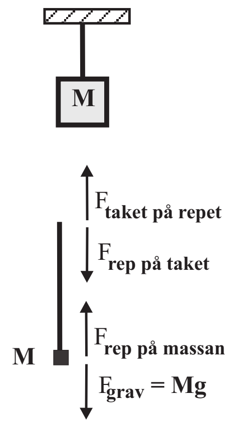
5 Rörelsemängdsförändring

5.1 Konstant rörelsemängd (Statik)

Ett viktigt specialfall med konstant rörelsemängd är situationen då kroppen skall stå stilla. För att detta skall hända måste summakraften på kroppen vara noll, så att $d\vec{p}/dt = \vec{F_{tot}} = 0$.

Exempel: Massan *M* hänger i ett masslöst rep (se figuren) Bestäm kraften på massan som repet åstadkommer. Vad är spänningskraften på repet vid högsta punkten?



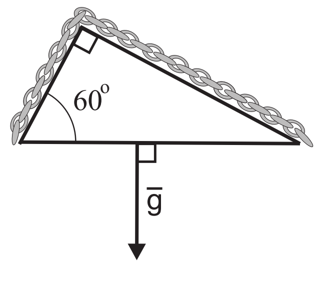
Gravitationskraften på massan är *Mg* nedåt. Eftersom massan står stilla, ger Newtons första lag att summakraften på massan är lika med noll $\Rightarrow$ kraften på massan som repet åstadkommer är *Mg* uppåt

Spänningskraften på repet vid högsta punkten är samma som kraften på repet som taket åstadkommer = *Mg* uppåt

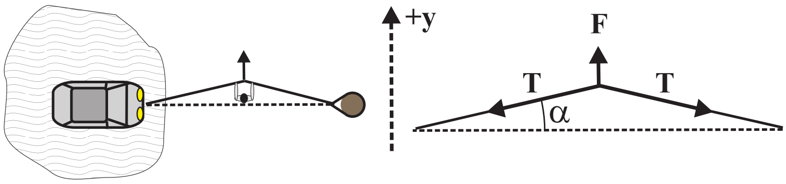
Hur ändrar situationen ifall repets massa inte är försumbar? Anta att repets massa är *m*.

Gravitationskraften på massan är fortfarande *Mg* nedåt, och spänningskraften på repets nedre del är också *Mg*. Spänningskraften vid repets högsta punkt är nu *(M+m)g*.

Exempel: Betrakta bilden till höger: Ifall kedjan kan röra sig friktionsfritt, så kommer den att glida till vänster eller höger, eller kommer den att stå stilla? Enda krafterna som påverkar kedjan är gravitationskraften g och normalkrafterna från triangeln. Se svar i Appendix B



Exempel: En man vars bil har fastnat i lera försöker ensam dra upp bilen med ett rep. Nära till bilen finns ett stort träd. Hur skall mannen göra för att maximera dragkraften på bilen?



Han bör fästa ena repändan på bilen och andra ändan runt trädet. Sedan skall han trycka vinkelrät mot repet. Vi beräknar vad är kraften på bilen ifall vinkeln α i figuren är 5° och kraften F = 1000 N.

Vi ser att spänningskrafterna i repen är lika, $|T_1| = |T_2|$ som vi kallar för $|T|$

y-komponenterna för krafterna blir:

$$\begin{aligned} F_y &= F \\ T_{1y} &= -T \cdot sin(\alpha) \\ T_{2y} &= -T \cdot sin(\alpha) \end{aligned}$$

Och för systemet i jämvikt får vi att

$$F_y + T_{1y} + T_{2y} = F - 2T \cdot sin(\alpha) = 0$$

vilket ger att kraften på bilen blir[17]

$$T = \frac{F}{2sin(\alpha)} = \frac{1000 \text{ N}}{2sin(5 \cdot \pi/180)} \approx \underline{\underline{5740 \text{ N} (\sim 590 \text{ kg !})}}$$

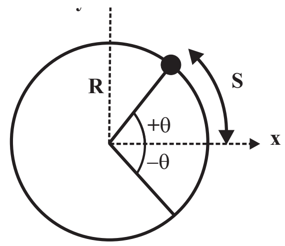
Observera att då vinkeln α ökar, blir dragkraften på bilen mindre, och man måste spänna repet på nytt igen. Det man vinner i kraft, förlorar man i väg.

5.2 Cirkelrörelse

När en kropp befinner sig i cirkelrörelse, måste en radiell acceleration finnas. Denna acceleration kallas vanligen för centripetalacceleration (centripetal, grekiska, för centrum sökande). Vi beskriver cirkelrörelsen med vinkeln θ. $[\theta]$ = rad, $\theta = S/R$, där S är segmentets längd och R är cirkelns radie. Motsvarande *vinkelhastighet* och *vinkelacceleration* blir då

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{S}{R} = \frac{1}{R}\frac{dS}{dt} = \frac{v}{R} \\ \alpha &= \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}$$

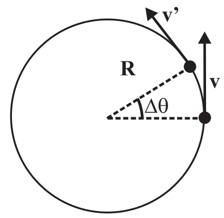
[17] $360° \equiv 2\pi \Rightarrow 1° \equiv \pi/180$



5.2.1 Cirkelrörelse med konstant tangentiell hastighet

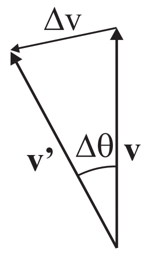
I cirkelrörelse med konstant tangentiell hastighet ändras hastighetens riktning hela tiden, vilket betyder att accelerationens riktning också ändras. Detta gör problemet svårare än för projektilrörelsen, där gravitationsaccelerationen var riktad nedåt hela tiden.
Ifall vinkeln $\Delta\theta$ i bilden är liten, får vi att

$$\Delta\theta \quad \approx \quad sin(\Delta\theta) \approx \frac{\Delta v}{v}$$



där $\Delta\theta$ kan approximeras till $d\theta$ när vinkeln blir mycket liten och storleken på hastighetsändringen blir

$$dv \quad = \quad |v| \cdot d\theta$$



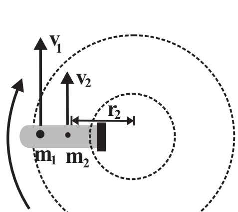
Vi får då att den *radiella accelerationen* för att hålla kroppen i cirkelrörelse blir

$$a_{rad} \quad = \quad \frac{dv}{dt} = v\frac{d\theta}{dt} = v \cdot \omega = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

där riktningen alltid är mot centrum, och centripetalaccelerationen kan slutligen skrivas som

$$\mathbf{a}_c \quad = \quad -\frac{|v|^2}{R}\hat{r} = -\omega^2 R\,\hat{r} \tag{131}$$

Exempel: I bl.a. kemi och biologi använder man en **centrifug** för att separera partiklar eller molekyler med olika massa. Idén är att partiklarna i en vätskefylld tub roterar. Partiklarna blir sedan i den bana med radien r, där centripetalkraften mv^2/r motsvarar den motkraft som vätskan upprätthåller. Vid höga hastigheter och långa tider, så kan inte vätskan helt upprätthålla motkraften och resultatet blir att partiklarna sakta driver mot tubens botten och *sedimenteras* där.



5.2.2 Cirkelrörelse med icke konstant tangentiell hastighet

Ifall den tangentiella hastigheten för cirkelrörelse inte är konstant, kan vi spjälka upp den totala accelerationen i en radiell och tangentiell del

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \quad och \quad a_{tan} = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \tag{132}$$

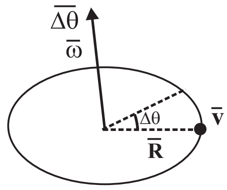
Detta kan också ges i vektorform följande:

$$\mathbf{a} = R\alpha\hat{t} - \omega^2 R\hat{r} \tag{133}$$

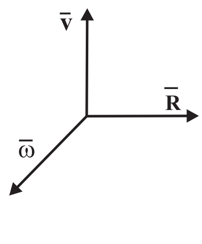
där $\hat{t}$ och $\hat{r}$ är enhetsvektorer i tangentiell, respektive radiell riktning.

5.2.3 Vinkelstorheterna som vektorer: kryssprodukten

För att lättare få riktningarna på olika vinkelstorheter, definierar vi att vinkeln θ och vinkelhastigheten ω är vektorer vars riktning är vinkelrät till rotationsplanet. Detta ger hastigheten för cirkelrörelse som



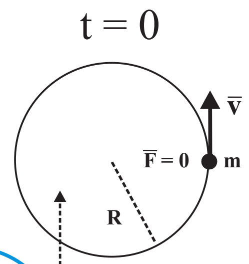
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \mathbf{R} = \vec{\omega} \times \mathbf{R} \tag{134}$$



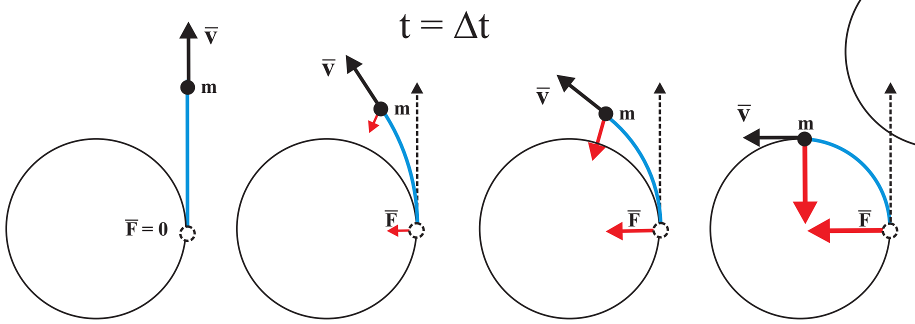
Fördelen med detta är att riktningen på hastigheten v är direkt given, inga andra regler behövs.

5.3 Cirkelrörelsens dynamik

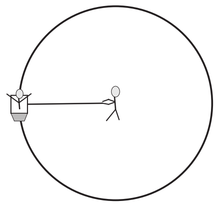
I figuren bredvid ser vi en partikel med massan m som rör sig rakt uppåt med hastigheten v vid tidpunkten $t = 0$.



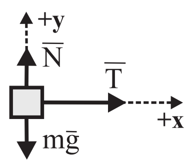
Nedan ser vi hur partikelns rörelse har ändrat för fyra olika storlekar på en kraft mot cirkelns mitt (centripetalkraft). För $F = 0$ är partikelns hastighet oförändrad. Ju större centripetalkraften är ju mera krökt blir partikelns bana. Då centripetalkraften får storleken: $F = m\frac{v^2}{R}$, blir partikelns bana exakt en cirkel med radien R.



Exempel: En energetisk far sätter sitt barn (25 kg) att sitta i en släde som väger 5 kg. Mellan släden och fadern har vi ett rep. Avståndet mellan släden och fadern är 4.0 m (rep + armarna). Fadern snurrar nu barnet runt i en ring. Vad är den största farten som släden kan få ifall maximikraften som fadern kan hålla är 500 N? Hur många varv per minut snurrar barnet? Vilka krafter verkar på släden? Anta att ingen friktion finns mellan släden och snön (bra approximation).



Kraftdiagrammet och summa kraftkomponenterna blir:



$$x : \sum F_x = T = m\frac{v^2}{R}$$
$$y : \sum F_y = N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$$

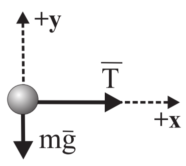
Hastigheten blir:

$$v = \sqrt{\frac{RT}{m}} \approx \sqrt{\frac{4 \text{ m } 500 \text{ N}}{30 \text{ kg}}} \approx \sqrt{\frac{4 \text{ m } 50 \text{ kgm/s}^2}{3 \text{ kg}}} \approx \underline{\underline{8.165 \text{ m/s } (\approx\ 29 \text{ km/h})}}$$

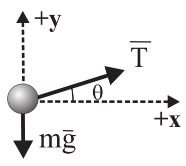
På en minut går släden en sträcka: 8.165 m/s · 60 s, och antal varv/minut blir

$$\frac{8.165 \cdot 60}{2 \cdot \pi \cdot 4} \approx \underline{\underline{19.5 \text{ varv/min}}}$$

Exempel: David placerar en 2 kg tung sten i ändan av ett rep som är 1.5 m långt (stenslunga) Han börjar rotera stenen över sitt huvud. Vad är farten med vilken stenen slungas iväg ifall spänningskraften i repet just innan stenen lämnar slungan är 200 N?



I övre bilden till höger ser vi ett felaktigt kraftdiagram på problemet.



I rätt kraftdiagram bildar spänningskraften en vinkel θ med marken, så att vikten på stenen mg kan balanseras av spänningskraftens y-komponent.

Kraftkomponenterna blir:

$$
\begin{aligned}
x: \sum F_x &= T cos(\theta) = m\frac{v^2}{R} \\
y: \sum F_y &= T sin(\theta) - mg = 0 \;\Rightarrow\; sin(\theta) = \frac{mg}{T}
\end{aligned}
$$

Vinkeln mellan spänningskraften och marken blir

$$\theta = sin^{-1}\left(\frac{2\text{ kg } 9.8\text{ m/s}^2}{200\text{ N}}\right) \approx \underline{\underline{0.0982\text{ rad } (\approx\ 5.6^\circ)}}$$

Rotationsradien $R = L cos(\theta)$, där L är slungans längd, vilket ger hastigheten för stenen då den lämnar slungan:

$$v = \sqrt{\frac{RT cos(\theta)}{m}} = \sqrt{\frac{T cos^2(\theta) L}{m}} \approx \underline{\underline{12.189\text{ m/s } (\approx\ 44\text{ km/h})}}$$