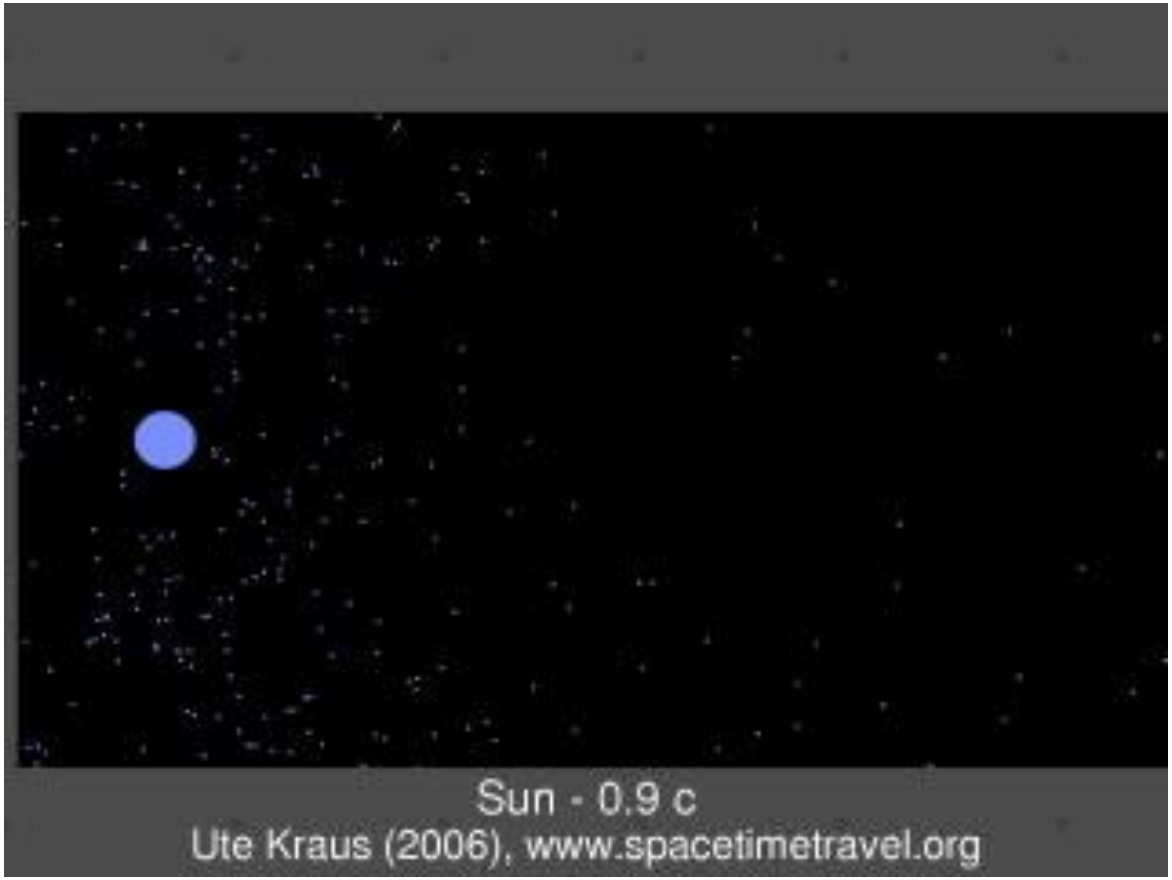
Raketen ser kortare ut i laboratoriesystemet

Exempel

Vintern närmar sig, och man vill ta ner flaggstången vid sommarstället. Problemet är att garaget dit man vill ha flaggstången bara är 5 m långt och flaggstången 7 m långt. Med vilken hastighet *v* borde man kasta in flaggstången, så att det, ett ögonblick, ser ut att rymmas in i garaget?

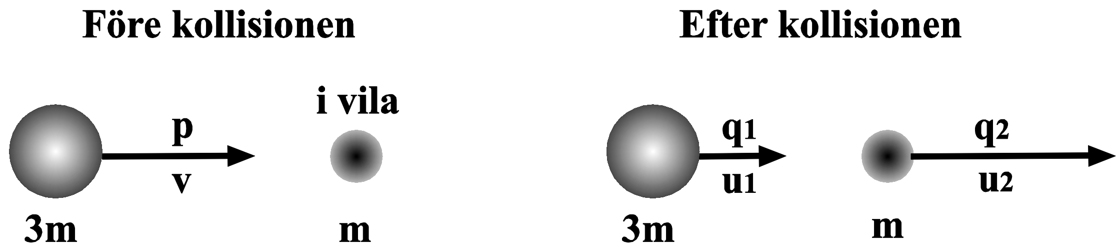
$$v = c\sqrt{1-(5\ m/7\ m)^2} \approx \underline{\underline{0.7\ c}}$$

Stjärnans ”färg” beror på den relativa hastigheten (redshift and blueshift)



Relativistisk rörelsemängd

Anta att vi vill beräkna vad som händer vid den elastiska kollisionen i bilden



Rörelsemängdens bevarande ger ekvationen: $p = q_1 + q_2 \Rightarrow q_1 = p - q_2$

Energins bevarande ger: $\dfrac{p^2}{2(3m)} = \dfrac{q_1^2}{2(3m)} + \dfrac{q_2^2}{2m} \Rightarrow \dfrac{p^2}{2(3m)} = \dfrac{(p-q_2)^2}{2(3m)} + \dfrac{q_2^2}{2m}$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2}{2(3m)} = \frac{p^2 - 2pq_2 + q_2^2}{2(3m)} + \frac{q_2^2}{2m} = \frac{p^2}{2(3m)} - \frac{pq_2}{3m} + \frac{q_2^2}{2(3m)} + \frac{q_2^2}{2m} = \frac{p^2}{2(3m)} - \frac{pq_2}{3m} + \frac{4q_2^2}{2(3m)}$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\frac{pq_2}{3m} + \frac{4q_2^2}{2(3m)} = \frac{q_2}{3m}\left(-p + 2q_2\right) \Rightarrow q_2 = \frac{p}{2} \Rightarrow u_2 = \frac{3}{2}v$$

Ifall $v = 0.8c$ blir $q_2 = 1.2c$!!!

Rörelsemängdens bevarande är i konflikt med relativitetsprincipen!

Relativistisk rörelsemängd

Rörelsemängdens bevarande kom från Newtons lagar, som därmed också är i konflikt med relativitetsprincipen, som säger att:
Fysikens lagar har samma form i alla referenssystem

I referenssystemet O är: $F = \frac{dp}{dt}$

Samtidigt i ett annat referenssystem som rör sig relativt till O måste ekvationen ha samma form: O': $F' = \frac{dp'}{dt'}$

Rörelsemängden som uppfyller detta är: $\boxed{\bar{p} = \frac{m\bar{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - v^2/c^2} \Leftrightarrow p^2 - p^2 v^2/c^2 = m^2 v^2 \Leftrightarrow p^2 = v^2(m^2 + p^2/c^2)$$

$$\Leftrightarrow v^2 = \frac{p^2}{m^2 + p^2/c^2} \Leftrightarrow v^2 = \frac{p^2 c^2}{m^2 c^2 + p^2} = \frac{c^2}{m^2 c^2/p^2 + 1} \Rightarrow v \le c$$

Exempel

En elektron i ett TV-rör har hastigheten 1.0×10^8 m/s. Vad är rörelsemängden för elektronen

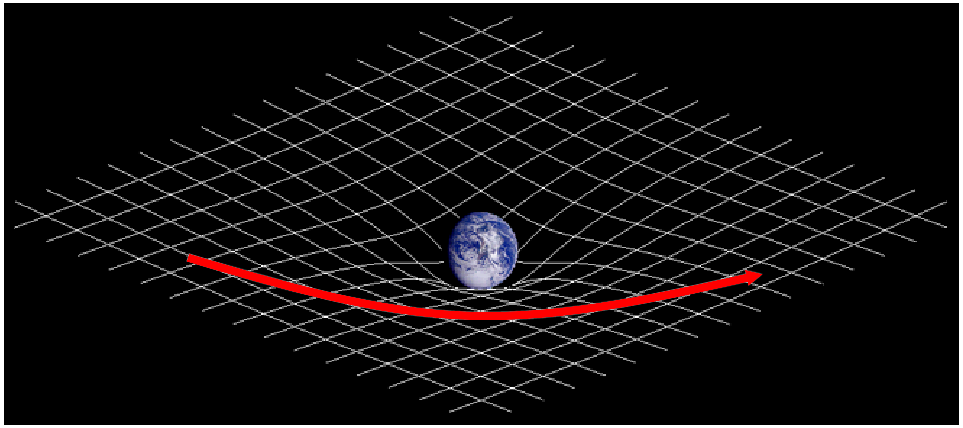
a) med icke-relativistisk beräkning
b) relativistisk beräkning
Vad är felet i % då man beräknar rörelsemängden icke-relativistiskt?

Den maximala hastigheten man kan ge en elektron vid Stanford lineäraccelerator är: 0.999 999 999 948 c.
Vad ger beräkningarna ovan nu?

Den allmänna relativitetsteorin

Den speciella relativitetsteorin gäller inte för kroppar i gravitationsfält eller accelererad rörelse, vilket däremot den allmänna relativitetsteorin gör

Enligt Einsteins postulat, känner en kropp i närheten av ett massivt objekt ingen kraft, utan kroppen har en krökt bana p.g.a. att rymden är krökt



Experimentellt har man visat att ljus, utan massa, blir krökt då den passerar ett massivt objekt

⇨ Newtons gravitationslag är alltså en **fiktiv kraft** (liksom corioliskraften), som ger samma effekt för kroppars rörelse i ett euklidiskt koordinatsystem, som kroppen rör sig i den krökta tidsrymden