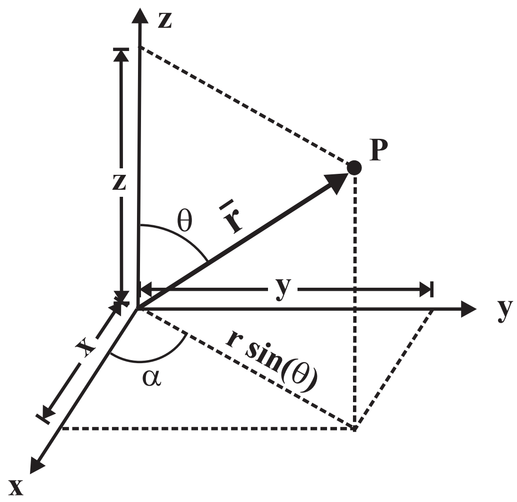
2.3 Rörelse i 2 och 3 dimensioner

Vi lever i en tredimensionell värld där den tredimensionella rörelsen kan spjälkas upp i tre stycken oberoende ekvationer i en dimension. Vi definierar *positionen* i **kartesiska koordinater** följande

$$\mathbf{r}_{kart} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{74}$$

I **sfäriska koordinater** kan x, y och z ges som (se bilaga A. hur man får volymen för en sfär genom integrering över sfäriska koordinater)

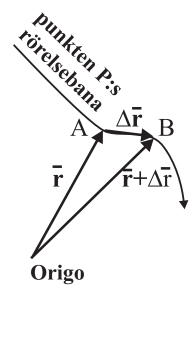
$$x = r \cdot sin(\theta) \cdot cos(\alpha) \tag{75}$$
$$y = r \cdot sin(\theta) \cdot sin(\alpha) \tag{76}$$
$$z = r \cdot cos(\theta) \tag{77}$$



Figur 18: En punkts koordinater given i kartesiska och sfäriska koordinater.

I figuren till höger rör sig en punkt från A till B under tidsintervallet Δt, och förflyttningsvektorn är $\Delta\mathbf{r}$. Den tredimensionella **medelhastigheten** och **hastigheten** definieras då som

$$< \mathbf{v} > = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$
$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$



De enskilda hastighetskomponenterna får man från koordinaternas (x,y och z) tidsderivator:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

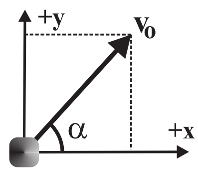
Likadant definieras *accelerationerna*

$$\begin{aligned} < \mathbf{a} > &= \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \\ \mathbf{a} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \\ a_x &= \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \end{aligned}$$

2.3.1 Projektilrörelse

En projektil kallas en kropp som har givits en begynnelsehastighet och som sedan rör sig genom luft och påverkas endast av jordens dragningskraft och luftmotståndet. Först tittar vi på idealfallet att luftmotståndet inte påverkar projektilens bana. I detta fall finns bara en kraft, jordens dragningskraft, som påverkar projektilen. Denna kraft är riktad neråt, mot jordens mitt, och accelererar projektilen neråt med konstant magnitud ≈ 9.8 m/s^2. Denna projektilrörelse sker i två dimensioner (tre, ifall vi har sidovind). Men istället för att lösa en ekvation i två dimensioner, löser vi två separata ekvationer i en dimension. Vi separerar alltså projektilrörelsen i x- och y-riktning

$$\begin{aligned} x &= x_\circ + v_{x\circ}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y &= y_\circ + v_{y\circ}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{aligned}$$



Vi sätter $x_\circ$ och $y_\circ$ lika med noll. Ingen acceleration i x-riktning och accelerationen i y-riktning är $-g$. Begynnelsehastigheterna i x- och y-riktningarna ($v_{x\circ}$ och $v_{y\circ}$), får man från projektilens begynnelsehastighet $\mathbf{v}_\circ$ och dess elevationsvinkel α (vinkeln mellan projektilens färdriktning och marken), se figuren ovan. Rörelseekvationerna för projektilen blir då

$$\begin{aligned} x &= [v_\circ cos(\alpha)]t & (78) \\ y &= [v_\circ sin(\alpha)]t - \frac{1}{2}gt^2 & (79) \end{aligned}$$

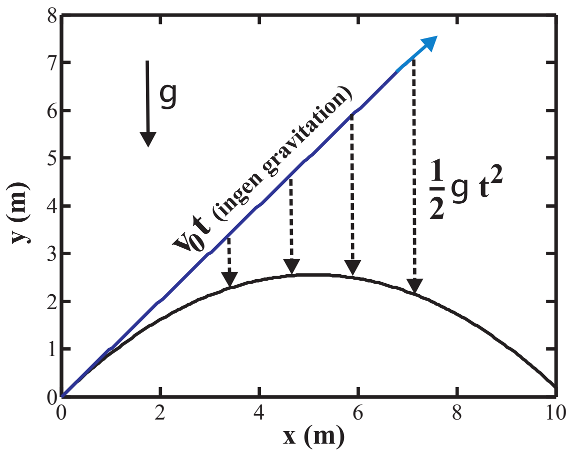
Projektilens x- och y-hastighetskomponenter får man genom derivering

$$\begin{aligned} v_x &= v_\circ cos(\alpha) & (80) \\ v_y &= v_\circ sin(\alpha) - gt & (81) \end{aligned}$$

Dessa ekvationer berättar helt projektilens position och hastighet vid varje tidpunkt. Nämnas kan att projektilens fart och riktning (vinkeln mellan marken och projektilens hastighet) ges av

$$
\begin{aligned}
|v| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\
tan(\alpha) &= v_y/v_x
\end{aligned}
$$

Projektilens **maximihöjd** och **räckvidd** (avståndet i x-riktning så att y = 0 igen) kan lätt räknas. I figur (19) ser vi en projektils kastparabel. Ritad finns också situationen där ingen kraft påverkar kroppen.



Figur 19: Projektilrörelse med och utan gravitationskraft.

Projektilen når maximihöjd då y-värdet är maximum, detta sker vid tidpunkten T då $dy/dt = 0$, vilket ger $v_\circ sin(\alpha) - gT = 0$, därifrån T löses

$$
\boxed{T = \frac{v_\circ sin(\alpha)}{g}} \tag{82}
$$

Insättning av T i Ekv. (79) ger **maximihöjden**

$$
\boxed{h_m = v_\circ sin(\alpha)T - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{v_\circ^2 sin^2(\alpha)}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_\circ^2 sin^2(\alpha)}{g^2} = \frac{v_\circ^2 sin^2(\alpha)}{2g}} \tag{83}
$$

Efter tiden $2T$ korsar projektilen x-axeln, och Ekv. (78) ger **räckvidden** för kastparabeln[9]

$$
\boxed{R = (v_\circ cos(\alpha))\, 2T = v_\circ cos(\alpha)\frac{2v_\circ sin(\alpha)}{g} = \frac{2v_\circ^2 sin(\alpha)cos(\alpha)}{g} = \frac{v_\circ^2 sin(2\alpha)}{g}} \tag{84}
$$

vars maximi inträffar då begynnelsevinkeln $\alpha = \pi/4$ rad eller 45°.

[9] $sin(2\alpha) = sin(\alpha + \alpha) = sin(\alpha)cos(\alpha) + cos(\alpha)sin(\alpha) = 2sin(\alpha)cos(\alpha)$

Frågor:

1. Hur bra tror du att de härledda formlerna för projektilrörelse skulle beskriva experiment, där man ger en boll en begynnelsehastighet och en begynnelsevinkel och sedan mäter räckvidden? Du kan också ge feluppskattningen i %. Enligt formeln, inträffar maximiräckvidd vid elevationsvinkeln $45°$, ifall man beaktar luftmotståndet, vid vilken begynnelsevinkel inträffar maximiräckvidden då, mindre, lika med eller större än $45°$?

2. Om du jämför *projektilrörelse* och rörelse för en *simpel pendel* där $sin(\theta)$ approximeras med θ, så vilkendera teorin tror du att beskriver experiment bättre? Varför?

3. Helt allmänt, hur bra tror du att de härledda fysikaliska formlerna beskriver den verkliga världen i genomsnitt? Kan du uppskatta felet? Tror du att *projektilrörelsen* beskriver verkliga världen bättre eller sämre jämfört med formlerna i genomsnitt?

2.3.2 Projektilrörelse med luftmotstånd

En mera realistiskt beskrivning av projektilrörelsen får vi när vi tar i beaktande luftmotståndet som vanligtvis är beroende av projektilens fart.

Luftmotståndet för ett objekt som rör sig i luft- eller vätskelikt medium beror på kroppens form, yta, area och hastighet, men också av mediets densitet och viskositet.

Först måste man bestämma kroppens hastighetsberoende på luftmotståndet. Detta kan man åstadkomma med det så kallade **Reynolds talet**, vilket egentligen ger förhållandet mellan den *inertiella* och *viskosa*[10] kraften på kroppen.

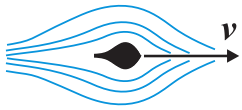
$$\boxed{R_e = \frac{L \cdot \rho \cdot v}{\eta}} \tag{85}$$

där,

$$\begin{aligned}
R_e &= \text{Reynolds tal, dimensionslöst} \\
L &= \text{Kroppens längd (m) i riktning av hastigheten} \\
\rho &= \text{Mediets densitet (kg/m}^3\text{)} \\
v &= \text{Hastigheten av kroppen (m/s)} \\
\eta &= \text{Mediets dynamiska viskositet (N s } /m^2 \text{ = kg / (s· m))}
\end{aligned}$$

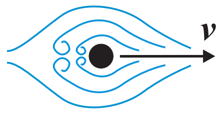
För små värden av *Reynolds talet*, vilket kallas för *laminart* eller icke-turbulent flöde, så är luftmotståndet bara proportionellt till hastigheten

$$F_{lm} = k \cdot v \qquad Re < 1 \tag{86}$$



där k är proportionalitetsfaktorn (kg/s). När *Reynolds talet* är stort, turbulent flöde, så är luftmotståndet proportionellt till hastigheten i kvadrat

$$F_{lm} = C_{lm}\frac{A \cdot \rho \cdot v^2}{2} \qquad Re > 1000 \tag{87}$$



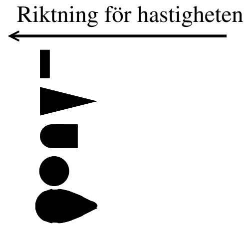
där

$$\begin{aligned}
F_{lm} &= \text{Luftmotståndskraften (N = kg m / s}^2\text{)} \\
C_{lm} &= \text{Luftmotståndskoefficienten, dimensionslöst} \\
A &= \text{Kroppens area (m}^2\text{) vinkelrät mot hastigheten} \\
\rho &= \text{Mediets densitet (kg/m}^3\text{)} \\
v &= \text{Hastigheten för kroppen (m/s)}
\end{aligned}$$

[10]**Viskositet:** Storlek på flödesresistansen som en vätska ger.

Luftmotståndskoefficienten C_{lm} beror på projektilens form, area och yta. Nedan finns en tabell med luftmotståndskoefficienter för några av de vanligaste projektilerna:

Projektil	C_{lm}
Platta	1.28
Prisma	1.14
kula	0.295
sfär	0.07 - 0.5
'utsträckt droppe'	0.045



För bollar, människor och många andra objekt kan Luftmotståndskoefficienten C_{lm} approximeras vara ca. 0.35. Detta tillsammans med luftens densitet $\rho \approx 1.2$ kg/m^3 ger att hastigheten i kvadrat beroende luftmotståndskraften blir

$$F_{lm} \approx \frac{0.35 \cdot 1.2}{2} A \cdot \ v^2 \approx \frac{1}{4} A \cdot \ v^2 \tag{88}$$

där A är arean för objektet vinkelrät mot hastigheten v. Denna approximativa formel som är lätt att komma ihåg stämmer ganska bra för stora rundformiga objekt i luft som inte har allt för hög hastighet.

2.3.3 Numerisk lösning av kaströrelse med luftmotstånd

Vi antar att *retardationen* (negativ acceleration) för luftmotståndet kan skrivas följande

$$\mathbf{F_{lm}} = -konst \cdot v^2. \tag{89}$$

Vi har gravitationskraften i -y riktning så att de totala x- och y-komponenterna av krafterna blir

$$\begin{aligned} F_{Tot,x} &= F_{lm} \cdot cos(\alpha) \\ F_{Tot,x} &= F_{lm} \cdot sin(\alpha) - mg \end{aligned}$$

där $\alpha = atan(v_y/v_x)$. Dessa krafter beror av den momentana hastigteten, så att vi använder rörelsemängdsprincipen $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_{Tot}$ i finit form: $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{F}_{Tot}\Delta t$. Detta ger rörelsemängdsförändringen i x- och y-riktningarna:

$$p_{2,x} = p_{1,x} + F_{Tot,x}\Delta t \tag{90}$$

$$p_{2,y} = p_{1,y} + F_{Tot,y}\Delta t \tag{91}$$

Nu går vi igenom ett sätt på hur man numeriskt med hjälp av en dator kan lösa problemet (datorsimulation)

- Vi ger begynnelseplatsen, x=x$_\circ$, y=y$_\circ$, begynnelsehastigheten v=v$_\circ$ och begynnelsevinkeln $\alpha = \alpha_\circ$ för projektilen
- Vi beräknar x- och y-komponenterna för begynnelsehastigheten
  $v_x = v_\circ cos(\alpha)$
  $v_y = v_\circ sin(\alpha)$
- Vi beräknar begynnelserörelsemängden
  $p_x = mv_x$
  $p_y = mv_y$
- Vi bestämmer det konstanta tidssteget Δt (måste testa att det inte är för stort!)

1. Vi beräknar x- och y-komponenterna för den totala kraften
   $F_{lm} = -konstv^2$
   $F_{Tot,x} = F_{lm} \cdot cos(\alpha)$
   $F_{Tot,x} = F_{lm} \cdot sin(\alpha) - mg$

1. Bestäm de nya rörelsemängderna efter tidssteget Δt:
   $p_x = p_x + F_{Tot,x}\Delta t \quad p_y = p_y + F_{Tot,y}\Delta t$

2. Beräkna nya hastigheterna:
   $v_{ny,x} = p_x/m \quad v_{ny,y} = p_y/m$

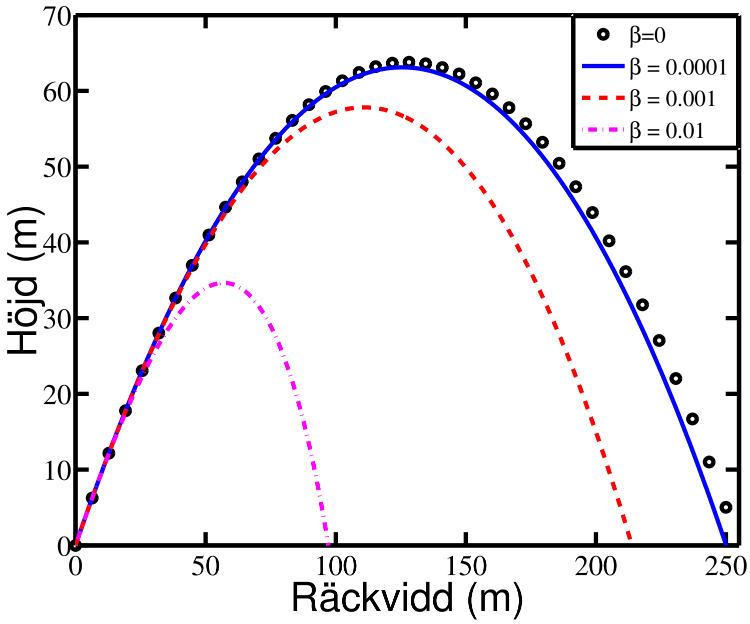
3. Medelhastigheten under tidssteget:
   $v_{medel,x} = (v_{ny,x} + v_x)/2 \quad v_{medel,y} = (v_{ny,y} + v_x)/2$

4. Bestäm nya platserna efter Δt:
   $x = x + v_{medel,x} \quad y = y + v_{medel,y}$

5. Uppdatera hastigheterna och platserna:
   $v_x = v_{ny,x} \quad v_y = v_{ny,y}$
   $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
   $\alpha = \mathrm{atan}(v_y/v_x)$

6. Ifall y fortfarande större än 0, hoppa till punkt 1. annars sluta

I figuren nedan ser vi hur långt en projektil med begynnelsehastigheten 50 m/s och vinkeln 45° med olika luftmotståndskoefficienter $\beta = konst/m$ flyger



I vakuum faller olika massor lika snabbt, men luft eller vätskemotståndet gör att olika massor faller olika snabbt i luft och vätska. För låga hastigheter i luft och vätskor, är motståndet proportionellt till farten

$$F_{lm} \quad = \quad k \cdot v$$

där kraften är i motsatt riktning till hastigheten och k är luftmotståndskoefficienten. Släpper man en sten i vatten, ger Newtons andra lag

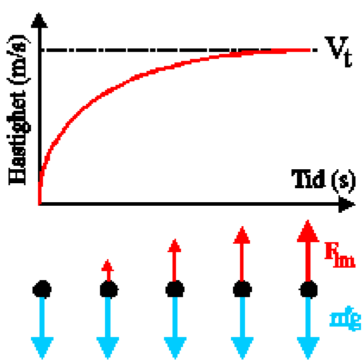
$$F \quad = \quad w - F_{lm} = m^* g - kv = m^* a \tag{92}$$

där $m^* = V(\rho - \rho_v)$ (där V och ρ är kroppens volym, respektive densitet och ρ_v är vattnets densitet, se: Archimedes princip, kapitel 4.7). Vi ser att ju större fart stenen får, så minskar den totala kraften som accelererar stenen, se bilden nedanför. Till slut har stenen fått sin största fart, kallad *terminalhastighet* v_t. Då är gravitationskraften minus vattnets lyftkraft lika med vätskemotståndet

$$F \quad = \quad w - F_{lm} = m^* g - kv = 0 \quad \Rightarrow \quad v_t = \frac{m^* g}{k} \tag{93}$$

Vill man ha hastigheten som en funktion av tiden, så måste man lösa differentialekvationen, se Ekv. (92)

$$\begin{aligned}
m^* a = m^* \frac{dv}{dt} &= m^* g - kv \qquad | \quad 1/k \\
\Rightarrow \frac{m^*}{k} \frac{dv}{dt} &= \frac{m^* g}{k} - v = v_t - v \qquad\qquad v_t = \frac{m^* g}{k} \\
\Rightarrow \frac{dv}{v - v_t} &= -\frac{k}{m^*} dt \\
\int_0^v \frac{dv'}{v' - v_t} &= -\frac{k}{m^*} \int_0^t dt' \\
\Big|_0^v ln(v' - v_t) &= -\Big|_0^t \frac{k}{m^*} t' \\
ln(v - v_t) - ln(-v_t) &= -\frac{k}{m^*} t \\
ln\left(\frac{v - v_t}{-v_t}\right) &= -\frac{k}{m^*} t \qquad\qquad ln(A) - ln(B) = ln(A/B) \\
ln\left(1 - \frac{v}{v_t}\right) &= -\frac{k}{m^*} t \qquad | \quad exp \\
1 - \frac{v}{v_t} &= e^{-\frac{k}{m^*} t} \\
v &= \underline{\underline{v_t \left(1 - e^{-\frac{k}{m^*} t}\right)}}
\end{aligned}$$



Från denna får man lätt acceleration som funktion av tiden

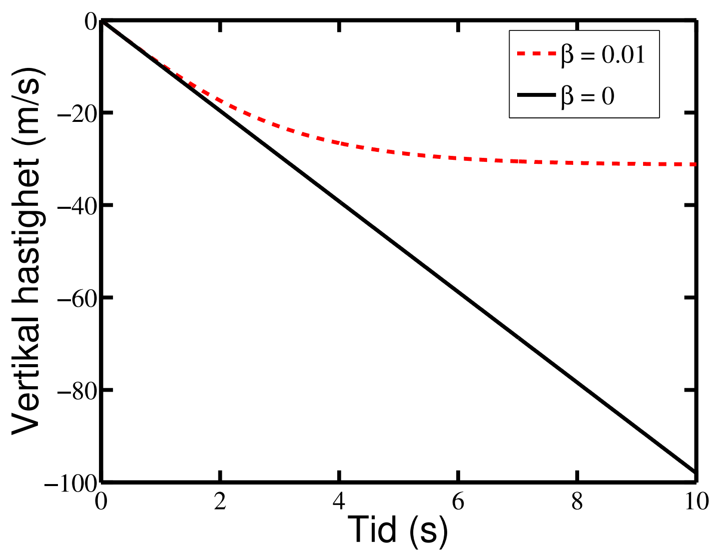
$$a = \frac{dv}{dt} = -v_t \frac{-k}{m^*} e^{-\frac{k}{m^*} t} = \frac{v_t k}{m^*} e^{-\frac{k}{m^*} t}$$

För högre hastigheter i luft är retardationen p.g.a. luftmotståndet: $a_{lm} = \beta \cdot v^2$. Vid terminalhastigheten är den totala kraften på det fallande objektet noll

$$F = w - F_{lm} = mg - m\beta v^2 = ma = 0$$

vilket ger terminalhastigheten: $v_t = \sqrt{\frac{g}{\beta}}$.
Farten som funktion av tiden får man genom att lösa differentialekvationen:

$$\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= mg - m\beta v^2 \qquad | \quad 1/m \\
\Rightarrow \frac{dv}{dt} &= g - \beta v^2 \\
\int_0^v \frac{dv'}{g - \beta v'^2} &= -\int_0^t dt' \\
\Big|_0^v \frac{1}{\sqrt{g\beta}} atanh\left(\frac{v'\beta}{\sqrt{g\beta}}\right) &= t \\
\Rightarrow atanh\left(v\sqrt{\frac{\beta}{g}}\right) &= t\sqrt{g\beta} \\
\Rightarrow v\sqrt{\frac{\beta}{g}} &= tanh(t\sqrt{g\beta}) \\
\Rightarrow v &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{g}{\beta}} tanh(t\sqrt{g\beta})}} \qquad | \quad tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}
\end{aligned} \tag{94}$$



Figur 20: Farten för en fallande kropp utan luftmotstånd ökar linjärt. För $\beta = 0.01$ är terminalhastigheten ca. 30 m/s, vilket uppnås efter ca. 10 s, se Ekv. (94)