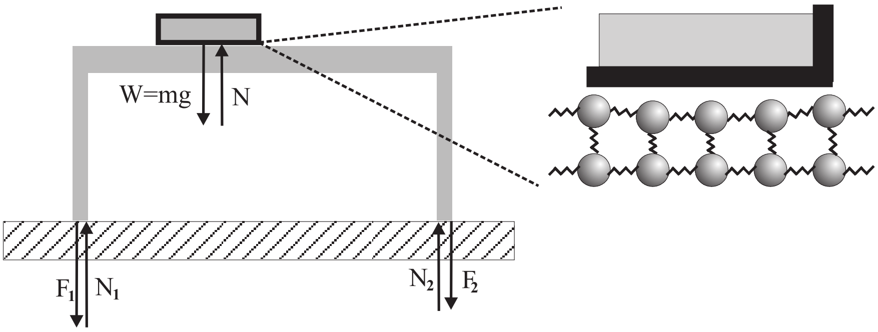
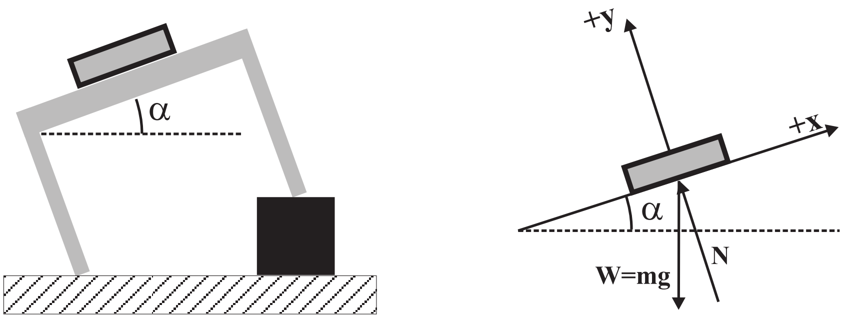
4 Kontaktkrafter

Tittar man omkring sig, ser det ut att objekt runtom en inte påverkas av krafter, eftersom de står stilla. I verkligheten, är det nästan omöjligt att en kropp inte påverkas av någon kraft. Vad som gör att boken ligger stilla på bordet, är att gravitationskraften på boken upphävs av **normalkraften N** från bordsytan. Newtons andra lag ger storleken på normalkraften: $W + N = ma = 0 \Rightarrow N = -mg$.



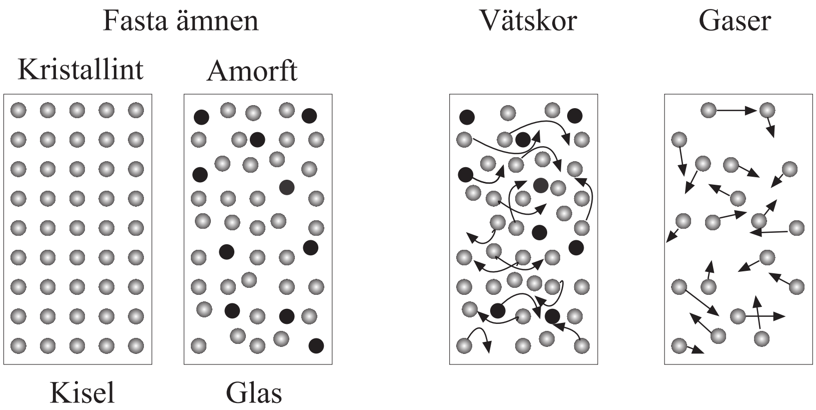
Normalkraften är alltid vinkelrät (normalt) till ytan, men dess storlek är inte alltid samma som kroppens vikt (mg), vilket blir klart i figuren under, där x- och y-komponenterna blir tillsammans med Newtons andra lag:

$$\mathbf{x}: \quad -mg\ sin(\alpha) + 0 = ma_x \ \Rightarrow\ a_x = -g\ sin(\alpha)$$
$$\mathbf{y}: \quad |N| - mg\ cos(\alpha) = 0 \ \Rightarrow\ |N| = mg\ cos(\alpha)$$



4.1 Kontinuitets mekanik

All materia är uppbyggd av små atomer och molekyler. Det är dock näst intill omöjligt att härleda materiens egenskaper genom att beakta alla de enskilda atomerna (över 10^{22} atomer/cm^3). I detta kapitel beaktar vi materia som kontinuerlig, men kommer ihåg att det mikroskopiska synsättet kan också ge förklaringar till olika makroskopiska egenskaper. Materia indelas oftast i fasta ämnen, vätskor och gaser



En viktig egenskap hos ett material är dess densitet, eller massa per volymenhet

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad [\rho] = \text{kg m}^{-3} \tag{104}$$

Inversa värdet av densitet kallas för *specifik volym*.

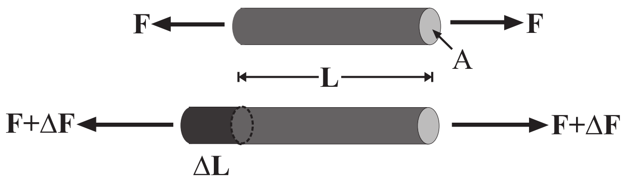
Ämne	Densitet (kg/m^3)
Luft (0 °C)	1.29
Is (0 °C)	917
Vatten (4 °C)	1000
Aluminium	2700
Bly	11400
Guld & Wolfram	19300

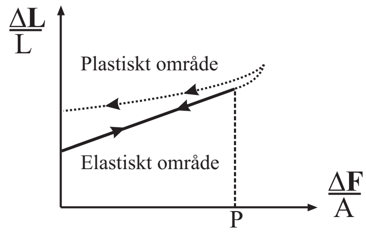
Vi ser att densiteten för vätskor och fasta ämnen är ganska lika, men att densiteten för gaser (exempelvis luft) är ca. 1000 gånger mindre än för fasta ämnen. Vatten har den största densiteten vid ca. 4 °C vilket leder till att vattnet på botten av en sjö är ca. 4°C. Vatten/is är på ett annat sätt också ganska speciellt. Vanligen är densiteten för ett ämne större i fast än i vätskeform. Is däremot har mindre densitet än vatten, vilket gör att isen flyter på vatten. Detta har stor betydelse för naturen och vattendjuren, eftersom den flytande isen isolerar sjöarna från att frysa till solid is på vintrarna.

Tankestund: Hur mycket väger luften i rummet du befinner dig i?

4.2 Fasta ämnens elastiska egenskaper

Då en yttre kraft verkar på en fast kropp, kan kroppens form och/eller volym ändras. I bilden visualiseras en longitudinell utsträckning av en kropp som påverkas av två lika stora krafter i motsatt riktning.





Betrakta en metalltråd med arean A. När kraften ökar från F till $F+\Delta F$, ökar också trådens längd från L till $L+\Delta L$. Vad vi iakttar är en longitudinell **belastningen** (eng. **stress**)[12] $\frac{\Delta F}{A}$ som får till stånd en longitudinell längdökning, **sträckning** (eng. **strain**)[13] $\frac{\Delta L}{L}$. Minskar sedan belastningen, återgår längden till jämviktslängd. Detta kan beskrivas med formeln

$$\boxed{\frac{\Delta F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}} \tag{105}$$

där E är materialets **Young modul**

$$E = \frac{\text{longitudinell belastningen}}{\text{longitudinell sträckning}} = \frac{L}{A}\frac{dF}{dL} \tag{106}$$

Området där längden av tråden är direkt proportionellt till kraften, kallas för det *elastiska området*. Ökar belastningen över den *plastiska* punkten P, återgår inte materialet till sin ursprungliga längd längre, vi har förändrat materialets egenskaper och kommit till det plastiska området.

På liknande sätt trycks en fast kub ihop av krafter som påverkar kuben från alla sidor. Här får man en liknande formel mellan volymförändringen av kuben som en funktion av kraften

$$\boxed{\frac{\Delta F}{A} = -B\frac{\Delta V}{V}} \tag{107}$$

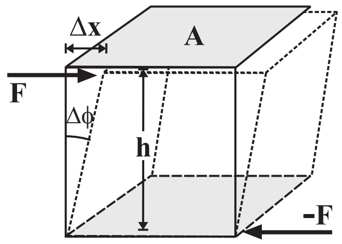
där B är materialets **bulkmodul**, och A är arean för en av kubens sidor.

[12]Stress: "The force per unit area on a body that tends to cause it to deform"
[13]Strain: "A measure of the extent to which a body is deformed when it is subjected to stress"

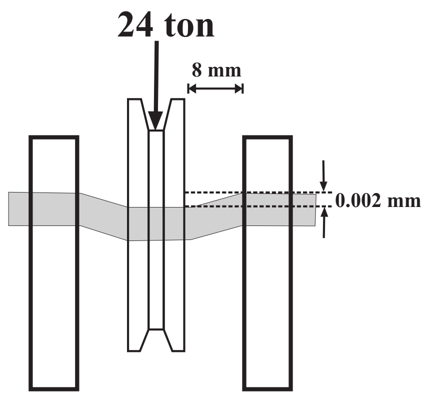
Vidare, kan vi ha en **vridande belastning**, där vinkeln $\Delta\phi$ som t.ex. ett rektangulärt föremål vrids, ges av formeln

$$\boxed{\frac{\Delta F}{A} = G\frac{\Delta x}{h} = G\Delta\phi \qquad (108)}$$

där G är kroppens **vridmodul**.



Exempel: Lyftblocket på en lyftkran ligger på en axel mellan två kullager, se bilden. Hur tjockt (diameter) måste axeln som är gjord av stål minst vara för att den skall böjas maximalt 0.002 mm när 24 ton hänger i lyftblocket? Vridmodulen G för stål är 7.5×10^{10} Nm^{-2}.



Vi har en kraft som vrider axelns båda sidor, som bådadera måste bära halva vikten $F/2$. Ifall axelns radie är R, är dess yta $A = \pi R^2$, och den vridande belastningen blir $F/2A = F/2\pi R^2$. Vridningen får vi sedan från Ekv. (108)

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta x}{h} &= \frac{1}{G}\frac{\Delta F}{A} = \frac{1}{G}\frac{F}{2\pi R^2} \\
\Rightarrow R &= \sqrt{\frac{Fh}{G2\pi\Delta x}} = \sqrt{\frac{24\times10^3\text{ kg } 9.8\text{ m/s}^2\ 8\times10^{-3}\text{ m}}{7.5\times10^{10}\text{ N/m}^2\ 2\pi\cdot2\times10^{-6}\text{ m}}} \approx 4.5\text{ cm} \\
\Rightarrow &\quad \underline{\underline{\text{diameter } \approx 9\text{ cm}}}
\end{aligned}$$

4.3 Friktion

Hittills har vi inte tagit i beaktande *friktion* i våra beräkningar. Friktion är en *kontaktkraft* som alltid finns när två olika kroppar rör varandra. Ofta försöker man minimera friktionen, som till exempel i bilmotorer sliter motorn och ökar bensinförbrukningen. Men utan friktion, kunde vi inte gå på marken, och inga spikar skulle hållas på plats.

Vanligtvis indelar man friktionen i *statisk*, *kinetisk* och *rull*friktion.

$$
\begin{aligned}
|F_s| &\leq \mu_s|N| \qquad \mu_s = \text{statiska friktionskoefficienten} && (109)\\
|F_k| &= \mu_k|N| \qquad \mu_k = \text{kinetiska friktionskoefficienten} && (110)\\
|F_r| &= \mu_r|N| \qquad \mu_r = \text{friktionskoefficienten för rullning} && (111)
\end{aligned}
$$

där $|N|$ är magnituden på normalkraften (kraften vinkelrät uppåt från ytan där kroppen ligger) på kroppen. Statiska friktionskraften är alltid mot den yttre kraften, och den kinetiska friktionskraften är i riktning mot rörelsen.

Varifrån härstammar friktionen? Friktion är egentligen en intermolekylär kraft mellan kroppens och ytans atomer som inte går att beräkna exakt.

När två kroppar rör varandra, är egentligen bara ca. 0.01 % av ytareorna i kontakt med varandra. Hur stor del av ytorna som är i kontakt beror av hur hårt man pressar ihop kropparna, vilket förklarar varför friktionen är proportionellt till normalkraften N.

Tittar man på de delar av kropparnas area som är i kontakt, har molekylbindningar uppstått mellan kropparnas ytatomer. Dessa bindningar håller kropparna ihop då en yttre kraft försöker få kropparna att glida isär (*statisk* friktion). Då kraften växer över en viss gräns som är tillräckligt stort för att bryta alla bindningarna, kommer kropparna att börja glida isär.

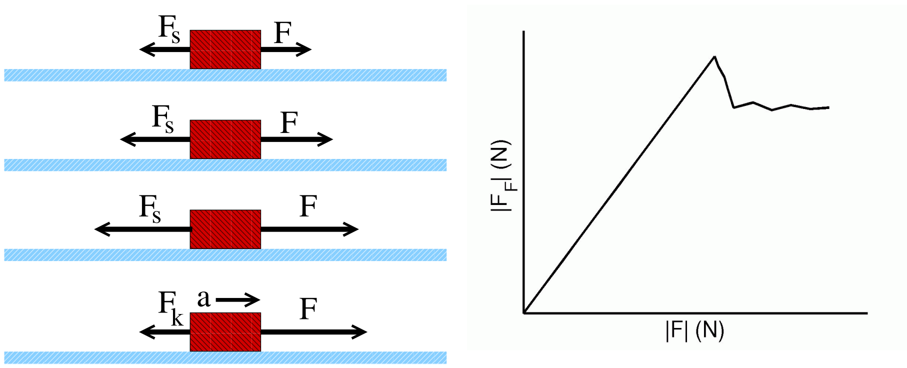
Nu när kroppen är i rörelse, bildas färre molekylbindningar mellan kropparnas atomer och vi kallar detta för *kinetisk* friktion. Denna friktion, vilken är lite mindre än den maximala statiska friktionen, beror inte mera på horisontella kraften, kroppens hastighet eller acceleration, utan är ganska konstant.

I maskiner som t.ex. bilmotorn, kan man minska på slitningen genom att smörja metallytorna med olja, vilket gör att metallytorna glider på varandra utan att slitas så mycket.

Ibland då två kroppar glider på varandra, bildar kropparnas ytmolekyler starka bindningar. Dessa bindningar kan vara så starka att de inte bryts då kropparna glider förbi varandra, utan istället bryts svagare bindningar mellan atomerna nära ytan på en av kropparna. När detta sker, blir en bit kvar av den ena kroppen på den andra, vilket kallas för slitning. Detta gör att gummit under skorna slits så småningom ut.

Ibland kan ytornas ojämnhet vara så stort att friktionen till största delen kommer från det att ytans toppar far in i kroppens dalar, och på det sättet 'sitter kropparna fast'. I detta fall kan man minska på friktionen genom att polera ytorna en aning. Har man däremot två ganska jämna ytor, så kan man *öka* friktionen genom att polera ytorna, på grund av att större antal molekylbindningar sker. Två rena och mycket jämna metallytor kan till och med fastna ihop (kall svetsning, eng. cold weld).

I bilden nedan, har vi en stillastående låda på en yta. Börjar nu en kraft F påverka lådan, så uppstår en lika stor motkraft, statisk friktionskraft F_s. Denna motkraft kommer från Newtons tredje lag, och förmedlas från ytan till lådan via de bundna molekylerna på ytorna.



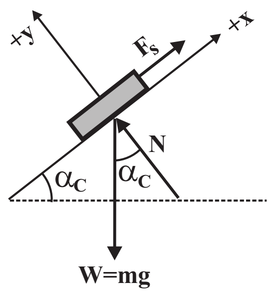
Ökar man kraften på lådan, så ökar också den statiska friktionskraften, och lådan står fortfarande stilla. Ökar man ännu kraften så kommer den situationen då bindningarna inte längre är starka nog att hålla lådan stationärt, utan kommer att brista och lådan börjar röra på sig i kraftens riktning. Nu när kroppen är i rörelse, bildas färre bindningar och friktionen har blivit kinetisk. Denna friktion, vilken är lite mindre än den maximala statiska friktionen, beror inte mera på kraften, utan är ganska konstant.

Så det behövs mera kraft för att få en kropp att röra på sig, än att sedan hålla den i rörelse.

Vi ser från ekvationerna att arean på kroppen som glider inte påverkar friktionen. Detta är en ganska bra approximation för de flesta ytor, men till exempel för gummi mot asfalt, så är friktionen proportionellt till kontaktarean. Ifall det inte vore så, så skulle det vara onödigt att ha bredare ringar i motorsport. Gummi på asfalt är också på det sättet intressant, att den statiska friktionskoefficienten kan vara över ett, $\mu_s > 1$!

Ibland kan friktionen mellan två ytor bytas mellan statisk och kinetisk friktion. Detta fenomen ger det outhärdliga gnällande ljudet från kritan från tavlan, men också den vackra tonen från fiolen.

Exempel: Hur kan man mäta storleken på den statiska friktionskoefficienten?



Ett lätt sätt är att använda sig av systemet i bilden, där man har en kropp och en yta vars vinkel med horisonten kan ändras noggrant. Kroppen står stilla tills vinkeln blir så stor att den horisontella delen av gravitationskraften blir större än den maximala statiska friktionskraften. Då kroppen står stilla har vi följande formler:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}: \quad F_x &= -W \cdot sin(\alpha) + F_s \\
&= -W \cdot sin(\alpha) + \mu_s|N| = 0 \\
\mathbf{y}: \quad F_y &= |N| - W \cdot cos(\alpha) = 0 \\
&\Rightarrow \\
\mathbf{x}: \mu_s|N| &= W \cdot sin(\alpha) \\
\mathbf{y}: \quad |N| &= W \cdot cos(\alpha)
\end{aligned}
$$

Dividerar man dessa får man

$$\mu_s = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = tan(\alpha)$$

Ifall vinkeln α är så liten att $tan(\alpha) < \mu_s$, rör sig inte lådan. Vid en viss vinkel α_c börjar dock blocket att röra på sig, och vi får att den statiska friktionskoefficienten är

$$\boxed{\mu_s = tan(\alpha_c) \qquad (112)}$$

Tabell 2: Olika friktionskoefficienter mellan valda material

System	Statisk μ_s	Kinetisk μ_k	Rull μ_r
Teflon på teflon	**0.04**	**0.04**	
Stål på is		0.03	
Is på is	0.10	0.03	
Trä på snö	0.12	0.06	
Trä på trä	0.50	0.20	
Stål på stål (oljad)	**0.10**	**0.05**	
Stål på stål (torr)	**0.80**	**0.60**	**0.002**
Gummi på asfalt	**1-2**	0.80	**0.01-0.02**

I tabellen ovan ser vi att friktionskoefficienten mellan teflon är mycket liten. Just denna egenskap gör att man använder teflonytor på t.ex. stekpannor eftersom mat då inte lätt fastnar i den då. Teflon är också speciell genom att dess statiska och kinetiska friktionskoefficienter är lika stora. Genom att sätta ett tunnt skikt olja mellan stål, minskar man friktionen nästan med en dekad, vilket används bl.a. i motorer. Rullfriktionen mellan gummi och asfalt är ca. tio gånger större än mellan stål och stål, vilket gör att tågen sparar mycket energi med sina stålringar på stålspår. Observera att den statiska friktionskoefficienten mellan gummi och asfalt är större än ett, vilket betyder att friktionskraften för en bil (ringarna låsta) kan vara större än bilens vikt ($W = mg$). Detta betyder att man kan lyfta bilen med mindre kraft än vad som behövs att få bilen att glida!

Exempel: En typisk bil väger ca. 1500 kg och är ca. 1.6 m bred och 1.4 m hög. Anta att bilens luftmotstånd är proportionellt till farten i kvadrat, Ekv. (87)

$$F_{lm} = C_{lm}\frac{A \cdot \rho \cdot\ v^2}{2}$$

där luftmotståndskoefficienten: $C_{lm} \approx 0.29$, luftens densitet: $\rho \approx 1.2$ kg/m^3, A är bilens tvärsnittsarea mot farten v. Bilen känner också en rullfriktion, Ekv. (111), mellan ringarna och vägen,

$$F_r \quad = \quad \mu_r|N|$$

där rullfriktionskoefficienten: μ_r = 0.01 och $|N| = mg$ är normalkraften på bilen. Ifall lufttrycket i ringarna är för litet, ökar rullfriktionen märkbart eftersom ringarna trycks ihop mera under rullningen.

Vid vilken fart är luftmotståndet för bilen lika med dess rullfriktion?

Farten där luftmotståndet för bilen är lika med dess rullfriktion ges av

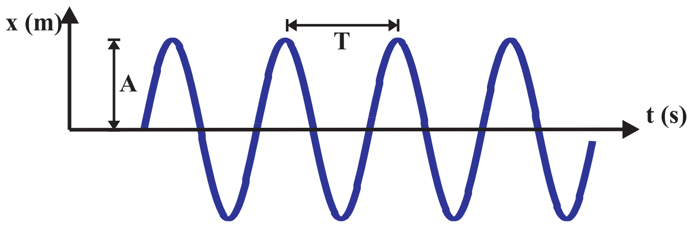
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2\mu_r mg}{C_{lm}A\rho}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 0.01 \cdot 1500 \text{ kg } 9.8 \text{ m/s}^2}{0.29 \cdot 1.2 \text{ kg/m}^3\ 1.4 \cdot 1.6 \text{ m}^2}} \\ &\approx \underline{\underline{19.4 \text{ m/s } \ (\approx 70 \text{ km/h})}} \end{aligned}$$

Under 70 km/h går största delen av energin förlorad via friktion. Över 70 km/h ökar luftmotståndet snabbt p.g.a v^2-termen. Hurudan borde bilen vara så att dess rullfriktion och luftmotstånd är så små som möjligt?

Hur kunde man transportera människor så att man skulle använda så lite energi per person som möjligt?

4.4 Tidsberoende krafter: oscillerande rörelse

Många olika ting i naturen är *periodiska*: årstiderna, ljudvågorna, klockorna osv. En pendel som rör sig fram och tillbaka kan vi säga att pendlar (eng. oscillates). En gemensam faktor för alla periodiska rörelser, är att de har en stabil jämviktsposition dit kraften alltid pekar ifall systemet har rubbats.



Figur 23: En våg med amplituden A och perioden T.

För periodisk rörelse har olika storheter getts följande benämningar:

- **amplitud, A :** Maximiförskjutning (m) eller maximiavståndet från jämviktspositionen
- **cykel :** Ett helt kretslopp för systemet
- **Perioden, T :** Tiden (s) för systemet att göra ett helt kretslopp eller cykel
- **Frekvens, f :** Antal cykler per sekund (f=1/T), 1 hertz = 1 Hz = 1 cykel/s = 1 s^{-1}
- **Vinkelfrekvens, ω :** Vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi f$ rad/s
- **Fasvinkel ϕ :** Fasvinkeln (rad) som säger oss vid vilken punkt oscillerande rörelse är vid tidpunkten noll

4.4.1 Simpel harmonisk rörelse

När kraften för ett system är proportionellt till negativa värdet av förskjutningen från jämviktspositionen får vi simpel harmonisk rörelse. En fjäder uppför sig på detta sätt, där fjäderns kraft som en funktion av förskjutningen x kan skrivas som

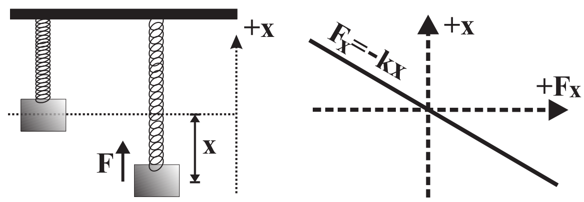
$$\boxed{F_x = -kx} \tag{113}$$

där k (N/m) är fjäderkonstanten. Lagen kallas för **Hookes lag**. Ju 'starkare' fjäder, desto större värde har k.

Newtons andra lag: $F = ma$ ger rörelseekvationen för objektet som hänger i fjädern[14]

$$F_x = -kx \quad = \quad ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

[14] Fjäderns massa måste vara mycket mindre än objektets massa. Hur kunde man ta med fjäderns massa i beräkningen?



Figur 24: Ett objekt påverkas av en tidsberoende fjäderkraft som följer Hookes lag.

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{114}$$

En lösning till denna differentialekvation kan vi få genom prövning. Vi gör ansatsen att förflyttningen x som en funktion av tiden t är av formen[15]

$$x = Asin(\omega t + \phi) \tag{115}$$

Vi deriverar två gånger

$$\frac{dx}{dt} = \omega Acos(\omega t + \phi) \tag{116}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 Asin(\omega t + \phi) \tag{117}$$

och sätter resultatet in i rörelseekvationen, Ekv. (114)

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x &= -\omega^2 Asin(\omega t + \phi) + \frac{k}{m}Asin(\omega t + \phi) = 0 \\ \Rightarrow \quad & Asin(\omega t + \phi)\left[-\omega^2 + \frac{k}{m}\right] = 0 \end{aligned} \tag{118}$$

Vilket stämmer för alla tider t bara ifall parametern ω uppfyller vilkoret

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{119}$$

ω kallas för vinkelhastigheten eller vinkelfrekvensen för rörelsen och ges av

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \tag{120}$$

Parametern A, Ekv. (115), ger maximiförflyttningen, och ϕ fasvinkeln som bestämmer vad x är vid tiden noll. Rörelseekvationen, hastigheten och accelerationen för simpel harmonisk rörelse kan sammanfattas med ekvationerna:

[15] Anta att lösningen är en oändlig serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ och sätt den in i differentialekvationen.

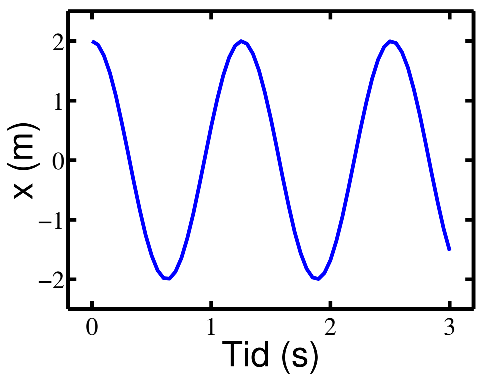
$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \quad Asin(\omega t+\phi) \\ v(t) &= \quad \omega\ Acos(\omega t+\phi) \\ a(t) &= -\omega^2 Asin(\omega t+\phi) \end{aligned}}$$

där ωt och fasvinkeln ϕ ges i radianer. Frekvensen för rörelsen är $f = \omega/2\pi$, vilket ger **perioden**

$$\boxed{T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (121)}$$

Besök: www.ph.biu.ac.il/$\sim$ rapaport/java-apps/index.html

Exempel: Bestäm utgående från den nedre bilden **amplituden** A, **vinkelhastigheten** ω, **fasvinkeln** ϕ och **frekvensen** f



Amplituden: A = $\underline{\underline{\text{2 m}}}$

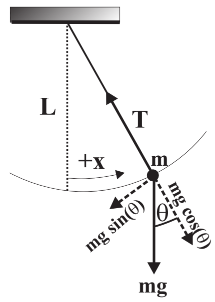
Perioden: T ≈ 2.5 - 1.2 s = 1.3 s ⇒ Frekvensen: f ≈ 1/1.3 s ≈ $\underline{\underline{0.77\ s^{-1}}}$

vinkelhastigheten ω = 2πf ≈ 2·3.14· 0.77 ≈ $\underline{\underline{\text{4.84 rad/s}}}$ (5 är rätt)

fasvinkeln ϕ: Vid t=0 är ekvationen: $x(0)$ = 2 m = $Asin(\phi)$ = 2 m $sin(\phi)$
⇒ ϕ = $asin(1)$ ≈ $\underline{\underline{1.5708}}$ (= $\pi/2 \hat{=}$ 90°)

4.4.2 Simpel pendel

I bilden nedan har vi ritat kraftdiagrammet för en simpel pendel med längden L, där T (eng. tension) står för trådens spänningskraft på massan m.



Vi ser att den återställande kraften som en funktion av vinkeln Θ är $F_\Theta = -mg \cdot sin(\theta)$, vilket inte är proportionellt till θ. Men ifall θ är liten, är approximationen sin(θ) $\approx \theta$ mycket bra och vi får (se Ekv. (24): $x = \theta \cdot L$)

$$F_\theta \approx -mg\theta = -mg\frac{x}{L} = -\frac{mg}{L}x \tag{122}$$

vilket ger rörelseekvationen för simpel harmonisk rörelse med vinkelfrekvensen, se Ekv. (120) där k ersätts med mg/L

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}}} \tag{123}$$

vilket bara beror av pendelns längd. Dessa ekvationer stämmer bara för små pendelamplituder. Motsvarande frekvens och period för pendeln blir

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{124}$$

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{125}$$

Exempel: Vad är perioden och frekvensen för en simpel pendel som är 1.000 m lång som befinner sig vid en plats med g = 9.830 m/s^2?
Vi får att frekvensen och perioden blir

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.830\ m/s^2}{1.000\ m}} \approx \underline{\underline{0.499\ Hz}} \tag{126}$$

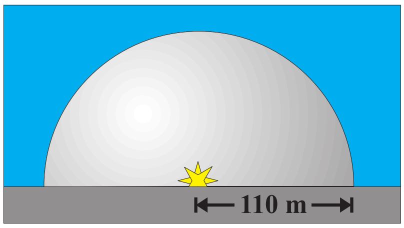
$$T = \frac{1}{f} \approx \underline{\underline{2.004\ s}} \tag{127}$$

Med perioden nästan exakt två sekunder. När det metriska systemet började användas, definierades en sekund som hälften av perioden för en meter lång pendel.[16]

[16] Var detta en bra definition på sekunden? Vilka nackdelar har denna definition?

4.5 Dimensionsanalys

Exempel: Anta att man filmar en atombombssprängning som görs på markytan. Bilden nedan visar hur den halvsfäriska sprängningsfronten, radien 110 m, ser ut 15 ms efter sprängningen.



Approximera hur mycket explosionsenergi atombomben hade.

Problemet verkar vara helt omöjlig att lösa, för inte vet vi hur luften påverkas av explosionen, eller hur snabbt chockvågen breder ut sig. Vi skall nu använda dimensionsanalys, vilket Amerikanen G. I. Taylor gjorde då han till myndigheternas häpnad beräknade den frigjorda energin i en atombombsexplosion från en film gjord av explosionen.

Han gjorde de logiska antaganden att chockvågens radie, $[r]$=m, efter sprängningen beror av:

- Den frigjorda energin, $[E]$ = J = kg·m^2/s^2
- Tiden efter sprängningen, $[t]$ = s
- Luftens densitet, $[\rho]$ = 1.293 kg/m^3

vilket ger ekvationen för chockvågens radie

$$r = f(E, t, \rho) = K \cdot E^a \cdot t^b \cdot \rho^c$$

där han approximerade konstanten K från chockvågsteorin till 1. heltalen a, b och c skall vi nu bestämma via dimensionsanalys.

Tittar vi nu på ekvationen från enheterna sett, blir den

$$\begin{aligned} m = \left(\frac{kg \cdot m^2}{s^2}\right)^a (s)^b \left(\frac{kg}{m^3}\right)^c &= (kg^a \cdot kg^c)(m^{2a} \cdot m^{-3c})(s^{-2a} \cdot s^b) \\ \rightarrow \qquad kg^0 \cdot m^1 \cdot t^0 &= kg^{a+c} \cdot m^{2a-3c} \cdot s^{b-2a} \end{aligned}$$

Vi ser nu att på vänstra sidan av funktionen har vi inga kg (kg^0), vilket funktionens högra också ger ifall likheten: $a + c = 0$ gäller. Vi får alltså att $a = -c$, vilket vi insätter i den andra termen i funktionens högra sida för att ge den rätta enheten m

$$m^1 = m^{2a-3c} = m^{-2c-3c} = m^{-5c} \qquad \rightarrow \qquad c = -1/5 \rightarrow a = 1/5$$

Den sista ekvationen med tiden ger likheten: $b = 2a = 2/5$. Ekvationen för radien är alltså: $r = E^{1/5} t^{2/5} \rho^{-1/5}$, vilket ger ekvationen för den totala energin: $E^{1/5} = r\rho^{1/5}/t^{2/5}$, vilket i kortare form ger (+ insättning)

$$E \approx \frac{r^5 \rho}{t^2} \approx \frac{(110 \text{ m})^5 1.293 \text{ kg/m}^3}{(15 \times 10^{-3} \text{ s})^2} \approx \underline{\underline{1.4 \times 10^{12} \text{ J}}}$$

4.6 Ljudets hastighet

Ljudets hastighet i luft är nära 340 m/s. I fasta ämnen och vätskor är hastigheten vanligen mycket större, oftast mera än 1000 m/s. I vissa fasta ämnen t.o.m. nära 10000 m/s. Ljudets hastighet beror på olika faktorer, växelverkningen mellan atomerna och atomernas massa. Härleder man ekvationen, får man att ljudets hastiget ges ungefär av

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{k}{m}}d \qquad (128)}$$

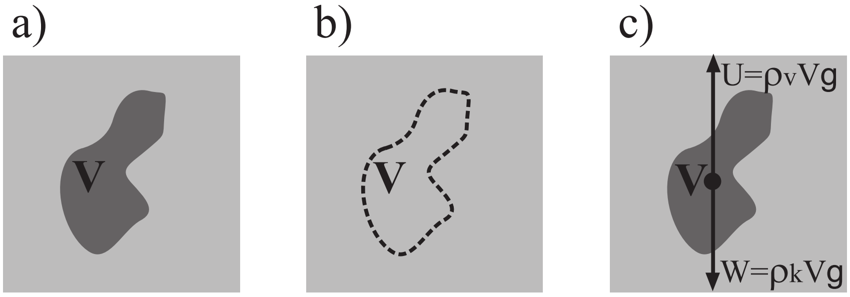
där k är fjäderkonstantenför den interatomära kraften (antas vara lineär med avståndet: $F = k\Delta x$), m är massan för atomen och d är avståndet mellan atomerna.

4.7 Archimedes princip

Då en kropp nedsänks i en vätska, undantränger den vätska, och känner en lyftkraft från vätskan omkring den. Att beräkna denna lyftkraft från kroppens form och trycket från vätskan på olika djup, är extremt svårt. Ett tankeexperiment kan dock användas för att bestämma lyftkraften på ett oregelbundet föremål.

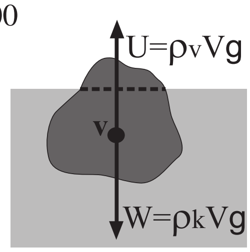
1. Vi sänker en godtycklig kropp med volymen V i vatten, se **a)** figuren nedan. Kroppen känner två krafter; vikten $W = mg = \rho_k V g$ och en ännu obestämd lyftkraft betecknat med U från vattnet.
2. Anta att kroppen tas nu bort, och det kvarblivna tomrummet fylls med vatten av samma form och volym, bild **b)**. Eftersom det insatta vattnet står stilla, måste lyftkraften U på denna volym och form vara lika med vikten på detta vatten $U = W_v = m_v g = \rho_v V g$.
3. Nu kan kroppen igen sättas på sin plats utan att lyftkraften ändras, och den totala kraften på kroppen är, **c)**:

$$\boxed{F_{tot} = U - W = \rho_v V g - \rho_k V g = V g(\rho_v - \rho_k) \qquad (129)}$$



En kropp sjunker alltså i vätska ifall dess densitet är större än vätskans. Man kan nu minska på en kropps uppenbara densitet genom att forma kroppen som en båt så att den flyter, fastän båten skulle vara gjord av stål med nästan åtta gånger större densitet än vatten.

Exempel: Ett isberg flyter på havet. Beräkna hur stor del av isbergets volym är under vattenytan. Isens densitet ρ_i = 917 kg/m^3 och vattnets ρ_v = 1000 kg/m^3.



Vikten neråt är samma som förut, men eftersom volymen nedsänkt i vatten nu är v blir den totala kraften på isberget

$$F_{tot} = U - W = \rho_v v g - \rho_i V g = g(\rho_v v - \rho_i V)$$

Detta skall vara noll för att isberget skall stå stilla, vilket ger volymen nedsänkt i vattnet

$$v = \frac{\rho_i}{\rho_v} V$$

vilket ger att förhållandet mellan totala och den nedsänkta volymen är

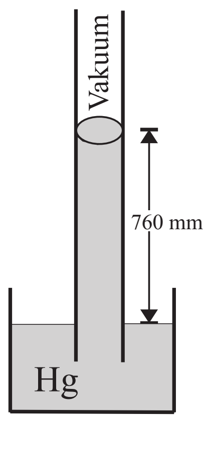
$$\frac{v}{V} = \frac{\rho_i}{\rho_v} = \frac{917 \text{ kg/m}^3}{1000 \text{ kg/m}^3} = \underline{\underline{91.7\%}}$$

4.8 Gasernas tryck

Jordens gravitationsfält gör att luften eller jordens atmosfär inte försvinner ut i rymden. Atmosfären har inte homogen densitet, utan lufttrycket ökar ju närmare jordytan vi kommer. Tryckökningen ges av $\Delta P = \rho(y) g (\Delta y)$, där y är höjden över jordytan. Trycket vid jordytan ges då som en integral

$$\boxed{P_{jordyta} = g \int_0^\infty \rho(y) dy \qquad (130)}$$

Exempel: Man märkte snabbt att man kan suga upp vätska genom ett smalt rör ('naturen avskyr vakuum', 'nature abhors vacuum'). Häpnaden blev sedan stor då man upptänkte att det går bara att suga upp vätska till en viss höjd, inte högre. Förklara varför det går bara att suga vätska till en viss höjd. Beräkna lufttrycket på jordytan från experimentet där den maximala höjden som kvicksilver går att suga upp är 760 mm över kvicksilverytan. Kvicksilvers densitet ρ är 13.6×10^3 kg/m^3.



Trycket i den nedre ändan av kvicksilverröret är

$$\begin{aligned} P_{Hg} &= \rho_{Hg} g \Delta y \approx 13.6 \times 10^3 \text{kg/m}^3 9.8 \text{ m/s}^2 \; 0.76 \text{ m} \\ &\approx 10^5 \frac{\text{kgm}}{\text{m}^2\text{s}^2} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \underline{\underline{10^5 \text{ Pa } (\approx \text{ 1 atm.})}} \end{aligned}$$