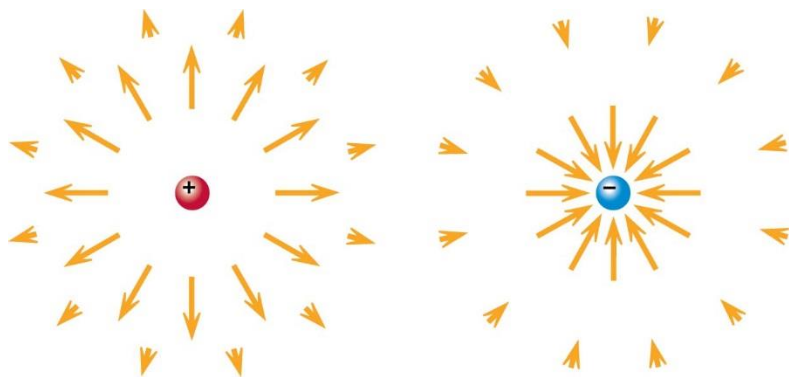
21. Fält i rymden (Kenttiä avaruudessa)

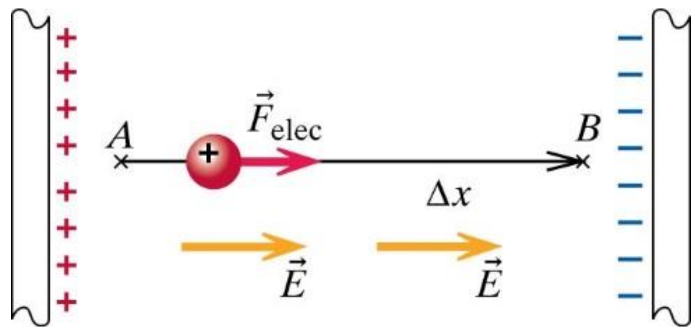
Lärandemål:

- Kunna matematiskt relatera det totala elfältet genom en sluten yta till totala laddningen inne i slutna ytans volym
- Kunna matematiskt relatera totala magnetiska fältet runt en sluten kurva till totala strömmen genom den slutna kurvan

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Vi har lärt oss att beräkna elektriska fält utgående från laddningarna som orsakar dem



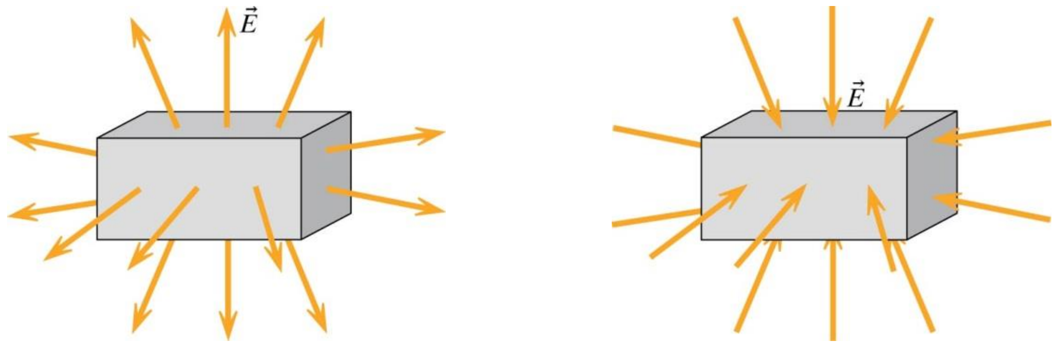


- Kan vi härleda nånting åt andra hållet?

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

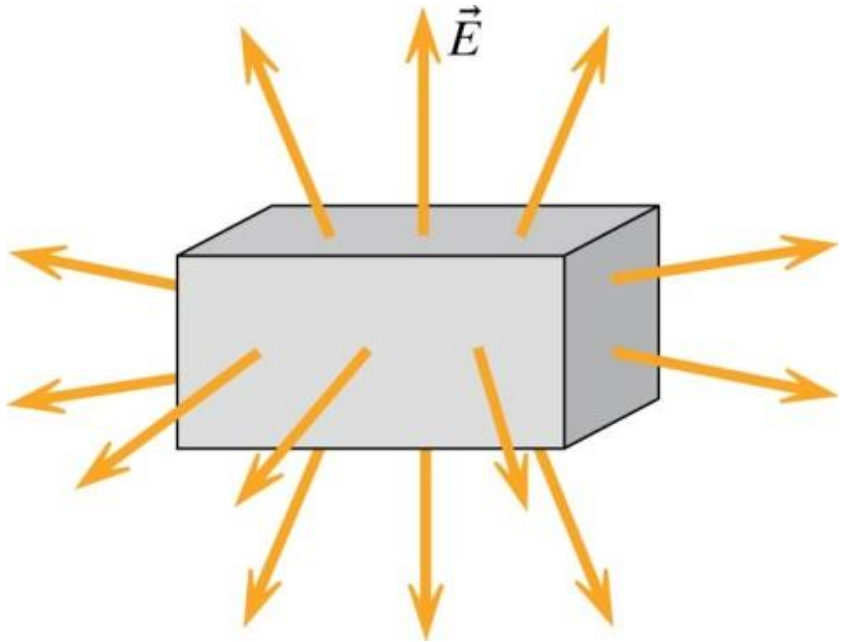
1.1 Gauss lag

- Låt oss tänka att vi känner till fältet överallt på en sluten yta, men inte vad som finns inuti

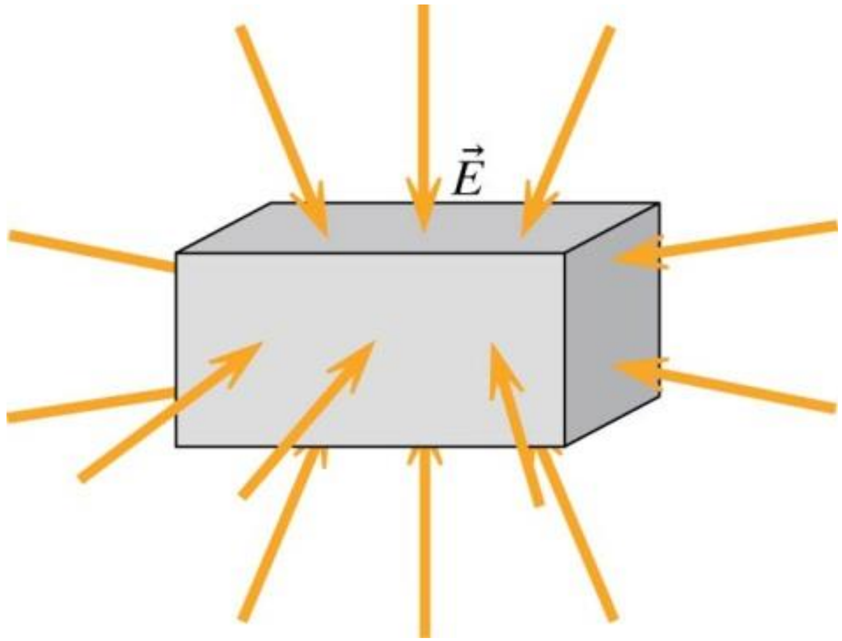


  - Med en *sluten yta* avses en yta som är ändlig men saknar rand
  - Ytan kan vara en geometrisk tanke-konstruktion, eller en verklig låda
- Vad, om nånting, kan vi säga om laddningarna innanför ytan?

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

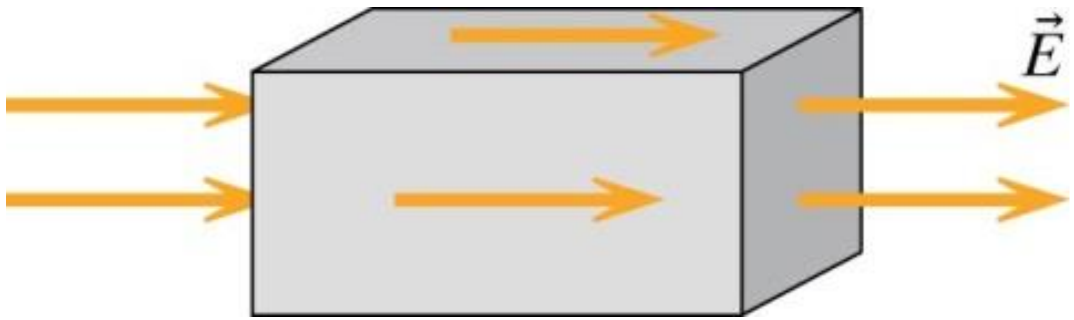


- Eftersom fältet är riktat utåt över hela ytan, måste det finnas positiv laddning inne i lådan



- Eftersom det elektriska fältet pekar innåt över hela ytan, måste det finnas negativ laddning inne i lådan

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren



- Det finns tre möjliga konfigurationer som kan ge upphov till ett sådant här fält
  - En mycket stor positivt laddad yta till vänster
  - En mycket stor negativt laddad yta till höger
  - Båda ovanstående

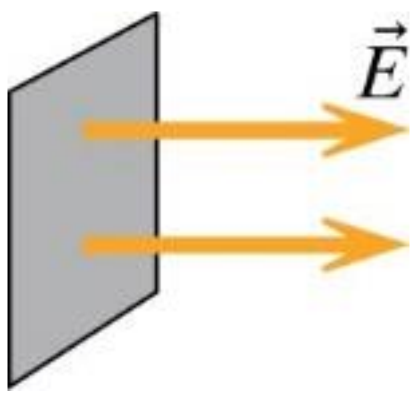
  - Ingen laddning inne i lådan

- En stor positivt laddad yta genom mitten av lådan
  - positiv laddning inne i lådan, också utanför den

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Gauss lag är en *kvantitativ* relation mellan mätningar av elektriska fältet på en *sluten* yta och laddningen innanför ytan

  - För ett kvantitativt samband behöver vi ett kvantitativt mått på styrkan och riktningen av det elektriska fältet på ytan



1.2 Elektriskt flöde

- Måttet på *elektriska fältet över en yta* kallas ”elektriskt flöde” Φ_{el}

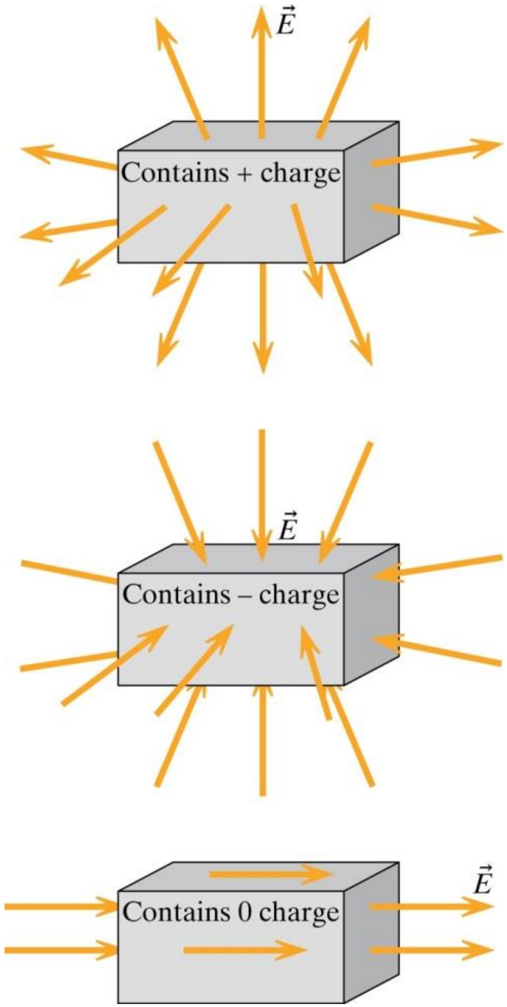
- Vad behövs för en kvantitativ definition på elektriskt flöde?
  - Riktning av fältet
  - Styrka, eller magnitud, av fältet
  - Mått på ytan, dvs. area

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Riktning av fältet

- Vi ser att riktningen av fältet bestämmer tecknet för laddningen i lådan
  - Vi vill relatera fältet till laddningen

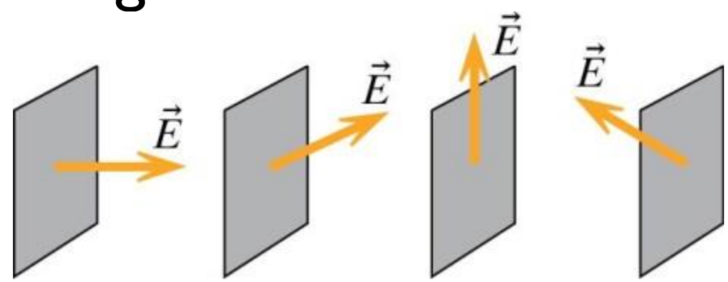
- Flödet bör alltså vara positivt om fältet är utåtriktat, negativt om det är inåtriktat, och noll om fältlinjen inte går genom ytan



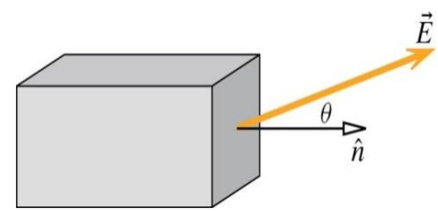
Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Vinkeln mot ytan

- Vi vill också ha ett mått på vinkeln som fältet har mot ytan
- Ytan har en riktning: normalen
- Extremfallen för fältets riktning är:
  - Vinkelrätt utåt: +1
  - Vinkelrätt innåt: -1
  - Parallellt: 0



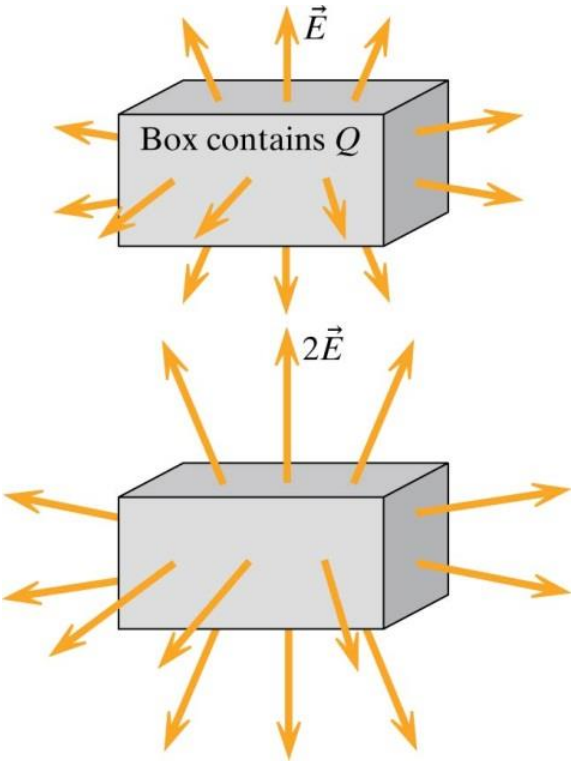
- Om linjen ligger åt ett annat håll:
  - Termen $\cos\theta$ uppfyller kraven, där θ är vinkeln mellan fältet $\vec{E}$ och ytans normal $\hat{n}$



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Styrkan av fältet

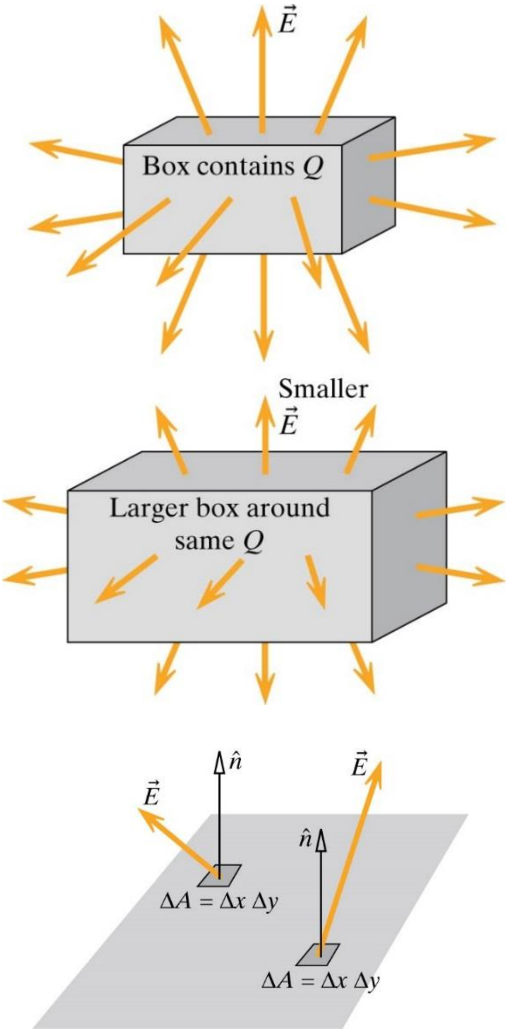
- Betrakta de två fallen på bilden
  - Om övre lådan innehåller laddningen Q, och fältlinjerna är dubbelt så långa i nedre bilden, hur mycket laddning finns i nedre lådan?
- Flödet bör alltså vara proportionellt till fältets styrka E
- Vi kan skriva $E\cos\theta$ som $\vec{E}\cdot\hat{n} = E|\hat{n}|\cos\theta$ eftersom $|\hat{n}| = 1$



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Ytans area

- Vi måste definiera flödet så att det har samma värde för olika stora ytor kring samma laddning
  - På ytan av den större lådan är fältet svagare
- Flödet måste alltså vara proportionellt till arean av ytan
- Eftersom elektriska fältet kan vara olika på olika områden av ytan, måste vi dela upp den i små delar $\Delta A = \Delta x \Delta y$

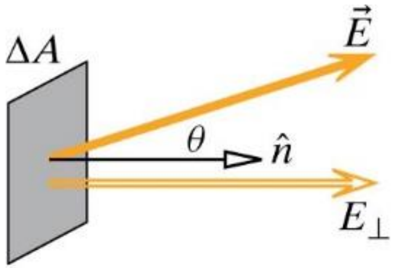


Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Elektriska flödet

- Då vi lägger allt ihop kommer vi till uttrycket för elektriska flödet:

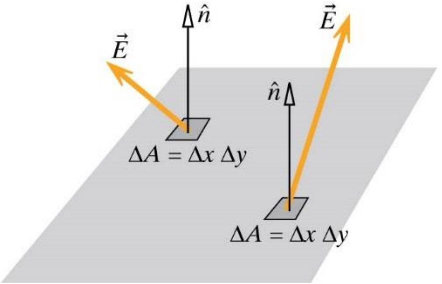
$$\Phi_{el} = \sum_{ytan} \vec{E} \cdot \hat{n}\, \Delta A$$



- Alternativt kan detta skrivas med en integral:

$$\Phi_{el} = \int \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

  - Integralen behövs om fältet varierar över ytan

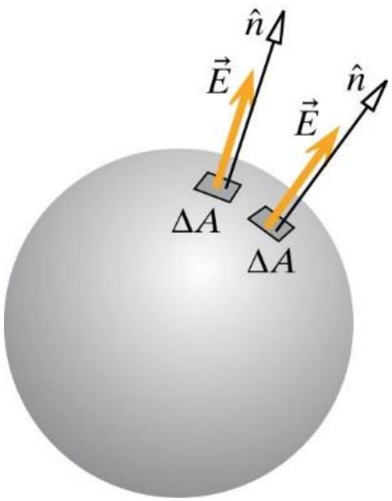


1.3 Gauss lag

- Vi återkommer nu till Gauss lag, som relaterar elektriska flödet genom en *sluten* yta till laddningen innanför ytan

$$\Phi_{el} = \sum_{sluten\ yta} \vec{E} \cdot \hat{n} \Delta A = \frac{\sum q_{inne}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{el} = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} \Delta A = \frac{\sum q_{inne}}{\varepsilon_0}$$



- Märk att normalen $\hat{n}$ väljs så att den pekar utåt

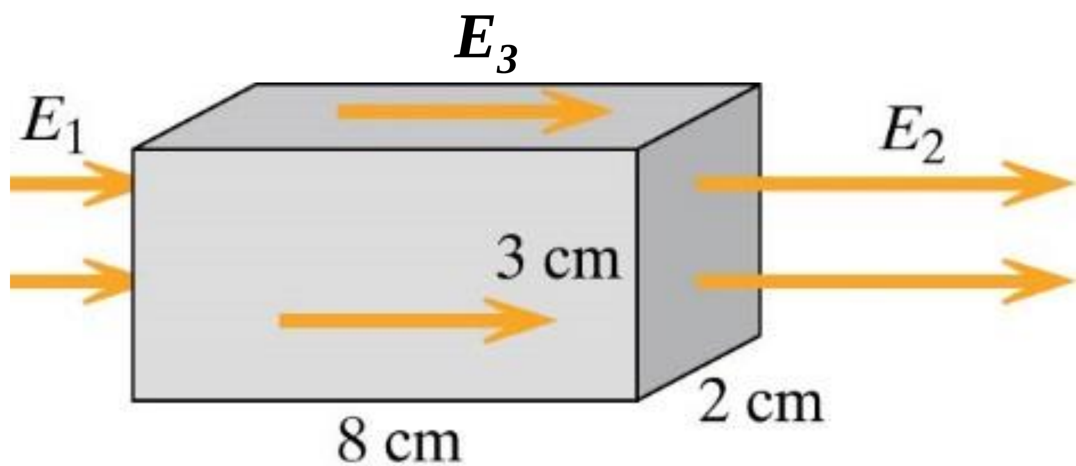
Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Elfältet runt lådan mäts: $E_1 = 400$ V/m, $E_2 = 1000$ V/m, och elfältet på sidan är $E_3 = 500$ V/m. Beräkna:

a) totala elektriska flödet genom varje sida

b) lådans totala flöde

c) totala mängden laddning inne i lådan

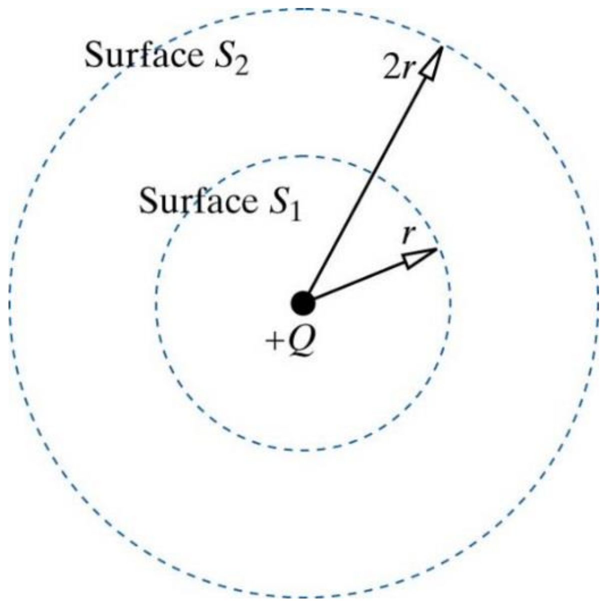


- Gauss lag: $\Phi_{el} = \sum_{sluten\ yta} \vec{E} \cdot \hat{n} \Delta A = \frac{\sum q_{inne}}{\varepsilon_0}$

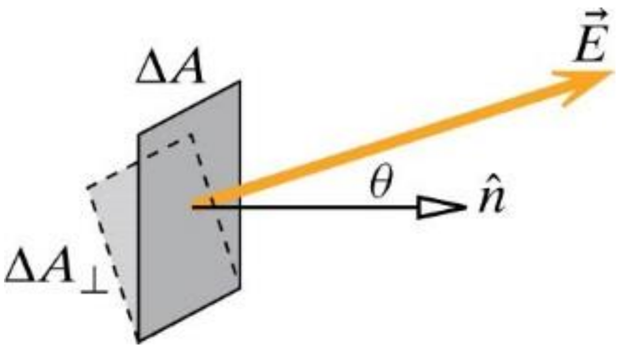
Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

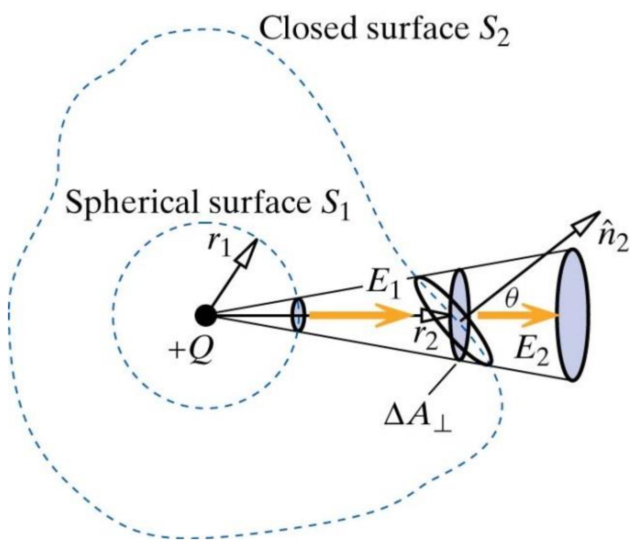
Olika ytor

- Storleken på ytan spelar ingen roll
  - Hur kommer det sig?



- Formen på ytan spelar heller ingen roll

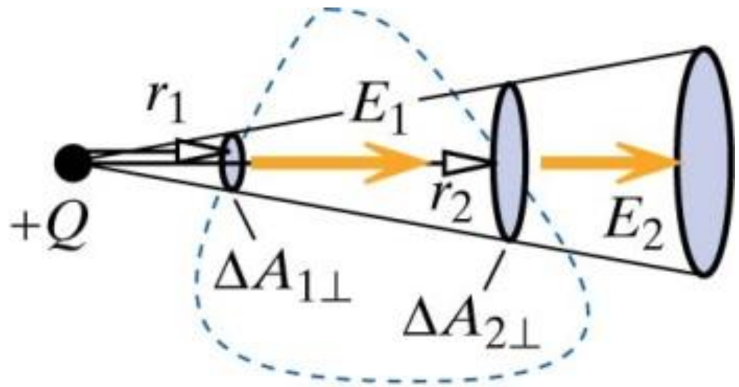




Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Laddningar utanför ytan

- Enligt Gauss lag är flödet genom en yta noll om ytan inte innesluter laddningar, även om det finns laddningar utanför ytan



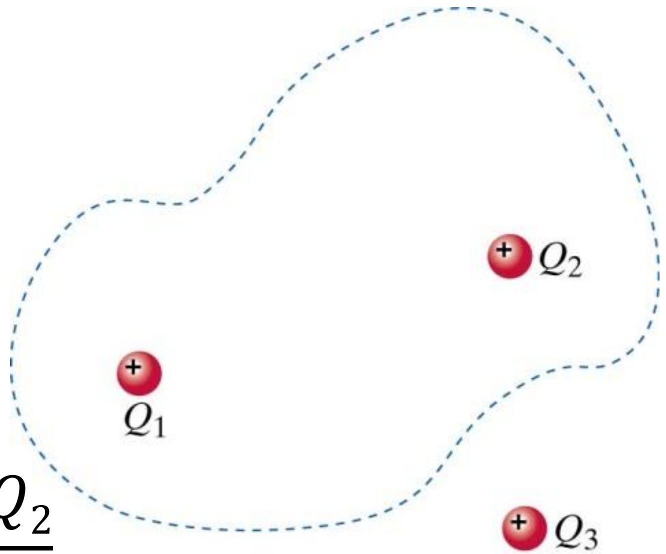
- Flödet genom A_1 och A_2 är lika stort, men genom A_1 pekar det innåt och är negativt

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Många enskilda laddningar

- Gauss lag gäller också då vi har laddningar både utanför och innanför ytan
- Betrakta fallet på bilden
- Om vi adderar ihop ekvationerna för de skilda laddningarna får vi

$$\sum_{sluten\,yta} \overrightarrow{(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3)} \cdot \hat{n}\Delta A = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}$$



Coulombs lag och Gauss lag

- Coulombs lag (från tidigare)

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}^2|} \hat{r} = q_2 \overrightarrow{E_1}$$

- Lagarna kan härledas från varandra, och är därmed likvärda (innehåller lika mycket information)
- MEN: om laddningarna är i rörelse gäller inte Coulombs lag; det går inte att på ett så enkelt sätt beräkna elfältet från en laddning som rör sig med hög fart
- Gauss lag däremot gäller i varje fall – den är alltså konsistent med den speciella relativitetsteorin!

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Beräkna elektriska fältet från en stor skiva med arean A och laddningen Q.

$$\Phi_{el} = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} \Delta A = \frac{\sum q_{inne}}{\varepsilon_0}$$

Av symmetriskäl är $E_{left} = E_{right}$.

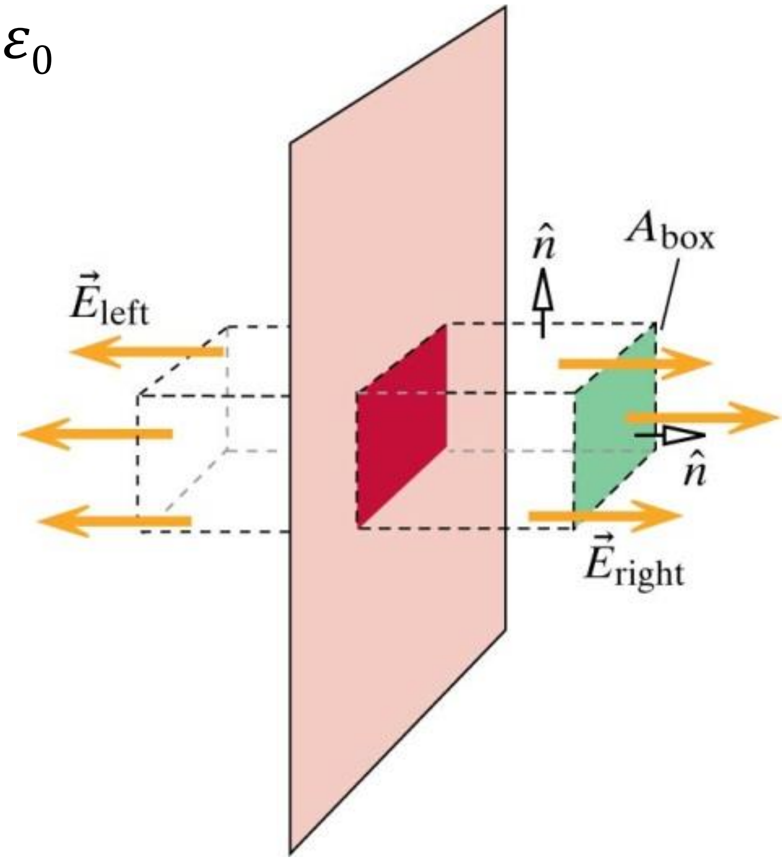
Flödet ges av:

$$\Phi_{el} = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 2E(\cos 0) A_{box}$$

Laddningen i lådan blir $Q(A_{box}/A)$

Från Gauss´s lag får vi då:

$$2EA_{box} = \frac{\left(\frac{Q}{A}\right) A_{box}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{(Q/A)}{2\varepsilon_0}$$



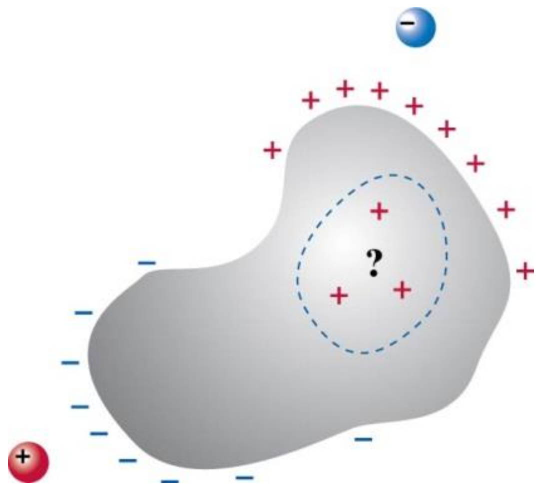
Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Laddningar och fält i en metall

- Anta att vi har en metall i jämvikt (dvs. ingen ström av laddningar)
- Kan det finnas laddning inne i metallen?
- Hur är det om metallen ligger i ett yttre fält?

  - Det kan inte finnas ett elfält inne i metallen i jämvikt, för annars skulle laddningarna strömma.
  - För en godtycklig yta inne i metallen måste alltså elfältet, och därmed också flödet, vara noll.

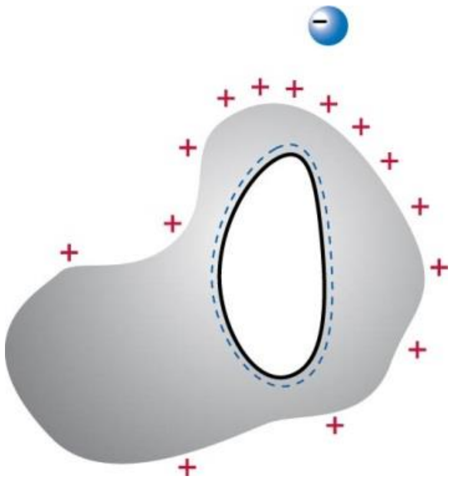
  → totala laddningen innanför vilken som helst yta måste vara noll enligt Gauss lag.
  (märk att det dock kan finnas, och faktiskt finns, både positiva och negativa laddningar så, att totala laddningstätheten är noll)



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

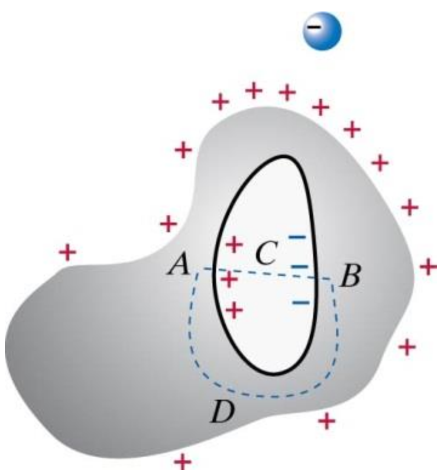
Tomrum i en metall

- Anta igen att vi har en metall i jämvikt
- Vad kan vi säga om laddningarna på inre ytan av ett tomrum inne i metallen?
  - Eftersom elfältet kring en yta runt hålet är noll måste totala laddningen på ytan vara noll.



- Kunde det finnas ett elfält inne i hålet på det sättet att totala laddningen var noll?
  - Eftersom elfältet i metallen är noll, måste potentialskillnaden längs med ADB vara noll, och därmed också längs med ACB

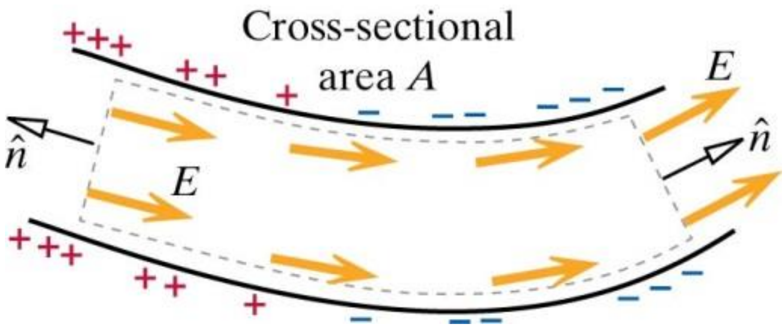
  → Elfältet i hålet måste vara noll



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Gauss lag i elektriska ledningar

- Bilden visar en uniform ledning med konstant tvärsnitt *A*. Finns det laddningar inne i ledningen?



  - Vi kan anta att elfältet är uniformt och följer ledningens riktning.
  - Vi väljer integrationsytan enligt bilden, lite innanför ledningens yta, med ändorna vinkelrätt mot ytan, och därmed också mot elfältet.
  - Flödet genom ytan i vänstra ändan är $-EA$ och i högra ändan EA.
  - Eftersom fältet överallt är parallellt med ytan av ledningen är flödet genom cylinderns mantelyta noll.
  - Enligt Gauss lag kan det alltså inte finnas laddningar inne i ledningen.

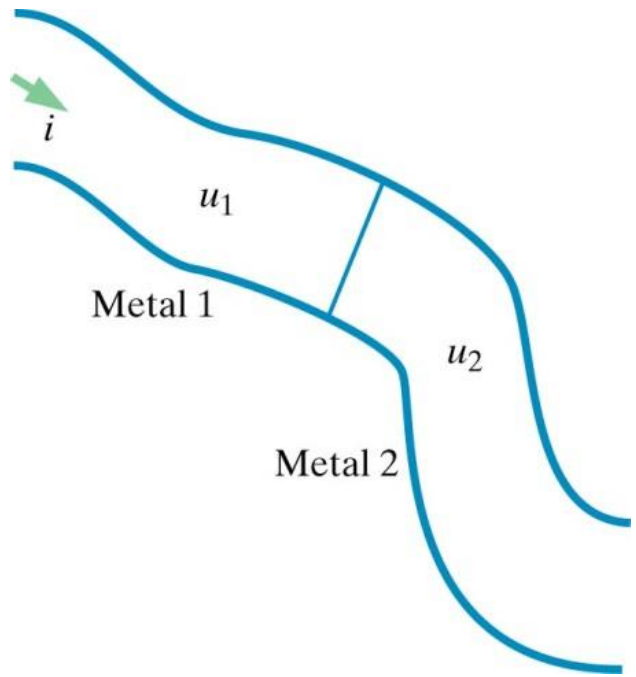
Laddningen vid ett gränsyta

- En stadig ström i flödar genom en ledning som består av två olika material, se bilden
- Båda delarna har samma radie r, elektronmobiliteten i båda delarna ges av $u_2 < u_1$ och antalet rörliga elektroner av $n_1 > n_2$.
- Har vi laddningen på gränsytan?
  - Eftersom $i_1 = i_2$ är också

$$n_1 A u_1 E_1 = n_2 A u_2 E_2$$

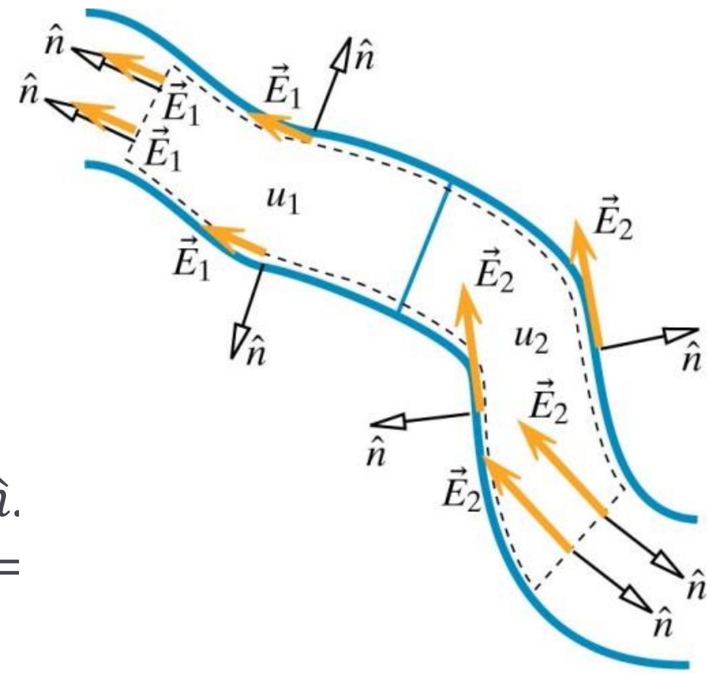
$$\Rightarrow E_2 = \frac{n_1 u_1}{n_2 u_2} E_1$$

(märk att E_2 alltså är större än E_1)



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Vi är intresserade av laddningen på gränsytan, och inte den laddning som ligger på ytan av ledningen, så vi väljer en integrationsyta som ligger innanför ledningens yta.
- Elfältet innanför ledningens ytan överallt är parallellt med ledningen, och är homogent i ett område som består av bara en typs metall.
- Fältet måste då ligga som på bilden.
  - Mantelytan: flödet $= 0$ eftersom $\vec{E} \perp \hat{n}$.
  - Övre ändan: flödet $= E_1(\pi r^2)\cos 0° = E_1 \pi r^2$
  - Nedre ändan: flödet $= E_2(\pi r^2)\cos 180° = -E_2 \pi r^2$



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Enligt Gauss lag är då

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 + E_1 \pi r^2 - E_2 \pi r^2 = \frac{\sum q_{inne}}{\varepsilon_0}$$

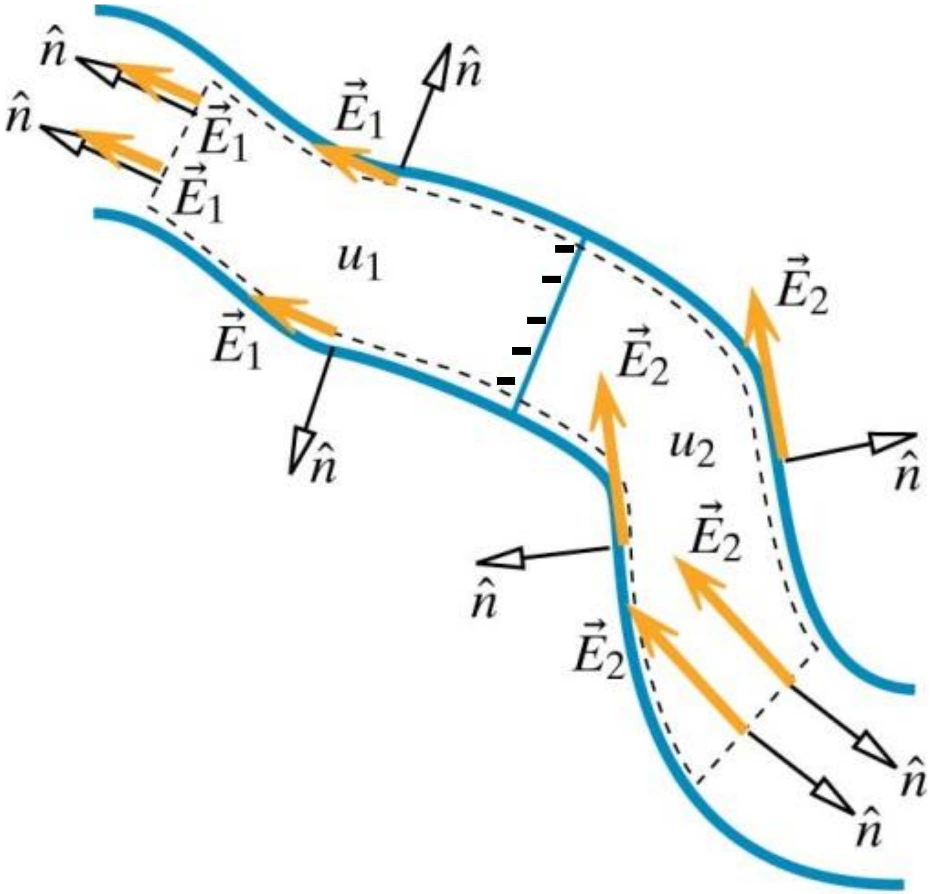
- Eftersom $E = i/(nAu)$ får vi för laddningen på gränsytan

$$\sum q_{inne} = \varepsilon_0 (E_1 \pi r^2 - E_2 \pi r^2)$$

$$\sum q_{inne} = \varepsilon_0 i \left(\frac{1}{n_1 u_1} - \frac{1}{n_2 u_2} \right)$$

- Resultatet är negativt, vilket är logiskt då laddningen på gränsytan bör vara negativ för att öka E_2 och minska E_1.

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

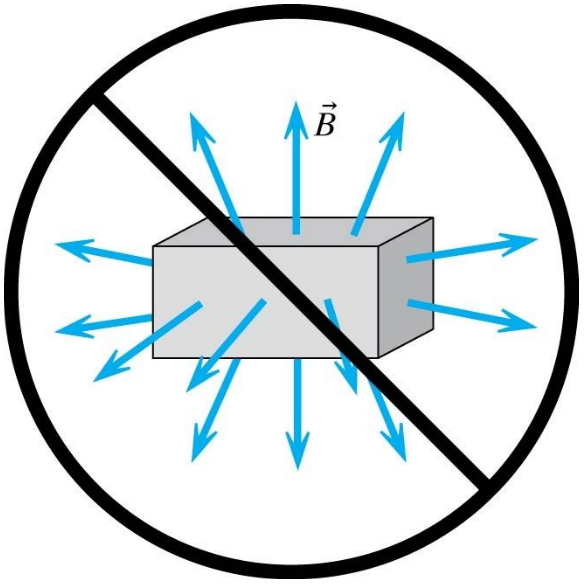
Gauss lag: $$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} \Delta A = \frac{\sum q_{inne}}{\varepsilon_0}$$

Hur skulle Gauss lag se ut för magnetfältet?

Magnetiska monopoler

- Magnetiska dipoler skiljer sig fundamentalt från elektriska dipoler
  - Medan man kan skilja åt laddningarna i en elektrisk dipol, kan man inte skilja åt en ”positiv” eller ”negativ” magnetisk laddning
- Så kallade magnetiska monopoler existerar inte (så vitt man vet).
  - Trots gediget sökande har man m.a.o. aldrig påträffat magnetiska fält som skulle uppkomma från en enstaka magnetisk ”laddning”.
- Det finns dock teorier som förutspår deras existens:

  http://pdg.lbl.gov/2004/listings/s028.pdf



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Gauss lag för magnetism

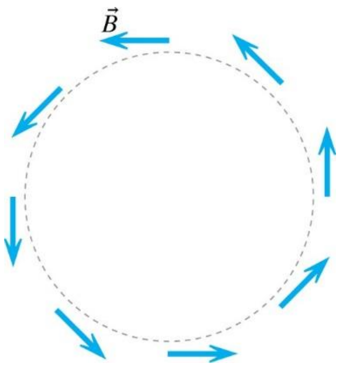
- Avsaknaden av magnetiska monopoler leder till att magnetiska flödet genom vilken som helst *sluten yta* är noll
- Detta kan kallas för **Gauss lag för magnetism**

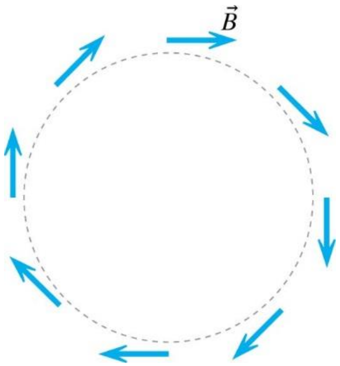
$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

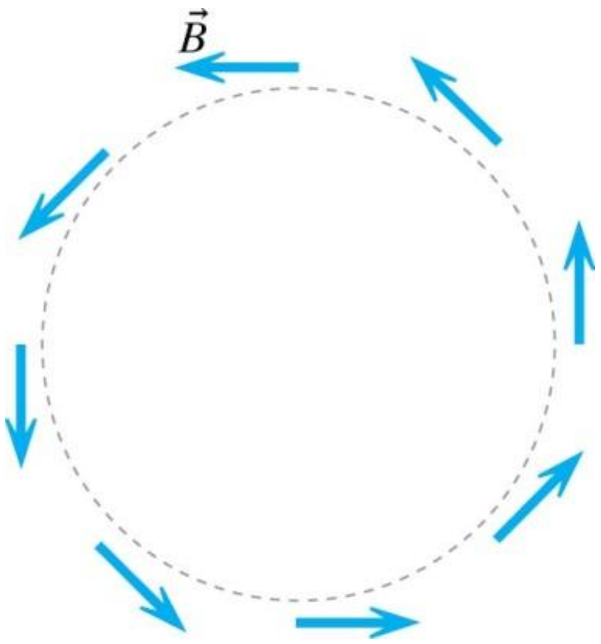
Magnetiska fält i rymden

- Laddningar i rörelse producerar magnetiska fält.
- Om vi känner till magnetiska fältet kring en sluten kurva, vad kan vi säga om strömmen innanför?
  - Med sluten kurva avses en ändlig kurva utan ändor.



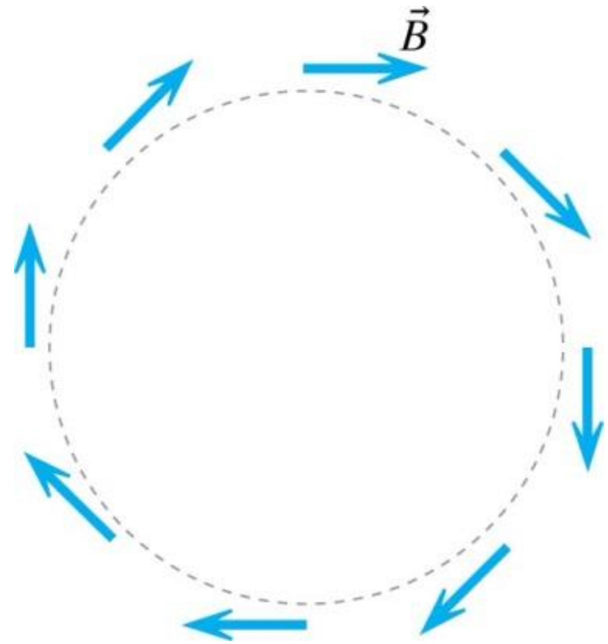


Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren



- Ett sådant fält skulle kunna orsakas av en ledning genom mitten av ringen, där strömmen är riktad utåt från pappret

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren



- Ett sådant fält skulle kunna orsakas av en ledning genom mitten av ringen, där strömmen är riktad innåt i pappret

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Amperes lag

- Amperes lag är en *kvantitativ* relation mellan magnetfältet kring en *sluten kurva* och strömmen genom det inneslutna området.
- Amperes lag kan härledas från Biot-Savarts lag (kap.17):

$$B_{ledn} \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}$$

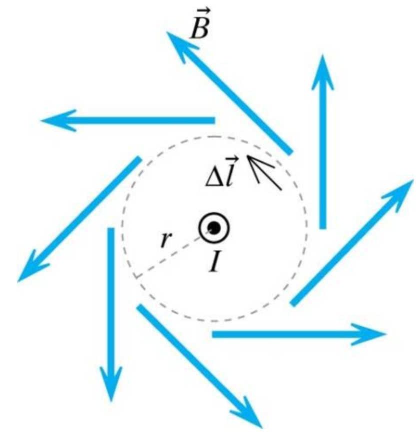
- Amperes lag är konsistent med relativitetsteorin

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Magnetfältet kring en ledning

- Biot-Savarts lag ger magnetfältet som uppkommer p.g.a. en ström i en ledning *I*, på avståndet *r* från ledningen

$$B_{ledn} \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}$$



- Om vi integrerar detta längs en kurva runt ledningen får vi

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}\right)\oint dl = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}\right)(2\pi r) = \mu_0 I$$

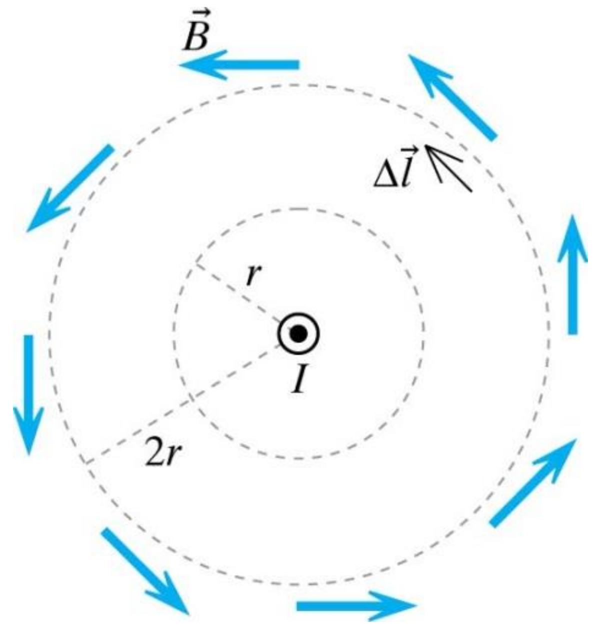
eftersom $\vec{B} \parallel d\vec{l}$ över hela kurvan och *r* är konstant.

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Val av integrationskurva

- Resultatet ovan är oberoende av kurvans radie
  - Precis som med Gauss lag

- Hur kommer det sej?
  - → Magnetfältet är inverst proportionellt till radien *r*, medan kurvans längd $2\pi r$ är proportionellt till *r*.
  - → En dubbelt längre radie ger alltså en dubbelt längre integrationssträcka, men hälften svagare magnetiskt fält



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Godtycklig integrationskurva

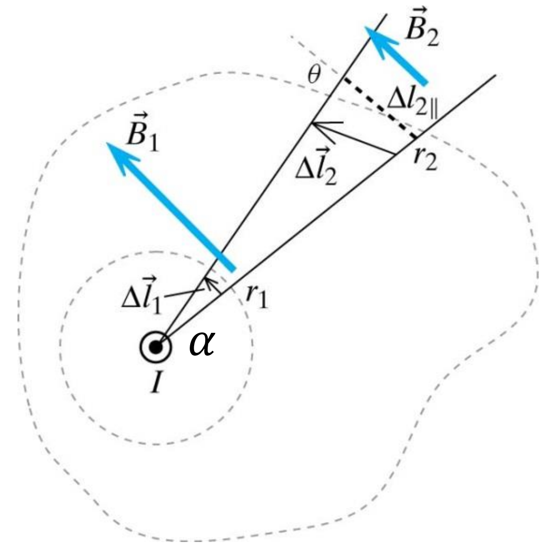
- Integration kring en godtycklig kurva ger också samma resultat
  - Vi betraktar integrationen kring en kort sträcka över en liten vinkel α
  - Projektionen av Δl_2 i riktning av $\vec{B}_2$, dvs. $\Delta l_{2\parallel}$, ges av $\Delta l_2 \cos\theta$
  - Dessutom har vi likformade trianglar, vilket ger

$$\frac{\Delta l_{2\parallel}}{r_2} = \frac{\Delta l_1}{r_1}$$

  - Alltså har vi

$$\vec{B}_2 \cdot \Delta l_2 = B_2\, \Delta l_2 \cos\theta = B_2 \Delta l_{2\parallel} = B_2 \left(\frac{r_2}{r_1}\right) \Delta l_1$$

  - Eftersom B fältet kring en ström är inverst proportionellt till radien får vi $B_2/B_1 = r_1/r_2$
  - Alltså är $\vec{B}_2 \cdot \Delta l_2 = \vec{B}_1 \cdot \Delta l_1$



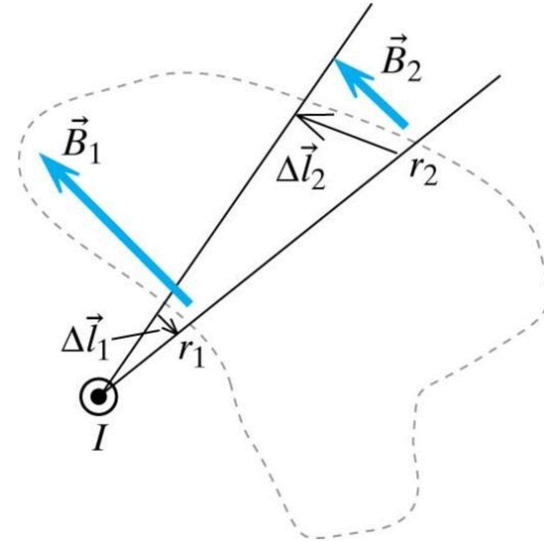
Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Flera ledningar

- En ledning utanför kurvan ger inget bidrag

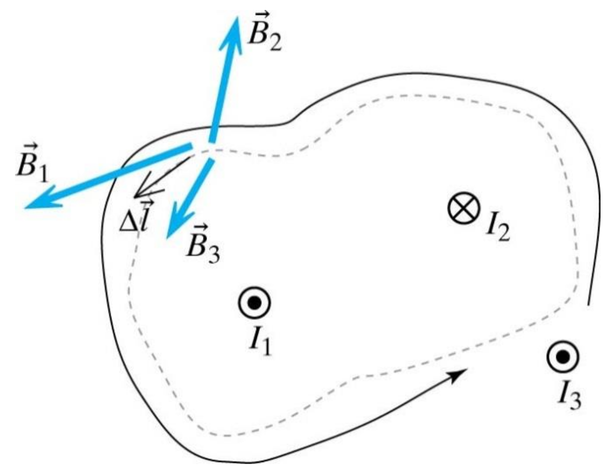
$$\vec{B}_2 \cdot \Delta\vec{l}_2 = -\vec{B}_1 \cdot \Delta\vec{l}_1$$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot \delta\vec{l} = 0$$



- Om vi integrerar detta längs en kurva runt ledningen får vi

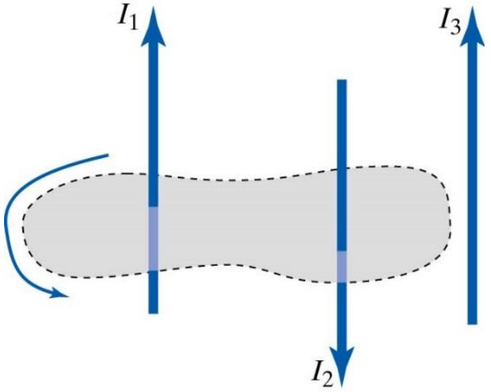
$$\oint (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3) \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$

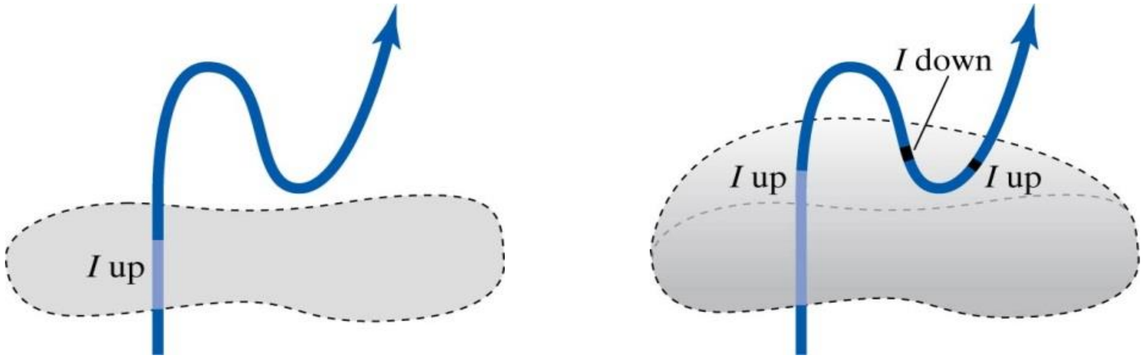


Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Vilka strömmar räknas som ”genom”?

- För Amperes lag måste vi integrera kring en *sluten* kurva, och räkna strömmarna inneslutna av kurvan
  - Riktningen är viktig!
- Vilka ledningar anses inneslutas av kurvan?
  - Tänk dig en yta som begränsas av kurvan
  - Alla strömmar som går genom ytan räknas
  - Detta gäller för vilket som helst val av yta, så länge gränsen utgörs av integrationskurvan.

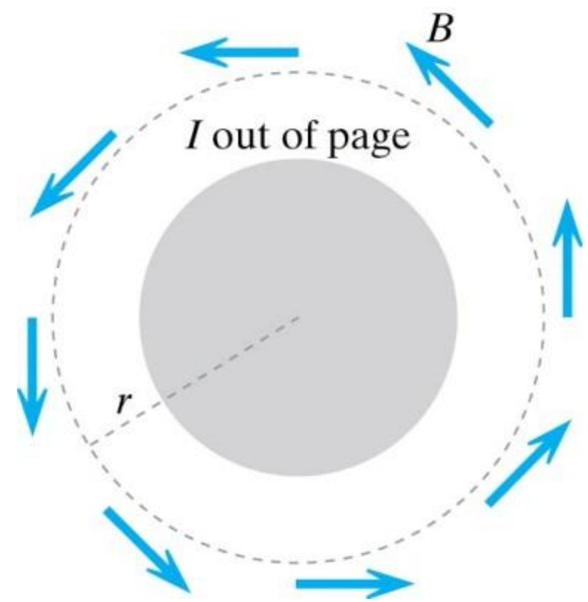




Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Exempel 1

- Beräkna med hjälp av Amperes lag magnetfältet på avstånd *r* från en tjock ledning.
  - Välj integrationskurva som på bilden
  - Eftersom *B* överallt tangerar cirkeln är



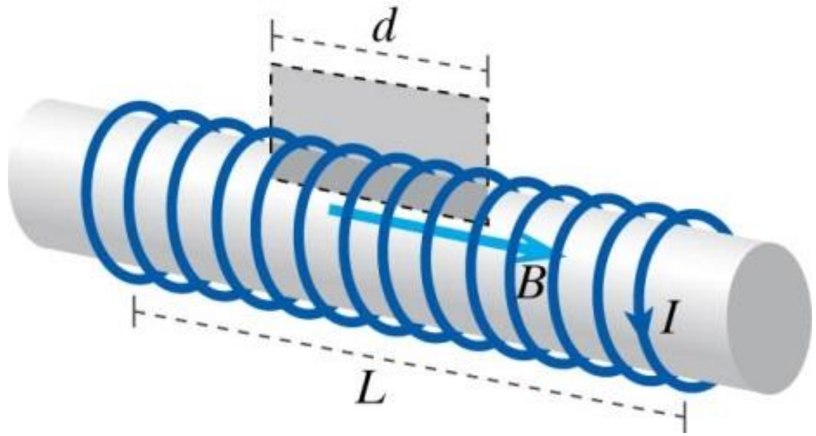
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}$$

- Vi får samma svar som med Biot-Savarts lag, men mycket enklare

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Beräkna med hjälp av Amperes lag magnetfältet inne i en solenoid med längden L och N varv med strömmen I



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

  - Välj integrationskurvan som på bilden
  - Integralen ger Bd eftersom magnetfältet är vinkelrätt mot ändorna av rektangeln, och noll utanför solenoiden.
  - Strömmen genom den inneslutna ytan är $N/L \times d \times I$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Maxwells ekvationer

Vi har nu grunderna till Maxwells ekvationer

- Gauss lag för elektricitet: $$\oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{\sum q_{inne}}{\varepsilon_0}$$
- Gauss lag för magnetism: $$\oint \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA = 0$$
- (Ofullständig) Faradays lag: $$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$
- Amperes lag: $$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{genom}$$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Differential form av Gauss lag

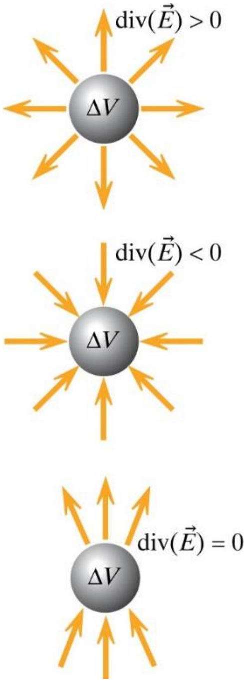
Relatera fältet i rymden till laddning vid samma plats och tid

$$q(x,y,z,t) \;\rightarrow\; \vec{E}(x, y, z, t)$$

Elektriska flödet på ytan av en pytteliten volym ΔV

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{\rho\, \Delta V}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA}{\Delta V} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

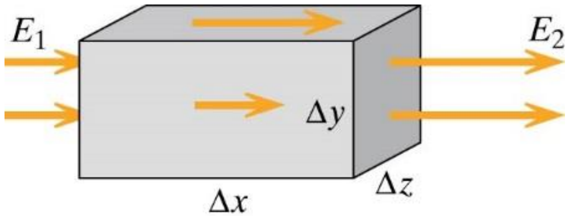


Divergens

$$\mathrm{div}(\vec{E}) \;=\; \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\, dA}{\Delta V} \;=\; \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA}{\Delta V} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$



$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{(E_2 - E_1)\Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(E_2 - E_1)}{\Delta x} = \frac{dE}{dx} = \frac{\delta E_x}{\delta x}$$

Differential form av Gauss lag

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Elektrisk potential och Gauss lag

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$E_x = -\frac{\delta V}{\delta x}$$

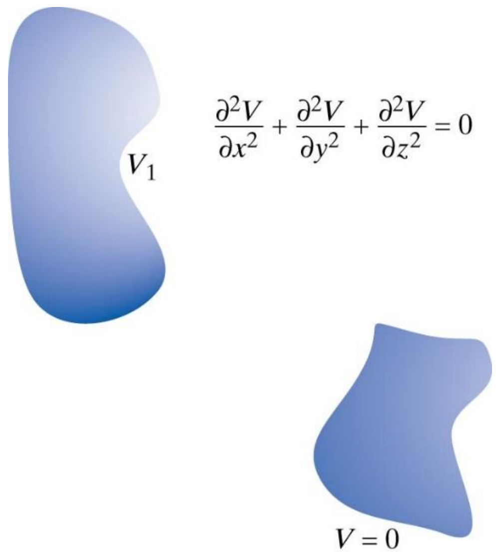
$$E_y = -\frac{\delta V}{\delta y}$$

$$E_z = -\frac{\delta V}{\delta z}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

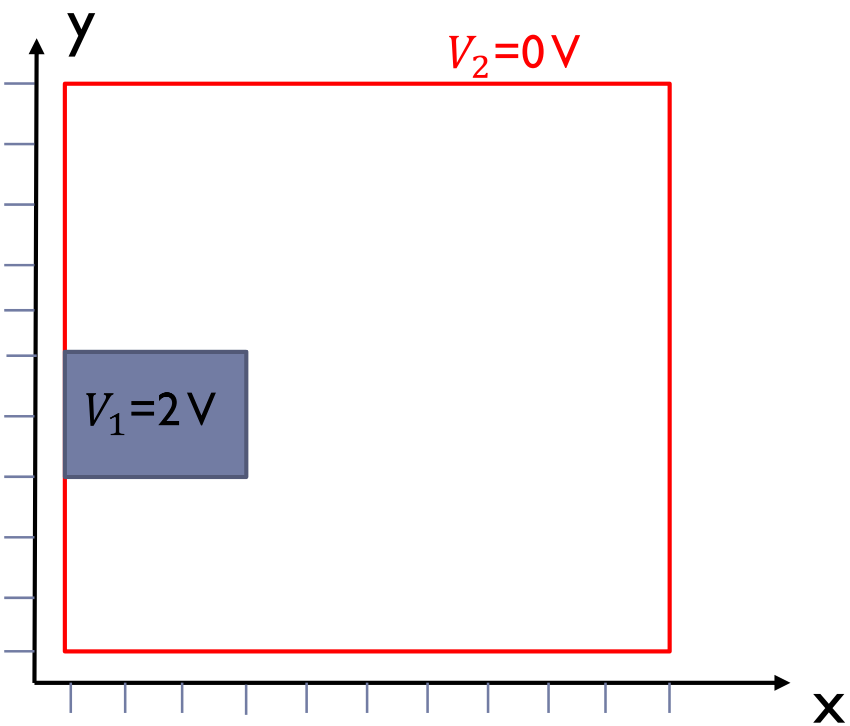
I ”tomma” rymden
(inga laddningar)
Laplace ekvation

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = 0$$



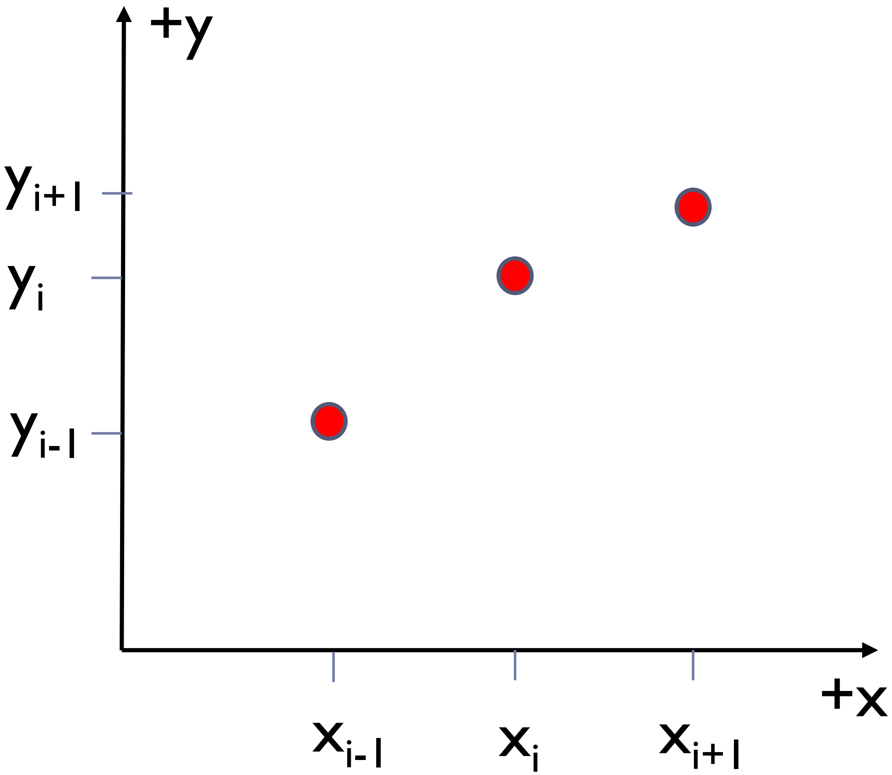
Uppgift

Planera en dator kod som itererar den elektriska potentialen för Laplace randvillkorsproblem (2 dim)



$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} = 0$$

Hemuppgift 1: Konstant $\Delta x = x_{i+1} - x_i$



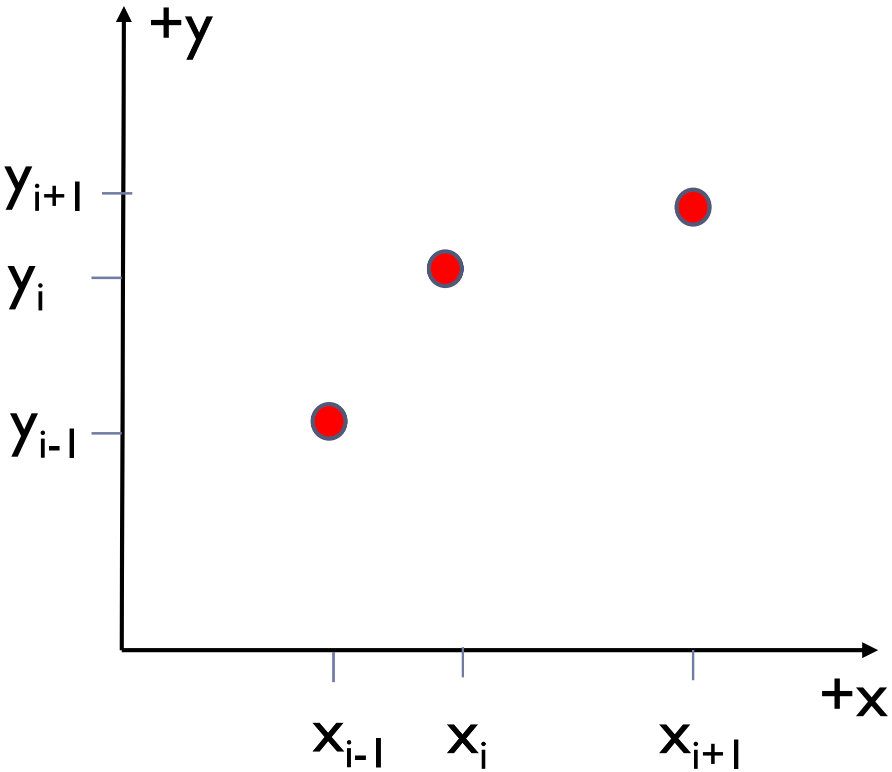
Den approximativa första derivatan av y som funktion av x, vid punkten x_i är:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x}$$

Vad är den approximativa andra derivatan av y som funktion av x, vid punkten x_i

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}(x_i) \approx f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, y_{i-1}, y_i, y_{i+1})?$$

Hemuppgift 2: Icke konstant Δx



Vad är den approximativa första derivatan av y som funktion av x, vid punkten x_i

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}(x_i) \approx f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, y_{i-1}, y_i, y_{i+1})?$$

Vad är den approximativa andra derivatan av y som funktion av x, vid punkten x_i

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}(x_i) \approx f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, y_{i-1}, y_i, y_{i+1})?$$

Lärandemål:

- Kunna matematiskt relatera det totala elfältet genom en sluten yta till totala laddningen inne i slutna ytans volym
- Kunna matematiskt relatera totala magnetiska fältet runt en sluten kurva till totala strömmen genom den slutna kurvan

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren