S3. Vågor och partiklar (Inte till tenten)

Kunskapsmål:

- Bestämma vågornas interferensminima och maxima från två eller flera ljuskällor
- Beräkna mekaniska vågors egenskaper
- Bestämma formen av stående vågor
- Se förbindelsen mellan ljusets våg- och partikelnatur

- Vågor interfererar med varandra. Denna superposition kan var konstruktiv eller destruktiv
- Ljus har både partikel och vågnatur
- Partiklar (ex. elektronen) har också både partikel och vågnatur

Ljus: vågor eller partiklar?

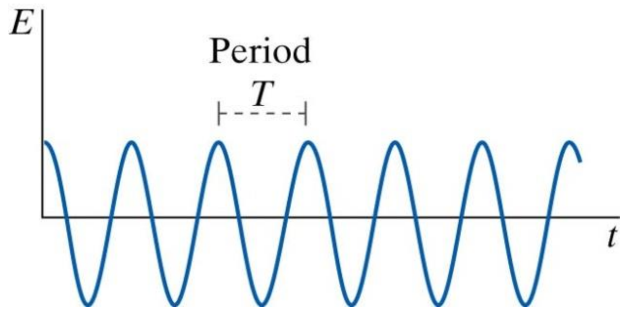
- Modellen av ljus som partiklar, fotoner, gör det möjligt att förklara fenomen som absorption och emission av ljus från t.ex. diatomiska molekyler.
- Vågmodellen behövs för att förklara fenomen såsom interferens, diffraktion, och reflektion.
- Till slut kommer vi att se att det finns fall där dessa två modeller ger olika resultat.

→ För att förstå ljus behöver vi en enhetlig modell som beskriver både våg- och partikelbeteende.

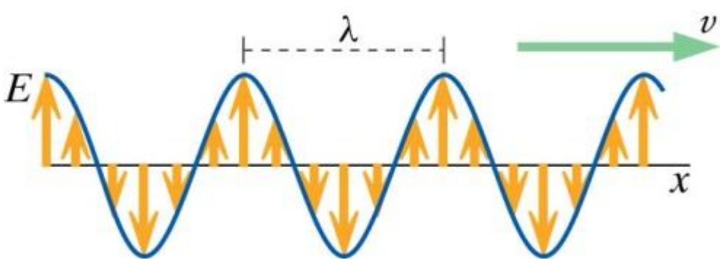
Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Variation i tid och rum

- Elektriska fältet i elektromagnetisk strålning varierar med tiden, då vi observerar den i en punkt i rymden.
  - Magnituden av $\vec{E}$ varierar enligt $E\cos(\frac{2\pi t}{T} = \omega t)$
  - Den tidsvarierande faktorn $(2\pi t/T)$ kallas vågens *fas*



- Likväl kan vi betrakta fältet i en stund i tiden, och ser då att den varierar som funktion av platsen.
  - Magnituden av $\vec{E}$ varierar enligt $E\cos(\frac{2\pi x}{\lambda} = kx)$



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

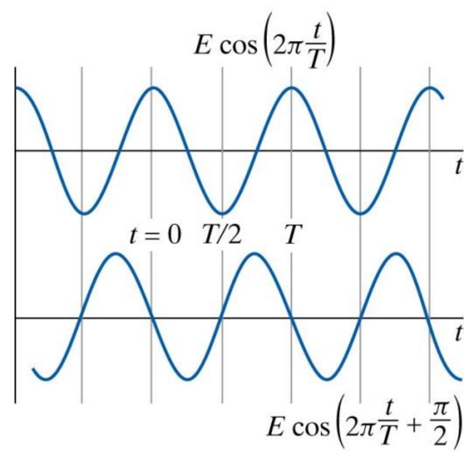
- Vi kan sammanslå dessa och uttrycka hela vågrörelsen med variationen både i tid och rum:

$$E\cos\left(2\pi\frac{t}{T}-2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$$

- **Obs.** minus tecknet! Detta beskriver en våg som rör sej till höger (i riktning av *x*-axeln).
- En våg som rör sej till vänster har formeln $E\cos(2\pi t/T+2\pi x/\lambda)$.

Fasförskjutning

- Beroende på hur vi definierar $t = 0$ eller $x = 0$ kan det hända att vågens funktionskurva inte beskrivs precis av $E\cos(2\pi t/T - 2\pi x/\lambda)$, eftersom den kanske inte har sitt maximum i origo.
- Vi kan då addera en konstant fasförskjutning ϕ och skriva $E\cos(2\pi t/T - 2\pi x/\lambda + \phi)$.
- ϕ kan ha vilket som helst värde mellan 0 och 2π.
- Då fasförskjutningen mellan två vågor är noll, säger vi att de är *i fas*. Annars är de *ur fas*. På bilden två vågor som är ur fas.

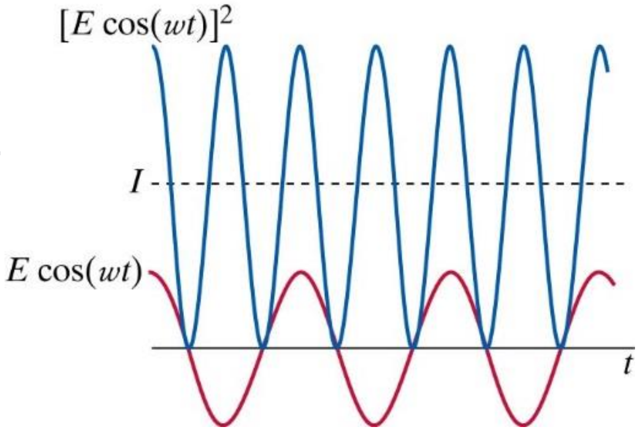


Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Intensiteten

- Vanligtvis mäter man *intensiteten I* (i watt/m^2) av strålningen, vilket är tidsmedeltalet av energiflödet.
- Vi såg tidigare att energiflödet i elektromagnetisk strålning är proportionell till kvadraten av elektriska fältet.
- Elektriska fältet ges av $E\cos(\omega t)$, så vid en given tid är energiflödet proportionellt till $(E\cos\omega t)^2$.
- Då vi tar medeltalet av detta över tiden, ser vi att energiflödet är proportionellt till E^2
  - $< (E\cos(\omega t))^2 > = < E^2 >< \cos^2\omega t >$
  - $\Rightarrow < \cos^2\omega t > = \frac{1}{2}$

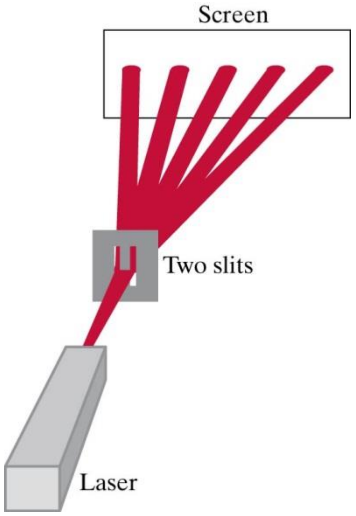
$\Rightarrow I \propto E^2$

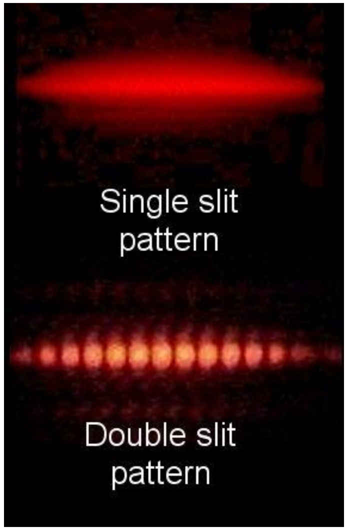


Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Interferens av två vågor

- Då vi lyser en laserstråle (koherent, monokromatiskt ljus) genom två smala spalter sida vid sida, ser vi ett mönster av ljuspunkter.
- Detta kan inte förklaras av partikel modellen av ljus, som skulle förutspå två ljusfläckar; en framför varje spalt.
- Vågmodellen förutspår både antalet punkter och deras avtagande intensitet utåt från mitten.
- Vi kan tänka oss de två spalterna som två skilda källor av EM strålning.



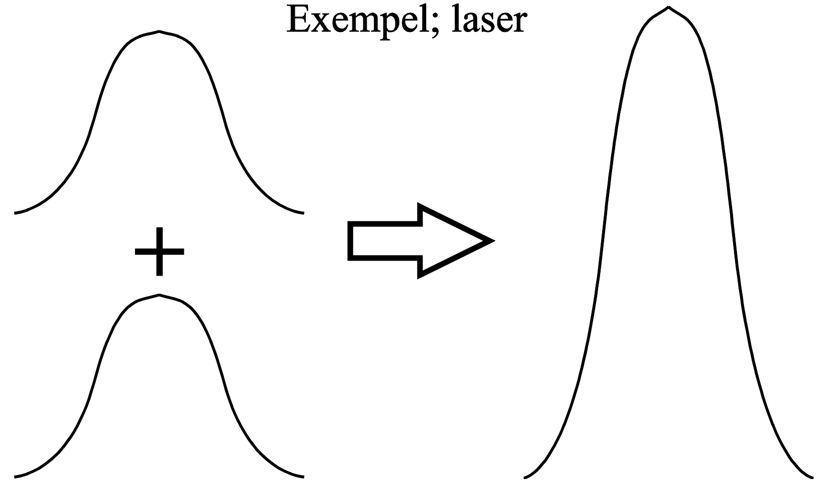


Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

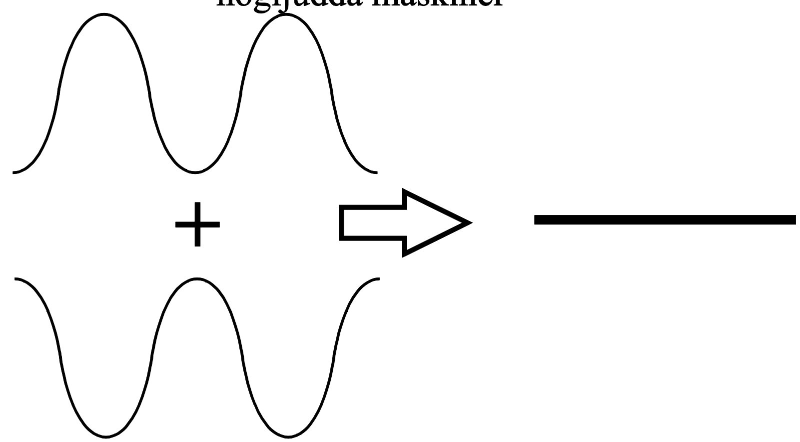
Superpositionsprincipen

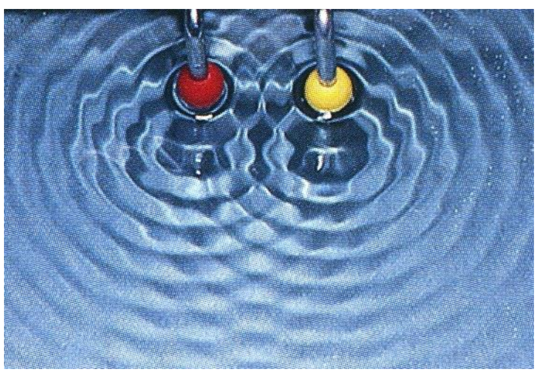
Ifall en störning producerας av flera vågor, blir totala störningen summan av de enskilda störningarna

Konstruktiv interferens
Exempel; laser



Destruktiv interferens
Exempel; motljud för högljudda maskiner

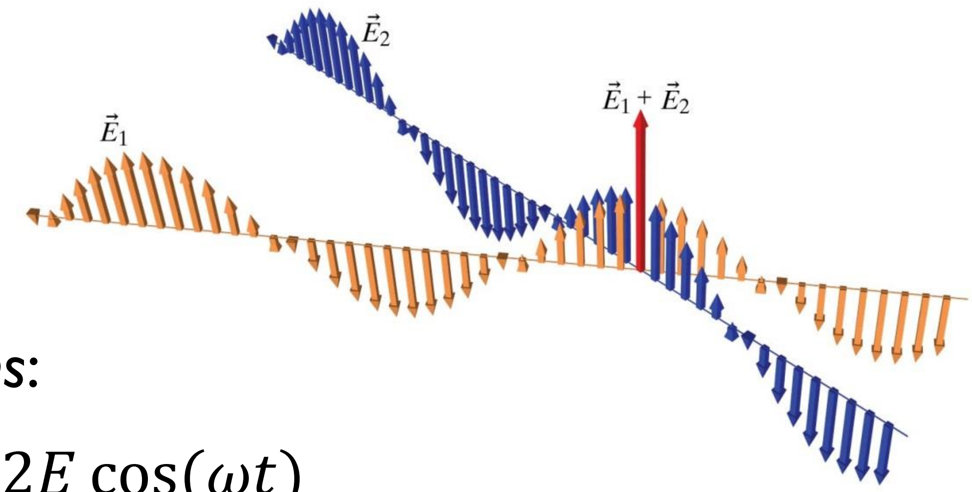




Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Konstruktiv interferens

- Betrakta två parallella radioantenner placerade nära varandra, med samma sändare.
- Båda emitterar strålning av formen $E\cos(\omega t)$, med samma amplitud E och vinkelfrekvens ω.
- Vågorna har samma frekvens och är därför monokromatiska, och eftersom de har samma fas är de också koherenta.
- Vid en given punkt i rymden är totala elfältet summan av de två skilda fälten.
- I punkten som illustreras på bilden är vågorna är i fas, och vi har *konstruktiv interferens*:



$$E\cos(\omega t) + E\cos(\omega t) = 2E\cos(\omega t)$$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

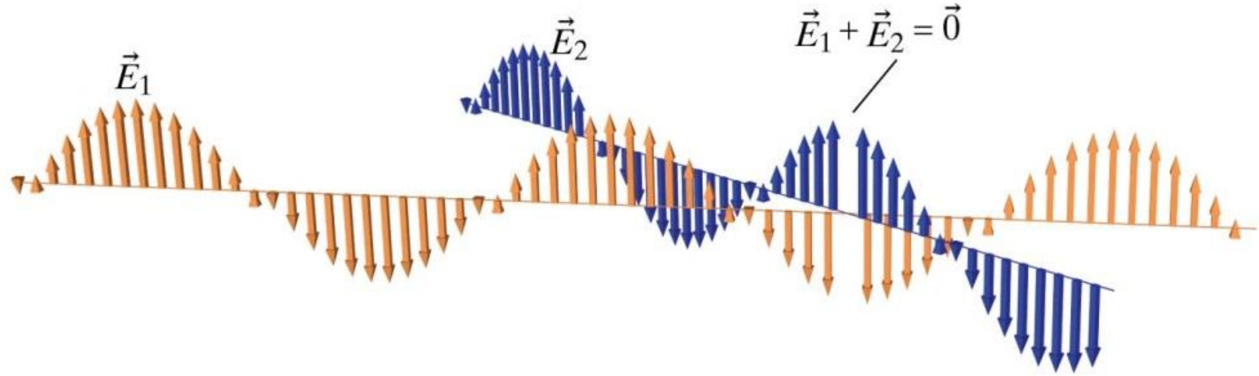
Energiflödet

- Amplituden i punkten med koherent interferens är dubbelt så stor som amplituden från bara en källa.
- Hur mycket större är då intensiteten?
  - 4 gånger större, eftersom $I \propto E^2$
- Hur är detta möjligt då två antenner utstrålar dubbelt så mycket energi som en?
  - Det måste då också finnas områden där intensiteten är mindre än från en antenn!

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Destruktiv interferens

- Vi betraktar igen samma två antenner som tidigare
- Vi väljer nu en punkt där strålningen från de två antennerna är ur fas med 180°.



- I den här punkten har ena vågen färdats $\lambda/2$ längre än den andra vågen.
- Eftersom de ursprungligen var i fas, har de nu en fasskillnad på 180°, eller π radianer.

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Energi distributionen

- I punkten där fasskillnaden är $180°$ är summan av strålningen lika med noll:

$$E\cos(\omega t) + E\cos(\omega t + \pi) = E\cos(\omega t) - E\cos(\omega t) = 0$$

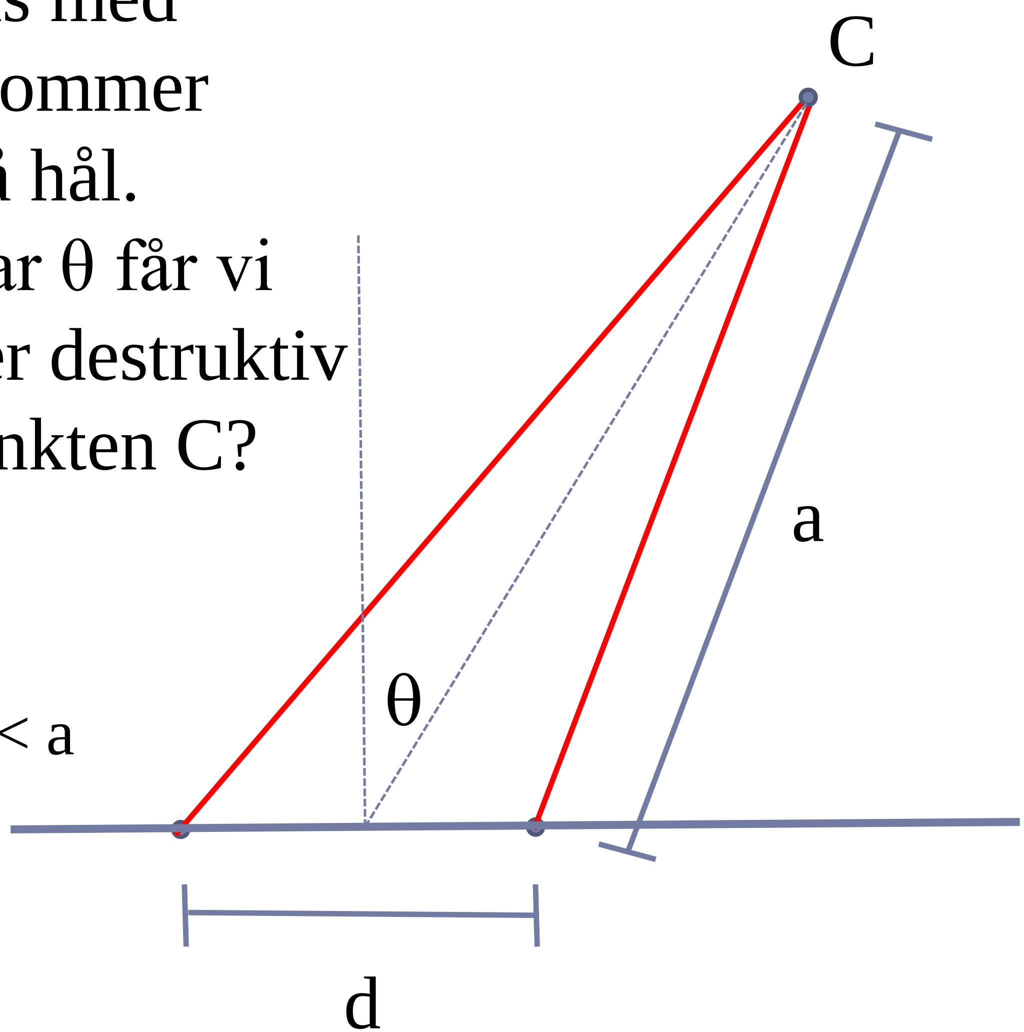
- Två sinusvågkällor orsakar ett komplicerat mönster av strålning i rummet. Ser man på medeltalet av intensiteten överallt är det dubbelt så mycket som från en källa, men det är ojämnt distribuerat i rummet, med hög intensitet på vissa ställen och låg eller t.o.m. noll intensitet på andra ställen.

Interferens maxima och minima

- Interferens maxima från två monokromatiska och koherenta källor hittas i punkter där skillnaden i sträckan som vågorna färdats är $0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda$, osv.
- Minima med noll amplitud och noll intensitet hittas i punkter där skillnaden i väglängd är $\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2$, osv.
- Kan vi hitta punkter med fullständig destruktiv interferens från två vågkällor med olika vinkelfrekvens ω_1 och ω_2?
  - Trots att dessa kan stundvis ta ut varandra fullständigt, kan det inte finnas nån punkt där amplituden *alltid* är noll, eftersom vågorna fullbordar en svängning i olika takt.

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

En EM-våg i fas med våglängden λ kommer igenom två små hål. För vilka vinklar θ får vi konstruktiv eller destruktiv interferens i punkten C?

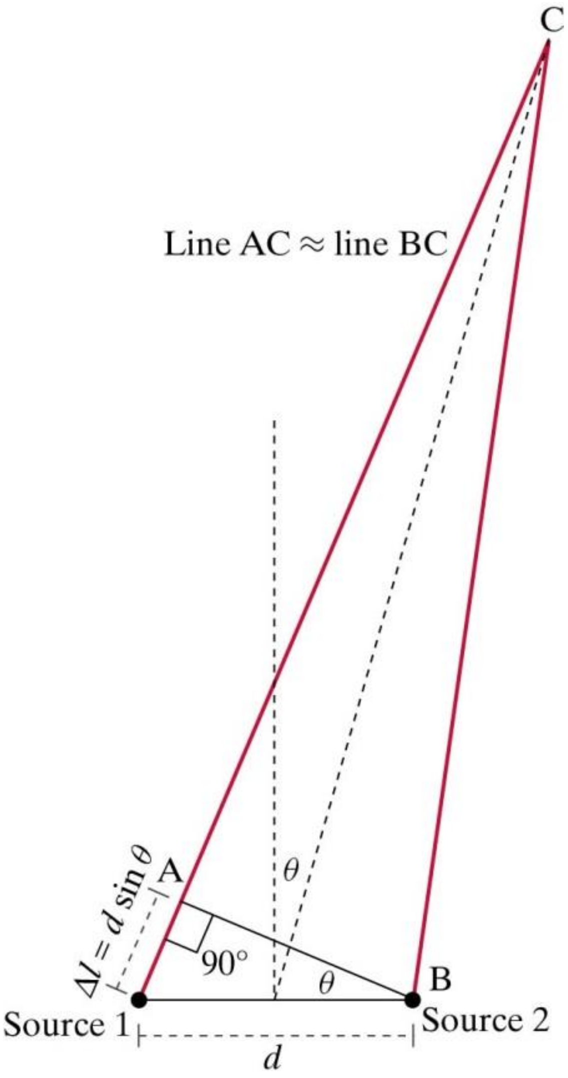


Observera att d << a

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Strålningsmönstret för två källor

- Vi kan nu beräkna var vi kan vänta oss maxima och minima i intensiteten från två källor (i fas med varandra).
- För maxima behöver vi räkna ut i vilka punkter vågorna har färdats lika långt, eller var deras färdlängd skiljer sej med hela våglängder (eller var fasskillnaden är multipler av 2π).
- För minima behöver vi hitta punkter där färdlängden skiljer sej med en halv våglängd (eller var fasskillnaden är udda multipler av π).



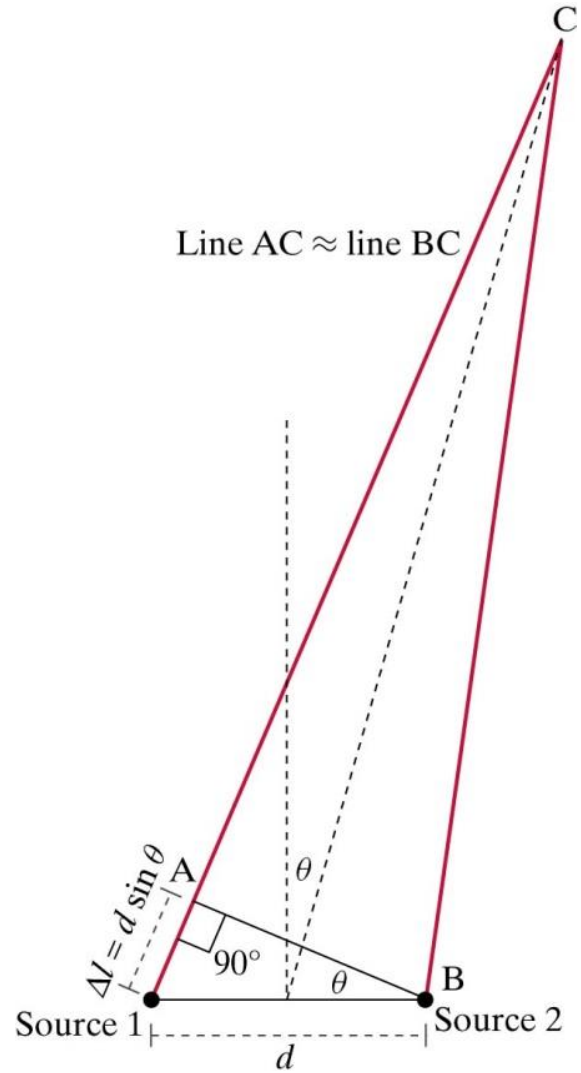
Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Skillnaden i färdlängd

- Om avståndet till skärmen (mätpunkten) är lång i jämförelse med avståndet mellan spalterna (källorna), kan vi göra approximationen att avståndet AC är nästan lika långt som BC (se bilden).
- Då ges skillnaden i väglängd till en mycket god approximation av:

$$\Delta l = d \sin\theta$$

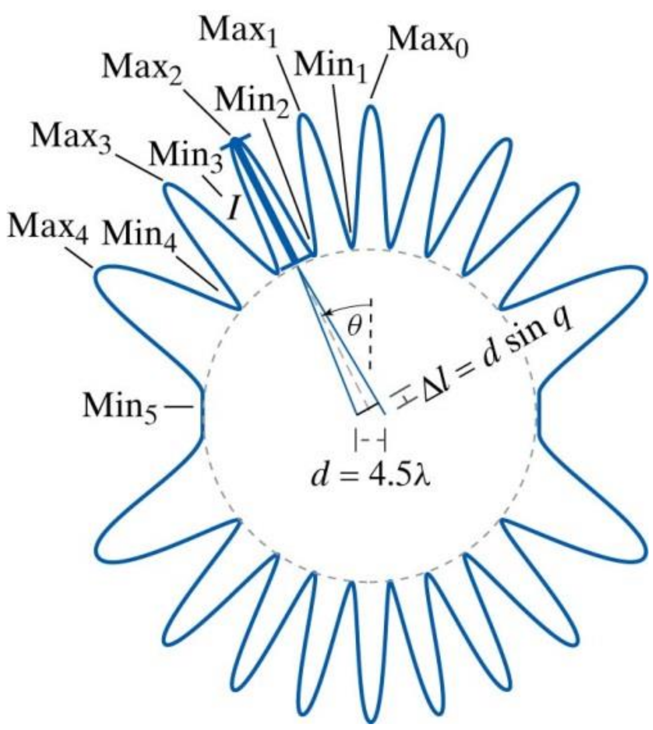
- Märk betydelsen av avståndet d mellan spalterna
  - Om $d < \lambda$ kan man se fullständig konstruktiv interferens endast vid $\theta = 0°$
  - Om $d < \lambda/2$ kan man aldrig få fullständig destruktiv interferens



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Intensitetens vinkelberoende

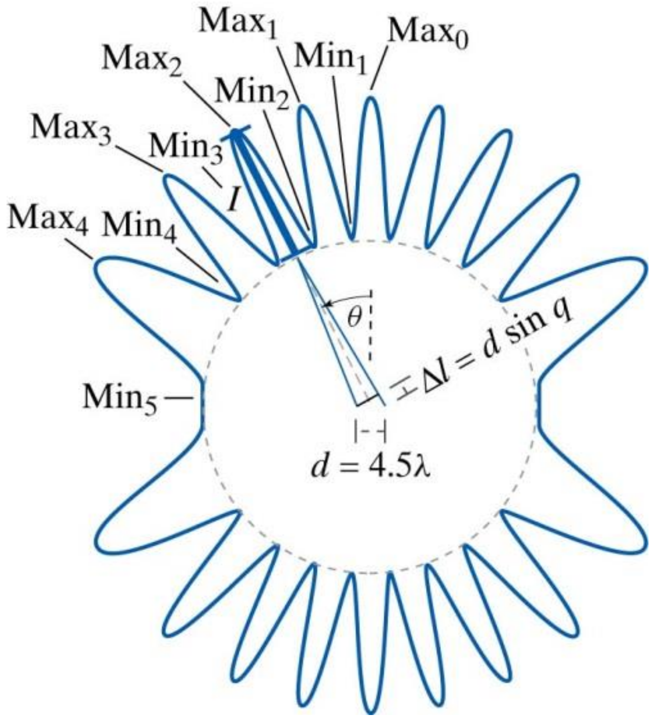
- Bilden visar intensiteten som funktion av vinkeln för två källor som ligger 4.5λ från varandra.
- Vi ser att intensiteten har ett maximum vid $\theta = 0°$ och minimum vid $\theta = 90°$. Varför?
  - Exakta värdet för intensiteten kan beräknas genom att addera två cosinus vågor med varierande fasförskjutning (t.ex. med ett datorprogram), men för oss räcker det oftast med att hitta maximum och minimum punkterna.



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Exempel

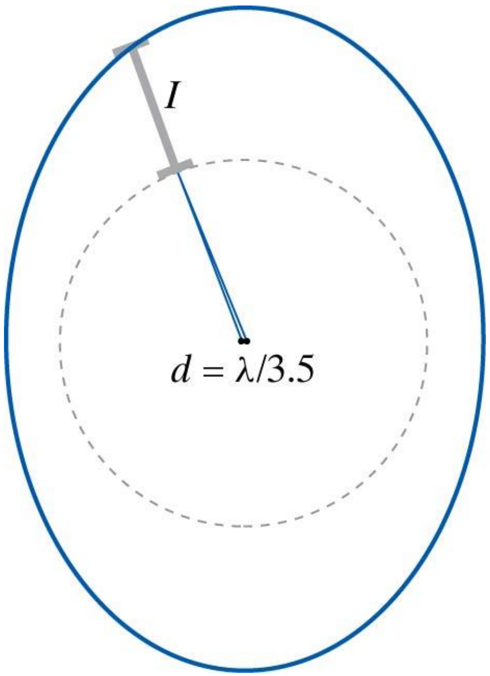
- Var hittar vi första minimum?
  - $d \sin\theta$ måste vara lika med en halv våglängd
  - $4.5\lambda \times \sin\theta = \lambda/2 \Rightarrow \sin\theta = 1/9$
  - $\theta \approx 6.4°$
- Var hittar vi fjärde maximum (Max_4 på bilden)?
  - $d \sin\theta = 4\lambda$
  - $\sin\theta = 4/4.5$
  - $\theta \approx 63°$



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Två källor nära varandra

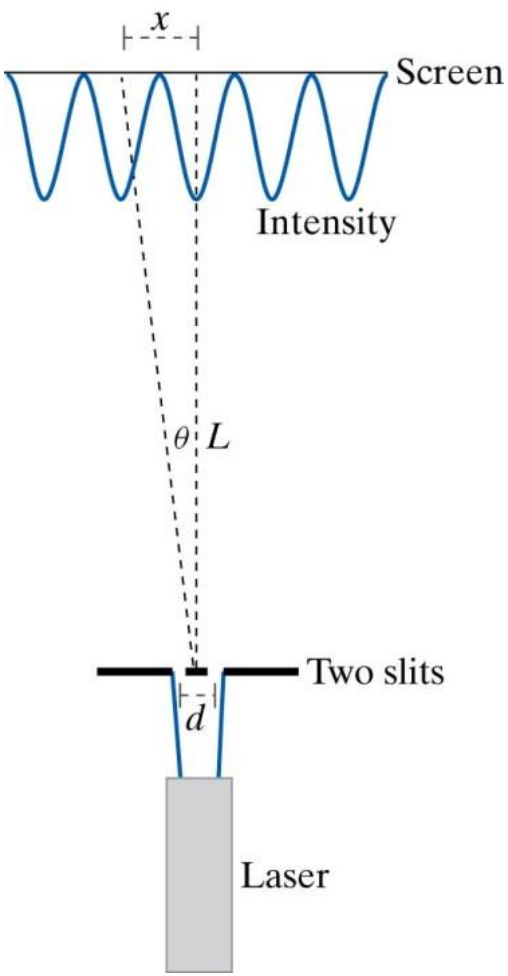
- Bilden visar situationen då två källor ligger på avståndet $d = \lambda/3.5$ från varandra.
- Varför går intensiteten inte till noll någonstans?



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Dubbelspaltsinterferens

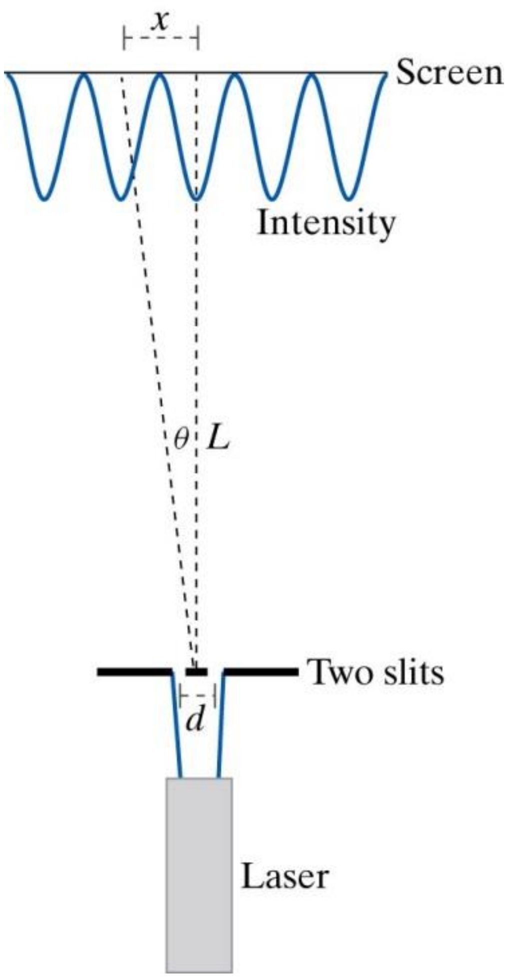
- Vi kan nu relatera avståndet mellan spalterna i dubbelspaltsexperimentet, läget för maximum och minimum intensitet, och strålningens våglängd, till varandra
- Låt oss säga att avståndet mellan spalterna är $d = 0.5\ mm$, avståndet från spalterna till skärmen är $L = 2\ m$ och från mitten av ett maximum till följande på duken är $x = 2.4\ mm$
- Vi kan nu beräkna ljusets våglängd



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

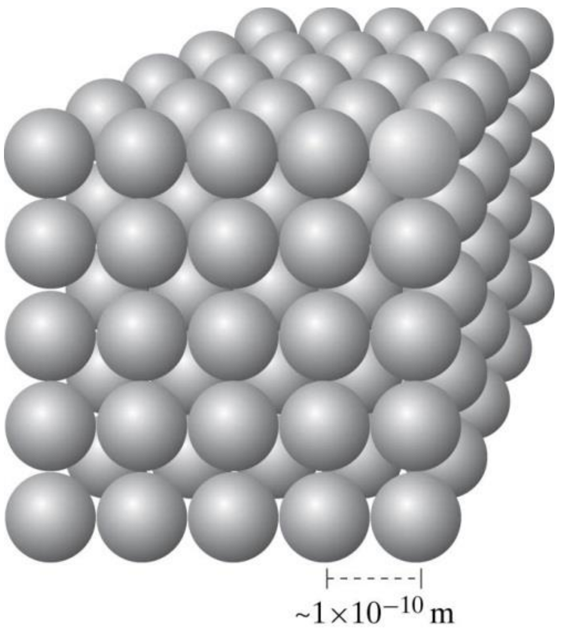
- Vid det andra maximum är $d \sin\theta = \lambda$, så $\sin\theta = \lambda/d$
- För små vinklar gäller att $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$, så $\lambda/d \approx x/L$.
- Vi har då:

$$\lambda = \frac{xd}{L} = \frac{(2.4 \times 10^{-3}\, m)(0.5 \times 10^{-3}\, m)}{2\, m}$$
$$= 6.00 \times 10^{-7}\, m = 600\, nm$$



Interferens från många källor

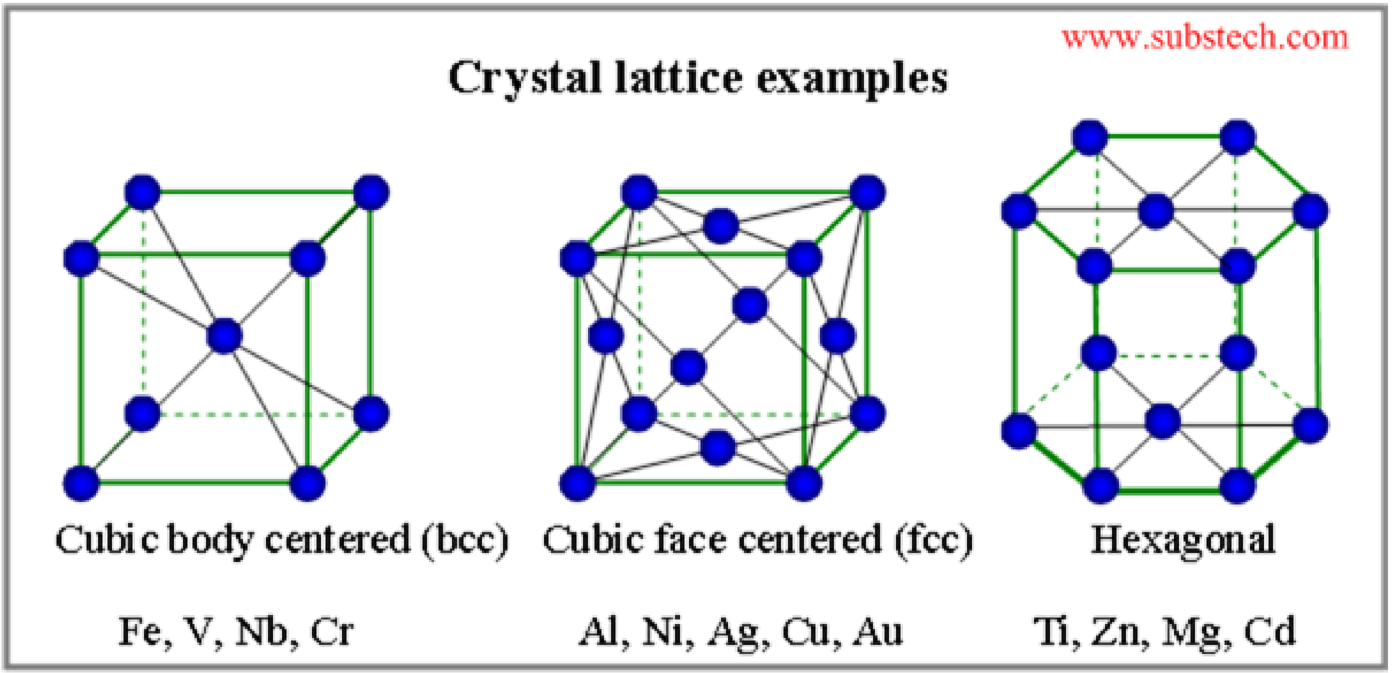
- Interferens från många källor kallas *diffraktion*. Detta sker bl.a. då strålning passerar t.ex. atomerna i ett kristallint material
- I en kristall är atomerna radade i precisa rader i tre dimensioner, detta kallas ett gitter
- Om vi bestrålar ett sådant material med monokromatisk röntgenstrålning kommer superpositionen av den re-emitterade strålningen från alla atomer att uppvisa interferens maximum och minimum precis som för dubbelspalten, dvs. det sker diffraktion
- Röntgenstrålning har våglängder som är jämförbara med gitteravstånden i kristaller, vilket krävs för att diffraktion skall uppstå



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Gitterstrukturer

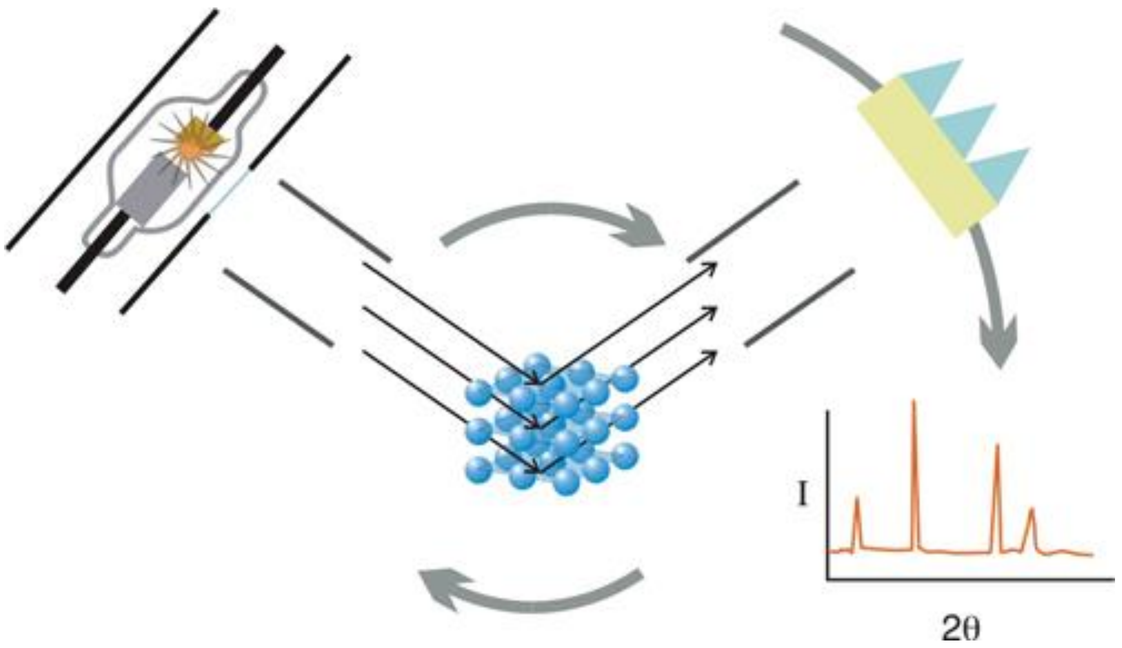
- Några exempel på enkla gitterstrukturer



källa: www.substech.com

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Röntgendiffraktion

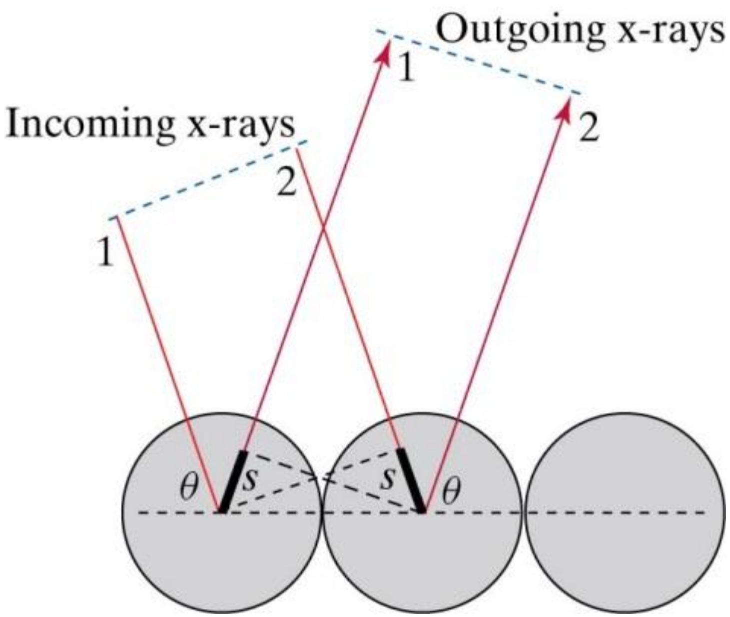


källa: ees2.geo.rpi.edu

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Principen för röntgendiffraktion

- Betrakta en monokromatisk stråle som träffar översta lagret av en enkel kristall



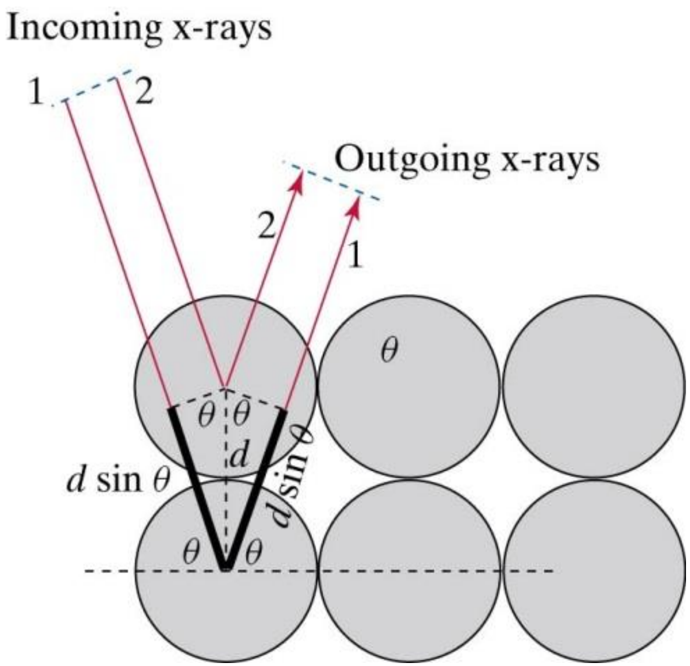
- Om strålen träffar i en vinkel θ, kommer man att observera konstruktiv interferens, och alltså maximum av intensiteten, i en vinkel som ser ut som vanlig reflektion, eftersom i den riktningen färdas strålarna lika långt
  - I det här fallet färdas stråle nr 1 en extra väglängd s på väg bort från kristallen, och stråle nr 2 färdas en extra väglängd s på väg in mot kristallen.
  - I andra riktningar skulle skillnaden i väglängd vara olikt noll

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Om vi betraktar följande atomlager, ser vi att vissa villkor behöver uppfyllas för att den re-emitterade strålningen skall vara i fas med den från det första lagret
  - I det här fallet färdas stråle nr 1 en extra väglängd $2d\sin\theta$.
  - Den här skillnaden i väglängd måste vara en multipel av våglängden för att strålningen skall vara i fas.
  - Vi har konstruktiv interferens om

$$2d\sin\theta = n\lambda$$

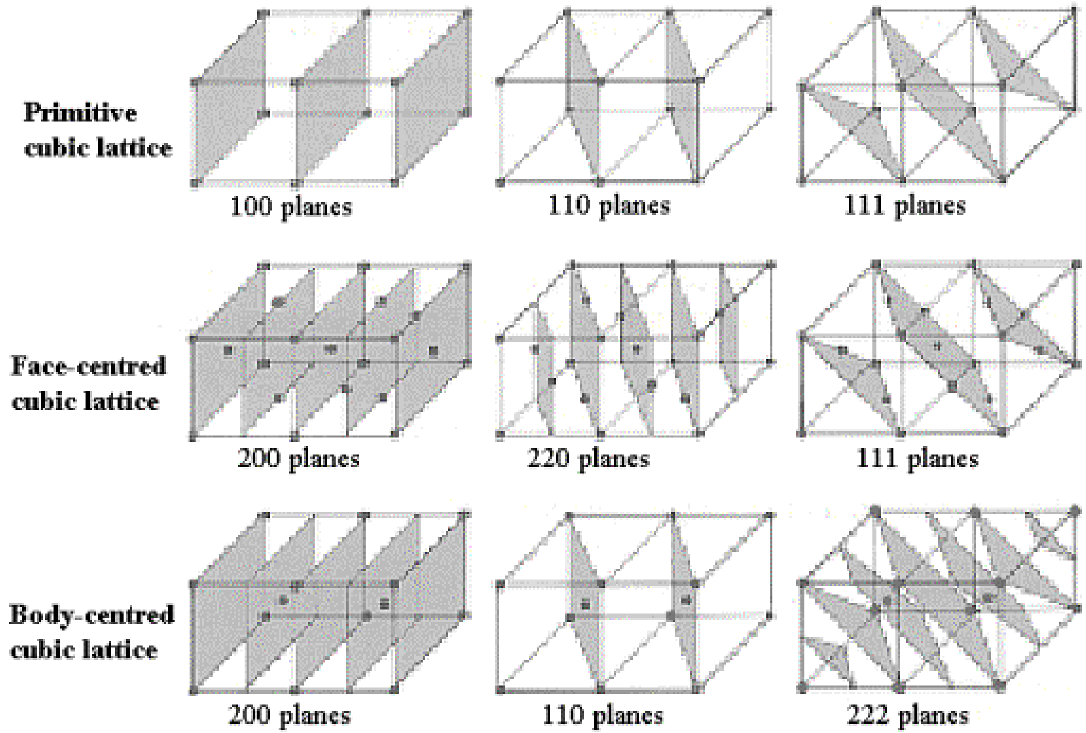
  där n är ett heltal.
  - **Märk** att man här har mätt θ från ytan, inte från normalen



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Gitterplan

- Det finns många olika plan, med olika avstånd d, i varje gitter

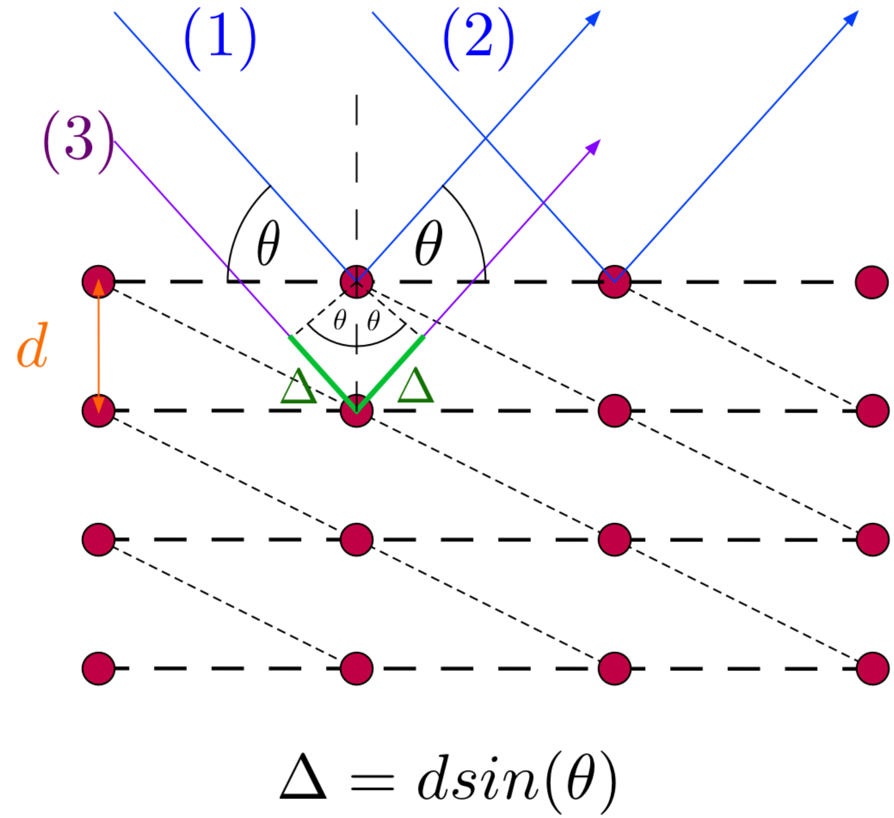


Miller indices for three types of cubic lattices.

källa: www.theochem.unito.it

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

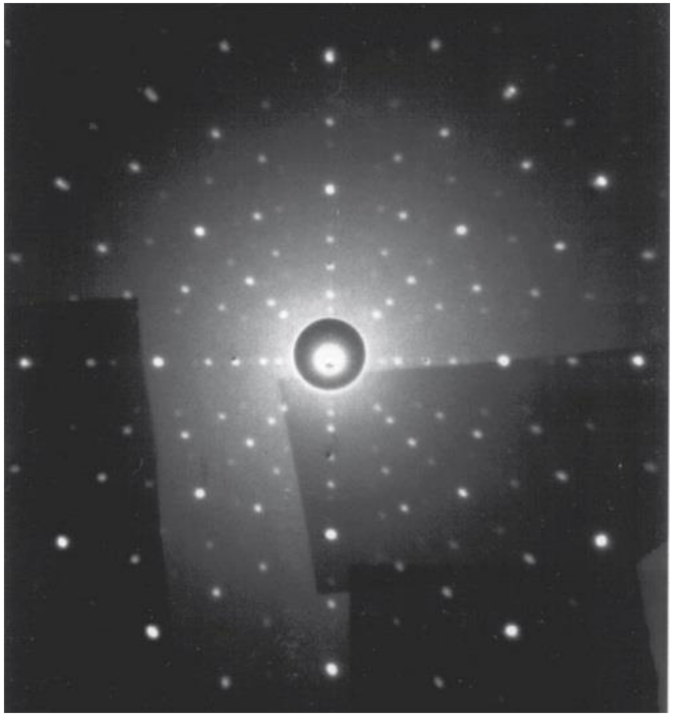
- Om strålningen från de två översta lagren är i fas, kommer den från hela resten av kristallen också att vara i fas, eftersom avståanden mellan lagren i kristallen är lika stora.
- De olika planen i kristallen kommer att orsaka konstruktiv interferens i olika riktningar



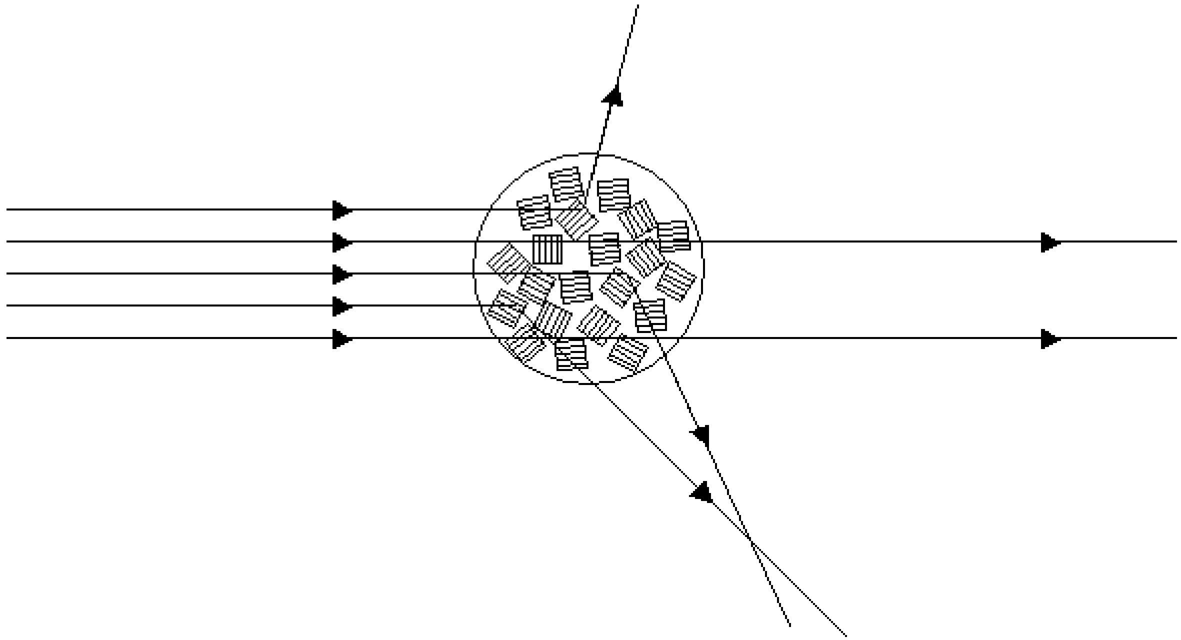
källa: wanda.fiu.edu

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Denna effekt kan användas för att bestämma avståndet d mellan lagren i en kristall
- Det uppstår ett alldeles särskillt diffraktionsmönster som är beroende av kristallstrukturen.
- Bilden visar diffraktionsmönstret från en wolfram kristall, som har bcc struktur



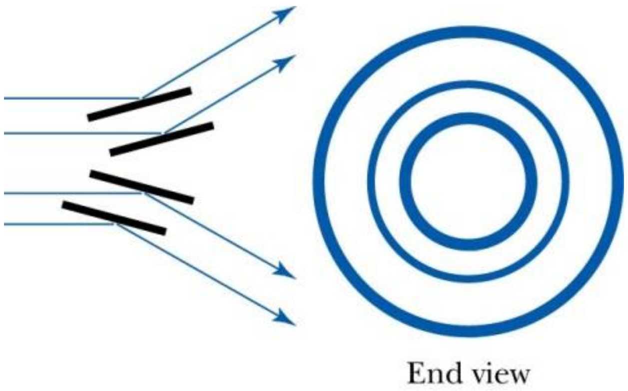
- Röntgen diffraktion kan också användas för att bestämma kristallstrukturen av polykristallina material och kristallina material i puderform (där de enskilda kristallerna är slumpmässigt orienterade)

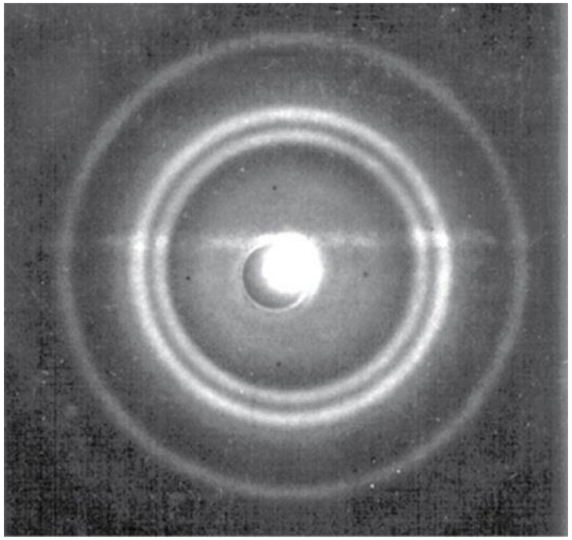


källa: www.ammrf.org.au

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- I sådant material kommer det att finnas kristaller som råkar vara orienterade så att $2d \sin\theta = n\lambda$ uppfylls, och dessa kommer att ge upphov till en ring med hög intensitet
- Bilden visar diffraktionsmönstret från polykristallint litiumfluorid.





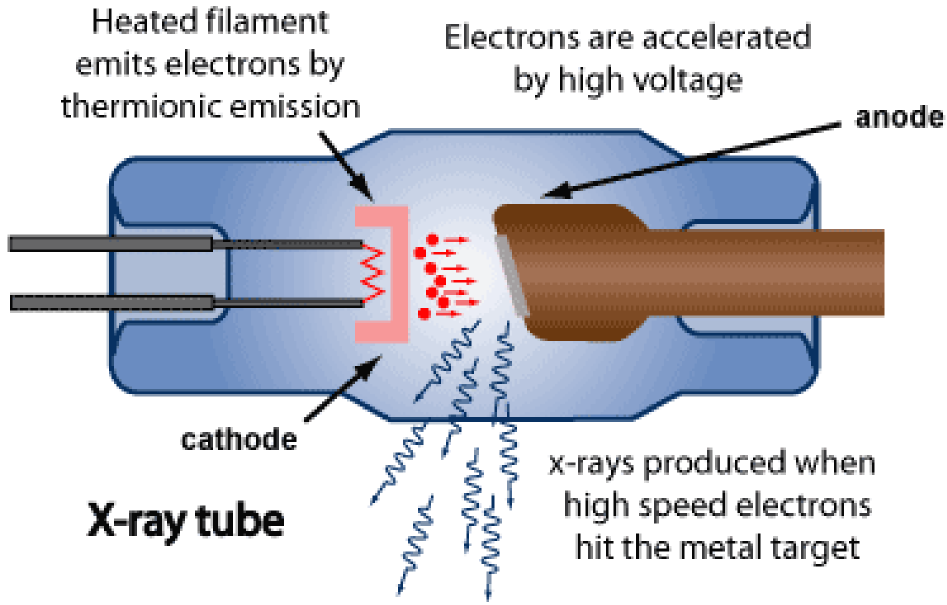
Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Diskussion

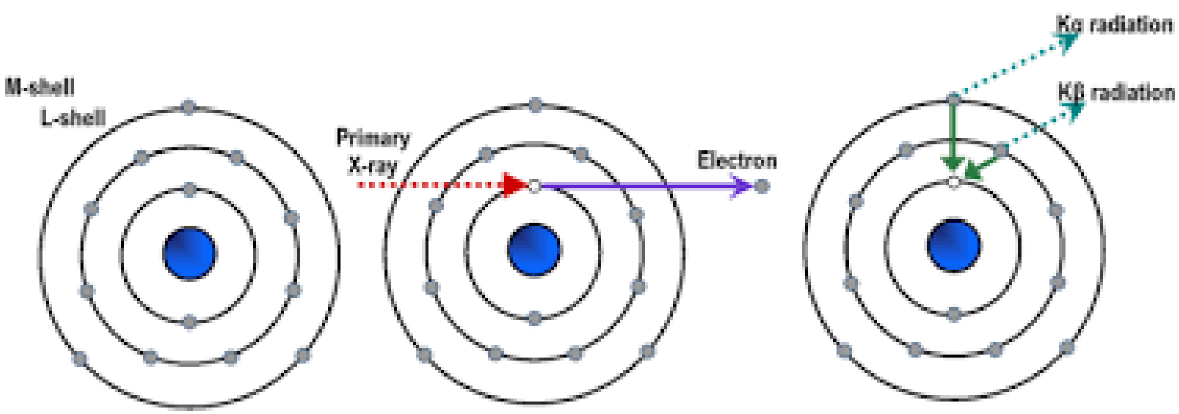
- Hur kan man producera röntgenstrålning?
- Tips: EM-strålningens energi är: $E = hf = hc/\lambda$
- Energi: E $(1\ J\ \sim 6.2x10^{18} eV)$
- Plancks konstant: $h \sim 6.6x10^{-34} Js$
- Ljusets hastighet: $c \sim 3.0x10^{8} m/s$
- Våglängd: $\lambda\ \sim 10^{-10} m$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

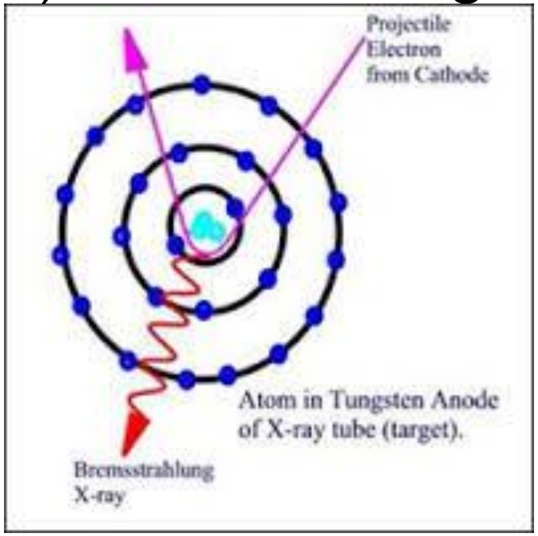
Röntgenrör



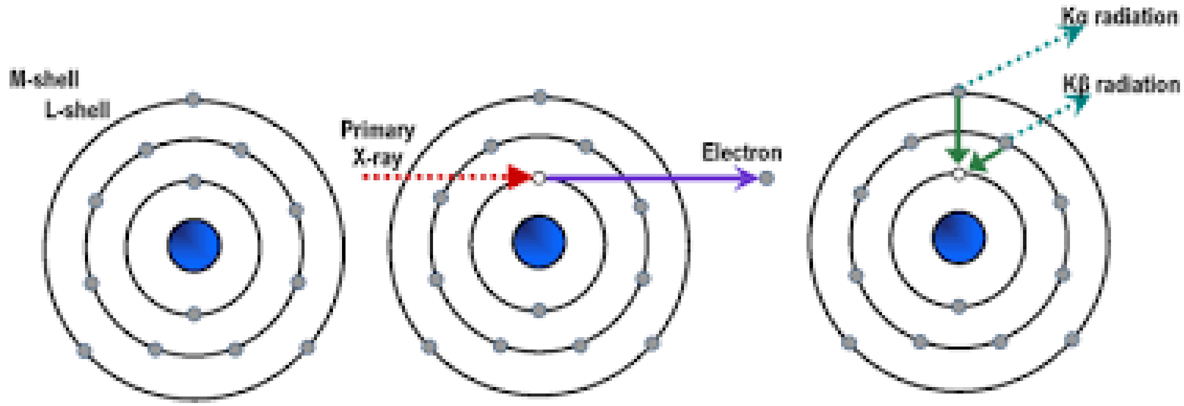
1) Karakteristisk röntgen strålning



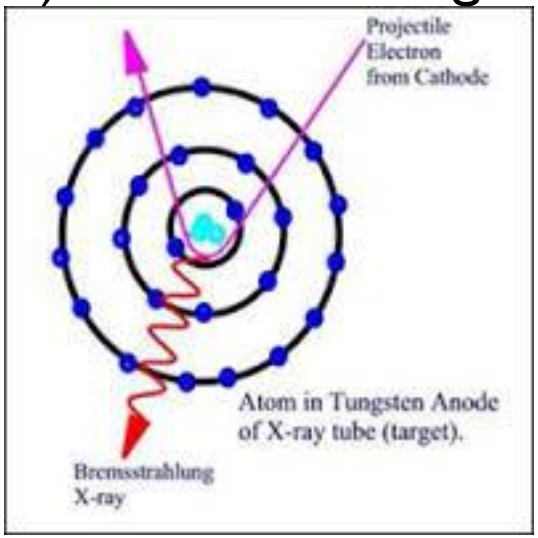
2) Bremsstrahlung



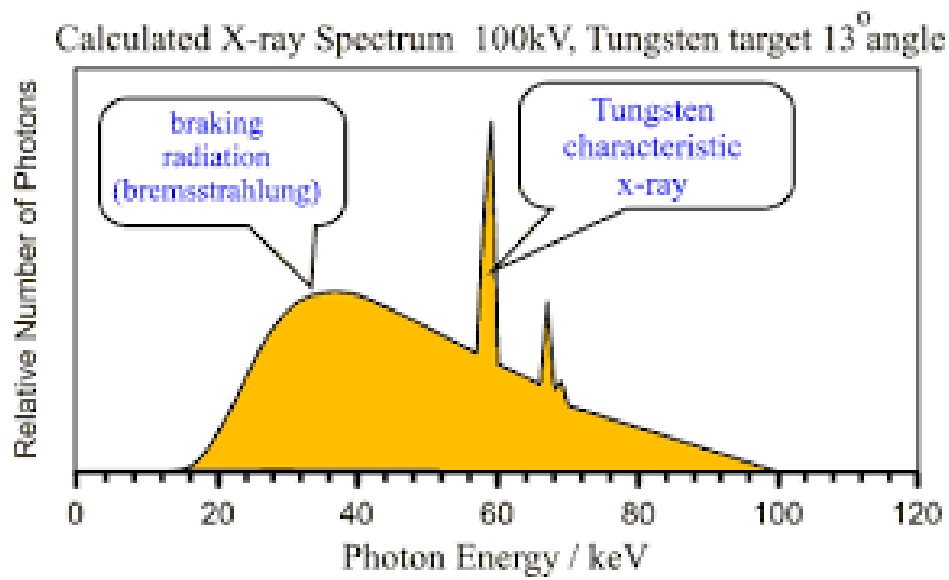
1) Karakteristisk röntgen strålning



2) Bremsstrahlung



Slutliga spektra är summan av materialets (som beskjuts av högenergetiska elektroner) karakteristiska och de högenergetiska elektronernas uppbromsnings strålning



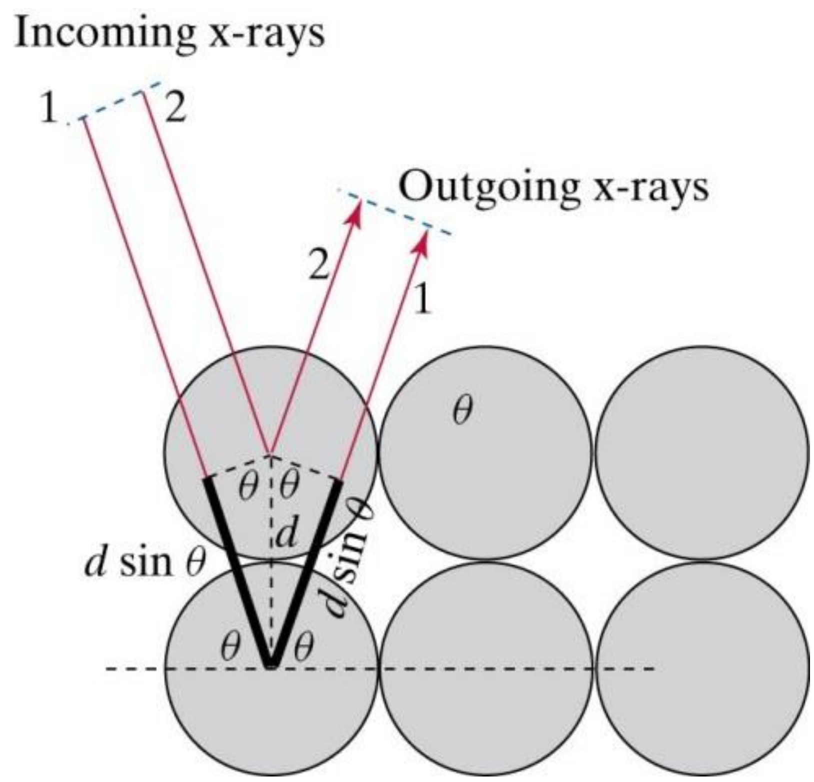
Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Hur kan man producera monokromatisk (alla fotoner har samma våglängd) röntgenstrålning?

  - Vi har konstruktiv interferens om

$$2d\sin\theta = n\lambda$$

där n är ett heltal.

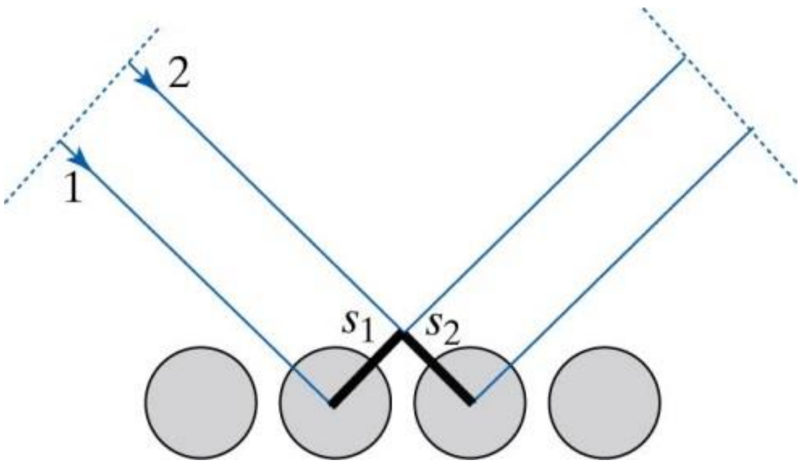


Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Vi kan använda diffraktion också för att producera monokromatisk strålning, ifall vi har en källa som ger strålning med många våglängder, och en kristall vars gitteravstånd d vi känner till
- Intensiteten för en viss våglängd λ kommer att förstärkas i en viss riktning θ, som uppfyller kravet $2d \sin\theta = \lambda$, medan de andra våglängderna inte kommer att uppvisa hög intensitet i den riktningen
- Denna monokromatiska strålning kan sedan användas för att bestämma strukturen av okända kristaller

Reflektion av synligt ljus

- Eftersom våglängden för synligt ljus är mycket större än gitteravståndet i kristaller, $\lambda \gg d$, gäller inte diffraktionsvillkoret $2d\sin\theta = n\lambda$
- Istället ser vi ett maximum bara i den riktning där väglängden för strålarna är lika
- Synlig ljus reflekteras alltså bara åt ett håll

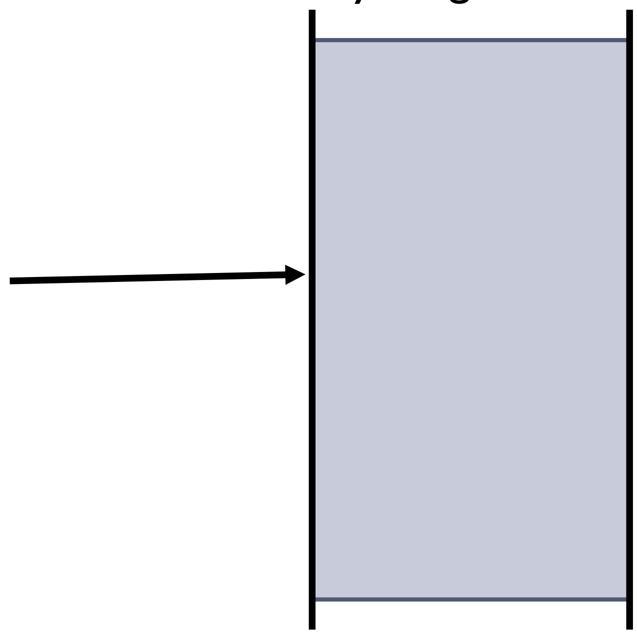


Diskussion

Tunn genomskinlig film med tjockleken $\lambda/2$

Brytningsindex *n*

Inkommande ljus med våglängden λ

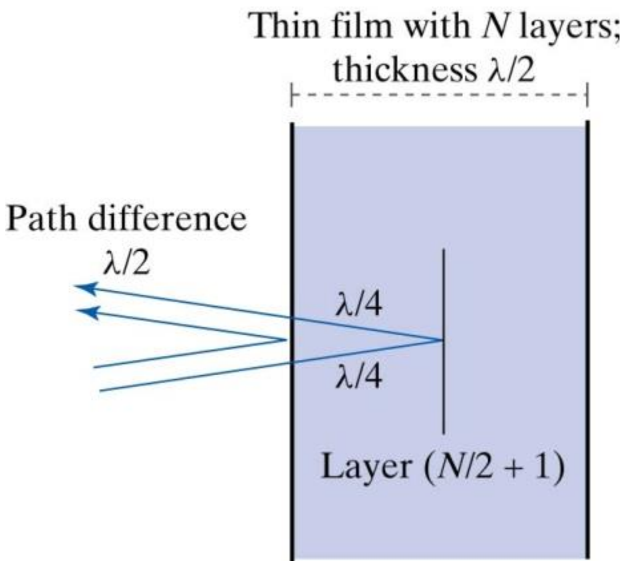


Vad händer?
Reflektion?
Brytning? Varför?

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

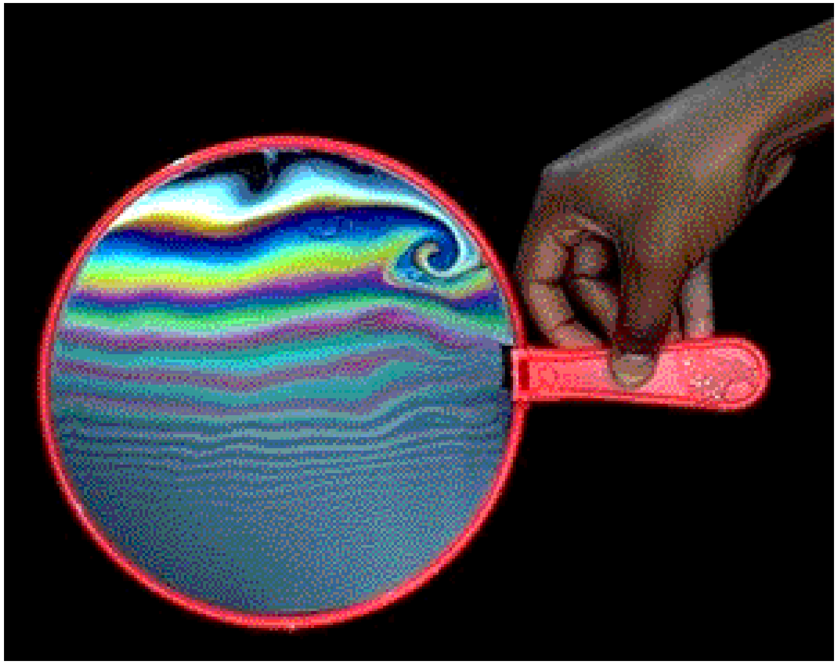
Reflektion från en tunn hinna (thin film)

- Det kan ske intressanta effekter från interferens då synligt ljus reflekteras från tunna skikt av genomskinligt material
- Anta att skiktet har en tjocklek på $\lambda/2$. (Detta verkar vara lite, men det är ändå frågan om flera tusen atomlager)
- Om vi parar ihop atomlagren från första hälften av skiktet med dem från andra hälften, ser vi att för varje par är skillnaden i väglängd $\lambda/2$, så det sker destruktiv interferens
- På samma sätt sker det konstruktiv interferens för tjocklekar av $\lambda/4$, $3\lambda/4$, osv



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Färgerna vi ser t.ex. på ytan av såpbubblor uppkommer just pga denna effekt
- Såphinnan har pga gravitationen olika tjocklek, den är tunnare uppåt och blir tjockare neråt
- Olika våglängds ljus reflekteras från de olika områden, så färgränder uppstår



källa: www.exploratorium.edu

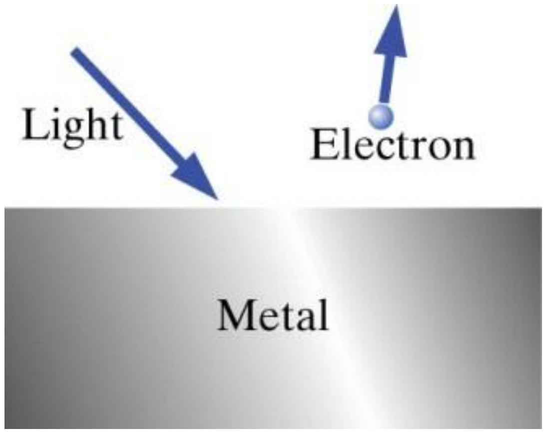
Brytningsindex

- Då man beräknar interferensen i en tunn hinna, är den relevanta våglängden den som ljuset har i mediet
- Som vi såg tidigare är detta kortare än i vakuum/luft
- Faktorn med vilken våglängden är förkortad gavs av brytningsindexet $n = c/v$
- I ett material med brytningsindex n är våglängden $\lambda' = \lambda/n$, där λ är våglängden i vakuum
- Frekvensen påverkas inte
- Detta gäller för synligt ljus i genomskinliga material, där en betydande del av strålningen kommer från atomerna som sätts i accelererad rörelse. Röntgen strålning påverkar inte atomerna lika mycket, och i det fallet består strålningen inne i materialet nästan helt av den ursprungliga inkommande strålningen

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Fotoelektriska effekten

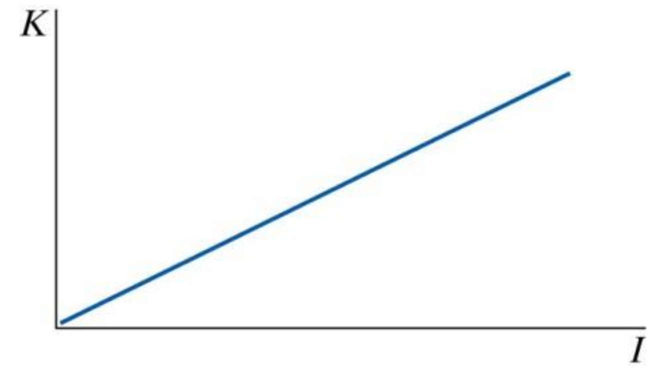
- De fria elektronerna i metaller är endast fria att röra sej inne i metallen – för att få ut dem krävs arbete.
- Dels måste det utföras arbete för att få elektronen flyttad till just utanför ytan, sedan krävs det mera arbete för att föra den negativt laddade elektronen bort från den (sedan) positivt laddade metallen.
- Arbetet som krävs för att skilja åt en elektron från metallen den är bunden i kallas *utträdesarbete*, eller på engelska "work function".
- Ett sätt att frigöra en elektron är med ljus, detta kallas *fotoelektriska effekten*.



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Våg modellen

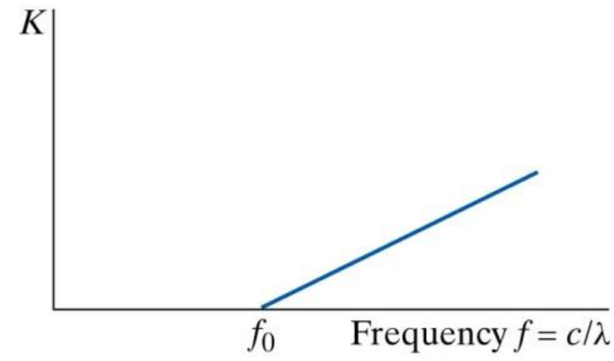
- Om en elektromagnetisk våg tillförde elektronerna energi, skulle det frigöras fler och fler elektroner i takt med att mer och mer energi tillfördes t.ex. av en värmelampa, som sänder ut ljus med låg frekvens
- Eftersom energin som vågen medför är proportionell till E^2, förutspår modellen att de frigjorda elektronernas kinetiska energi skulle vara beroende av strålningens *intensitet*
- Detta visar sej dock inte vara fallet, utan hur länge man än lyser med en värmelampa frigörs det inte elektroner



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Partikel modellen

- Experimentellt visade det sej att ljus av en tillräkligt hög *frekvens* $f \geq f_0$ behövs för att frigöra elektroner
- Med hög frekvens strålning kan man observera frigjorda elektroner redan vid mycket låg intensitet
- Detta kan förklaras av partikel modellen, som säger att ljus transporterar sin energi i diskreta paket, så kallade *kvanta*
- Fotoelektriska effekten är alltså en kvanteffekt, som inte kan beskrivas klassiskt



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Fotonen

- Partikel modellen lyckas förklara fotoelektriska effekten, men det visar sej att också *våglängden* av strålningen är viktig
- Fotonen är en partikel med *både* energi och våglängd
- Fotoelektriska effekten visar att fotonens energi är proportionell till dess frekvens (och alltså invers proportionell till våglängden):

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

  där $h = 6.6 \times 10^{-34}\ Js$ är *Planks konstant*
- För ljus av tillräckligt hög frekvens är antalet frigjorda elektroner proportionell till intensiteten, så strålningens intensitet måste vara proportionell till antalet fotoner per sekund som når ytan

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Tillämpandet av modellen

- Om utträdesarbetet som krävs för att frigöra en elektron från en viss metall är, säg, $W = 3$ eV, så måste fotonen som frigör den ha minst energin 3 eV
- Våglängden för en foton med energin 3 eV är

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(6.6 \times 10^{-34}\, Js)(3 \times 10^{8}\, m/s)}{(3\, eV)(1.6 \times 10^{-19}\, J/eV)} = 412\, nm$$

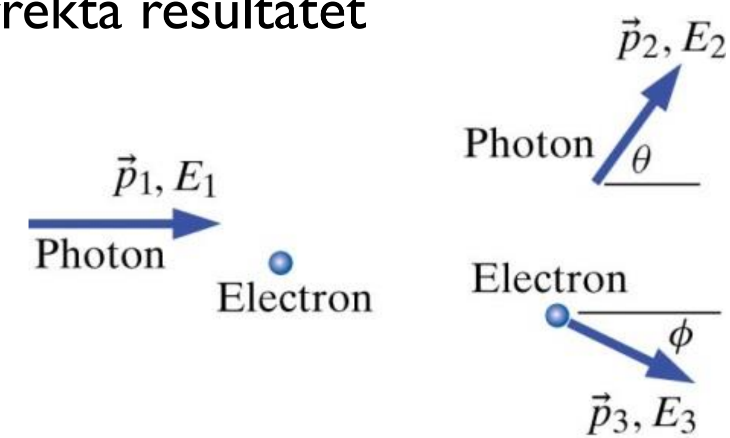
- Detta är nära ultravioletta området av spektret. Ljus med längre våglängder (lägre frekvens och alltså mindre energi), som synligt ljus, kan inte frigöra elektroner från en metall med $W = 3$ eV

- Vad händer om vi utsätter denna metall för ljus vars fotoner har energin 4 eV?
  - Eftersom 3 eV går åt till att frigöra elektronen, kommer den återstående energin att förvandlas till elektronens kinetiska energi.
  - Den frigjorda elektronen kan alltså då ha en maximum kinetisk energi på 1 eV.
- Experiment har verifierat denna partikel modell för fotoelektriska effekten.

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Comptonspridning

- Comptonspridning avser spridning av en foton mot en elektron, där fotonen förlorar energi (men upphör inte att existera)
- Om elektronen får kinetisk energi, måste fotonen ha förlorat motsvarande mängd energi
- I den klassiska vågmodellen skulle minskad energi innebära en lägre amplitud men samma frekvens
- I våg-partikel modellen innebär lägre energi att fotonen får längre våglängd (och därmed lägre frekvens), eftersom $E = hc/\lambda$
- Fysikern Arthur Compton visade experimentellt att våg-partikel modellen ger korrekta resultatet



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

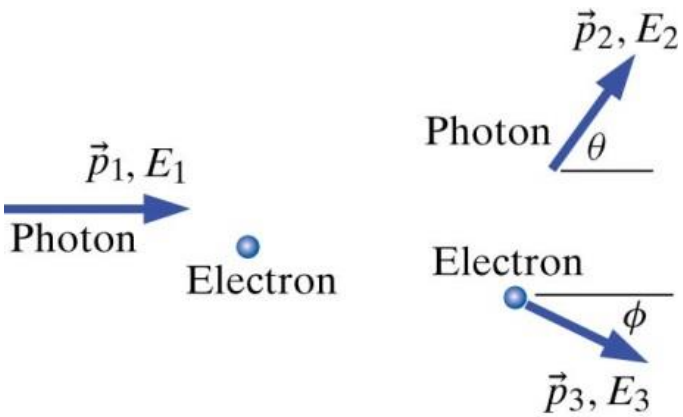
Relativistiska formlerna

- Kollisioner som involverar fotoner måste behandlas med relativistiska formler, eftersom fotonen har rörelsemängd men ingen massa
- Relativistiska formeln för sambandet mellan energi och rörelsemängd är:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

- Då fotonen saknar massa reduceras detta till $E = pc$
- Vi använder denna formel samt principerna av bevarande av energi och rörelsemängd

- Vi kan beräkna förändringen i fotonens våglängd enligt följande:
  - Energin och rörelsemängden före och efter kollisionen måste vara lika



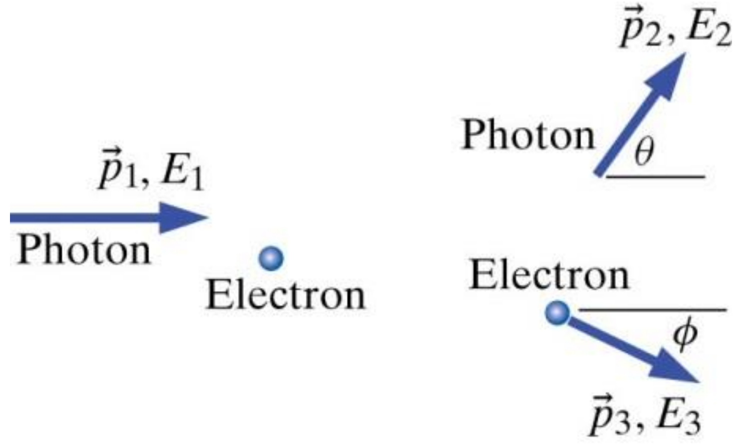
$$E_1 + m_e c^2 = E_2 + E_3 \qquad (1)$$
$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \qquad (2)$$

- Vi löser först ut E_3 och p_3 från ekv. (1) och (2)

$$E_3 = E_1 - E_2 + m_e c^2 \qquad (3)$$
$$\vec{p}_3 = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$$
$$\vec{p}_3 \cdot \vec{p}_3 = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$$
$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos\theta \qquad (4)$$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Sedan kan vi med hjälp av relativistiska sambandet använda (3) för att eliminera p_3 från (4). Först förlänger vi (4) med c^2, och använder sedan $(pc)^2 = E^2 - (mc^2)^2$



$$(p_3c)^2 = (p_1c)^2 + (p_2c)^2 - 2(p_1c)(p_2c)\cos\theta$$

$$E_3^2 - (m_ec^2)^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\theta$$

$$(E_1 - E_2 + m_ec^2)^2 - (m_ec^2)^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\theta$$

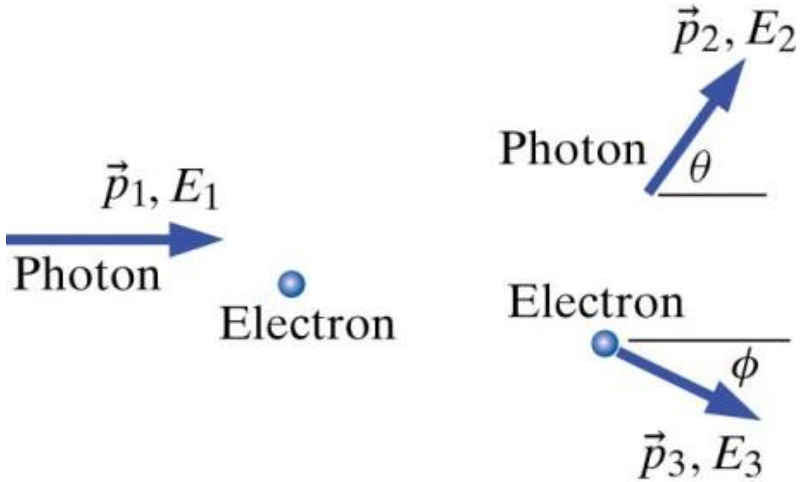
Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Förenkling och insättning av relationen för våg-partikel modellen, $E = \frac{hc}{\lambda}$, ger förändringen i våglängden som funktion av spridningsvinkeln:

$$mc^2\left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1}\right) = (1 - \cos\theta)$$

$$mc^2\left(\frac{\lambda_2}{hc} - \frac{\lambda_1}{hc}\right) = (1 - \cos\theta)$$

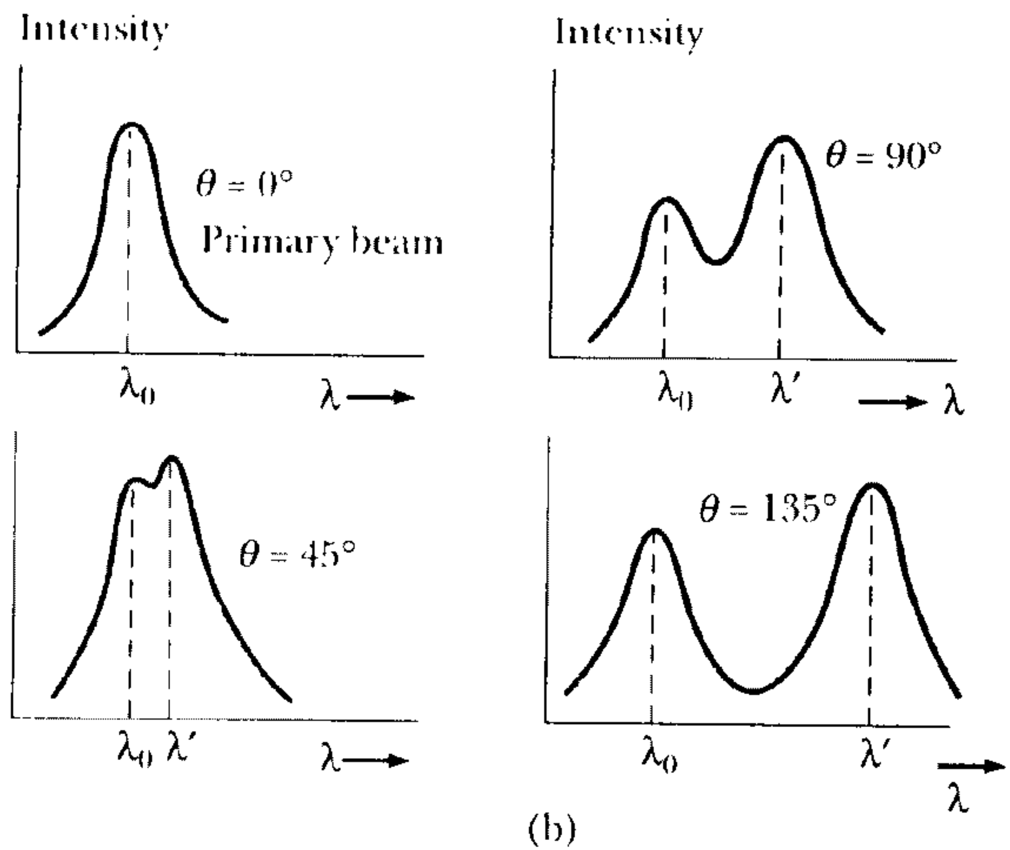
$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$



Compton våglängden

- Termen $\frac{h}{m_e c} = 2.4 \times 10^{-12}\ m$ kallas Compton våglängden för elektronen.
- För att få en vettig mätning av förändringen i våglängden bör strålning med våglängd av samma storleksordning användas, m.a.o. röntgen strålning.
- Man behöver inkommande strålning med endast en våglängd (monokromatisk).
  - Hur kunde man åstadkomma monokromatisk röntgenstrålning?
  - Hur kunde man mäta utkommande strålningens våglängd?

- Vi ser att skillnaden i våglängden för fotonerna beror bara på vinkeln θ, och inte på materialet eller den inkommande fotonens våglängd
- Då Compton gjorde sina experiment mätte han dock också fotoner med oförändrad våglängd



källa: http://faculty.gvsu.edu

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Det visar sej att fotoner som sprids med oförändrad våglängd inte ger upphov till spridning av en elektron
- Fotonen har spritts från hela atomen, inte bara från elektronen!
- Samma formel gäller i alla fall:

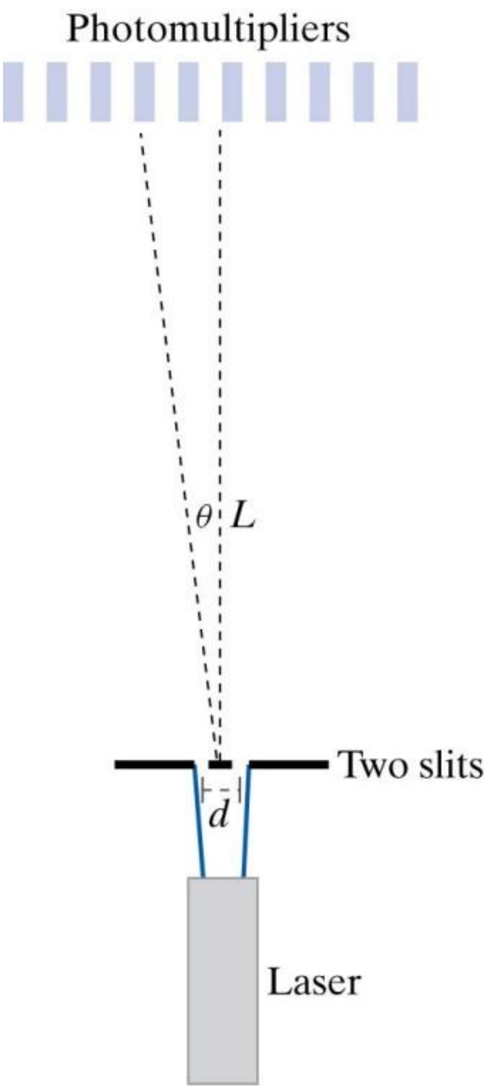
$$\lambda_f - \lambda_i = \lambda_C(1 - \cos\theta)$$

- Men nu är λ_C Compton våglängden för hela atomen, som kan vara 10000 gånger mindre än för elektronen

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Dubbelspaltsexperimentet

- Vi betraktar igen dubbelspaltsexperimentet, men nu använder vi ljus av så låg intensitet att det bara kommer enstaka fotoner åt gången
- Detta ljus är för svagt för att se med blotta ögat, men man kan använda fotomultiplikatorer, som är tillräkligt känsliga för att detektera enstaka fotoner
  - Detektorerna baserar sej på fotoelektriska effekten
  - Den frigjorda elektronens ”ström” kan förstärkas så att den blir mätbar



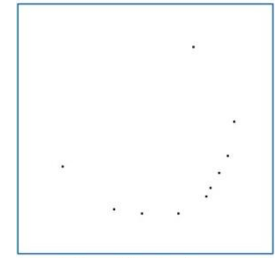
Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Också då vi låter **enstaka fotoner** gå igenom dubbelspalten, ser vi ett **interferens mönster!**
- Skillnaden är att detta mönster uppkommer med tiden, då fler och fler fotoner träffar
  - Den enskilda fotonen träffar en bestämd detektor, men de träffar oftare detektorerna som ligger vid interferens maxima, och träffar aldrig detektorer som ligger vid interferens minima.
- Bilden visar antalet fotoner som träffar en detektor som funktion av vinkeln där detektorn ligger

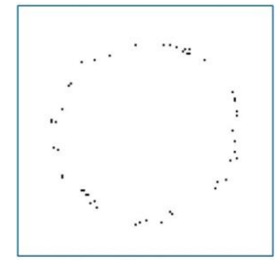
Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Elektrondiffraktion

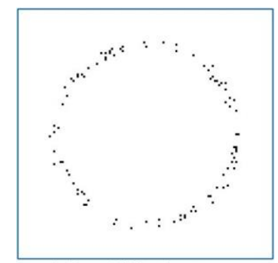
- Vi undersökte tidigare diffraktion av röntgenstrålning, där strålningen förstärks i de riktningar för vilka $2d \sin \theta = n\lambda$ gäller. Detta är i högsta grad ett vågfenomen.
- Vi skulle vänta oss ett annorlunda beteende för partiklar.
- Vad händer då om vi skjuter elektroner mot en kristall?
  - Som för fotoner kommer vi att se ett diffraktionsmönster!
  - Även då vi skjuter en elektron i taget, kommer ett diffraktionsmönster så småningom att byggas upp.
- Också elektroner uppvisar både partikel och våg beteende!



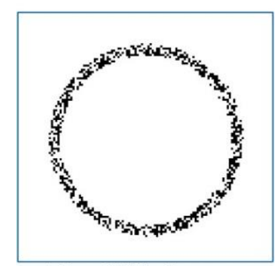
After 10 electrons



After 50 electrons



After 100 electrons



After 1000 electrons

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- För elektron diffraktion gäller samma formel som tidigare: man ser konstruktiv interferens då $2d \sin\theta = n\lambda$
- Våglängden för elektronen kallas för de Broglie våglängden, och förutspåddes teoretiskt av de Broglie, och visades experimentellt av Davisson och Germer, att ges av formeln

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

där $h = 6.6 \times 10^{-34}\, Js$ är Plancks konstant.

- Eftersom för fotonen gäller att $E = pc$, ser vi att denna formel stämmer också för fotoner:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{h}{p}$$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Andra partiklar

- Det är inte bara elektroner som uppvisar våg egenskaper. Man har kunnat observera diffraktion t.o.m. från hela helium atomer som skjutits mot en kristall!
- Helium atomens våglängd ges av samma formel som för elektronen:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

- Neutroner uppvisar också diffraktionsmönster, och är ett intressant fall eftersom neutronen knappt påverkas av elektronerna i materialet, men däremot starkt av kärnan. Detta påverkar intensiteten i diffraktionsmönstret.
  - man kan t.ex. skilja på isotoper med neutrondiffraktion
- För neutron diffraktion gäller samma formel som tidigare för konstruktiv interferens:

$$2d\sin\theta = n\lambda$$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

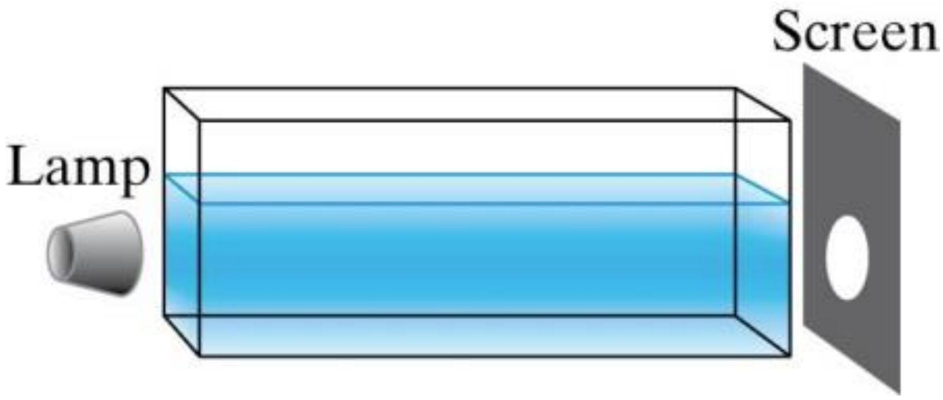
Var är ”vågorna”?

- Elektromagnetisk strålning bestod av oscillerande elektriska och magnetiska fält som kan beskrivas av klassiska vågmodellen
- Det visar sej att partiklar också kan beskrivas av en vågfunktion, vars *amplitud i kvadrat* ger *sannolikheten* att finna en partikeln i en viss punkt i rummet
- Samma matematiska formler gäller alltså för partiklar, men tolkningen är kvantmekanisk och baserar sej på sannolikheter, istället för den klassiska intensiteten

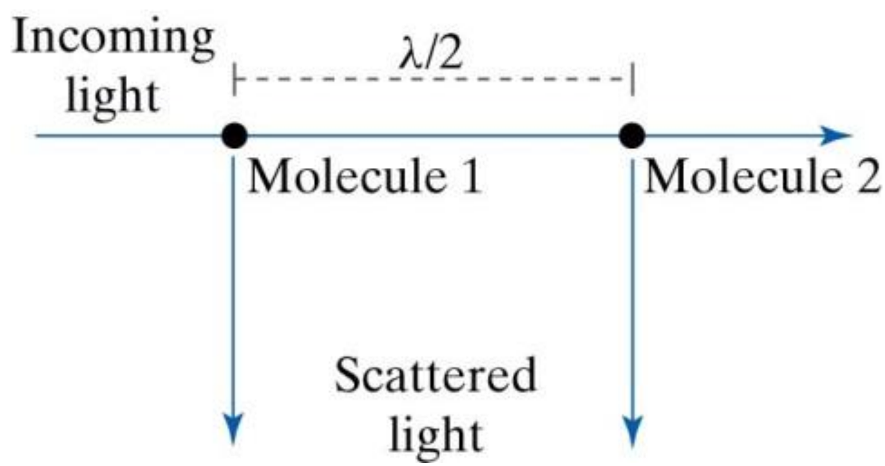
Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Ljusets spridning

- Om vi skiner en stark lampa med vitt ljus genom en tank med rent vatten, kommer det mesta av ljuset att opåverkat gå igenom vattnet och ut från andra sidan
  - Vi ser alltså mycket lite *spridning* av ljuset.
  - Det finns dock en stor mängd atomer i vattnet, som accelereras och strålar i sin tur. Varför sprids inte ljuset?



- I en vätska, som vatten (eller t.ex. i glas), ligger atomerna väldigt tätt. För vilken som helst atom som ljuset träffar, kommer det att finnas en till atom på avståndet $\lambda/2$ längs ljusets färdriktning. Strålningen från dessa två atomer kommer att interferera destruktivt.
  - Endast atomerna i sista $\lambda/2$ sträckan av vattentanken kommer inte att kunna paras med en annan atom, men dessa är väldigt få.



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Om vi lägger till nånting i vattnet, t.ex. tvål eller mjöl, kommer bilden att förändras. Nu kommer blått ljus att spridas åt sidorna, och ljuset som når ut genom andra ändan av tanken kommer att vara klart rödfärgat
- Detta beror på att de nya partiklarna strålar på annat sätt än vatten molekylerna, och det finns relativt få av dem, så för väldigt många kommer det inte att finnas en likadan partikel på avståndet $\lambda/2$ från den första. Strålningen från dessa partiklar kommer inte att interferera destruktivt, så ljuset sprids

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Spridning från en gas

- Varför är då himlen blå, även på dagar då luften är relativt ren?

- Vi betraktar en liten volym (kub med sidlängden 0.1•λ) i en gas, med N ~ 3000 molekyler
- Denna volym kommer stundvis att innehålla fler, stundvis färre molekyler: $\pm\sqrt{N}$
- Detta betyder att kuber med avståndet λ/2 från varandra innehåller olika antal atomer och återstrålningen från dessa atomer inte helt tar ut varandra

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

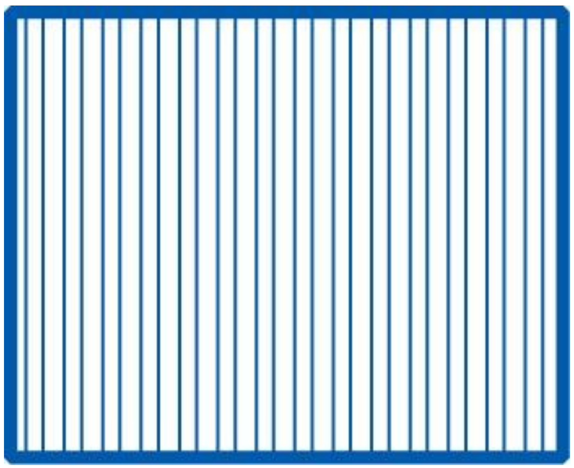
Diffraktionsgitter

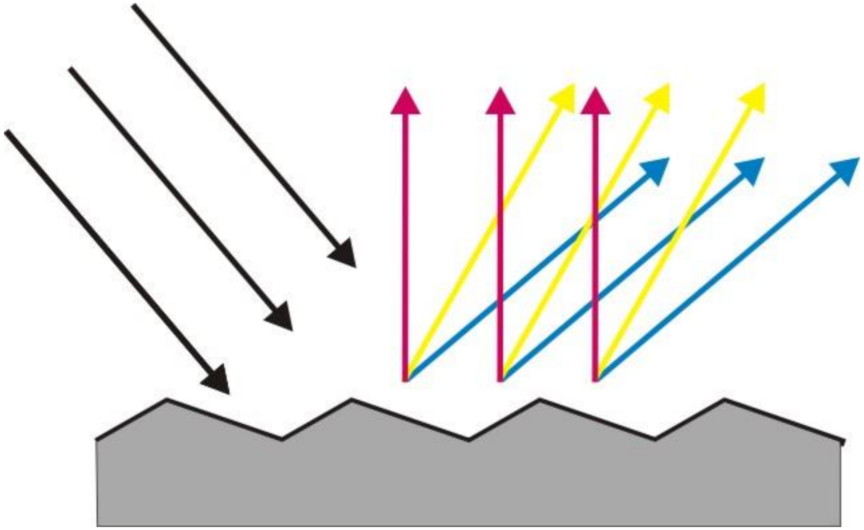
- Den brända ytan på en CD skiva visar i vissa vinklar alla rengbågens färger
- Detta är ett interferens fenomen, där det reflekterade ljuset från närliggande remsor av ostörd plastyta interfererar med varandra
- Avståndet mellan fårorna som bränns i en CD är av samma storleksordning som synliga ljusets våglängd, varför vi kan se denna effekt
- Detta uppkommer från interferens mellan otaliga strålningskällor (remsorna på CD:n) och kallas därför diffraktion

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Diffraktionsgitter

- En CD fungerar på samma sätt som ett *diffraktionsgitter*, dvs. en glas eller plast skiva med många parallella fåror inristade alla på avstånd d från varandra
- Mellan fårorna reflekterar materialet den inkommande strålningen





Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

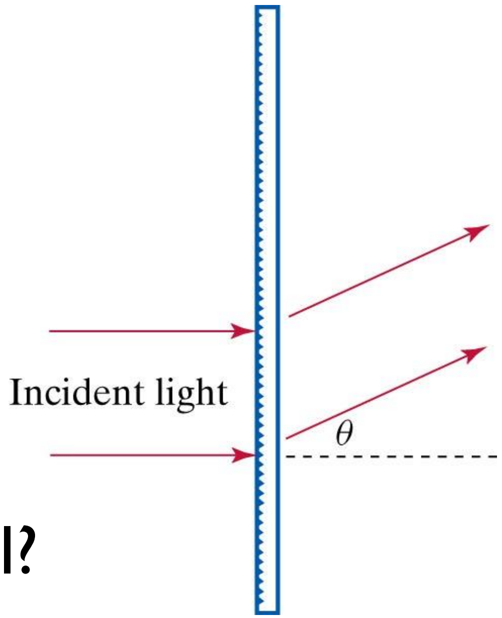
Transmissionsdiffraktionsgitter

- Samma princip används i *transmissionsdiffraktionsgitter*
- Mellan fårorna är materialet transparent, så det fungerar som en samling med väldigt många parallella spalter
- Ljuset från dessa spalter interfererar som med dubbelspalten, men då de är väldigt många kallas det diffraktion
- Diffraktionsmaximet ligger i en vinkel som beror av våglängden. Maxima från diffraktionsgitter är mycket smalare än för dubbelspalten, vilket gör det möjligt att med stor noggrannhet bestämma våglängderna i det ljus som träffar gittret

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Exempel

- Anta att en stråle av rött ljus träffar ett transmissionsdiffraktionsgitter vinkelrätt mot gittret.
- Låt avståndet mellan spalterna i gittret vara d, och våglängden av ljuset λ (ungefär 700 nm).
- Var ligger första maximum?
  - Vid första maximum är $n = 1$, så $\sin\theta = \lambda/d$ och $\theta = \arcsin(\lambda\backslash\mathrm{d})$
- Om man byter ut röda ljuset till violett ljus (våglängd ungefär 400 nm), hitter vi maximum vid en större eller mindre vinkel?
  - Mindre vinkel för kortare våglängd



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Vi ser regnbågens färger i vissa vinklar på CD skivan, men inte i huvudriktningen för vanlig reflektion. Varför inte?
  - Vinkeln θ för andra, tredje, osv. interferens maximum beror på våglängden, men i huvudriktningen är vägen som ljuset färdats lika lång, så alla våglängder reflekteras åt det hållet, och man ser vitt ljus

- Vi kan se att diffraktionsgittret måste producera väldigt fokuserade maxima genom att betrakta energin
  - Med två spalter, som fungerar som två strålningskällor, kommer maximum intensiteten att vara $2^2 = 4$ gånger så stor som intensiteten från en spalt
  - I ett diffraktionsgitter som är 2 cm brett kan det finnas 2×10^4 spalter, vilket ger en intensitet i maximum som är 4×10^8 gånger intensiteten från en spalt
  - Detta betyder att det istället måste finnas stora områden med väldigt liten intensitet

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Optisk upplösning

- Vi skall betrakta några fenomen som kan verka orelaterade, men som alla är beroende av det som kallas *optisk upplösning* (eng. angular resolution)
  - Diametern på spegeln eller linsen i ett teleskop bestämmer huruvida man kan urskilja två närbelägna stjärnor, eller om de bara ser ut som en ljuspunkt
  - I tvåspalts interferens avtar styrkan på maxima utåt från mitten
  - Ljus genom en spalt uppvisar minima och maxima
  - Bredden på ett diffraktionsgitter bestämmer avståndet mellan maxima genom gittret
- Samtliga av dessa fenomen kan beskrivas med formeln

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{W}$$

där W är apparaturens bredd

Bredden av ett maximum

- För att bestämma optiska upplösningen för ett diffraktionsgitter vill vi veta bredden av ett maximum
- Detta kan bestämmas som vinkelavståndet mellan ett maximum och bredvidliggande minimum
- Vi behöver alltså hitta platsen för minima
- Vi utgår ifrån första maximum, i en vinkel θ från mitten, för vilket gäller $d \sin\theta = \lambda$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Läget för minimum

- Vi återkallar metoden att bestämma maximum:
  - Första maximum från bredvidvarandra liggande spalter på avstånd d från varandra ges av $d \sin \theta = \lambda$
  - I vinkeln θ interfererar också varannan, var tredje, osv. spalt med varandra, eftersom $2d \sin \theta = 2\lambda, 3d \sin \theta = 3\lambda$
- Denna formel tar alltså i beaktande alla parningar, så länge vi utgår från närmaste avståndet d
- Att söka punkter för destruktiv interferens skiljer sig från punkter för konstruktiv interferens, eftersom ett par av strålningskällor som interfererar destruktivt ger upphov till noll strålning, så deras interferens med resten av källorna behöver därför inte beaktas

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

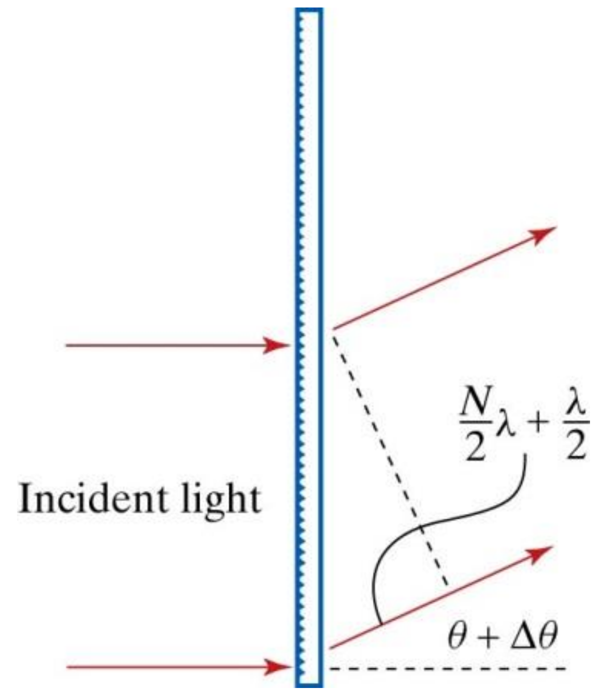
Villkor för läget av minimum

- För att hitta minimum använder vi oss av samma princip som då vi hittade villkoren för fullständig destruktiv interferens från tunna hinnor, och spridningen av ljus i vatten
- Vi vill para ihop spalterna i gittret på ett sådant sätt, att de parvis interfererar destruktivt
- Om vi har ett maximum i vinkeln θ från normalen, kallar vi vinkeln där minimet finns för $\theta + \Delta\theta$
- Vi söker värdet för $\Delta\theta$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Anta att vi har N antal spalter.
- Vi parar ihop spalterna så att första spalten paras med spalt nummer $N/2$, följande med $N/2+1$, o.s.v.
- Nu om ljuset från spalterna i första paret interfererar destruktivt, kommer de följande paren att göra det också, då spalterna i varje par har samma avstånd mellan varandra.
- För första maximet i vinkeln θ, är skillnaden i strålningens väglängd från första spalten och spalt nr. $N/2$ lika med $(N/2)\lambda$.
- För ett minimum har skillnaden i väglängd en extra $\lambda/2$:

$$\left(\frac{N}{2}\right)\lambda + \frac{1}{2}\lambda$$



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Följande paret har nu också en skillnad i väglängd på $\lambda/2$, så de interfererar också destruktivt.
- Parvis har all strålning från spalterna eliminerats i riktningen $\theta + \Delta\theta$, så intensiteten är noll.
- Vi skriver skillnaden i väglängden mellan strålningen från två spalter bredvid varandra på följande sätt:

$$d \sin(\theta + \Delta\theta) = \lambda + \varepsilon$$

där ε är en liten bråkdel av λ.

- Då blir skillnaden i väglängd mellan första spalten och spalt nr. $N/2$ följande:

$$\frac{N}{2}(\lambda + \varepsilon) = \left(\frac{N}{2}\right)\lambda + \frac{1}{2}\lambda$$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Vi kan nu lösa för ε och får följande:

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{N}$$

- För att sedan hitta värdet på $\Delta\theta$ använder vi oss av trigonometriska formeln:

$$d \sin(\theta + \Delta\theta) = \lambda + \varepsilon = \lambda + \frac{\lambda}{N}$$

$$d \sin\theta \cos\Delta\theta + d \cos\theta \sin\Delta\theta = \lambda + \frac{\lambda}{N}$$

- Eftersom $\Delta\theta$ är en liten vinkel kan vi göra approximationerna:

$$\cos\Delta\theta \approx 1 \qquad \text{och} \qquad \sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$$

- Vi får då:

$$d \sin\theta + d\cos\theta\,\Delta\theta \approx \lambda + \frac{\lambda}{N}$$

- Eftersom $d\sin\theta = \lambda$ har vi vidare:

$$d\cos\theta\,\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{N} \quad \text{och} \quad \Delta\theta \approx \frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$$

- Totala bredden W av diffraktionsgittret är:

$$W = Nd$$

- Eftersom $\cos\theta$ är av storleksordningen ett, så vi får till slut:

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{W}$$

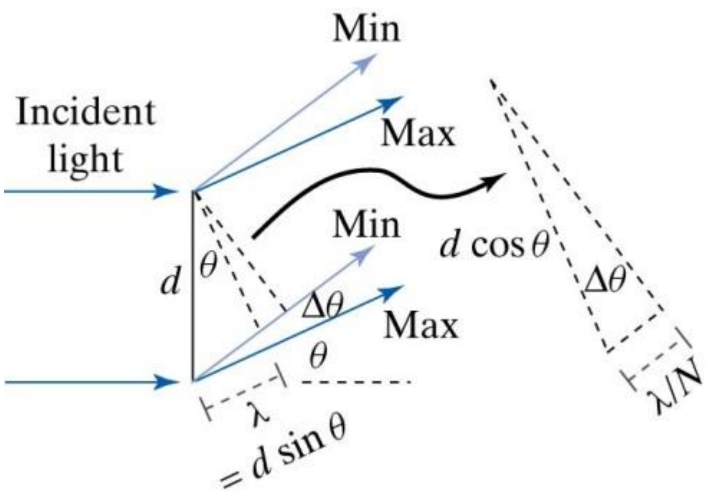
- Trots att vi härledde detta resultat för ett diffraktionsgitter gäller det helt allmänt.
- Då man har ett instrument med ett stort antal källor som interfererar med varandra, kommer vinkelbredden av ett strålningsmaximum att vara ungefär lika med våglängden delat med bredden av instrumentet.
- Om vi t.ex. har ett diffraktionsgitter som är 2 cm brett, kommer vinkelspridningen av maximet att vara mycket smalt:

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{W} \approx \frac{600 \times 10^{-9}\, m}{2 \times 10^{-2}\, m} = 3 \times 10^{-5}\, rad$$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Ett geometriskt argument

- Alternativt kan vi härleda detta samband också geometriskt.
- Betrakta två spalter som ligger brevid varandra
- De har avståndet d från varandra.
- I den streckade triangeln på bilden är längden av sidan mitt emot vinkeln $\Delta\theta$ lika med λ/N, eftersom detta är skillnaden i väglängd som gav destruktiv interferens.
- Hypotenusan är ungefär lika med $d\cos\theta$.
- Då får vi för vinkeln $\Delta\theta$:



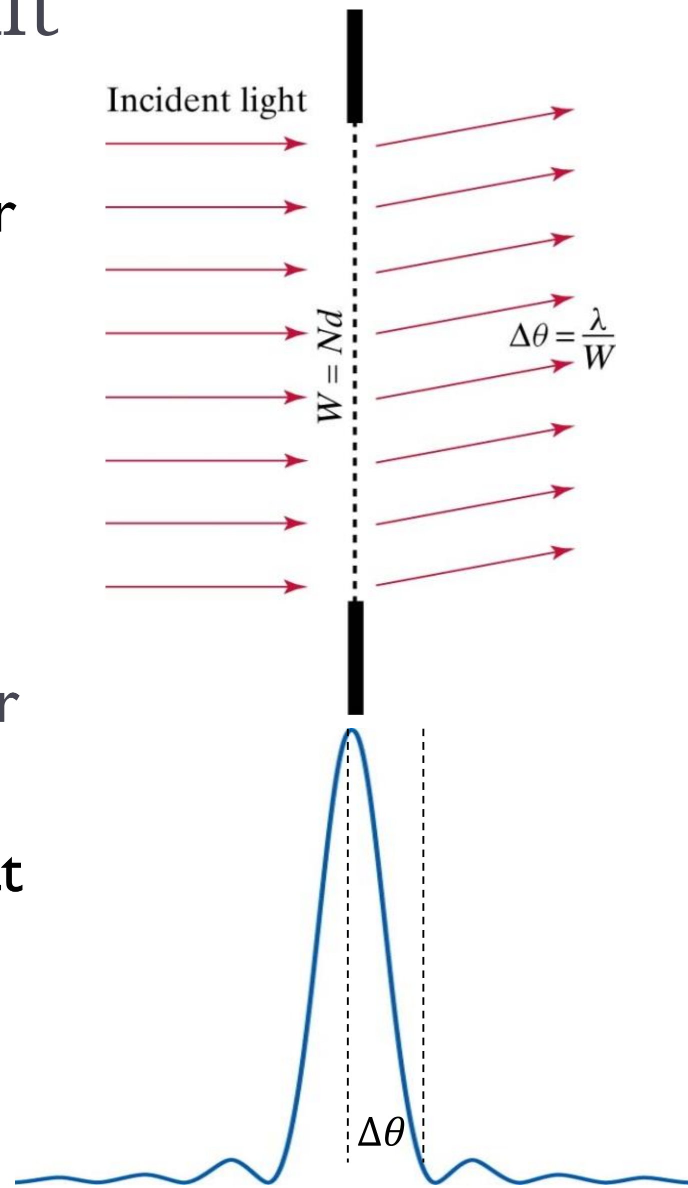
$$\Delta\theta \approx \frac{\frac{\lambda}{N}}{d\cos\theta} = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} = \frac{\lambda}{W\cos\theta} \approx \frac{\lambda}{W}$$

där $W = Nd$ är bredden på gittret och $\cos\theta \approx 1$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

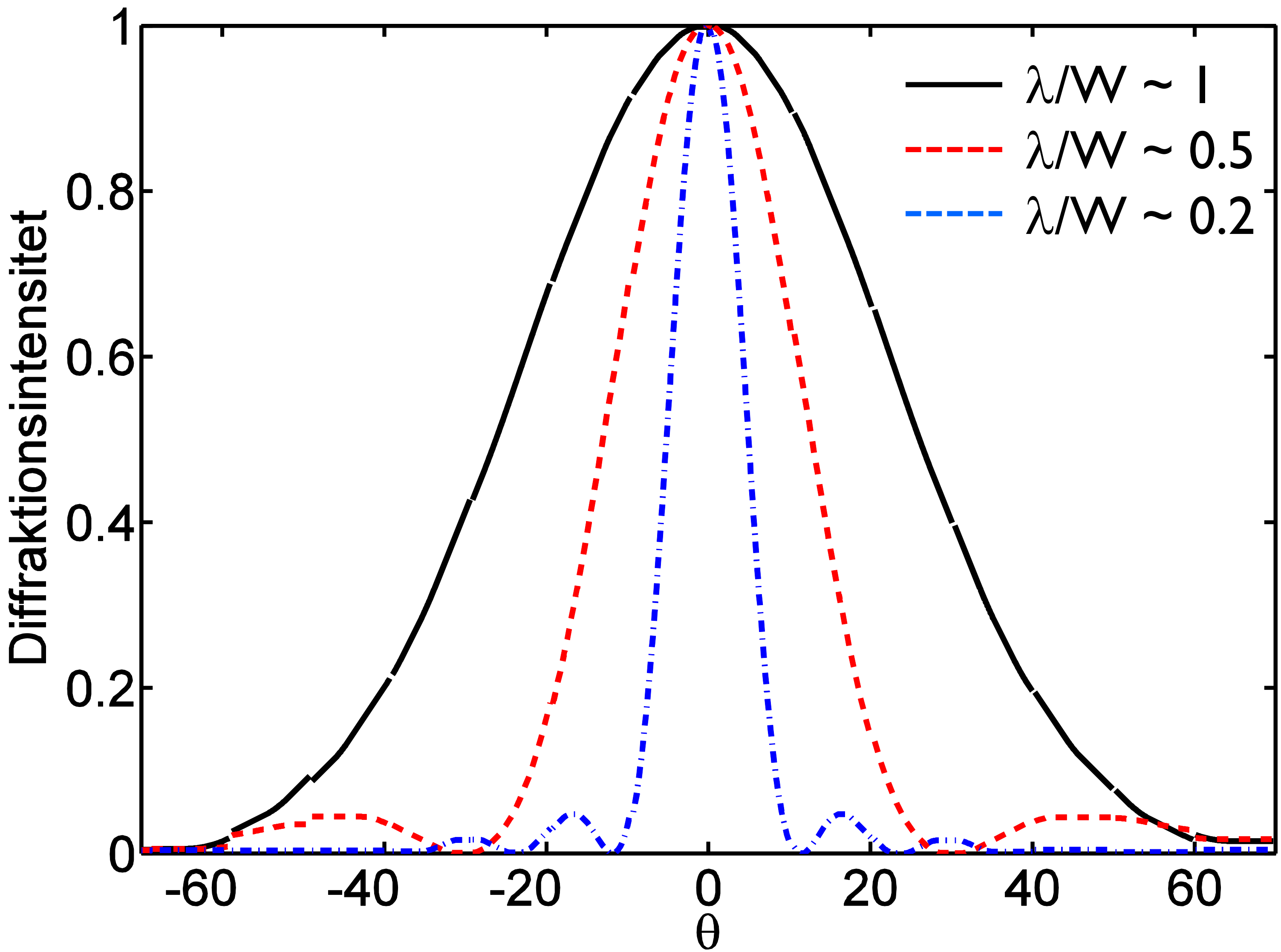
Diffraktion från en enkel spalt

- Med denna bild av diffraktion kan vi förklara fenomenet av diffraktion som sker för ljus genom en enda spalt
- En spalt med bredden W kan ses som ett stort antal spalter som ligger på avståndet $d = W/N$ från varandra
  - Istället för att summera över N spalter integrerar vi över oändligt många spalter som ligger oändligt nära varandra
- Förrutom ett maximum rakt fram får vi ett minimum vid $\Delta\theta \approx \lambda/W$
- Totalt ser mönstret som uppkommer ut som på bilden bredvid.



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

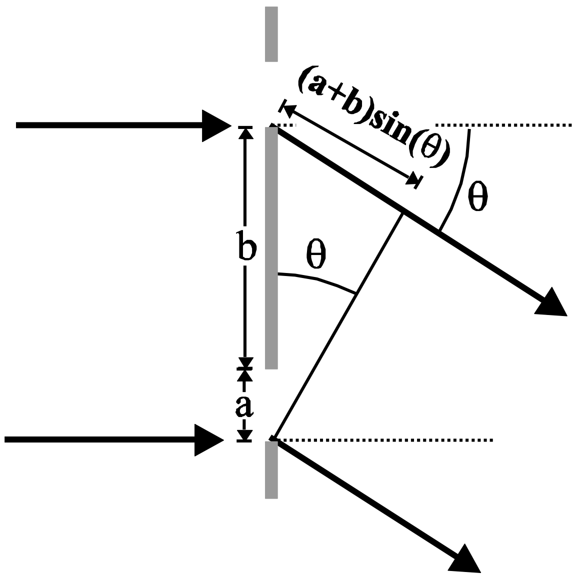
$\Delta\theta \approx \lambda/W$

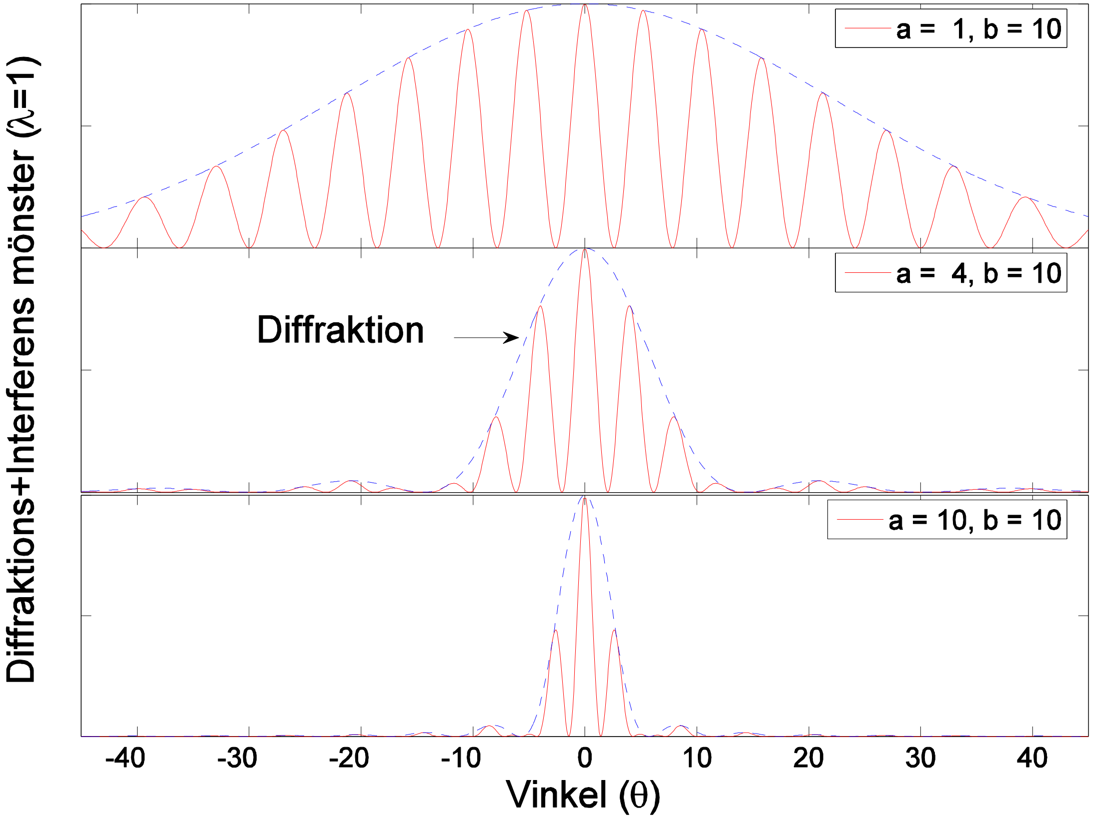


Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Diffraktion genom två spalter

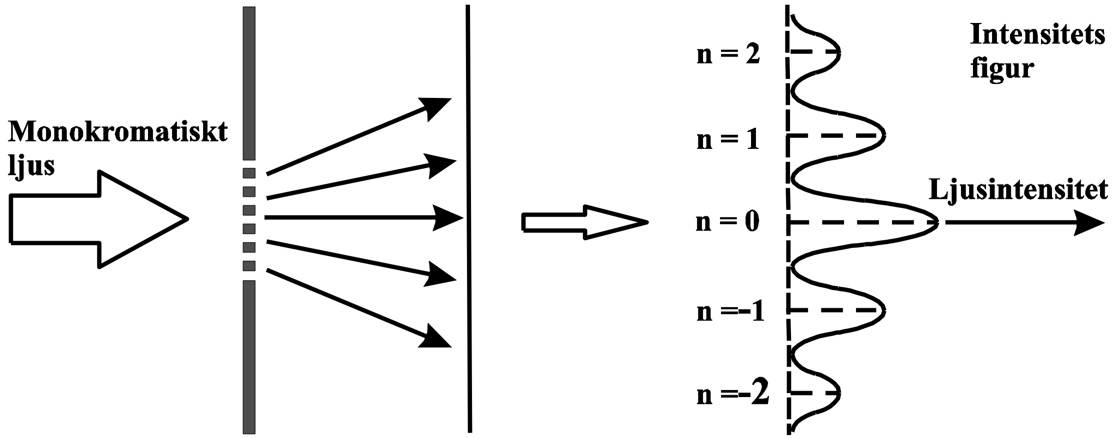
$$\frac{I_\theta}{I_0} = \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2} \qquad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin(\theta)$$

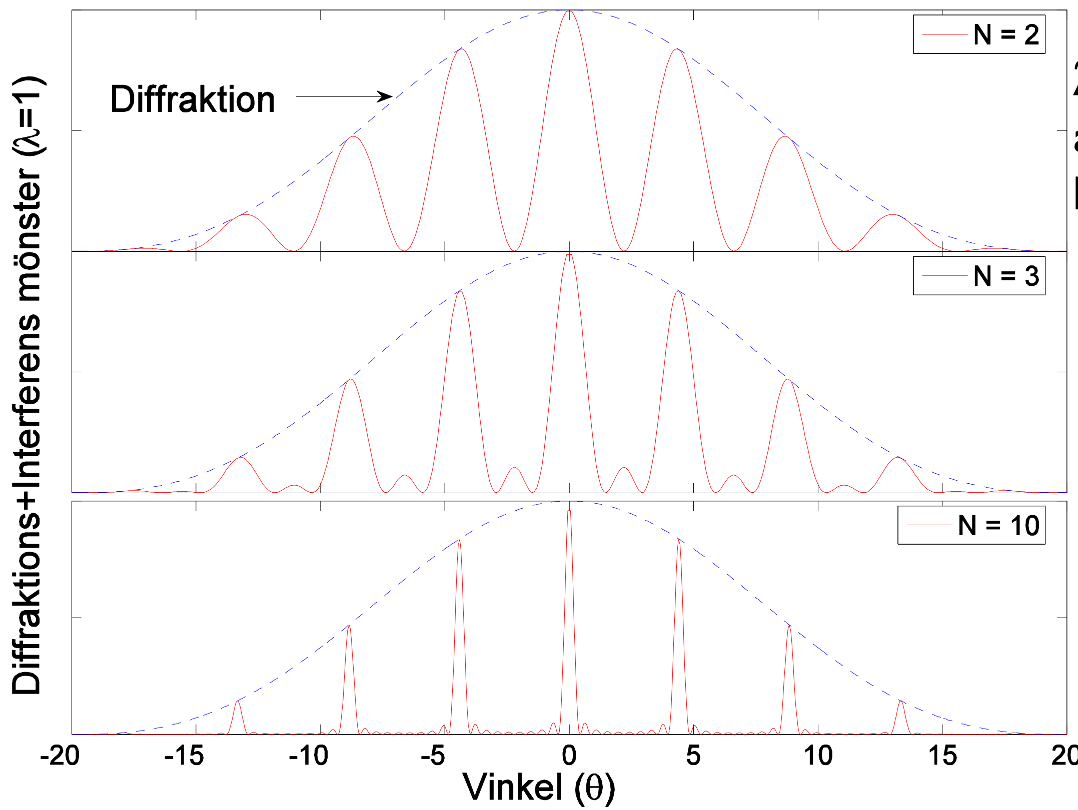




Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

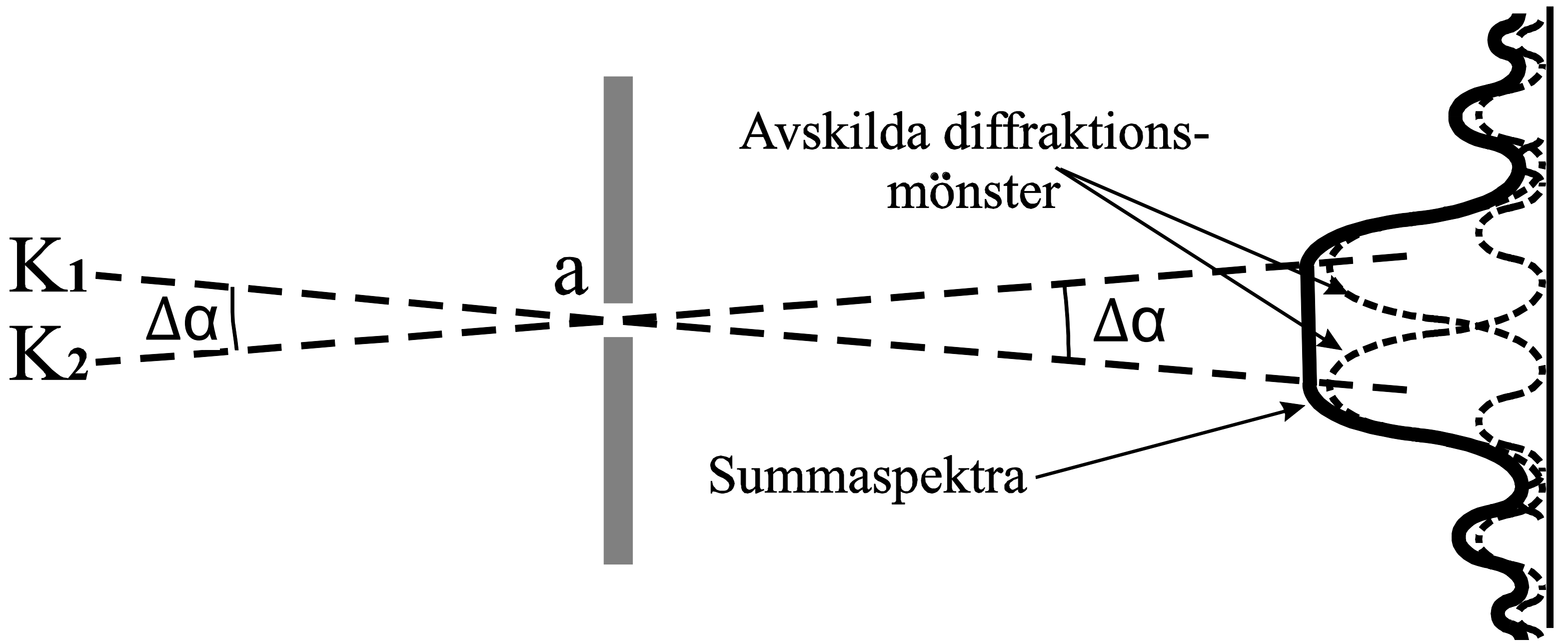
Från två spalter, kan det vara svårt att se sidomaxima.
I fall av många spalter med bredden *a* och avståndet *d* till varandra, får man starkare sidomaxima





$\lambda = 1$
$a = 3$
$b = 10$

Diffraktionen stör separationen av distanta ljuskällor



Minsta vinkelresolutionen: $$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{a}$$

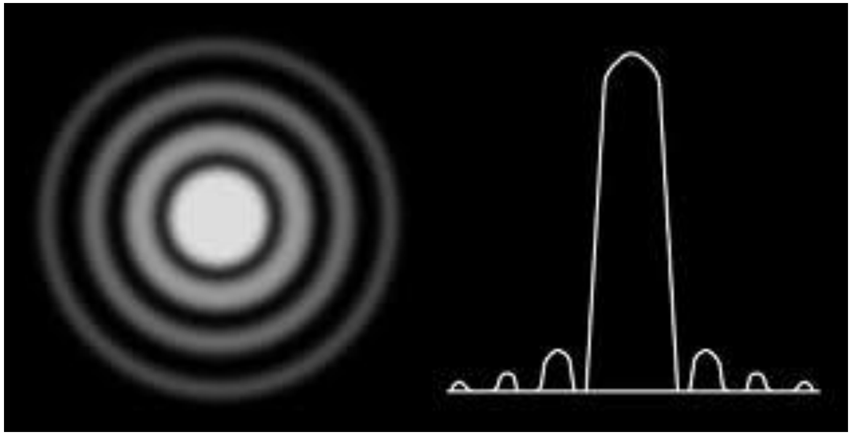
Minsta vinkelavståndet
för att urskilja två objekt: $$\boxed{\Delta\alpha = 2 \cdot \Delta\theta}$$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

För en cirkel blir minsta vinkelresolutionen:

$$\boxed{\Delta\theta \approx 1.22\frac{\lambda}{d}}$$

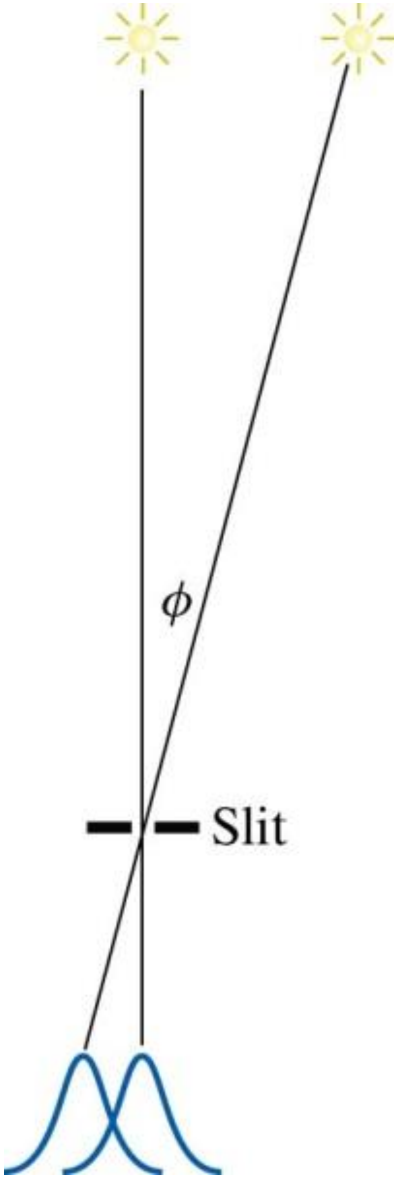
d är cirkelns diameter



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Teleskop

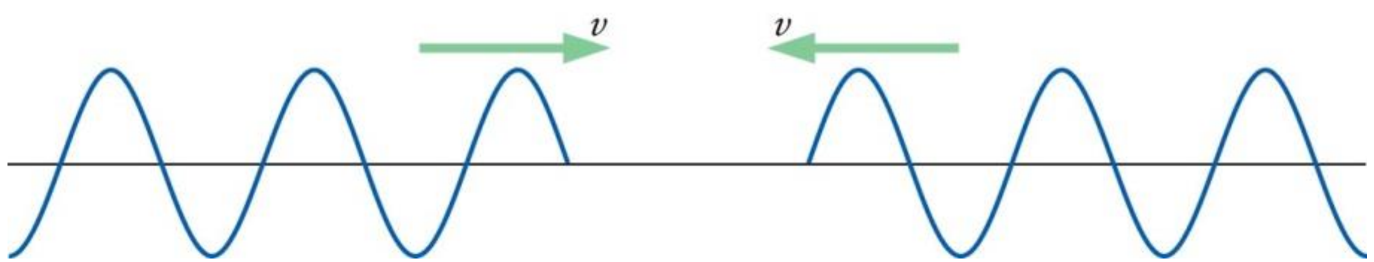
- Resolutionen i teleskop är begränsat av diffraktion
- Ljusstrålarna som kommer igenom teleskopet breddas till en kon med radien $\Delta\theta \approx 1.22\,\lambda/W$
- Detta gör att bilderna av två stjärnor som ligger nära varandra kan bli breddade så att de flyter in i varandra och ser ut som en stjärna
- En tumregel för resolutionen är att om vinkelavståndet mellan två stjärnor är större än $\phi \sim 2\Delta\theta$ kan de urskiljas som två objekt
- Ju större bredd på linsen, desto bättre resolution har teleskopet
- Av denna orsak försöker man göra så breda teleskop som möjligt, t.ex. genom att koppla ihop radioteleskop över tusentals mil



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Stående vågor

- Hittills har vi betraktat vågor som framskrider genom rummet.
- För att fullborda behandlingen av vågor skall vi nu studera vågor som oscillerar på stället, sk. stående vågor.
- Då två sinus vågor med precis samma frekvens färdas mot varandra och når samma ställe, kommer de att interferera med varandra.



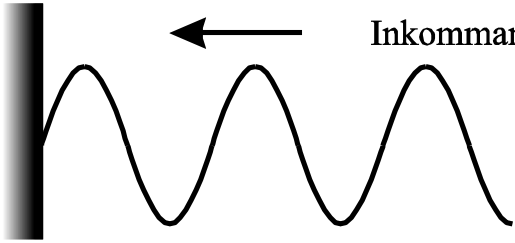
- Denna interferens leder till en stående våg, där vågkrönen hålls på samma ställe.

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Stående vågor

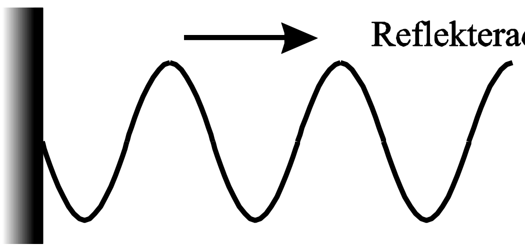
$$Y = y_1 + y_2 = A\sin(kx + \omega t) + A\sin(kx - \omega t)$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$



$y_1 = A \sin(kx + \omega t + \phi)$

$$\boxed{Y = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)}$$

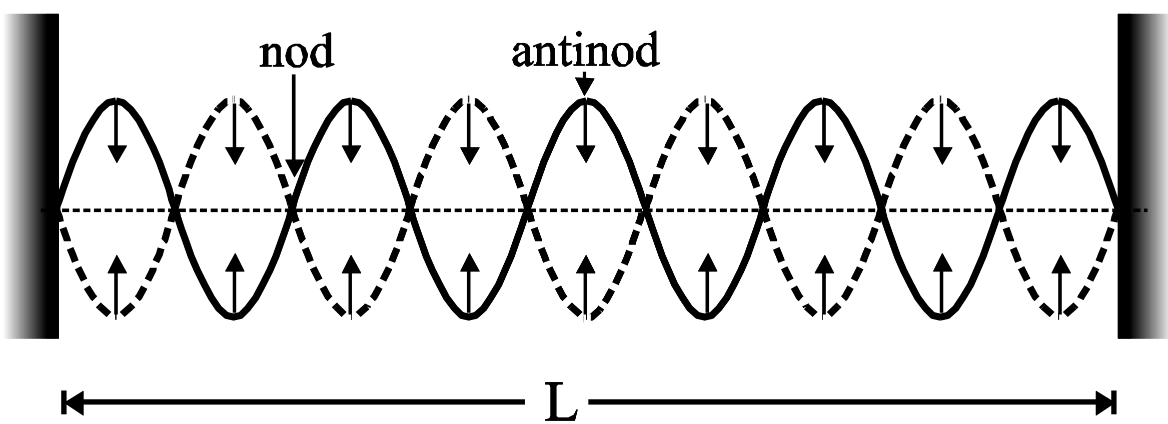


$y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi)$

$$kL = n\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi$$

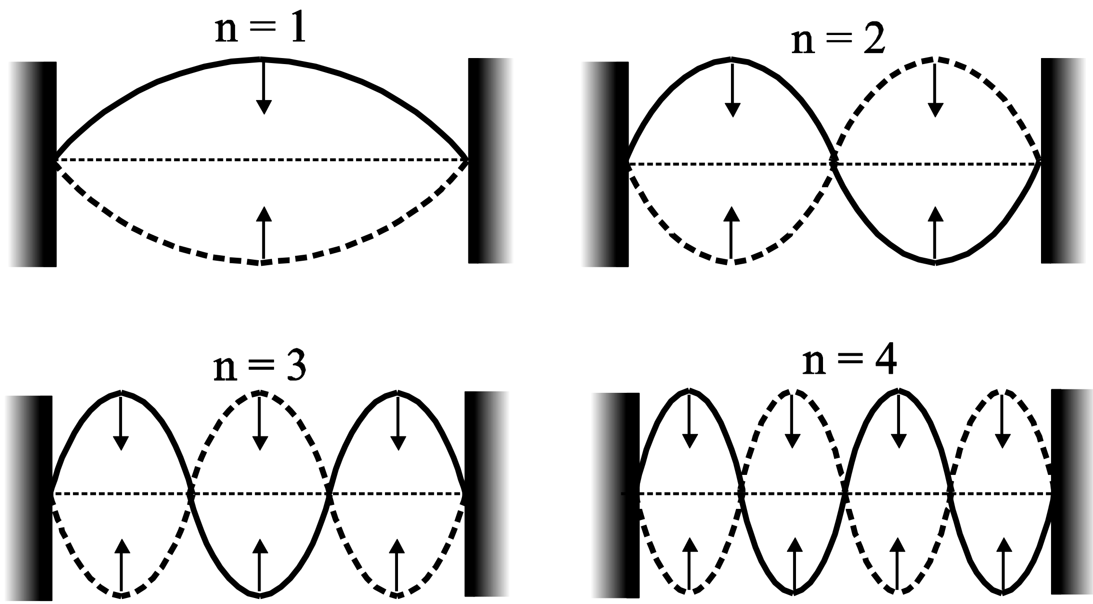
Stående våg



$$\boxed{\lambda = \frac{2L}{n}}$$

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Stående vågor



$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Resonans-frekvenser: $f = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{nv}{2L}$

$$\boxed{f = n\left(\frac{1}{2L}\right)\sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

Fundamentala frekvensen: n = 1

Harmoniska frekvenser: n > 1

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Superposition av vågor med liten skillnad i frekvensen

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t)$$

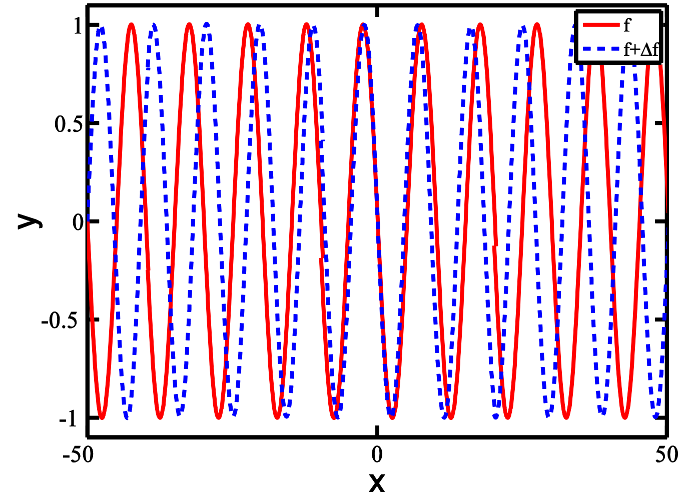
$$y_2 = A\sin([k + \Delta k]x - [\omega + \Delta\omega]t)$$

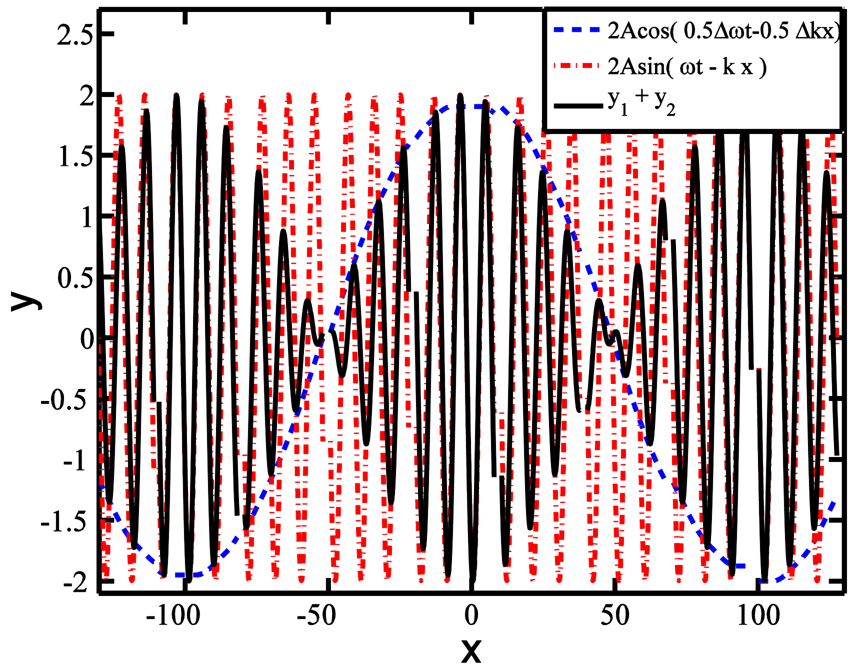
$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$Y = y_1 + y_2$$
$$= 2A\sin\left(\frac{(2k+\Delta k)}{2}x - \frac{(2\omega+\Delta\omega)}{2}t\right)\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)$$

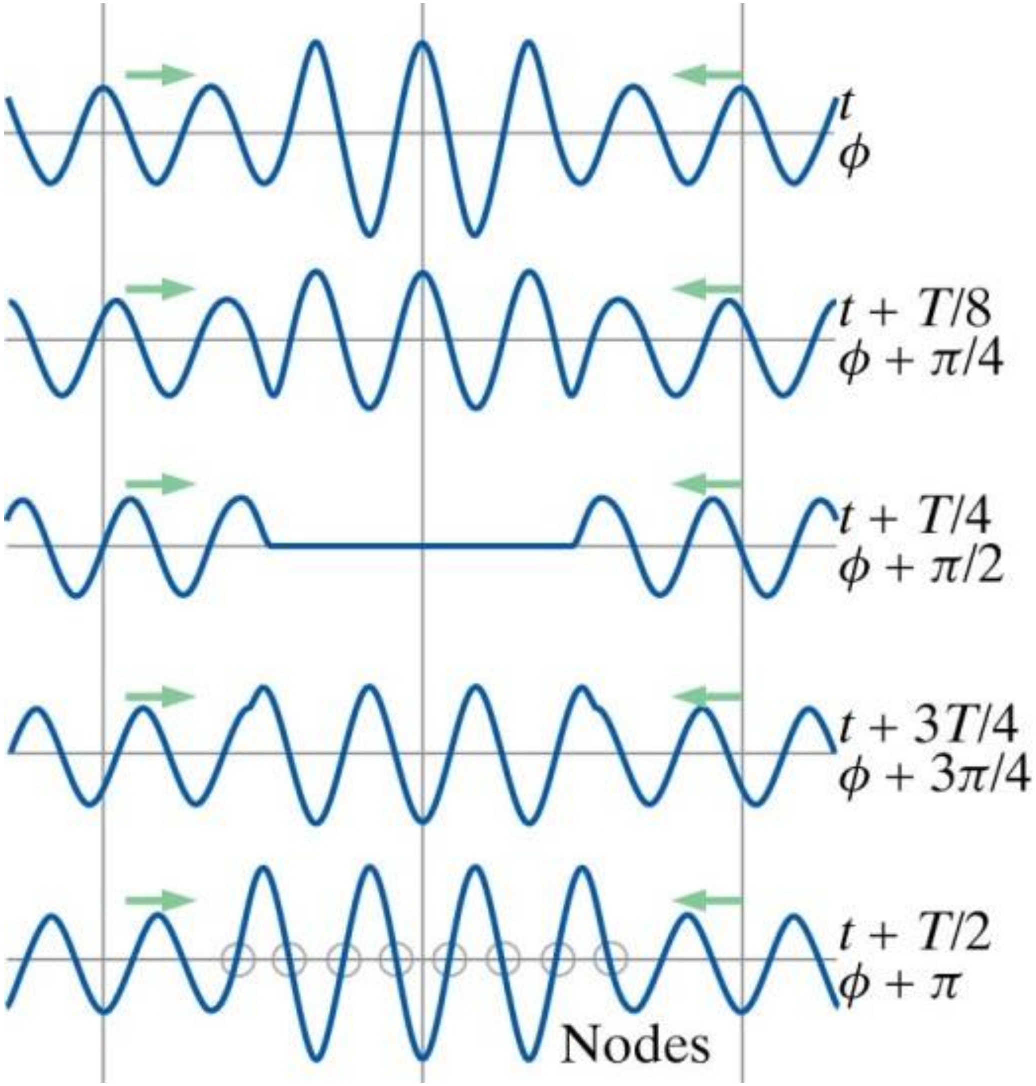
$$\Delta k << k$$

$$\boxed{Y \approx 2A\sin(kx - \omega t)\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)}$$

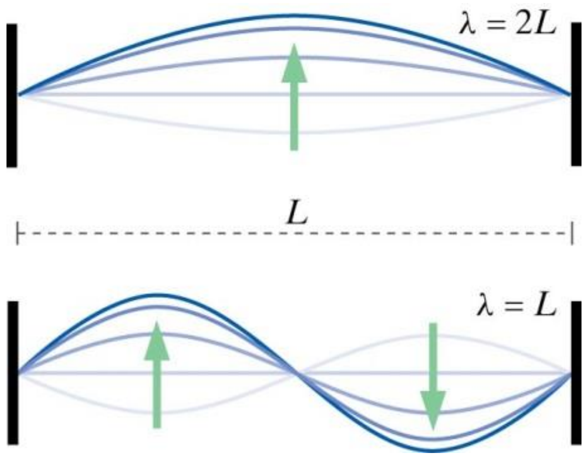




Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren


t
ϕ
$t + T/8$
$\phi + \pi/4$
$t + T/4$
$\phi + \pi/2$
$t + 3T/4$
$\phi + 3\pi/4$
$t + T/2$
$\phi + \pi$
Nodes

- *Noder* är punkter på stående vågen där amplituden *alltid* är noll.
- Emellan dessa når vågen med jämna mellanrum sitt maximum värde. Dessa punkter kallas ”antinoder”.
- Ett sätt att skapa en stående våg är att låta en våg reflekteras om och om igen mellan två ändpunkter.
- Då en våg reflekteras från en stationär gräns, ändras inte frekvensen, så de reflekterade vågorna kommer att interferera och bilda en stående våg.
- Avståndet mellan ändpunkterna bestämmer längsta möjliga våglängd för den stående vågen.

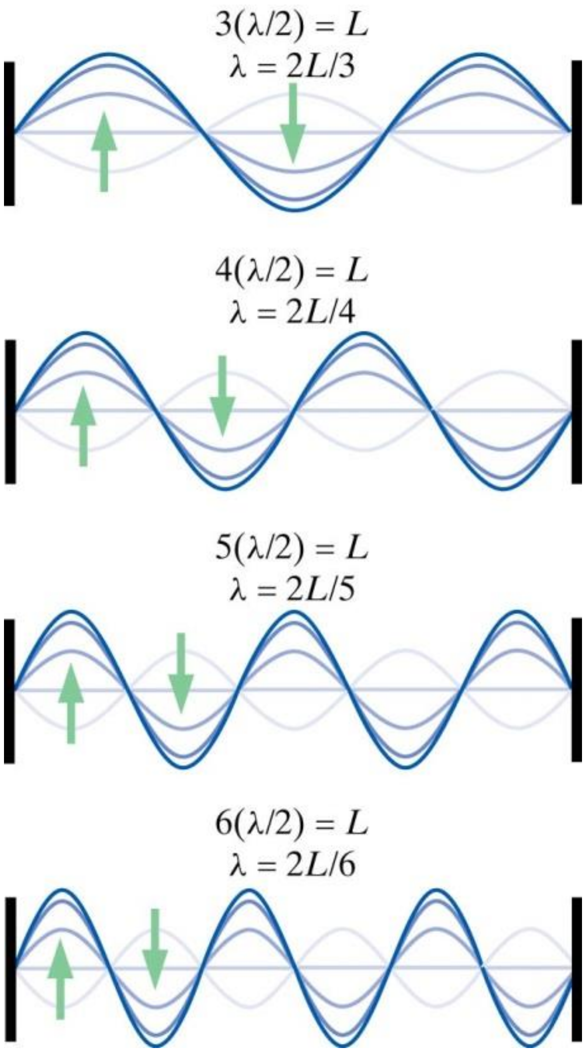


Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Endast vissa våglängder är möjliga på en längd L. Våglängden är alltså *kvantiserad*.
- Detta ger samtidigt en lägsta tillåtna frekvens:

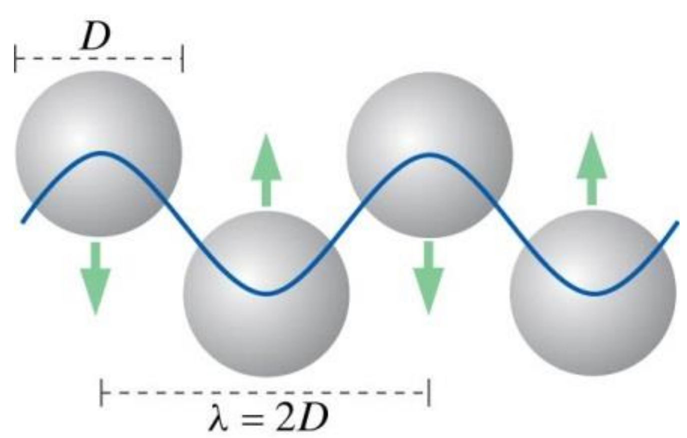
$$f_1 = v/\lambda_1$$

- De tillåtna oscillationsfrekvenserna kallas *moder* (eng. modes), vilket avser en stående våg med samma frekvens i varje punkt, som uppfyller gränsvillkoren (i det här fallet det att den är noll i ändpunkterna).



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

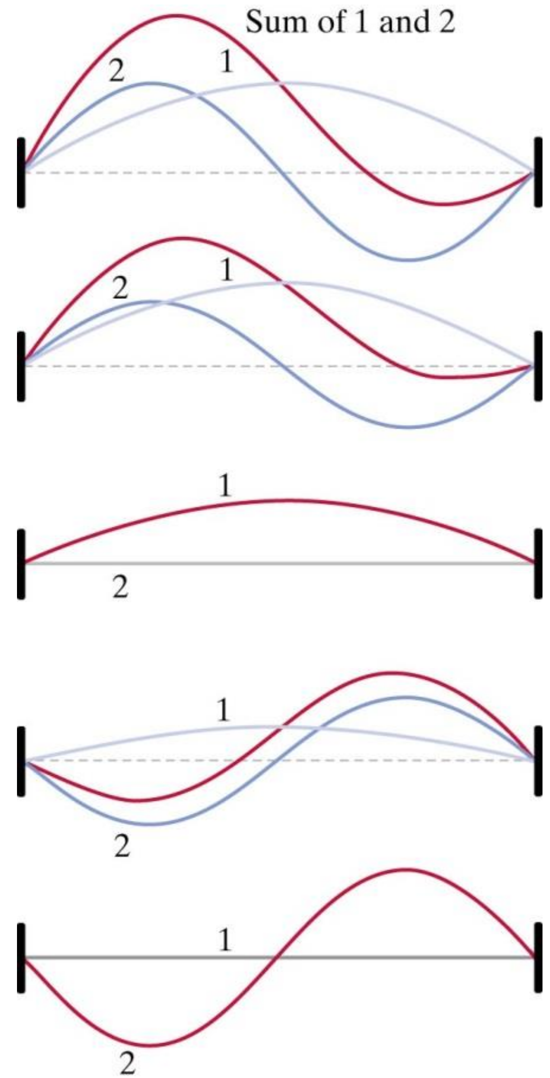
- En stående våg har fysikaliskt också en minimum våglängd, och därmed en högsta möjliga frekvens.
- Om vi betraktar det oscillerande mediet på atom nivå ser vi att den kortaste möjliga våglängden är $\lambda = 2D$ där D är avståndet mellan atomerna.
- En kortare våglängd än så har ingen fysikalisk betydelse.



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

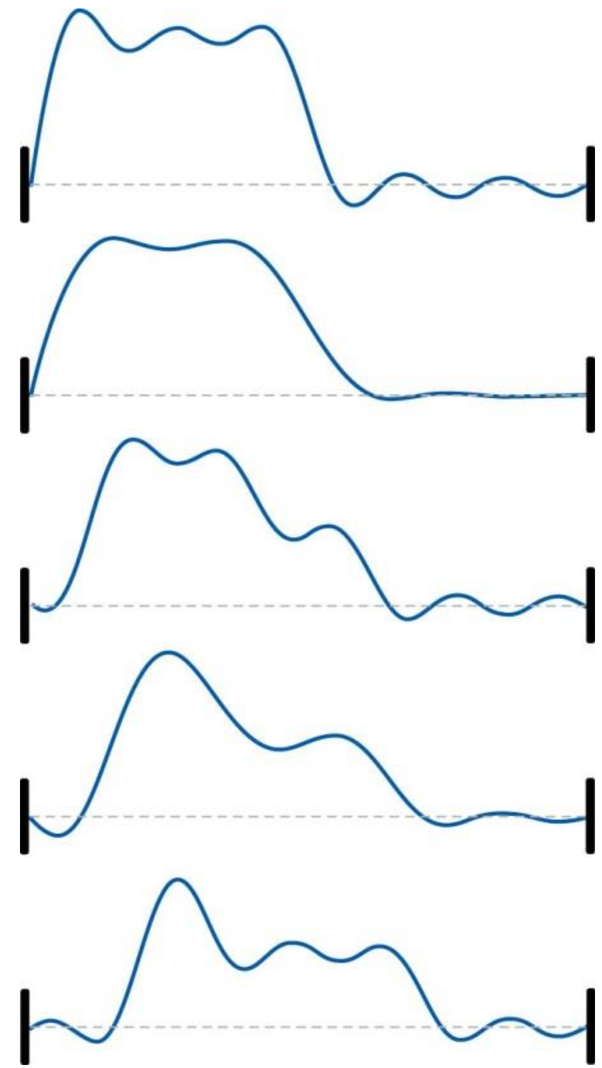
Superposition av moder

- Vi konstaterade att stående vågor i ett begränsat utrymme är kvantiserade, och bara vissa moder tillåtna.
- Om vi som exempel betraktar en oscillerande sträng, kan den också oscillera med en superposition av flere moder samtidigt.
- Bilden bredvid beskriver superpositionen av två moder.
- Är superpositionen en stående våg, eller propagerande våg?
  - Ingendera, då det inte finns noder, och vågkrönen rör sej både till höger och vänster. Den har heller ingen bestämd våglängd.



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Man kan bevisa matematiskt att vilken som helst funktion $f(x)$, som uppfyller kraven att $f(0) = 0$ och $f(L) = 0$, kan uttryckas som en summa av stående vågor, alltså moder.
- Bilden illustrerar en sekvens i tiden av summan av tio moder.



Mera komplicerade fall

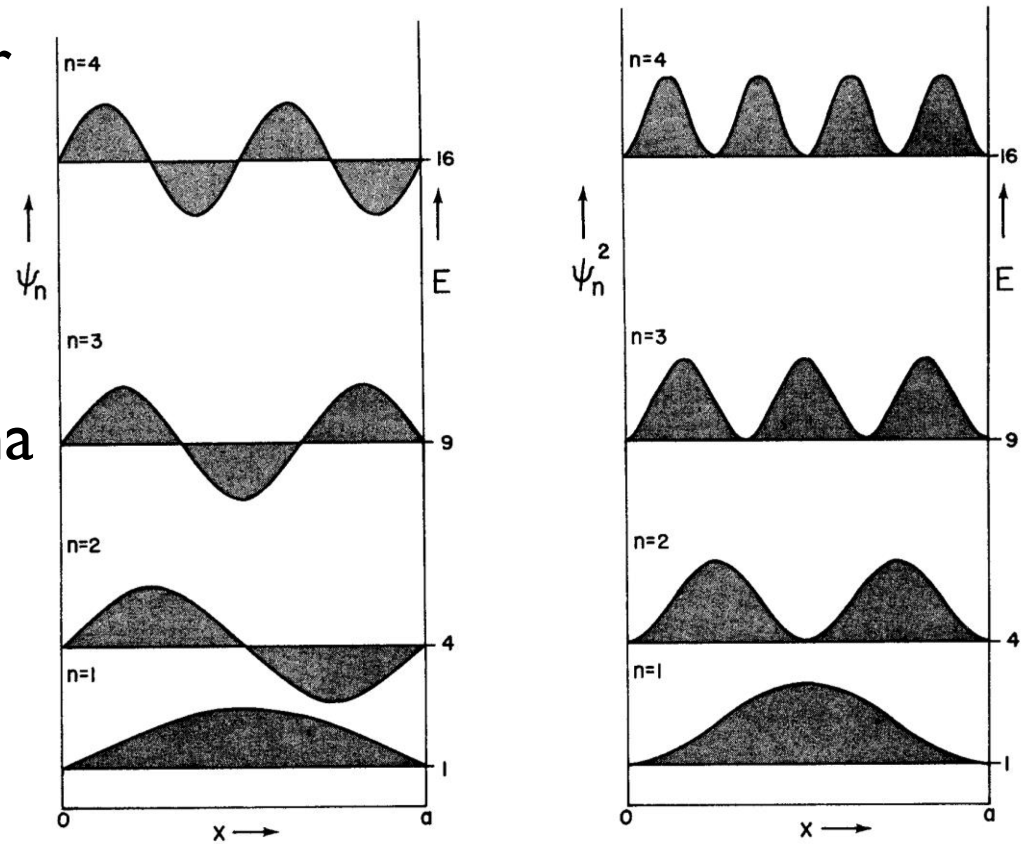
- Det föregående illustrerar de enklaste fallen av stående vågor.
- Det kan finnas mycket med komplicerade situationer, som vi dock inte behandlar på denna kurs.
  - Anharmoniska oscillationer: en stående våg behöver inte alltid vara sinusformad som funktion av plats (endast som funktion av tid), och de tillåtna våglängderna behöver inte vara $2L/n$.
  - Våghastigheten behöver inte vara konstant: $f = v/\lambda$ gäller i varje fall, men v kan förändras över tiden. Sådana system kallas *dispersiva*.
  - I icke-lineära system behöver summan av två vågor med en viss frekvens inte ge en våg med samma frekvens.

Stående vågor och kvantmekanik

- Vi såg att elektroner har vågegenskaper.
- En elektron som är bunden i en väteatom kan beskrivas som en stående våg, eftersom den är begränsad till ett visst utrymme kring protonen.
  - I detta fall är utrymmet tre-dimensionellt, till skillnad från en en-dimensionell sträng, men behandlingen är densamma, med gränsvillkor i alla dimensioner.
- Detta innebär att den bundna elektronens våg har vissa tillåtna moder. Varje mod, eller *tillstånd*, har en viss energi, så elektronens energi är kvantiserad.
- En elektron kan hoppa från ett tillstånd med högre energi till ett med lägre energi. I detta fall skickas den extra energin ut i formen av en foton.
- Ljuset som skickas ut av atomer med bundna elektroner kan därför användas för att bestämma energierna för atomens olika tillstånd.

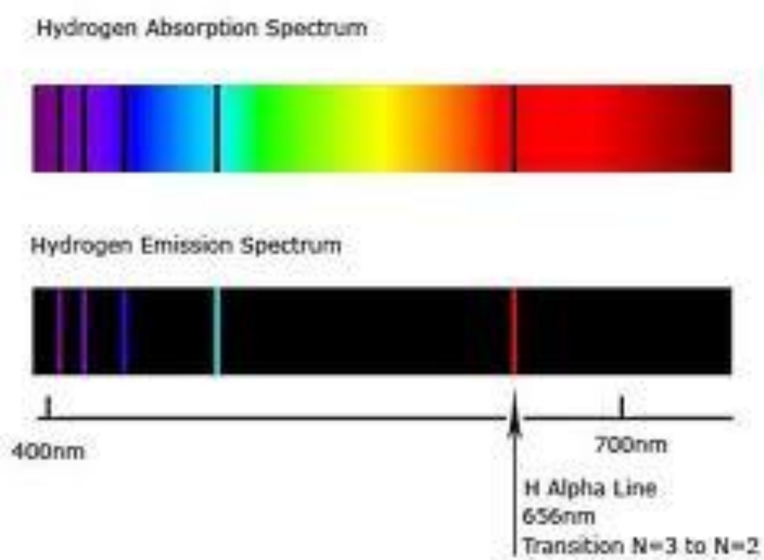
Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

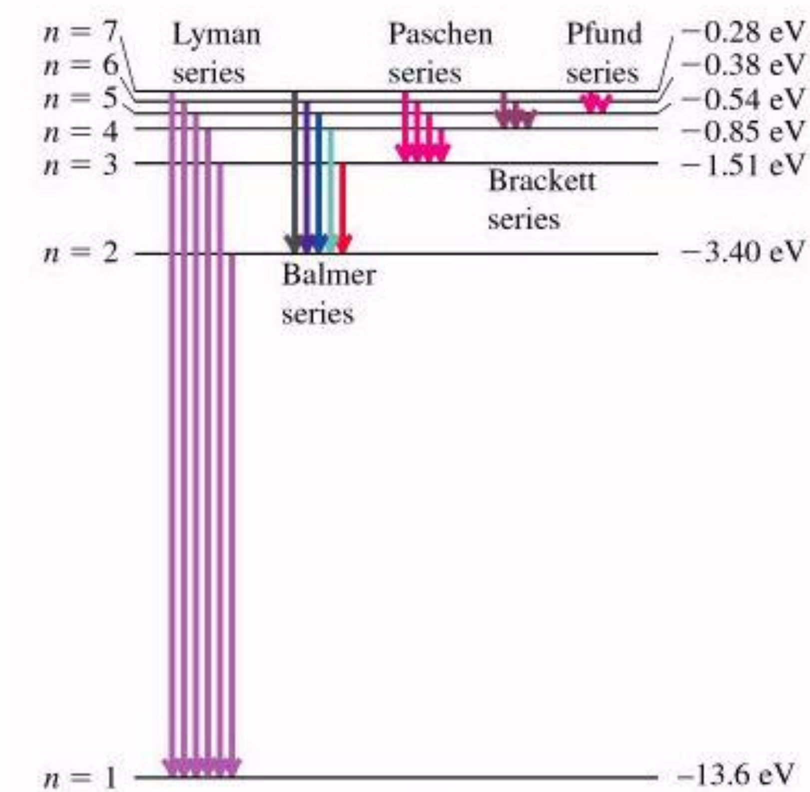
- Dessa vågor ges av funktionerna $\sin(kx)$, där $k = \frac{n\pi}{a}, n = 1{,}2{,}3, \ldots$
- Vi ser detta från att funktionen måste ha värdet noll i ändpunkterna
- Amplituden i kvadrat ger sannolikheten att hitta partikeln i en viss plats
- Energin är proportionell till n^2



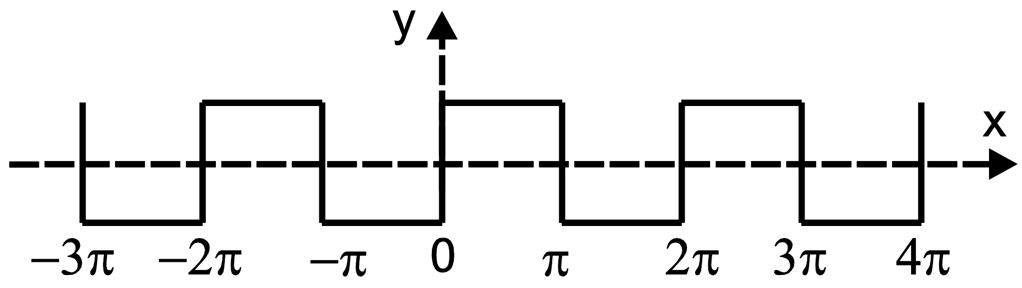
Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

- Bilden visar övergångarna mellan olika energinivåer för en väteatom, dvs. en bunden elektron, som ger upphov till vätets spektrum





Fourier serier

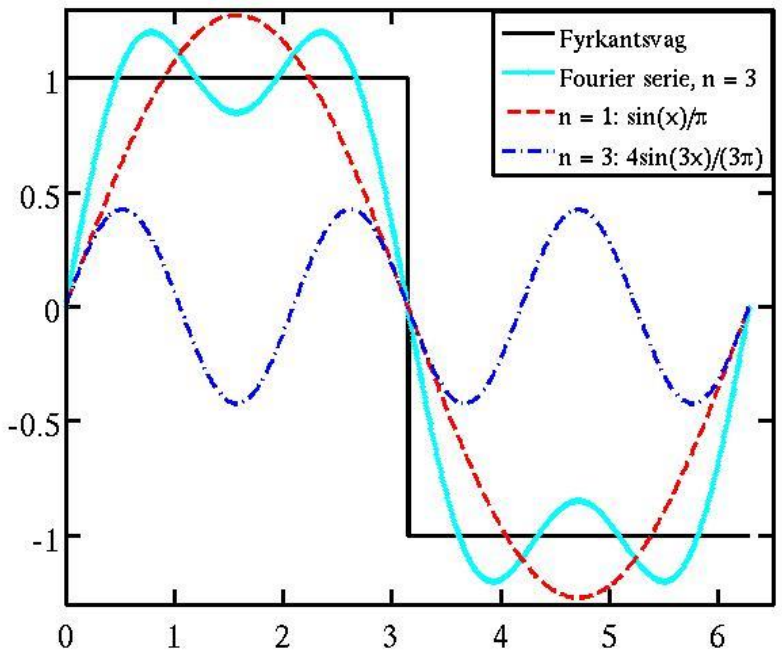


$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

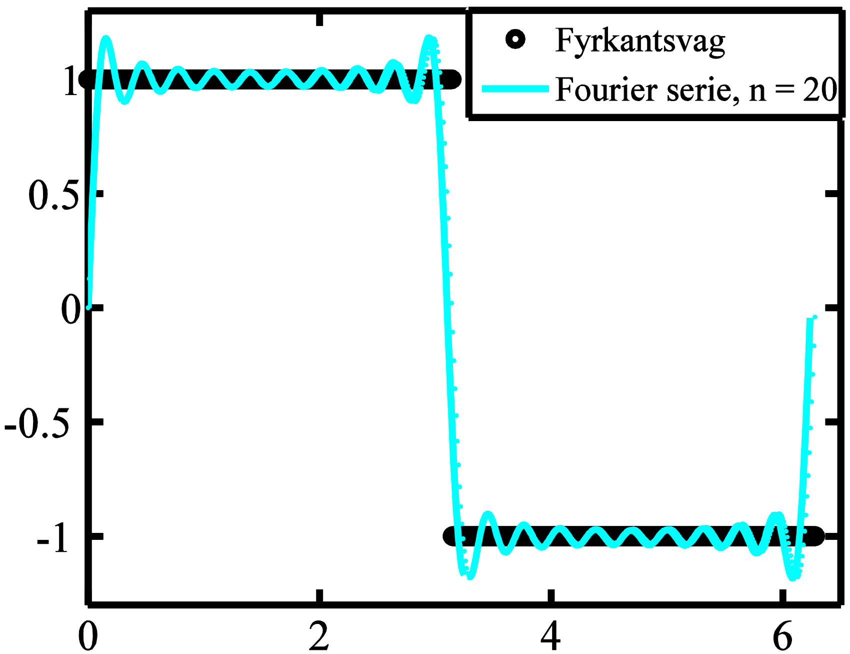
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

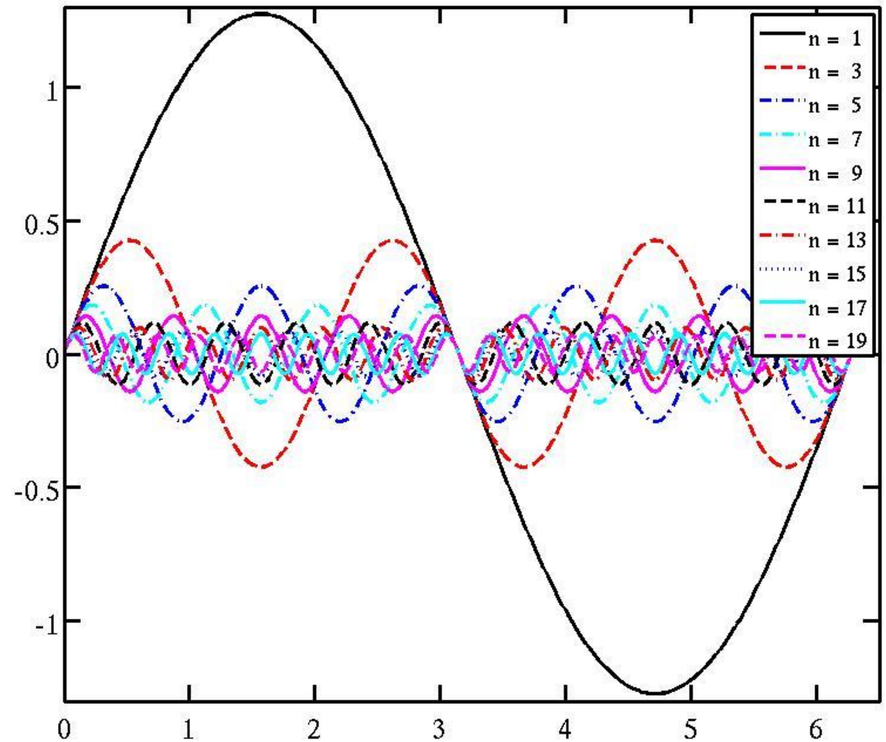
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$



Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

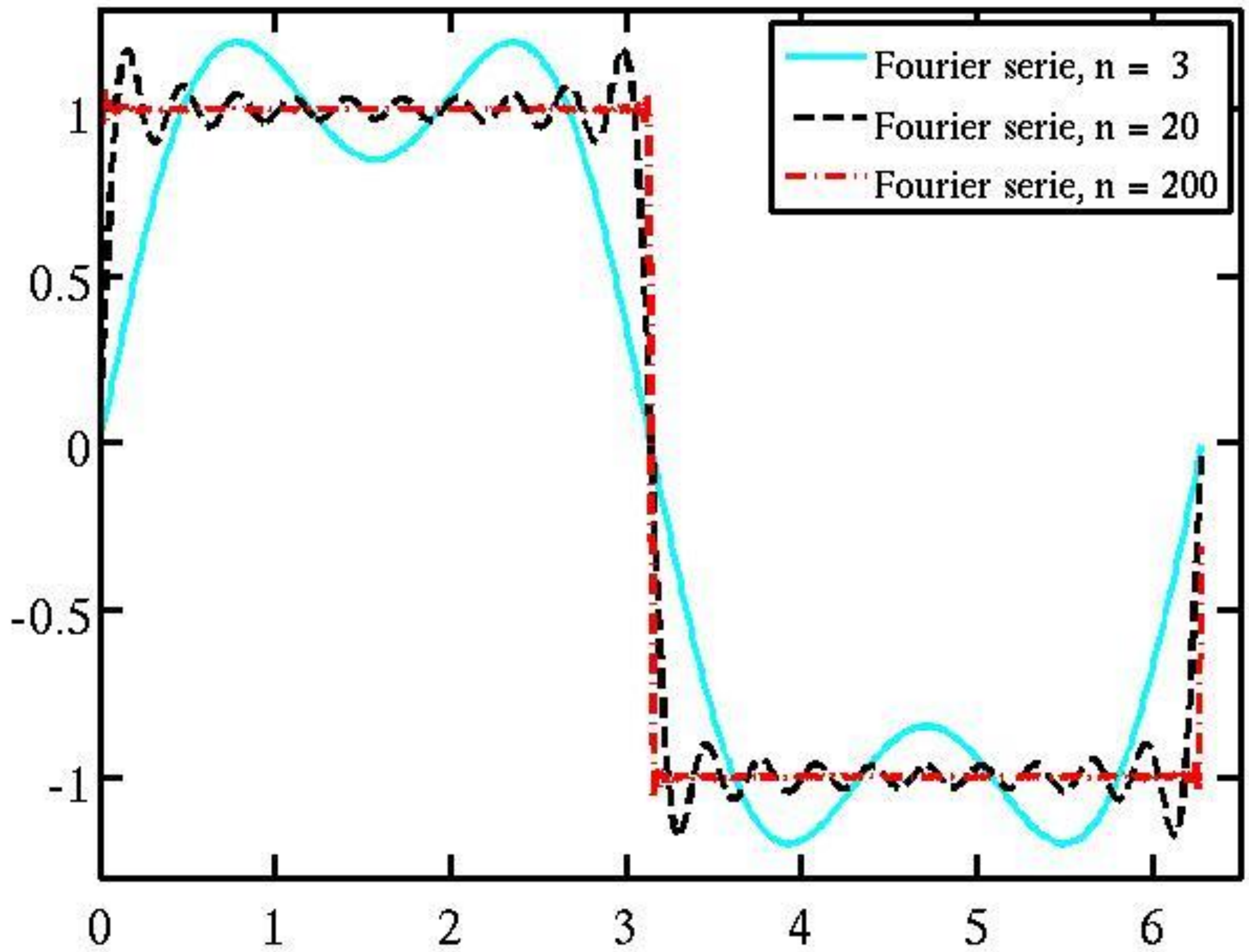
Fourier serier





Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren

Fourier serier



Kunskapsmål:

- Bestämma vågornas interferensminima och maxima från två eller flera ljuskällor
- Beräkna mekaniska vågors egenskaper
- Bestämma formen av stående vågor
- Se förbindelsen mellan ljusets våg- och partikelnatur

Tack för deltagande i kurserna!

Helsingfors Universitet
Institutionen för fysik
T. Ahlgren