6 Energiprincipen

Varför är begreppet energi så viktigt? Det var en gång en kille som hette Jakob, och han jobbade på dagen och funderade över olika saker på kvällarna. En kväll tänkte han på pengar. Jabob hade alltid en viss summa pengar i plånboken och på sitt användarkonto. Ibland satte han sina småslantar i en liten glasburk vid dörren. Jakob tänkte att ifall han tar lönen minus levnadsutgifterna, borde detta bli summan av pengarna han har på sitt användarkonto, i plånboken och i glasburken:

Lön - utgifter = användarkonto + plånboken + glasburken

För att se ifall hans antagande var rätt, bokförde han en tid hur mycket pengar han hade på de olika ställen, och ekvationen verkade att stämma. En kväll blev han bestört då han märkte att ekvationen inte stämde: **Lön - utgifter $\neq$ användarkonto + plånboken + glasburken**, det fattades 5 cent!? Tiden gick, och Jakob hade redan glömt sin dåliga ekvation som inte stämmer, tills en dag då han städade fann 5 cent under sängen.

Samma sak som i berättelsen har man märkt med energi: **Totala mängen energi är konstant**,
den försvinner ingenstans. Ibland verkar det som energimängen försvinner någonstans, men söker man tillräckligt länge, har man alltid funnit den förlorade energimängden och ekvationen stämmer igen.

6.1 Energin för en partikel

Den **relativistiska energin** för det simplaste systemet, en partikel, är

$$\boxed{E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}mc^2 = \gamma mc^2 \qquad (135)}$$

Märk att den relativistiska rörelsemängden närmar sig den icke-relativistiska $p = mv$, då hastigheten v är mycket mindre än ljusets hastighet, $v << c$, men att den relativistiska energin, däremot, gör inte detta: $v << c \Rightarrow E_{rel} \approx mc^2$, $E_{ickerel} = 0.5mv^2$. För att lösa den uppenbara konflikten mellan den relativistiska och icke relativistiska energin, expanderar vi ekvation (135) som Taylor serie kring v^2/c^2 (eller enligt binomialteoremet)

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}mc^2 = mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{v^4}{c^4}\right) + ...\right] \qquad (136)$$

Den första termen ger energin för en kropp i vila (**viloenergi**)[18]: $E_\circ = mc^2$ Den andra termen $0.5mv^2$, är den bekanta kinetiska energin enligt Newton. De högre ordningstermerna måste tas i beaktande när v närmar sig c.

[18]Viloenergin för en människa $\approx 100(3\times10^8)^2 \approx 10^{19}$ J !!

Ifall vi nu definierar att den relativistiska kinetiska energin är $K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v^4}{c^2}\right) + ...$ blir den relativistiska energin för en partikel i formen

$$\boxed{E = mc^2 + K \qquad (137)}$$

Ekvation som relaterar relativistisk energi till relativistisk rörelsemängd i alla referenssystem och partikelfarter ges av

$$\boxed{E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \qquad (138)}$$

där $E = \gamma mc^2$ och m är vilomassan. För partiklar utan massa som t.ex. fotonen, blir ekvationen: $E = pc$. Fotoner rör sig alltic med ljusets hastighet, har ingen vilomassa och kan därmed inte stå stilla. Denna ekvation är en bra approximation för alla mycket lätta partiklar som rör sig med hög hastighet såsom neutrinon ($mc^2 << E$).

Exempel: Beräkna hur många kg kol man måste förbränna, så att energimängden som avges är lika mycket som man får då 1 kg tritium och 1 kg deuterium fusioneras.

Då man fusionerar väteisotoperna deuterium D (en proton + en neutron) + T tritium (en proton + 2 neutroner), får man en helium atom ^{4}He (två protoner två neutroner) + en neutron (n) + energi

$$\mathrm{D} + \mathrm{T} = {}^4\mathrm{He} + \mathrm{n} + \mathrm{E}$$

För att beräkna den frigivna energin, behöver vi massorna

$$\begin{aligned}
\mathrm{M(D)} &\approx 2.0141\,u \\
\mathrm{M(T)} &\approx 3.0166\,u \\
\mathrm{M(^4He)} &\approx 4.0026\,u \\
\mathrm{M(n)} &\approx 1.0087\,u \\
\mathrm{u} &\approx 1.66057\times10^{-27}\ \mathrm{kg}
\end{aligned}$$

Masskillnaden blir: ΔM = M(före) - M(efter) = $[M(D) + M(T)]$ - $[M(^4\mathrm{He})+M(n)] \approx$ 0.01889 u ($\approx 3.1360\times10^{-29}$ kg).
I energi blir detta $E \approx \Delta M c^2 \approx 3.1360\times10^{-12}$ J ($\approx$ 17.6 MeV).
Antalet fusionsevent N får man från:

$$\begin{aligned}
\frac{2\ \mathrm{kg}}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{M(D)u} + \mathrm{N}\cdot\mathrm{M(T)u}} &= \frac{2\ \mathrm{kg}}{\mathrm{N\ (\ M(D) + M(T))u}} \\
\Rightarrow \qquad \mathrm{N} &= \frac{2\ \mathrm{kg}}{[\mathrm{M(D) + M(T)}]1.66057\times10^{-27}\ \mathrm{kg}} \approx 2.4\times10^{26}
\end{aligned}$$

Vilket ger den totala energimängden $E_{tot} \approx 6.76\times10^{14}$ J ($\approx$ 188 000 MWh)

Kol brinner och avger energi

$$
\begin{aligned}
\text{C + O} &\Rightarrow \text{CO} \qquad 110\ \text{kJ/mol} \\
\text{C + O + O} &\Rightarrow \text{CO}_2 \qquad 394\ \text{kJ/mol} \\
&\Rightarrow \approx 200\ \text{kJ/mol} \\
1\ \text{mol} &= 12\ \text{g C} = 1.2\times10^{-2}\ \text{kg C}
\end{aligned}
$$

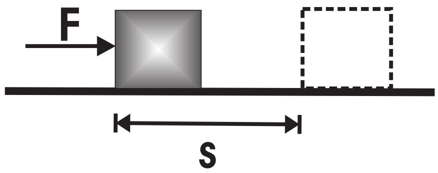
Vi behöver ungefär $6.76\times10^{14}/200\times10^{3}$ mol kol för att producera lika mycket energi som vid fusionen. I massa blir detta: $6.76\times10^{14}/2\times10^{5}\cdot\ 1.2\times10^{-2}$ kg $\approx 4.06\times10^{7}$ kg. Alltså det behövs ca. 40 miljoner kg kol. Märk också att det produceras ca. 100 miljoner kg koldioxid vid bränning av en så stor mängd kol.

6.2 Mekaniskt arbete

I de föregående uppgifterna hade vi krafter som var konstanta eller vars värden vi hade som en funktion av tiden. Anta att vi har en bågskytt som släpper pilen från pilbågen, och att vi vill beräkna pilens position som funktion av tiden. Nu ändras kraften från pilbågen då pilen accelereras, och det verkar vara en omöjlig uppgift att lösa problemet. Vi kan börja använda oss av begreppet energi, vars användbarhet kommer från det faktum att totala energin alltid hålls konstant.

Mekaniskt arbete definieras som kraften gånger sträckan i kraftens riktning.

$$W = |F||s| \qquad \text{kraft och förflyttning i samma riktning} \tag{139}$$

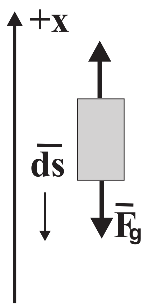


där [W] = N·m = J (joule). När kraften och förflyttningen inte är i samma riktning, så tar vi den komponenten av kraften i förflyttningens riktning

$$W = |F||s|cos(\phi) = \mathbf{F} \bullet \mathbf{s} \tag{140}$$

Figur 25: a) Kraften och förflyttningen i olika riktningar. b) För att räkna arbetet multiplicerar man kraftens komponent i förflyttningens ritning $|\mathbf{F}|cos(\phi)$ med förflyttningen |s|.

Exempel: En hiss vars massa är 900 kg sänker sig från 400 m:s höjd. Vad är arbetet som gravitationen gör under förflyttningen? Vad är arbetet som hisskabeln gör?



Vi definierar $+x$ uppåt, så att förflyttningen är negativ i båda fallen Δx = - 400 m. Gravitationskraften är i minus x riktning, vilket ger

$$\begin{aligned} W_g &= \mathbf{F_g} \cdot \mathbf{\Delta x} \\ &\approx -8.8 \cdot 10^3\ N \cdot (-400\ m) \approx \underline{\underline{3.5\times10^6\ J}} \end{aligned}$$

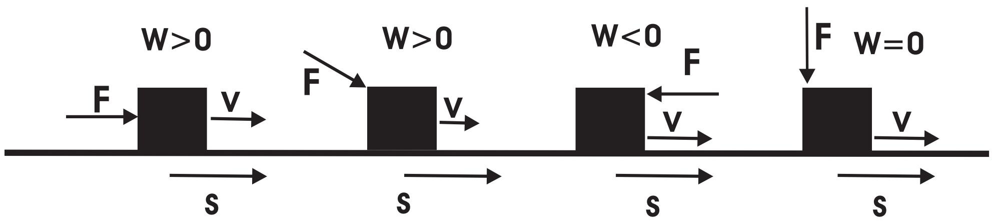
Vi ser att gravitationen gör positivt arbete på hisskorgen, vilket är oberoende av hissens hastighet.

Ifall hissen sänker sig med konstant hastighet, så är accelerationen noll och gravitationskraften kompenseras exakt av spänningen i hisskabeln $T = mg\,\hat{\mathbf{i}}$. Vi får då att arbetet som kabeln gör är

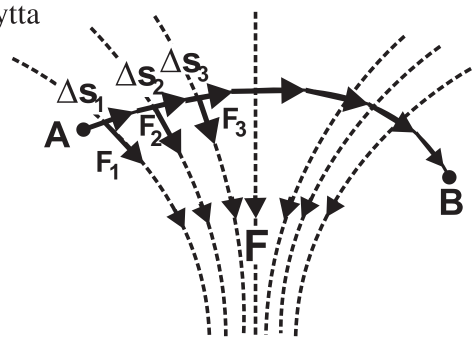
$$\begin{aligned} W_k &= mg\,\hat{\mathbf{i}} \cdot (-\Delta x\,\hat{\mathbf{i}}) \\ &\approx -8.8 \times 10^3\ N\ 400\ m \approx \underline{\underline{-3.5\times10^6\ J}} \end{aligned}$$

Ifall hisskorgen skulle få falla fritt, skulle arbetet för kabeln vara noll, men arbetet för gravitationen lika som förut.

I bilden nedan ser vi fyra olika situationer, där arbetet som görs på rätblocket är positiv i de två första fallen och sedan negativ och noll.[19]



I allmänna fall ändras riktningen på kraften och sträckan, se bilden, vilket leder till att det totala arbetet som görs på en kropp för att flytta den från punkt A till B är



$$\begin{aligned} W_{A\to B} &= \mathbf{F}_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2 + ... + \mathbf{F}_N \cdot \Delta\mathbf{s}_N \\ &= \sum_{i=i}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \Delta\mathbf{s}_i \\ &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} \end{aligned}$$

[19]Gör man arbete ifall man bär in ved?

6.3 Potentiell energi

Vanligtvis är arbetet beroende på vilket sätt eller vilken väg vi valde att gå från A till B. För vissa kraftfält däremot, beror arbetet inte på vilken väg vi väljer, utan bara på ändpunkterna. Dessa kallas för **konservativa kraftfält**, dit exempelvis gravitationsfält räknas. Ifall vi skuffar en låda längs marken från en punkt A till B, så blir arbetet större, ju längre sträcka vi går (friktionskraften är inte konservativ). I detta fall konverteras energi via friktionen till värme.

För konservativa kraftfält kan vi skriva arbetet gjort för att komma från A till B

$$W_{A\to B} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B) \tag{141}$$

där $\mathbf{r}_A$ och $\mathbf{r}_B$ är A:s och B:s platsvektorer och U är den potentiella energifunktionen. Vi ser att *arbetet* är definierat som *skillnaden* i potentialenergin. Detta betyder att vi alltid kan addera en konstant till potentialenergin, utan att skillnaden ändras. Vi kan därför själv bestämma var potentialenergin är noll. Vanligtvis väljer man att potentialenergin är noll där kraften är noll.

Då nollstället har valts, får vi att arbetet att föra en kropp från $\mathbf{r}_\circ$ till $\mathbf{r}$ blir

$$W_{\mathbf{r}_\circ\to\mathbf{r}} = \int_{r_\circ}^{r} \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = U(\mathbf{r}_\circ) - U(\mathbf{r}) \tag{142}$$

och vi får att potentiella energifunktionen för en kropp vid position $\mathbf{r}$ blir

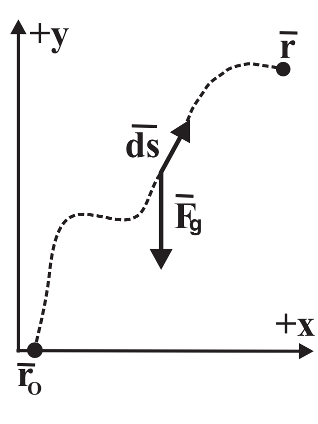
$$U(\mathbf{r}) = -\int_{r_\circ}^{r} \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} + U(\mathbf{r}_\circ) = -\int_{r_\circ}^{r} \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} \tag{143}$$

där $U(\mathbf{r}_\circ)$ har valts att vara noll.

Exempel: Bestäm potentialenergifunktionen för en massa m i gravitationsfält nära jordytan.

Vi befinner oss nära jordytan så att gravitationskraften är konstant $\mathbf{F}_g = -mg\,\hat{j}$. Vi får då att Potentialenergifunktionen blir [20]

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= -\int_{r_\circ}^{r} \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = -\int_{r_\circ}^{r} -mg\hat{j}\cdot\mathbf{ds} \\ &= mg\int_{r_\circ}^{r} \hat{j}\cdot(dx\hat{i}+dy\hat{j}) = mg\int_{y_\circ}^{y} dy \\ &= mgy - mgy_\circ = \underline{\underline{mg(y-y_\circ)}} \end{aligned}$$



Vi ser att den potentiella energin bara beror av höjdskillnaden $y - y_\circ$. Ofta väljer man $y_\circ = 0$, vilket ger oss gamla goda: *U* = *mgh*, där *h* är höjden över marken.

[20]Där sträckan: $\mathbf{ds} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ och $\hat{j}\cdot\hat{i} = 0$ och $\hat{j}\cdot\hat{j} = 1$

Exempel: Bestäm den potentiella energifunktionen för Newtons gravitationslag.

Gravitationskraften mellan massan m och M är: $\mathbf{F}_g = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$. Vi ser att kraften vid oändligheten ($\mathbf{r} = \infty$) är noll, så att vi väljer att potentialenergin där är noll: $U(\infty) = 0$. Potentiella energifunktionen blir

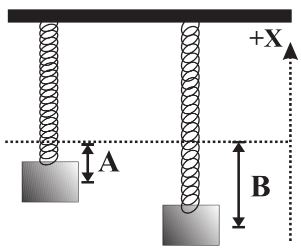
$$U(\mathbf{r}) = -\int_{r_\circ}^{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{dr}' = -\int_{\infty}^{r} \left(-G\frac{mM}{r'^2}\hat{r}'\right) \cdot \mathbf{dr}'$$

Gravitationskraften är konservativ, vilket betyder att vi kan integrera rakaste vägen från oändligheten till *r* ($\hat{r}' \cdot \mathbf{dr}' = dr'$) vilket ger

$$\boxed{U(r) = GmM\int_{\infty}^{r} \frac{dr'}{r'^2} = -\frac{GmM}{r} \qquad (144)}$$

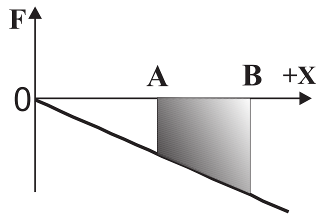
Observera att den potentiella energin är definierad för hela systemet m och M.

Exempel: Beräkna arbete som fjädern gör när massan dras från position **A** till **B** i bilden



En idealisk fjäder följer *Hookes lag*: $F_x = -kx$, vilket ger arbetet som fjädern gör

$$W_{A\to B} = \int_A^B F_x(x)dx = -k\int_A^B xdx = -k\Big|_A^B \frac{x^2}{2}$$



$$\boxed{W_{A\to B} = -\frac{k}{2}(B^2 - A^2) \qquad (145)}$$

Den yttre kraften som drar massan ner är i samma riktning som förskjutningen, så att den gör positivt arbete på systemet. Detta som blir lagrad som potentiell energi i fjädern.[21]

[21] Var och hur blir energin lagrad i fjädern?

Härledningen av kraft från den potentiella energin

I föregående kapitel såg vi att den potentiella energin är integralen av kraften som en funktion av sträckan: $U(x) = -\int F(x) \cdot dx$, där vi bara ser på storheterna i x-riktning. Ifall vi deriverar båda sidorna får vi

$$dU(x) \quad = \quad -F(x) \cdot dx$$

som vidare ger

$$F(x) \quad = \quad -\frac{dU(x)}{dx}$$

Man får alltså kraften i x-riktning som negativa värdet av derivatan av potentialen som en funktion av x. Denna ekvation berättar att kraften är riktad mot lägre potential, alltså söker sig en partikel till den position med den lägsta potentiella energin.

I tre dimensioner får vi motsvarande formlerna

$$\boxed{F_x = -\frac{\delta U}{\delta x} \qquad F_y = -\frac{\delta U}{\delta y} \qquad F_z = -\frac{\delta U}{\delta z}} \tag{146}$$

som blir i vektorform

$$\boxed{\mathbf{F} = -\left(\frac{\delta U}{\delta x}\hat{\imath} + \frac{\delta U}{\delta y}\hat{\jmath} + \frac{\delta U}{\delta z}\hat{k}\right)} \tag{147}$$

där vi räknar partialderivatan[22] av U för varje koordinat (gradienten av U eller nabla U). Kortare skrivs detta som

$$\boxed{\mathbf{F} = -\nabla U} \tag{148}$$

Exempel: Vi fick tidigare att den potentiella gravitationsenergin vid jordytan är $U = mgy$. Beräkna kraften utgående från denna potential.

Kraften för denna potential blir

$$\mathbf{F} \quad = \quad -\nabla(mgy) = -mg\left(\frac{\delta y}{\delta x}\hat{\imath} + \frac{\delta y}{\delta y}\hat{\jmath} + \frac{\delta y}{\delta z}\hat{k}\right) = \underline{\underline{-mg\hat{\jmath}}}$$

vilket just är storleken och riktningen för gravitationskraften vid jordytan.

[22] $\frac{\delta U}{\delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x,y,z)-U(x,y,z)}{\Delta x}$

6.4 Kinetisk energi

Ifall en kraft som påverkar en kroppen är i samma riktning som förflyttningen, så accelereras kroppen. Arbetet gjort på kroppen $W > 0$. Denna energi finns nu lagrad som rörelse eller kinetisk energi hos kroppen. I föregående avsnitt såg vi att arbetet som en kraft gör på ett objekt när den flyttar objektet från en punkt A till B i ett kraftfält $\mathbf{F}$ är[23]

$$\begin{aligned} W_{A\to B} &= \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_A^B m\mathbf{a}\cdot d\mathbf{s} = m\int_A^B \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot d\mathbf{s} = m\int_A^B \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}dt \\ &= m\int_A^B \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}dt = m\int_A^B \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2)dt = \frac{1}{2}m\int_A^B d(v^2) = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) \\ &= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \end{aligned} \tag{149}$$

Arbetet att flytta kroppen från punkt A till B har ändrat storheten $\frac{1}{2}mv^2$ från $\frac{1}{2}mv_A^2$ till $\frac{1}{2}mv_B^2$. Denna storhet är alltså viktig, så vi definierar den som kroppen *kinetiska energi*

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2} \tag{150}$$

Arbetet att flytta en kropp i ett konservativt kraftfält är lika med ändpunkternas potentialskillnad: $W_{A\to B} = U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B)$ vilket ger att kroppens totala **mekaniska energi** E är konstant och bara förhållandet mellan den kinetiska K och potentiella U energin ändras

$$\boxed{E = K + U = \frac{1}{2}mv_A^2 + U(\mathbf{r}_A) = \frac{1}{2}mv_B^2 + U(\mathbf{r}_B)} \tag{151}$$

Exempel: Vi hade i kapitel 2 en fråga där farten med vilken dykarna vid Acapulco träffar vattnet då begynnelsehöjden är 36 m över havet?

Detta löstes med rörelseekvationerna i en dimension, där först tiden då dykaren träffar vattnet beräknas, och sedan räknar man sluthastigheten från den konstanta gravitationsaccelerationen. Vi kan också beräkna detta genom att betrakta systemets energi som är konstant eftersom gravitationskraften är en konservativ kraft. Uppe på klippan är dykarens kinetiska energi noll. Potentialenergin väljs att vara noll vid vattenytan, vilket ger att dykarens totala mekaniska energi uppe på klippan A är samma som vid vattenytan B:

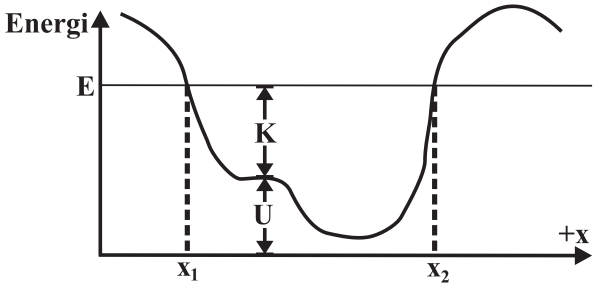
$$Energi \quad = \quad K_A + U_A = 0 + mgy = K_B + U_B = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

vilket ger sluthastigheten: $v = \sqrt{2gy} \approx$ $\underline{\underline{\text{26 m/s}}}$

[23]märk att: $\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}$

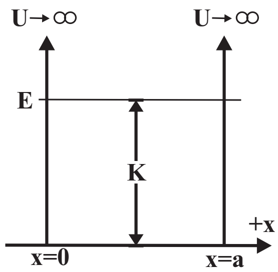
6.5 Energidiagram

Här skall vi nu se vad man får ut från en figur med den potentiella energin ritad som en funktion av platsen. I ett konservativt kraftfält är den totala mekaniska energin konstant: $E = K + U$, ritad som en horisontell linje i figuren. Hur stor del av denna energi är kinetisk eller potentiell ser man också från bilden.



Den kinetiska energin: $K = \frac{1}{2}mv^2$ är alltid positiv, vilket ger att $E - U$ är alltid positiv, eller att $E \geq U$. Detta, från figuren, betyder att objektet inte kan ha x-koordinater mindre än x_1 eller större än x_2. Dessa områden är förbjudna för objektet enligt den klassiska mekaniken. Vidare ser man från figuren att kraften på objektet vid x_1 är riktad mot större x, höger, eftersom kraften får man från den potentiella energin som: $F = -\frac{dU}{dx}$.

Exempel: Partikel i en låda

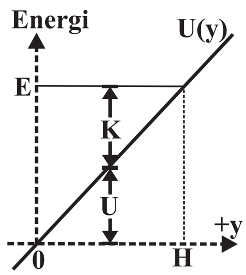


Betrakta figuren till höger. Partikelns potentialfunktion är

$$\mathrm{U(x)} = \begin{cases} \infty & \text{för } x \leq 0 \text{ och } x \geq a \\ 0 & \text{för } 0 < x < a \end{cases}$$

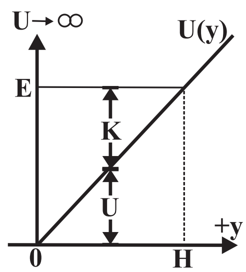
Partikeln är bunden till området: $0 < x < a$, där hela dess energi är kinetisk: E = K = $\frac{1}{2}mv^2$. Den rör sig fram och tillbaka mellan 0 och a med hastigheten $v = \pm\sqrt{2E/m}$.

Exempel: Partikel i fritt fall



Partikelns potentialfunktion är nu: $U(y) = mgy$ som ges av en rak linje. Då partikeln faller från en höjd, ökar den *kinetiska energin* och den *potentiella* minskar. Kraften: $F = -dU/dy = -mg$ nedåt hela tiden. Totala energin är konstant: $E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$.

Exempel: Partikel i fritt fall och sedan studsar tillbaka

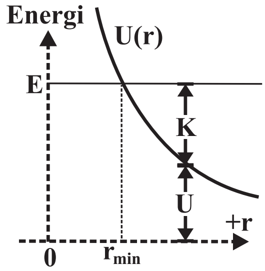


$$\mathrm{U(y)} = \begin{cases} \infty & \text{för } y < 0 \\ mgy & \text{för } y \geq 0 \end{cases}$$

Partikeln studsar upp och ner utan friktion och den totala energin är helt kinetiskt på marken och helt potentiellt vid den högsta punkten H.

Exempel: Repulsiv potential

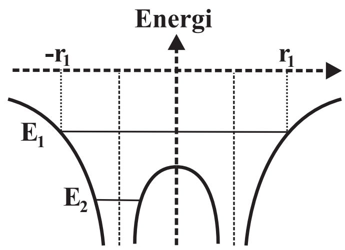
Partikeln närmar sig r = 0 från höger, men när dess potentiella energi är lika med dess totala energi: $U(r_{min})$ = E blir den reflekterad och fortsätter sedan spegelvänt tillbaka mot höger



Exempel: Två massors potential

En partikel befinner sig nu i närheten av två massor. Vi ser att dess *totala mekaniska energi* är mindre än noll, vilket betyder att partikeln är bunden till att kretsa kring de två massorna. Är energin lika med E_1 i bilden, kretsar partikeln kring båda massorna, men är energin E_2, kretsar partikeln bara runt den vänstra massan.

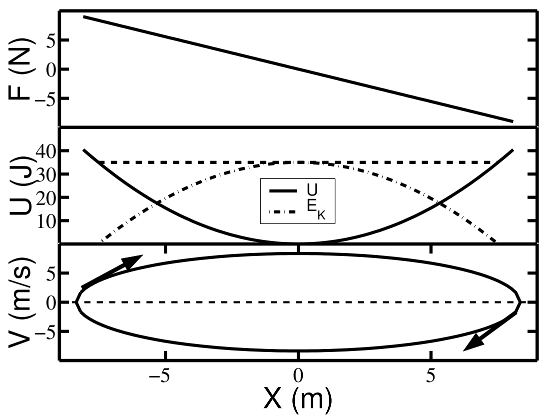
Vad händer ifall partikelns energi är exakt den potentiella energin i mitten av massorna?[24]



6.6 Energin för simpel harmonisk rörelse

Kraften, potentialenergin, den konstanta energin och hastigheten för en fjäder är

$$\begin{aligned} F(x) &= -kx & \Rightarrow \quad & U(x) = -\int F(x)dx = \frac{kx^2}{2} \\ E = K + U &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{kx^2}{2} & \Rightarrow \quad & v(x) = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{kx^2}{m}} \end{aligned}$$



Figur 26: Bilderna ger från översta till nedersta: Kraften, alla energierna och hastigheten för fjäder-massa systemet som funktion av positionen.

[24]De flesta stjärnorna verkar bilda binärsystem, där två stjärnor roterar kring varandra.

Approximering av en godtycklig potential som en parabel

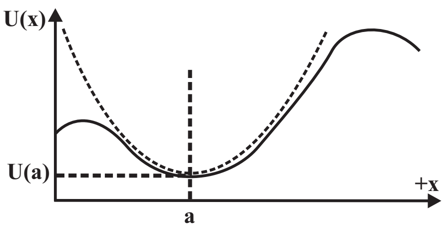
En godtycklig funktion kan skrivas som en **Taylor serie**

$$U(x) = U(a) + \frac{(x-a)}{1!}\frac{dU}{dx}\Big|_{x=a} + \frac{(x-a)^2}{2!}\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=a} + \frac{(x-a)^3}{3!}\frac{d^3U}{dx^3}\Big|_{x=a} + ... \tag{152}$$

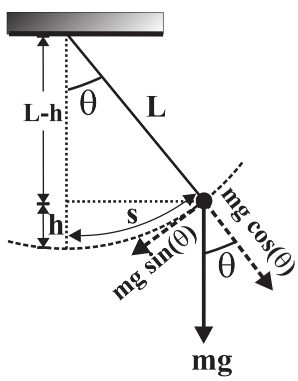
där $\frac{dU}{dx}\Big|_{x=a}$ är den första derivatan av U vid $x = a$, $\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=a}$ är den andra derivatan o.s.v. Ifall potentialfunktionen har ett minimivärde vid punkten a är första derivatan noll ($\frac{dU}{dx}\Big|_{x=a} = 0$) och ifall ($x$-$a$) är liten, så att alla (x-a) termer med potensen större än 2 kan lämnas bort, approximeras Taylor serien som

$$U(x) \approx U(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=a} \approx U(a) + k(x-a)^2 \tag{153}$$

där $k = \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=a}$ är en konstant. Detta betyder att potentialenergifunktionen är en parabel, och att oscillationen för små amplituder kring a är harmoniska. Detta ger en mycket användbar regel för komplicerade kraftfält: **Ifall amplituden för oscillation är liten, kan rörelsen approximeras att vara simpel harmonisk rörelse.**



Exempel: Visa att potentialenergifunktionen för en simpel pendel med liten oscillationsamplitud s ges av: $U(s) \approx \frac{mg}{2L}s^2$, där L och m är pendelns längd respektive massa.



Vi väljer att potentialen är noll längst nere vid jämviktspositionen, vilket ger att funktionen för potentiell energi är $U = mgh$. Höjden h över jämviktspositionen får vi från

$$\begin{aligned} cos(\theta) &= \frac{L-h}{L} \\ &\Rightarrow \\ h &= L(1 - cos(\theta)) \end{aligned}$$

Nu skriver vi funktionen $cos(\theta)$ som en Taylor serie kring $\theta = 0$

$$\begin{aligned} cos(\theta) \quad \approx \quad & cos(0) + \frac{\theta}{1!}\frac{d[cos(\theta)]}{d\theta}\Big|_{\theta=0} + \frac{\theta^2}{2!}\frac{d^2[cos(\theta)]}{d\theta}\Big|_{\theta=0} \\ & + \frac{\theta^3}{3!}\frac{d^3[cos(\theta)]}{d\theta}\Big|_{\theta=0} + \frac{\theta^4}{4!}\frac{d^4[cos(\theta)]}{d\theta}\Big|_{\theta=0} + ... \end{aligned}$$

$$\approx \quad cos(0) - \frac{\theta}{1!}sin(\theta)\Big|_{\theta=0} - \frac{\theta^2}{2!}cos(\theta)\Big|_{\theta=0} + \frac{\theta^3}{3!}sin(\theta)\Big|_{\theta=0} + \frac{\theta^4}{4!}cos(\theta)\Big|_{\theta=0} + ...$$

$$\approx \quad 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + ...$$

Vi använder nu att θ är liten, så vi kan glömma alla fyra och större potenstermer vilket ger funktionen för potentiell energi som

$$U \quad \approx \quad mgL\left[1 - (1 - \frac{\theta^2}{2})\right] = mgL\frac{\theta^2}{2}$$

Vi använder definitionen för vinkeln $\theta = s/L$, vilket slutligen ger

$$U \quad \approx \quad mgL\frac{s^2}{2L^2} = \frac{mg}{2L}s^2 \quad \square$$

6.7 Satellitrörelse

Vad bestämmer satelliternas bana runt jorden? Satelliterna som kretsar runt jorden har *slutna* banor. Ifall banan inte är sluten, upphör satelliten att kretsa kring jorden och avlägsnar sig hela tiden.

Först ifall satelliten har en cirkulär bana runt jorden, så måste avståndet till jordens centrum och satellitens hastighet vara konstant. Vidare måste centripetalkraften för satelliten vara lika med gravitationskraften

$$\frac{GM_Jm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

vilket ger rotationshastigheten för en satellit på ett visst avstånd från jorden[25]

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_J}{r}} \qquad (154)}$$

Satellitens rörelse beror alltså inte av dess massa. Astronauten inne i satelliten faller runt jorden med samma hastighet, så att ingen kraft från satellitens väggar påverkar personen, som känner sig viktlös och flyter omkring i satelliten. För cirkulära banor blir omloppstiden

$$\boxed{T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM_J}} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM_J}} \qquad (155)}$$

[25]Solens massa uppskattades första gången såhär.

från vilken vi ser att större banor (större avstånd från jorden), ger längre omloppstid. Totala mekaniska energin för satelliten i cirkelbana är:

$$\boxed{E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + (-\frac{GM_Jm}{r}) = \frac{1}{2}m(\frac{GM_J}{r}) - \frac{GM_Jm}{r} = -\frac{GM_Jm}{2r} \qquad (156)}$$

Vad skulle ske ifall totala mekaniska energin för satelliten var positiv?

Exempel: En satellit med massan 1500 kg befinner sig i en cirkulär bana 1000 km ovanför jordytan. Jordens radie är 6400 km och tyngdaccelerationen vid jordytan är 9.81 m/s^2.

1. Bestäm satellitens hastighet och omloppstid.
2. Hur stort arbete måste en raketmotor göra för att lyfta upp satelliten till en cirkulär bana 1500 km över jordytan?

För att få $G \cdot M_J$ tittar vi på gravitationskraften på jordytan

$$F = \frac{GM_J m}{R_J^2} = mg$$

vilket ger

$$GM_J = g \cdot R_J^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2 (6.4 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \approx 4.018 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

För att få omloppstiden måste gravitationskraften vara lika med centripetalkraften

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{r} &= \frac{GM_J m}{r^2} \\ v^2 &= \frac{GM_J}{r} \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{GM_J}{r}} \approx \underline{\underline{7.4 \text{ km/s} (\approx 27\,000 \text{ km/h})}} \end{aligned}$$

där r är avståndet till jordens centrum. Omloppstiden blir

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM_J}} \approx 6310 \text{ s} \approx \underline{\underline{1 \text{ h } 45 \text{ min}}}$$

Totala mekaniska energin för satelliten är

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + (-\frac{GM_J m}{r}) = -\frac{GM_J m}{2r}$$

vilket ger energiskillnaden för att lyfta satelliten till en högre bana

$$\Delta E = E(r_2) - E(r_1) = -\frac{GM_J m}{2}\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right] \approx \underline{\underline{2.58 \times 10^9 \text{J}}}$$

Observera att arbetet ΔE inte är lika med $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$, varför inte?