

23. Elektromagnetisk strålning

Kunskapsmål:

- Kunna beräkna 3D elektriska och magnetiska strålningsfält som produceras av en accelererad laddning
- Matematiskt relatera perioden, våglängden och hastigheten för en elektromagnetisk våg av sinustyp, och relatera energiflödet med amplituden
- Förklara fysikaliska fenomen där återstrålning sker
- Matematiskt relatera brytningsindex, frekvens, hastighet och brytning av ljus i material

Vågrörelse

Klassiska vågor behöver ett medium via vilken den rör sig. Partiklar som har flyttats bort från sina jämviktspositioner i ett elastiskt medium, återvänder dit.

Alltså, vågorna transporterar inte materia utan energi.

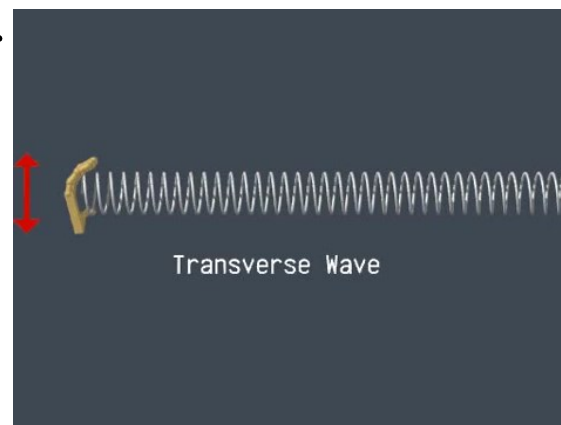
Man brukar skilja på två olika vågtyper

Transversella:

störningen från jämviktspositionen

Är vinkelrät mot vågens färdriktning.

Ex. vattenvågor

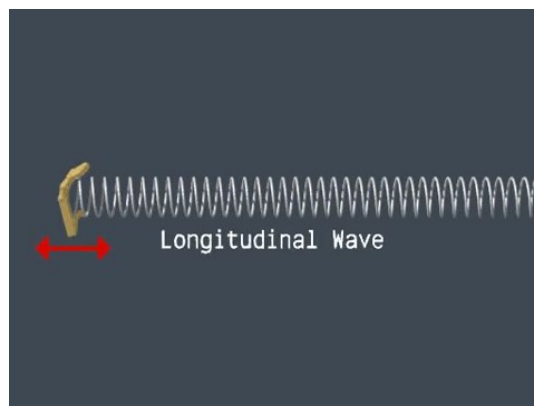


Longitudinella:

störningen parallell till

Vågens färdriktning.

Ex. ljudvågor



Vågrörelse

En punkt på en transversell våg går den upp och ner, och tiden från att punkten har maximihöjd tills den igen har maximihöjd kallas för **perioden T**

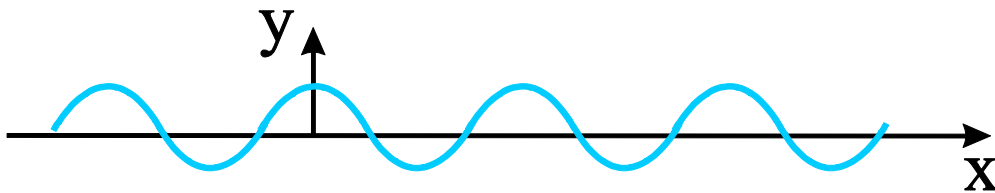
Frekvensen f är hur många gånger den når maxima per sekund, $f = 1/T$

Avståndet mellan topparna kallas **våglängd λ**

Hastigheten för en våg är:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$





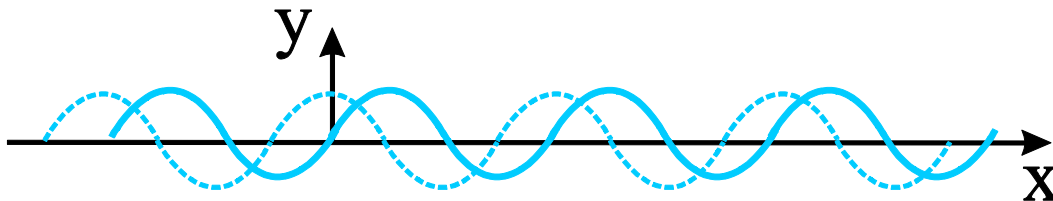
$$y(0,t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

vinkelhastighet

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

fasvinkel

$$\phi$$



Efter en tid: $\Delta t = x/v$

$$y(0,t) = y(x, t + \Delta t) \Rightarrow y(0, t - \Delta t) = y(x, t)$$

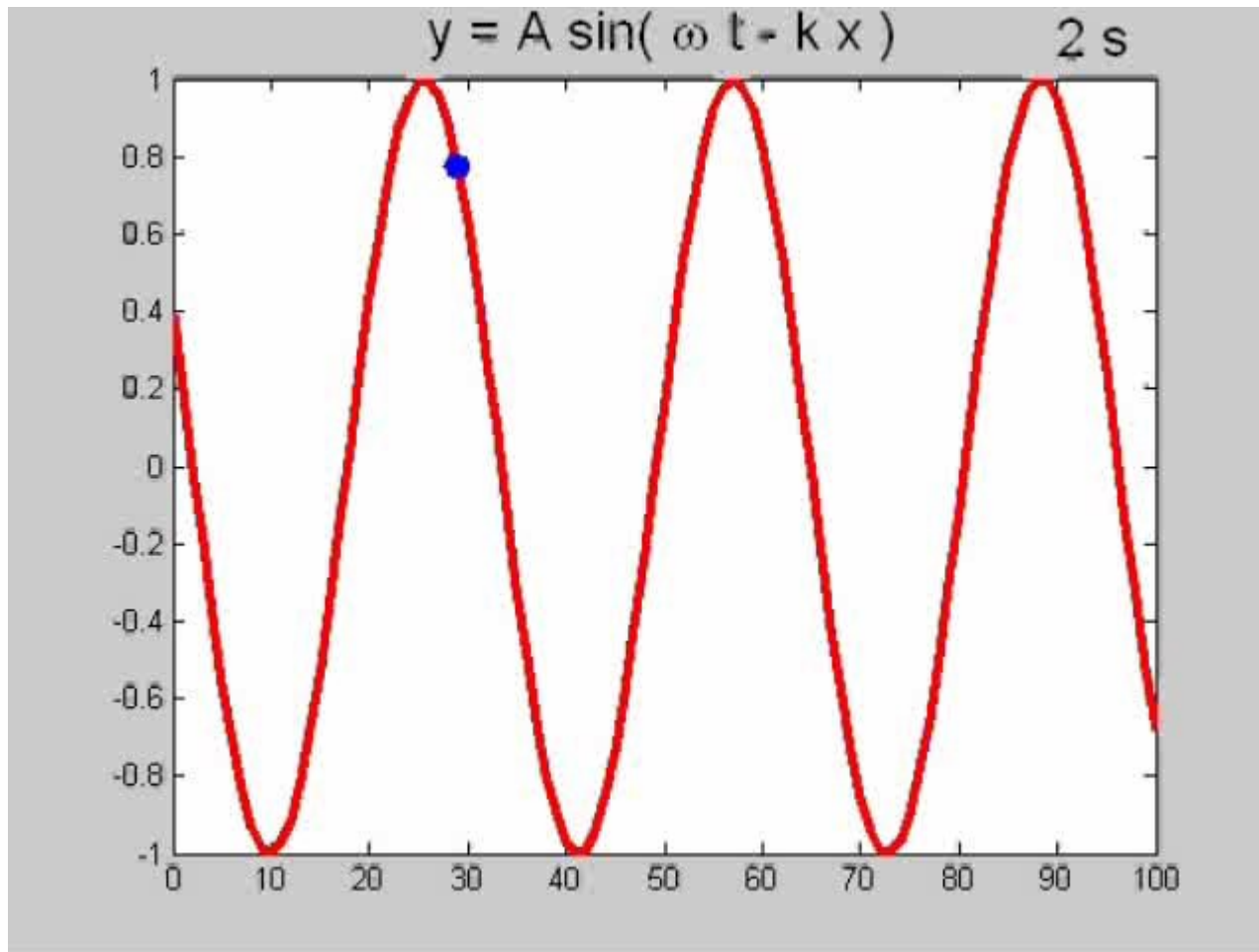
$$y(0, t - \Delta t) = A \sin[\omega(t - \Delta t) + \phi] = A \sin[\omega t - \frac{\omega}{v} x + \phi]$$

Def: **vågatal** $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi \cdot f}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$



$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \phi)$$





Vågrörelse

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \phi)$$

$$\omega t - kx + \phi = \text{konstant} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\omega t}{k} + \frac{\phi}{k} - \frac{\text{konstant}}{k}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\lambda f}{2\pi} = \lambda f \quad \text{i } +x \text{ riktning}$$



Visa att ekvationen
är en lösning till
vågekvationen:

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \phi)$$

$$\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = v^2 \frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{dy}{dx} = -kA \cos(\omega t - kx + \phi)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -k^2 A \sin(\omega t - kx + \phi)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega A \cos(\omega t - kx + \phi)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t - kx + \phi)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = v^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$



Maxwells ekvationer

- ▶ Gauss lag för elektricitet:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{\sum q_{inne}}{\epsilon_0}$$

- ▶ Gauss lag för magnetism:

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$$

- ▶ Faradays lag:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

- ▶ Amperes lag (ofullständig):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{genom}$$



- ▶ De fyra kompletta Maxwells ekvationerna ger en fullständig beskrivning av elektriska och magnetiska fält i rummet
- ▶ Vi saknade ännu en del av den fjärde ekvationen, Amperes lag
- ▶ Vi såg att Faradays lag uttryckte sambandet mellan ett varierande magnetiskt fält och en inducerad ström
- ▶ Kunde det vara så, att ett varierande elektriskt fält skulle på motsvarande sätt ge upphov till ett magnetfält?

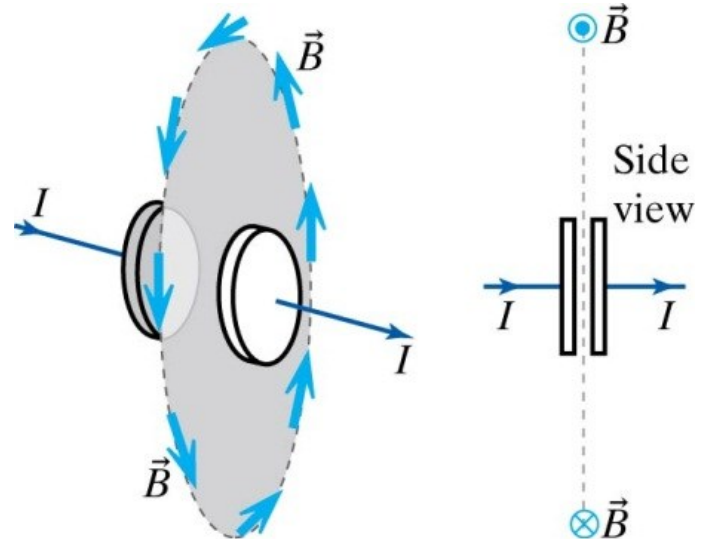


Ampere-Maxwell lagen

- ▶ Om vi tillämpar Amperes lag på en krets med en kondensator, kommer vi att stöta på ett problem.
- ▶ Enligt Amperes lag är

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{genom}$$

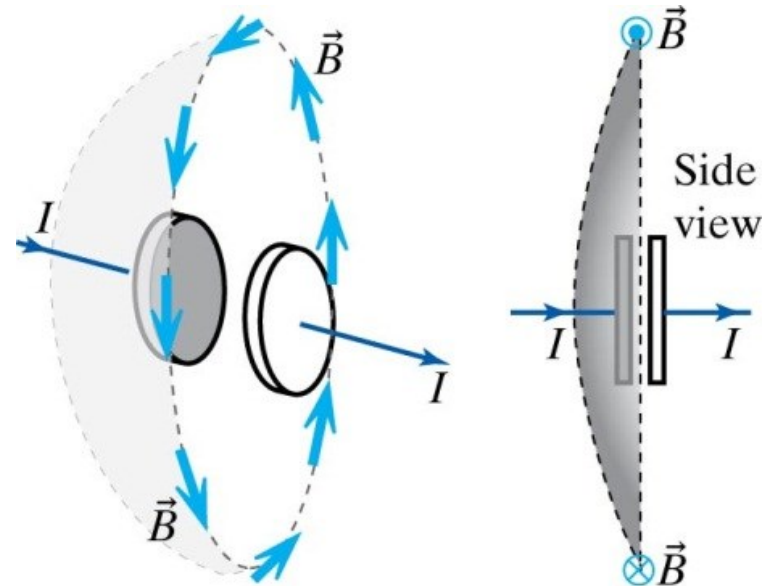
- ▶ Om vi väljer integrationskurvan och ytan som på bilden, går det ingen ström genom ytan, så enligt det skulle vi ha $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$



- ▶ Om vi däremot väljer en yta som buktar utåt lite som på bilden nedan, får vi ett annat resultat
- ▶ Nu går strömmen i ledningen genom integrationsytan, och enligt det borde vi alltså ha

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

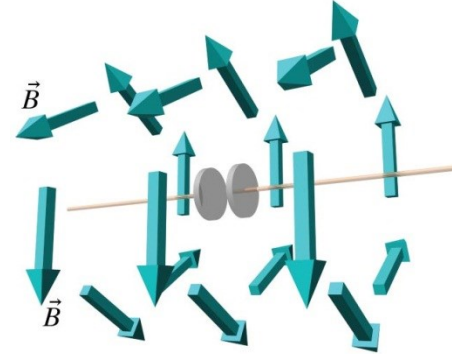
- ▶ Vi får en motsägelse.
- ▶ Vilket är det rätta svaret?



Vad saknas från Amperes lag?

- ▶ Enligt Biot-Savarts lag ges magnetfältet kring en lång ledning av

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r}$$



- ▶ Det här är ungefär magnetfältet eftersom kondensatorn utgör endast ett mycket litet brott i ledningen.
- ▶ Då får vi:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r} 2\pi r = \mu_0 I$$

- ▶ Detta stämmer överens med det senare resultatet, men vi har ett problem med Amperes lag...



Varierande elektriskt fält

- ▶ Lösningen fås genom att inse parallellen med ett varierande magnetfält
- ▶ I kondensatorn har vi ett varierande elfält, eftersom fältet växer i styrka då kondensatorn laddas
- ▶ Maxwell gissade att detta varierande elfält kunde ge upphov till magnetfältet runt kondensatorn
- ▶ Analogt med Faradays lag gissar vi att tidsförändringen av elektriska flödet i ett område är relaterat till integralen av magnetiska fältet runt området

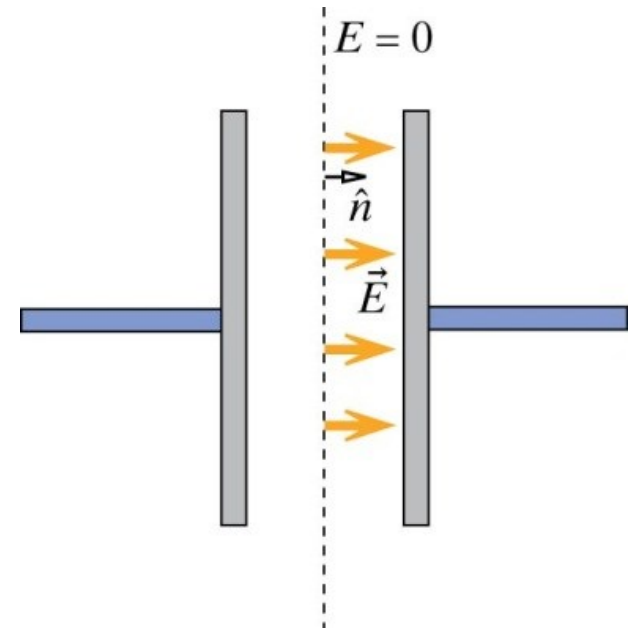


Varierande elektriskt flöde

- ▶ Elektriska flödet ges av uttrycket

$$\Phi_e = \int \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

- ▶ Kondensatorn på bilden har ett elfält parallellt med $\hat{n}$ och med styrkan $\left(\frac{Q}{A}\right) / \epsilon_0$, där Q är laddningen i kondensatorn, och A är dess area. Utanför kondensatorn är elfältet ungefär noll



➡
$$\Phi_e = \left(\frac{Q}{A\epsilon_0}\right) A \cos 0^\circ = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Elektriska flödet: $\Phi_e = \left(\frac{Q}{A\epsilon_0} \right) A \cos 0^\circ = \frac{Q}{\epsilon_0}$

- Tidsderivatan av Q får vi genom att inse att laddningen ΔQ som flödar till kondensatorn under tiden Δt är lika med $I\Delta t$. Då är

$$\frac{dQ}{dt} = I$$

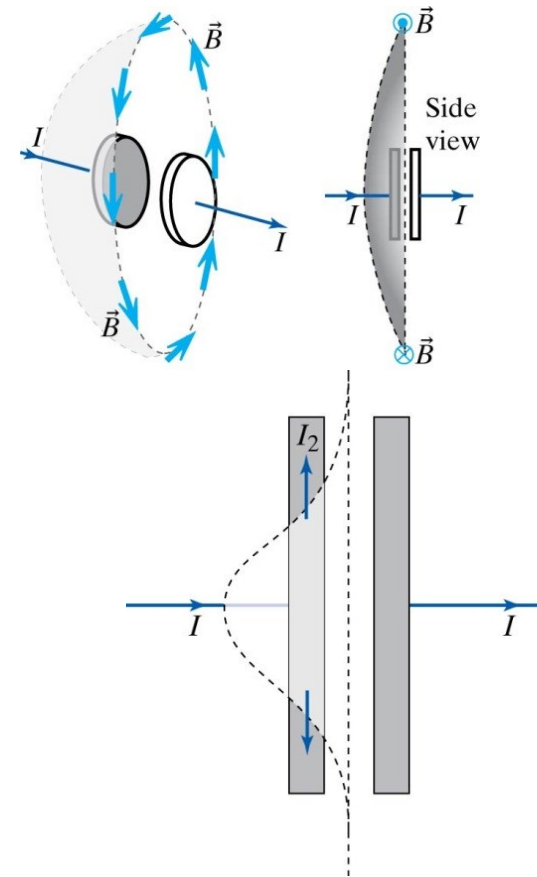
➡ $\frac{d\Phi_e}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{\epsilon_0} \right) = \frac{I}{\epsilon_0}$



Ampere-Maxwell lagen

- ▶ Vi kan nu skriva
Ampere-Maxwell lagen:
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left[I_{genom} + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \right]$$

- ▶ Lagen gäller i båda situationerna vi tidigare ritade med kondensatorn
- ▶ Den gäller också i helt allmänna fall, t.ex. för en integrationsyta som på bilden till höger



Maxwells lagar (i integral form)

- ▶ Gauss lag för elektricitet: $\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{\sum q_{inne}}{\epsilon_0}$
- ▶ Gauss lag för magnetism: $\oint \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$
- ▶ Faradays lag: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA$
- ▶ Ampere-Maxwells lag: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left[\sum I_{genom} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot \hat{n} dA \right]$



Elektrisk och magnetisk kraft

- ▶ För en fullständig beskrivning av sambanden mellan elektricitet och magnetism behöver vi, förutom de fyra Maxwells ekvationerna, också Lorentz ekvation för krafterna som elektriska och magnetiska fält utövar på laddningar:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$(d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} \text{ för strömmar})$$



Maxwells ekvationer

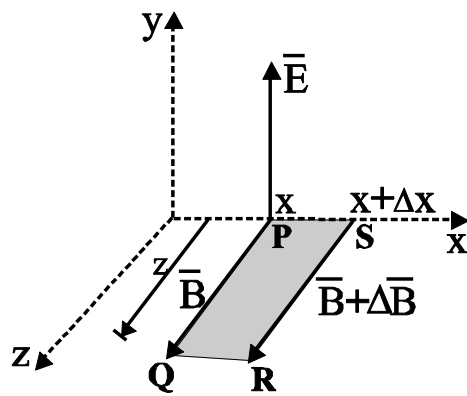
- 1) Gauss lag (elektrostatik) $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon}$
- 2) Gauss lag (magnetism) $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$
- 3) Faradays lag $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} \right)$
- 4) Ampere-Maxwells lag $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \left(I + \epsilon \frac{d}{dt} \left(\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} \right) \right)$

Exempel: se på situationen då inga laddningar betraktas

→ 3) Och 4) blir då: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} \right) = -\frac{d\Phi_M}{dt}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\epsilon \frac{d}{dt} \left(\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} \right) = \mu\epsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$





$$1) \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\epsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$2) \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt}$$

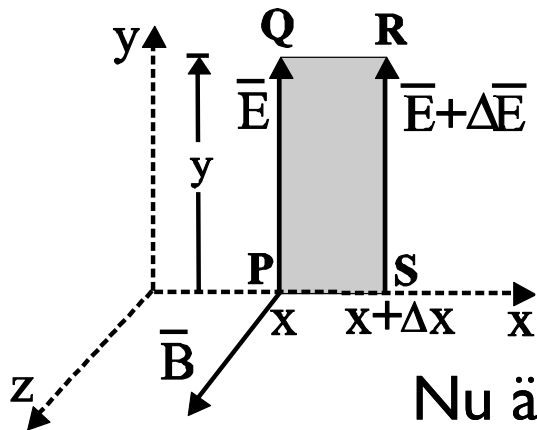
Elfältet ändrar med tiden genom
det gråa området

$$1) \mu\epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu\epsilon \frac{d(E \cdot \text{Area})}{dt} = \mu\epsilon \text{Area} \frac{dE}{dt} = \mu\epsilon \Delta x \cdot z \frac{dE}{dt}$$

Detta inducerar ett magnetiskt fält runt det gråa området

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_P^Q B dl + \int_Q^R B dl + \int_R^S B dl + \int_S^P B dl = Bz - z(B + \Delta B) = -z\Delta B$$

$$\rightarrow -z\Delta B = \mu\epsilon \Delta x \cdot z \frac{dE}{dt} \rightarrow \frac{\delta B}{\delta x} = -\mu\epsilon \frac{\delta E}{\delta t}$$



$$1) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \rightarrow \frac{\delta B}{\delta x} = -\mu\epsilon \frac{\delta E}{\delta t}$$

$$2) \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt} \rightarrow \frac{\delta E}{\delta x} = -\frac{\delta B}{\delta t}$$

Nu ändrar magnetfältet genom arean

Tidsförändringen av det magnetiska flödet

$$2) \quad -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{d(B \cdot Area)}{dt} = -Area \frac{dB}{dt} = -\Delta x \cdot y \frac{dB}{dt}$$

Detta inducerar ett elektriskt fält runt det grå området

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_Q^P E dl + \int_P^S E dl + \int_S^R E dl + \int_R^Q E dl = -Ey + y(E + \Delta E) = y\Delta E$$

$$\rightarrow y\Delta E = -\Delta x \cdot y \frac{dB}{dt} \rightarrow \frac{\delta E}{\delta x} = -\frac{\delta B}{\delta t}$$



$$\begin{array}{lcl}
 \frac{\delta B}{\delta x} = -\mu\epsilon \frac{\delta E}{\delta t} & \bullet \frac{\delta}{\delta x} \rightarrow & \frac{\delta^2 B}{\delta x^2} = -\mu\epsilon \frac{\delta}{\delta x} \frac{\delta E}{\delta t} \\
 \frac{\delta E}{\delta x} = -\frac{\delta B}{\delta t} & \bullet \frac{\delta}{\delta t} \rightarrow & \frac{\delta}{\delta t} \frac{\delta E}{\delta x} = -\frac{\delta^2 B}{\delta t^2}
 \end{array}
 \Rightarrow \frac{\delta^2 B}{\delta t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\delta^2 B}{\delta x^2}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \frac{\delta B}{\delta x} = -\mu\epsilon \frac{\delta E}{\delta t} & \bullet \frac{\delta}{\delta t} \rightarrow & \frac{\delta}{\delta t} \frac{\delta B}{\delta x} = -\mu\epsilon \frac{\delta^2 E}{\delta t^2} \\
 \frac{\delta E}{\delta x} = -\frac{\delta B}{\delta t} & \bullet \frac{\delta}{\delta x} \rightarrow & \frac{\delta^2 E}{\delta x^2} = -\frac{\delta}{\delta x} \frac{\delta B}{\delta t}
 \end{array}
 \Rightarrow \frac{\delta^2 E}{\delta t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\delta^2 E}{\delta x^2}$$



$$\frac{\delta^2 B}{\delta t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\delta^2 B}{\delta x^2} \quad \frac{\delta^2 E}{\delta t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\delta^2 E}{\delta x^2}$$

Vågrörelseläran gav: $\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = v^2 \frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ Vågen rör sig i x-riktning med hastigheten $\mathbf{v}$

Jämför vi nu detta med ekvationerna ovan, får vi att B och E rör sig med hastigheten:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

I vakuum blir detta: **Samma som ljushastigheten!**

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 8.85419 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}}} \approx \underline{\underline{2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}}}$$

Ljus är elektromagnetisk vågrörelse

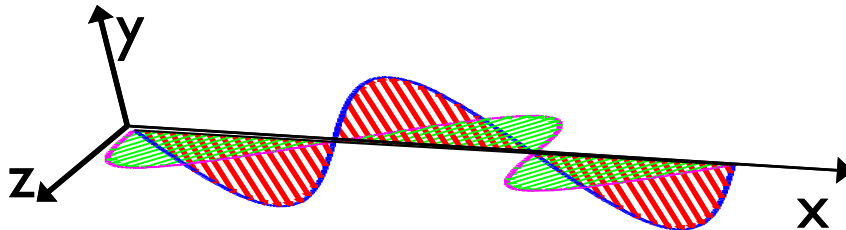


Elektromagnetiska vågor

$$\begin{aligned}\bar{E}(x,t) &= E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{j} \\ \bar{B}(x,t) &= B_0 \sin(kx - \omega t) \hat{k}\end{aligned}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\frac{\delta^2 E}{\delta t^2} = \frac{1}{\mu \epsilon} \frac{\delta^2 E}{\delta x^2} \quad \frac{\delta^2 B}{\delta t^2} = \frac{1}{\mu \epsilon} \frac{\delta^2 B}{\delta x^2}$$



$\bar{v}$ är i riktningen $\bar{E} \times \bar{B}$

Vad är riktningen för B i en EM-våg med hastigheten $\bar{v} = (0, c, 0)$
och elfältet $\bar{E} = (0, 0, E)$



Vi fick tidigare: $\frac{\delta E}{\delta x} = -\frac{\delta B}{\delta t}$

$$\overline{E}(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{j}$$

$$\overline{B}(x, t) = B_0 \sin(kx - \omega t) \hat{k}$$

Vi deriverar elfältet med avseende av x
och magnetfältet med avseende av t

$$\rightarrow |E_0| k \cos(kx - \omega t) = -|B_0|(-\omega) \cos(kx - \omega t)$$



$$|E_0| = \frac{\omega}{k} |B_0| = c |B_0|$$

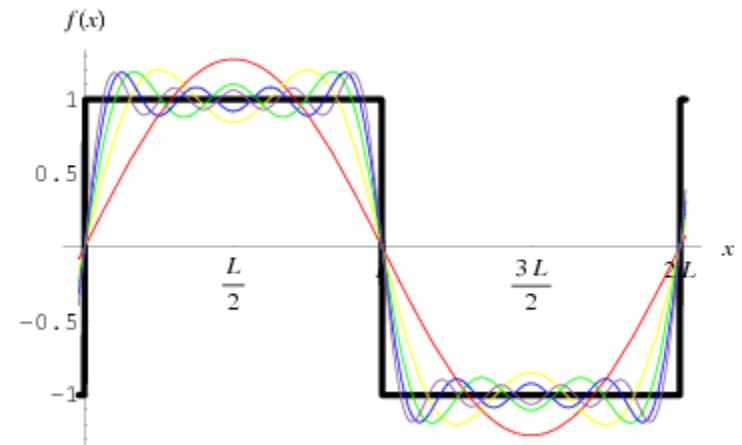
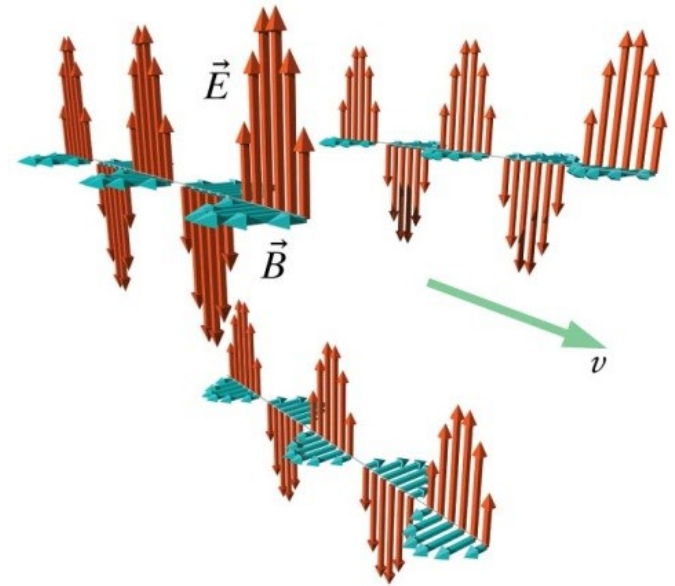
Magnetfältets storlek är alltså
elfältet dividerat med ljusets
hastighet c

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$



Andra lösningar till vågfunktionen

- ▶ De trigonometriska funktionerna utgör inte den enda möjliga lösningen till vågfunktionen
- ▶ Vilken som helst vågform som består av korta pulser av varierande magnitud skulle också uppfylla ekvationerna
 - ▶ T.ex. en fyrkantsvåg



Det Elektromagnetiska spektret

Energi (eV)	1.8	2.1	2.5	3.1
Våglängd i vakuum (nm)	700	600	500	400

Faradays lag, Amperes lag

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$



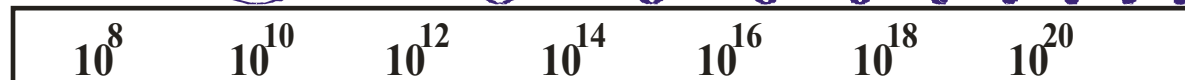
Synligt
ljus

Våglängd i vakuum (m)



λ

Frekvens (Hz)



$$c = \lambda f$$

f

Radio ← Mikro vågor → Ultraviolett ← Gammastrålning
TV → ← Infraröd → ← Röntgenstrålning →

Energi (eV)



$$E = hf$$

