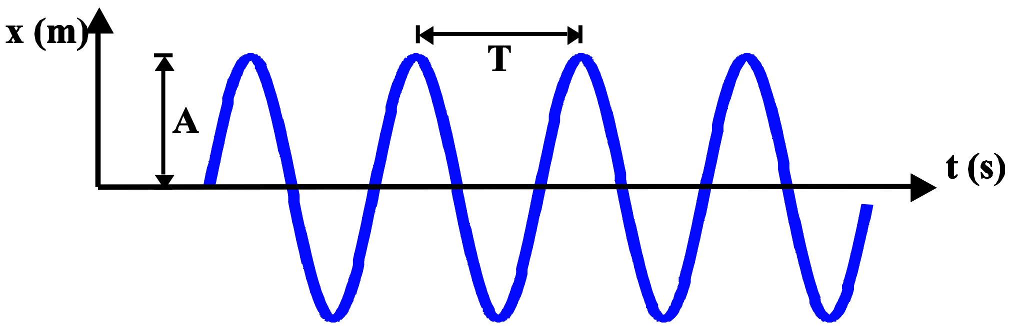
Tidsberoende krafter: oscillerande rörelse
(ajasta riippuvat voimat: värähdysliike)

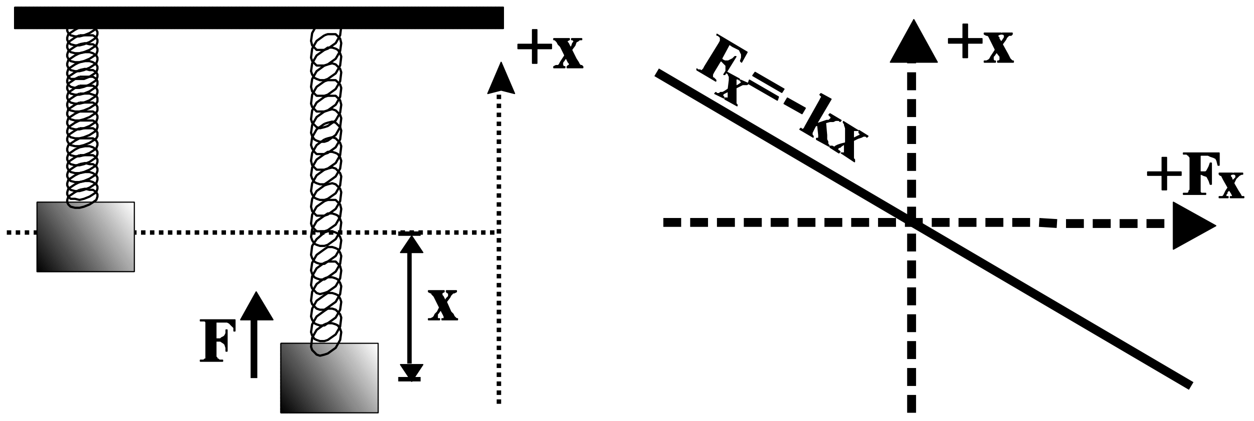
Många olika fenomen i naturen är **periodiska**



amplitud, A	Maximiförskjutning (m) eller maximiavståndet från jämviktspositionen
Cykel (jakso)	Ett helt kretslopp för systemet
Perioden, T	Tiden (s) för systemet att göra ett helt kretslopp eller cykel
Frekvens, f	Antal cykler per sekund ($f=1/T$), 1 hertz = 1 Hz = 1 cykel/s
Vinkelfrekvens, ω	Vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi f$ rad/s
Fasvinkel, ϕ (vaihekulma)	Fasvinkeln (rad) som säger oss vid vilken punkt oscillerande rörelse är vid tidpunkten noll

Simpel harmonisk rörelse (yksinkertainen harmoninen liike)

När **kraften** för ett system är proportionellt till negativa värdet av förskjutningen från jämviktspositionen får vi **simpel harmonisk rörelse**

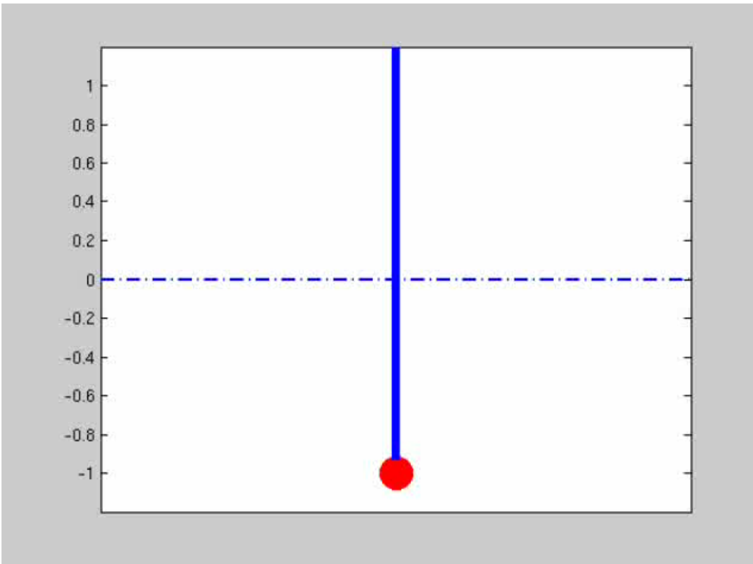


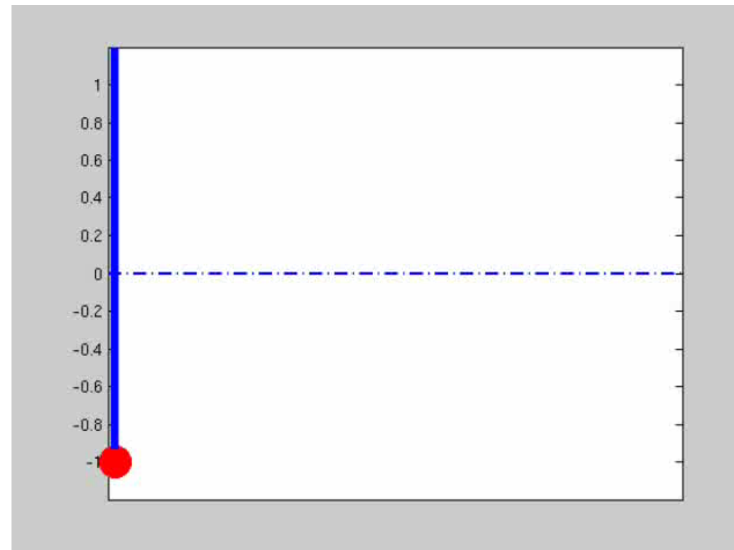
Fjäderns kraft som en funktion av förskjutningen x

Hookes lag $$\boxed{F_x = -k \cdot x}$$ [k]=N/m är fjäderkonstanten

Simpel harmonisk rörelse

$$F_x = -k \cdot x$$





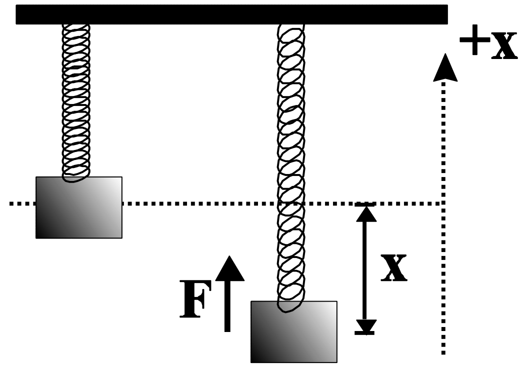
Grupparbete

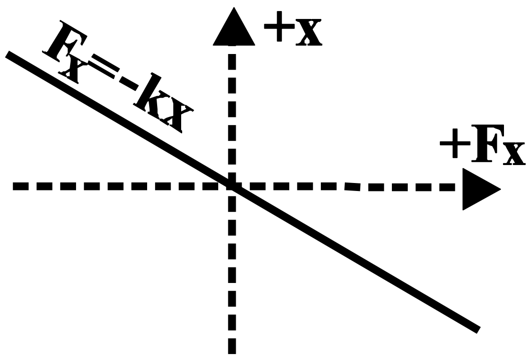
Simpel harmonisk rörelse

$$F = -k \cdot x$$

$$F = \frac{dp}{dt} = m \cdot a_x$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$



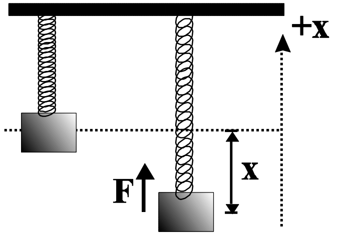


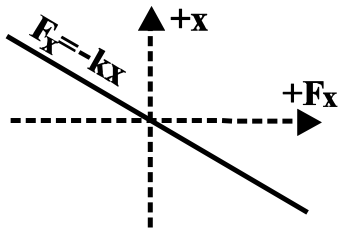
$$-k \cdot x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

Vilket är en differentialekvation

$$F_x = -k \cdot x \; = m \cdot a_x$$





$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

Ansats:
(yritelmä)

$$x = A\sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi)$$

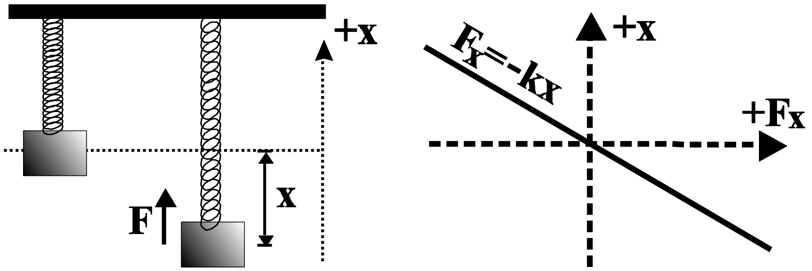
$$\Rightarrow \quad -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi) + \frac{k}{m} A\sin(\omega t + \phi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A\sin(\omega t + \phi)\left[-\omega^2 + \frac{k}{m}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

Simpel harmonisk rörelse

$$F_x = -k \cdot x \qquad = m \cdot a_x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$



Plats	$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$
Hastighet	$v(t) = \omega A\cos(\omega t + \phi)$
Acceleration	$a(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi)$

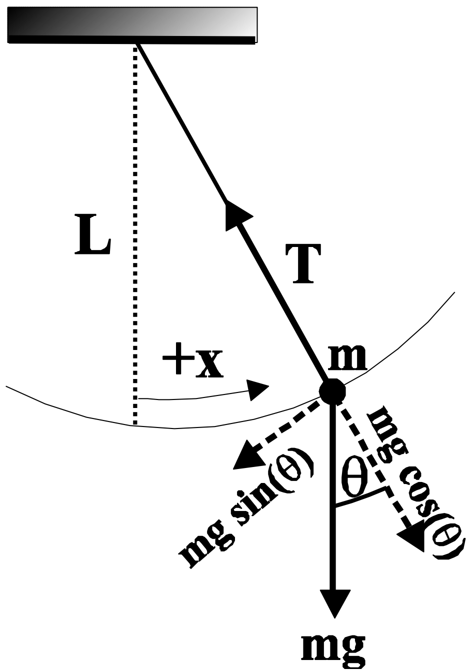
Vinkelhastighet $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

A maximiförflyttningen (Amplitud)

ϕ Fasvinkel som bestämmer vad x är vid tiden noll

Grupparbete

Simpel pendel



Vi vill ha: $m \cdot a_x = F_x \propto x$

$$F_\theta = -mg \cdot \sin(\theta)$$

θ liten ger approximationen: $\sin(\theta) \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad F_\theta \approx -mg \cdot \theta \;= -mg\frac{x}{L} \;= -\frac{mg}{L}x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Exempel

Vad är perioden och frekvensen för en simpel pendel som är 1.000 m lång som befinner sig vid en plats med g = 9.830 m/s²

Vinkelfrekvensen [rad/s] $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$

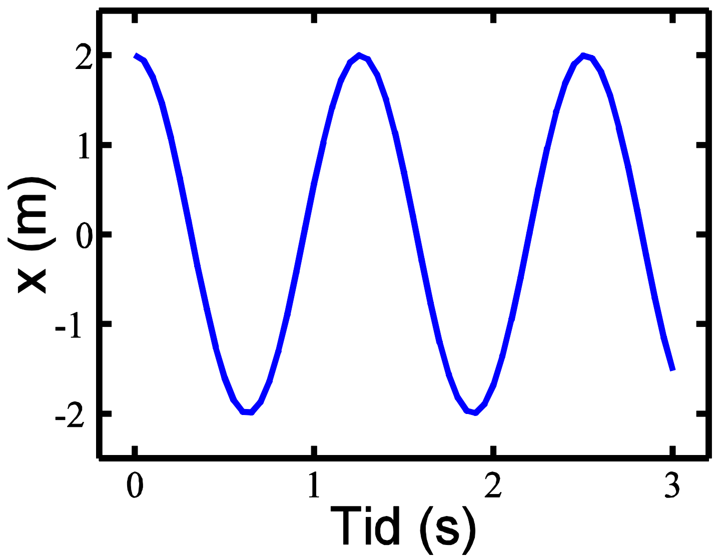
Perioden T [s]

Frekvensen f [f] = 1/s $\omega = 2\pi \cdot f$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.83\,\mathrm{m/s}^2}{1.0\,\mathrm{m}}} \approx \underline{0.499\,\mathrm{Hz}}$$

$$T = \frac{1}{f} \approx \underline{2.004\,\mathrm{s}}$$

Bestäm utgående från den nedre bilden **amplituden A**, **vinkelhastigheten ω**, **fasvinkeln ϕ** och **frekvensen f**



Amplituden: A = 2 m

Perioden T ~ 2.5 – 1.2 s ~ 1.3 s

Frekvensen: f ~ 1/1.3 s ~ 0.77 Hz

Vinkelfrekvensen ω = 2πf ~ 4.84 rad/s

Fasvinkel, ϕ ?

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$x(0) = 2 = 2\sin(\omega \cdot 0 + \phi) \quad \Rightarrow \quad \phi = \sin^{-1}(1) \; \underline{\approx 1.5708\,(= \pi/2)}$$