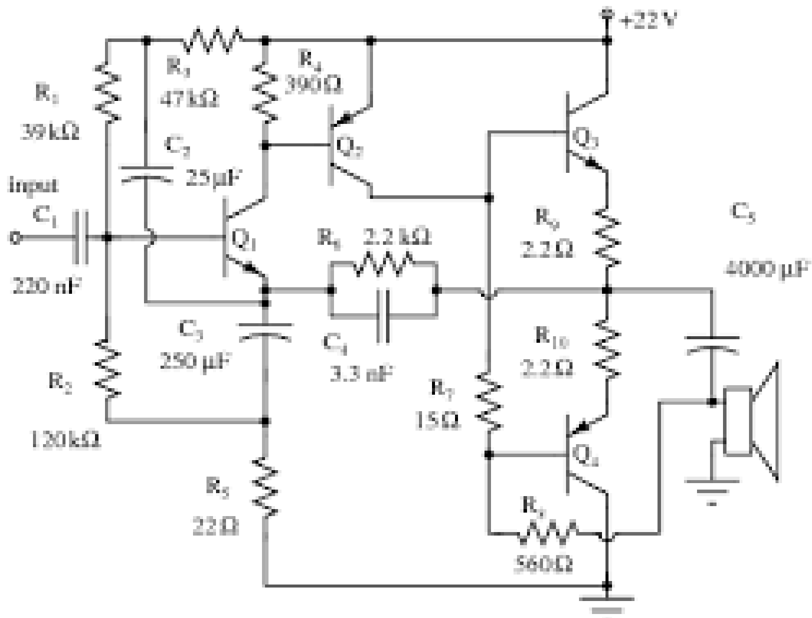
19 Kretselement

Lärandemål:

- Kunna kvalitativt (beskriva, förklara) och kvantitativt (beräkna) hur en krets med en kondensator fungerar
- Kunna analysera en krets med hjälp av makroskopiska storheter såsom resistans och kapacitans

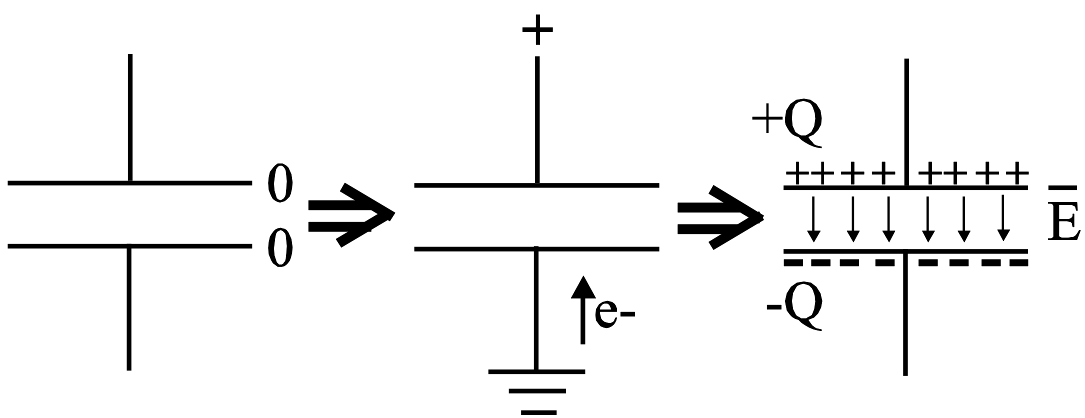
- I kretsar som har kondensatorer är strömmen tidsberoende

- Analysera kretsar med många olika komponenter



Kondensatorer

Två ledarplattor som inte är i elektrisk kontakt med varandra



Laddning: $\pm Q$

Elfältet: $E \propto Q$

Elfältet konstant mellan plattorna ➔ Elektriska potentialen: $V = Ed$

där d är avståndet mellan plattorna ➔ $V \propto Q$

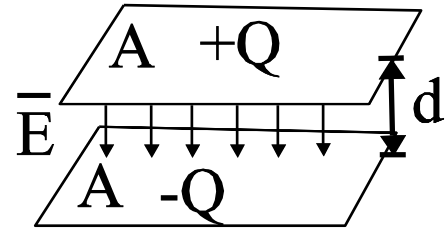
➔ $\boxed{C = \dfrac{Q}{V}}$

Proportionalitetskonstanten: C kallas **kapacitans**
[C] = C/V = F (farad)

Systemet kallas för: **Kondensator**

Två kondensatorplattor har laddningen **Q**, arean **A** och avståndet mellan plattorna är **d**. Beräkna kapacitansen för systemet

$$C = \frac{Q}{V}$$



Ifall avståndet mellan plattorna är liten, är elfältet nästan konstant däremellan: $E = \sigma / \varepsilon$

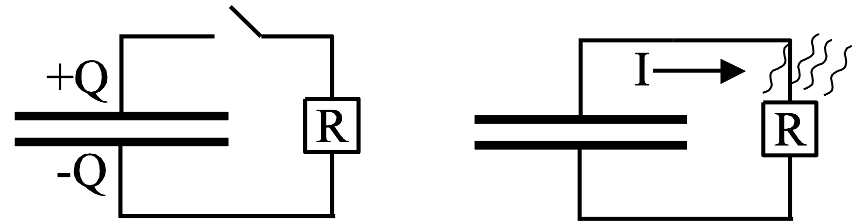
Elektriska potentialen mellan plattorna: $V = \int \bar{E} \bullet d\bar{l} = Ed = \dfrac{Qd}{A\varepsilon}$

Kapacitansens definition ger kapacitansen för två kondensatorplattor

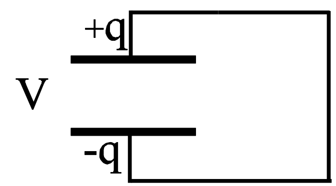
$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{QA\varepsilon}{Qd} = \frac{\varepsilon A}{d}}$$

Kapacitansen beror endast av **arean**, **avståndet** och **mediet** mellan plattorna

Energi lagras i en kondensator



Arbete att för att ladda kondensatorn
från q till q + Δq är: ΔW = VΔq



Totala energin för att ladda en kondensator från 0 till laddning Q är:

$$W_C = \int_0^Q V dq \overset{\left(C = \frac{q}{V}\right)}{=} \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Energin lagrad i en kondensator: $\boxed{W_C = \frac{1}{2} C V^2}$

Vi har två kondensatorplattor med arean 10 cm^2 på avståndet 1 mm från varandra i luft, ε_{luft} ~ 8.85x10^{-12} F/m.
Spänningen eller potentialen mellan plattorna är 12 V.

a) Beräkna kapacitansen för systemet

b) Beräkna laddningen på plattorna

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$V = \int \bar{E} \cdot \bar{d}l$$

a) Kapacitansen blir:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} = \frac{8.85\times 10^{-12}\,F/m \cdot 10(10^{-4})\,m^2}{10^{-3}\,m} \approx 10^{-11}\,F = \underline{\underline{10\,pF}}$$

b) Laddningen på vardera plattan är:

$$Q = CV \approx 10^{-11}\,F \cdot 12\,V = 1.2\times 10^{-10}\,C = \underline{\underline{0.12\,nC}}$$

Beräkna kapacitansen för en laddad sfär med radien **R**

Kapacitansens definition ger:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon R}} = \underline{4\pi\varepsilon R}$$

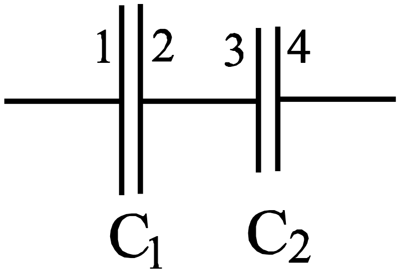
Kapacitansen för hela jorden blir ungefär:

$$C \approx 4 \cdot 3.14 \cdot 8.85x10^{-12} F/m \cdot 6.4 \times 10^{6} m \approx \underline{\underline{7.1 \times 10^{-4} F}}$$

En liten extra laddning: $\Delta Q = 10^{-3}$ C
ger potentialförändringen på jorden

$$\Delta V = \frac{\Delta Q}{C} \approx \underline{\underline{1V}}$$

Kondensatorer kopplade i serie



Vi kopplar två kondensatorer $\mathbf{C_1}$ och $\mathbf{C_2}$ i serie:

Vi ser att ifall kondensatorplattan **1** får laddningen +Q, blir laddningen på platta **2**: -Q (laddning bevaras)

Vidare får då platta **3** laddningen +Q (2 och 3 isolerade, summaladdning lika med noll), och platta **4**: -Q.

Potentialskillnaden mellan de två kondensatorplattorna blir: $V_1 = \dfrac{Q}{C_1} \quad V_2 = \dfrac{Q}{C_2}$

Potentialskillnaden över båda kondensatorerna: $V = V_1 + V_2$

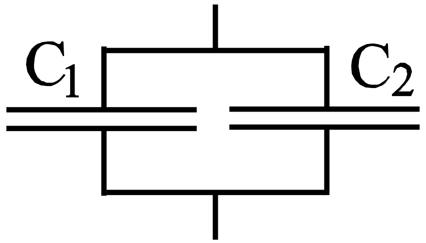
Kondensatorns definition ger: $\dfrac{Q}{C} = V = V_1 + V_2 = \dfrac{Q}{C_1} + \dfrac{Q}{C_2}$

→ **Kondensatorer kopplade i serie**

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots}$$

Kondensatorer kopplade parallellt

Ifall två kondensatorer $\mathbf{C_1}$ och $\mathbf{C_2}$ är parallellt kopplade



Potentialskillnaden V är den samma för båda kondensatorerna, vilket ger att laddningarna på vardera kondensatorn blir:

$$Q_1 = C_1 V \qquad Q_2 = C_2 V$$

Summaladdningen och därmed också laddningen för den ersättande kondensatorn är: $Q = Q_1 + Q_2$, vilket ger: $CV = C_1V + C_2V$

$\longrightarrow$

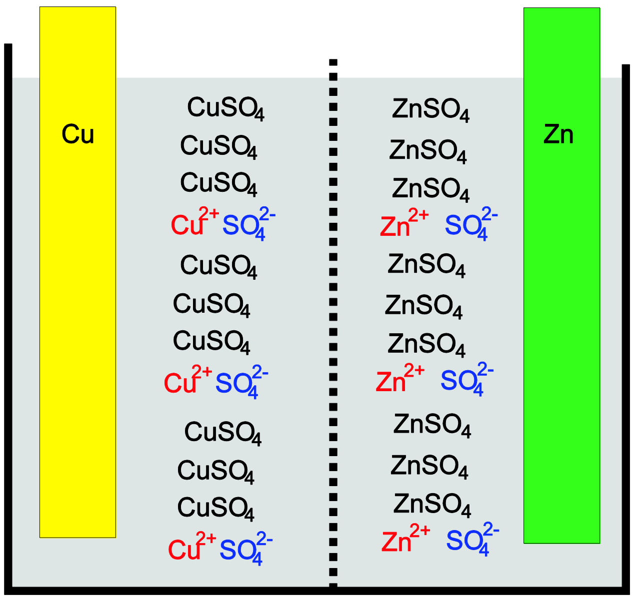
Kondensatorer kopplade parallellt $\boxed{C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots}$

Batteri

Hur fungerar ett batteri?

→ Ett batteri omvandlar kemisk energi till elektrisk energi

Det första batteriet gjordes av Alessandro Volta genom att placera en våt handduk mellan en koppar och en zinkplatta



$CuSO_4$ kopparsulfat $\quad$ $ZnSO_4$ zinksulfat

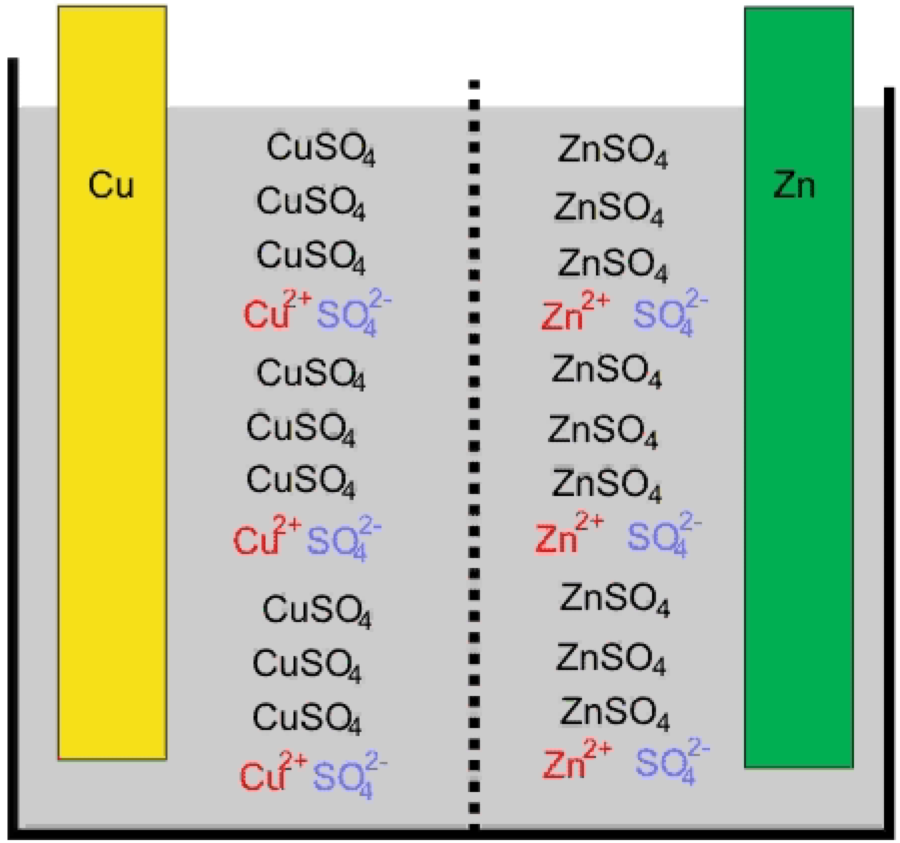
Reaktion: $Zn + Cu^{+2} \rightarrow Zn^{+2} + Cu$

$Cu \rightarrow Cu^{+2}$ kräver energi: 20.3 eV

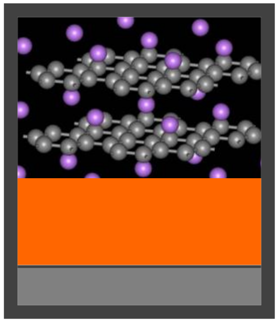
$Zn \rightarrow Zn^{+2}$ 18.0 eV

2.3 eV

Batteri



$$Cu^{+2}SO_4^{2-} \longrightarrow Zn^{+2}SO_4^{2-}$$



Li-jon

Grafit(Li) anod (+pol)

Li salt organisk lösning

$LiCoO_2$, katod (-pol)

Li-jon polymer

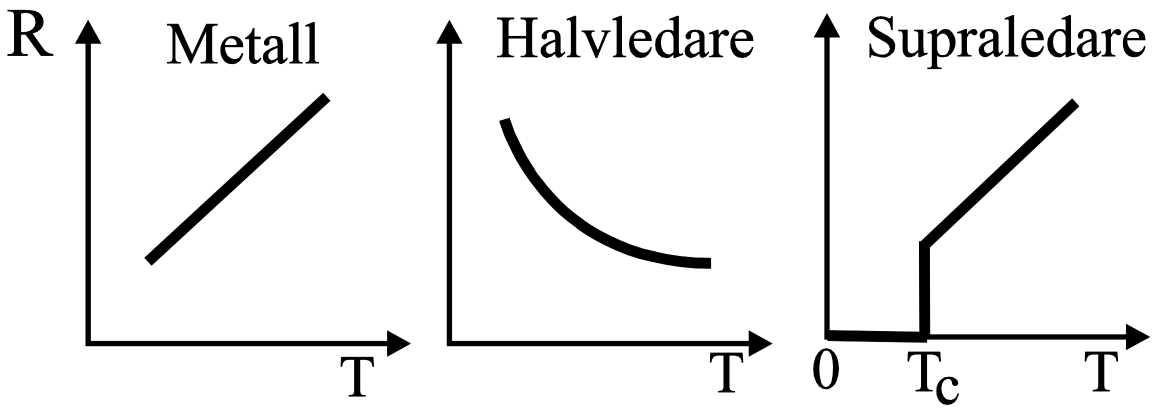
(Li-salt elektrolyte inte mera i organisk lösning, utan ersatt med en polymer, inget hölje behövs för att hålla en lösning)

	Energi /vikt (W·h/kg)	**Energi /volym** (W·h/L)	**Effekt /vikt** (kW/kg)	Laddnin-gseffek-tivitet %	**Energi /pris** (W·h/€)	Urladdning %/månad	Antal ladd-ningar
Li	280	300	400	-			0
Li-jon	100-160	250-360	250-340	80-90	1.5-3	8 (21°C) 15 (40°C) 31 (60°C)	1200
Li-jon polymer	130-200	300	**7100**	**99.8**	1.5-3	**5**	>1000

Elektriskt motstånd

Metaller är i allmänhet ohmiska och deras resistans beror bara av temperaturen (T): $R_{metall} = R(T)$

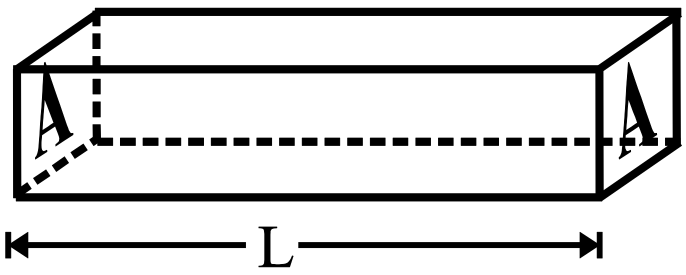
Icke ohmiska materials resistans beror förutom på temperaturen också av strömmen (I) som går genom materialet: $R = R(T,I)$



Resistansen allmänt oberoende av magnetfältet: R(M) = konstant, men undantag är GMR-material (Giant magnetoresistance) som används i hårdskivor, nobelpris 2007

Resistivitet

Sätter man en spänning V mellan en ohmisk ledare upptäcker man att strömmen är proportionellt till ledarens **area A** och inverst proportionellt till **längden L**. Proportionalitetskonstanten kallas för materialets **resistivitet** ρ, [ρ] = Ωm



$$I \propto \frac{A}{L}$$

$$R = \frac{V}{I}$$

$$\Rightarrow \quad R \propto \frac{L}{A}$$

$$\boxed{R = \rho \frac{L}{A}}$$

Konduktivitet: $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$

	Ämne	Resistivitet (Ωm)
Ledare	Silver (Ag)	1.5×10^{-8}
Halvledare	Kisel (Si)	30
Isolator	Glas	10^{11}-10^{13}

Resistansens temperaturberoende

Resistansen för en metall ökar vanligtvis lineärt som en funktion av temperaturen

$$\boxed{\rho(T) = \rho_0\left[1 + \alpha(T - T_0)\right]}$$

där ρ_0 är resistiviteten vid temperaturen T_0

Material	α [K^{-1}]
Aluminium	0.0039
Grafit	-0.0005
Koppar	0.0393
Konstantan 60% Cu, 40% Ni	0.00001

En aluminiumtråds resistans vid 0ºC är 100 Ω.
Vad är dess resistans vid 50ºC?

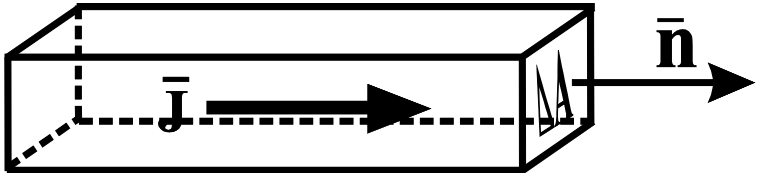
$$\begin{aligned} R_{50} &= R_0\left[1 + \alpha(50 - 0)\right] \\ &= 100\Omega\left[1 + 0.0039 \cdot 50\right] \\ &\approx \underline{\underline{120\Omega}} \end{aligned}$$

Strömdensitet

Strömdensiteten definieras som ström dividerat med den vinkelräta arean som strömmen går igenom

$$J = \frac{I}{Area}$$

$$\boxed{\bar{J} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta A} \bar{n}}$$

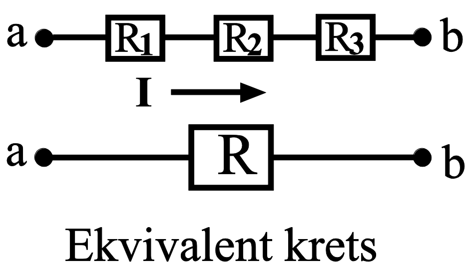


Den totala strömmen som går genom en ledare fås då genom att integrera strömdensiteten över hela tvärsnittet

$$\boxed{I = \oint_{Area} \bar{J} \bullet \overline{dA}}$$

Motstånd kopplade i serie

Vi har tre motstånd kopplade i **serie**



Vi vill ersätta de tre motstånd med ett motstånd som ger samma resistans

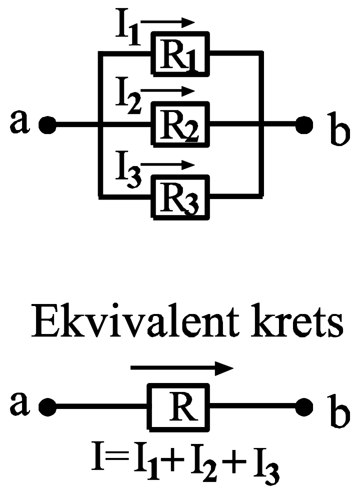
Effekten som förbrukas i de tre motstånd då en ström I går

genom kretsen är: $P_{totalt} = R_1 I^2 + R_2 I^2 + R_3 I^2 = (R_1 + R_2 + R_3) I^2$

Denna effekten skall vara lika med ekvivalenta kretsens: $P_{totalt} = RI^2$

$\longrightarrow$ Motstånd **kopplade i serie:** $\boxed{R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_N}$

Motstånd kopplade parallellt



Spänningsskillnaden samma för alla motstånd

⟶ Strömmen över varje motstånd: $I_1 = V_{ab} / R_1$

$$I_2 = V_{ab} / R_2$$

$$I_3 = V_{ab} / R_3$$

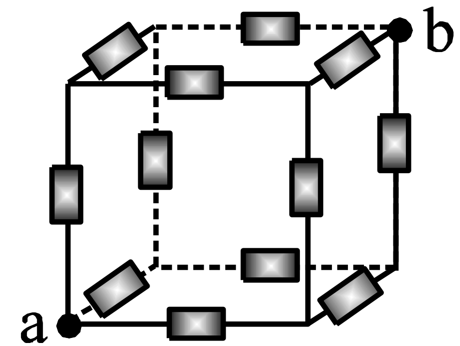
Samma ström genom den ekvivalenta kretsen

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \longrightarrow I = \frac{V_{ab}}{R} = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} + \frac{V_{ab}}{R_3}$$

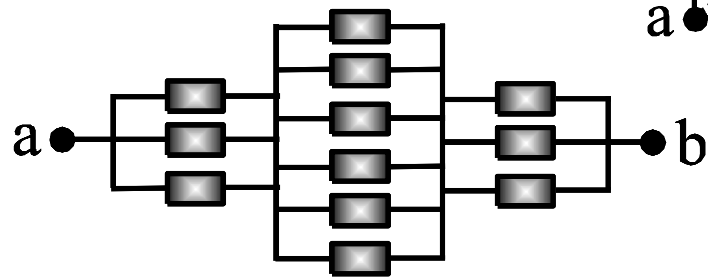
⟶ Motstånd **kopplade parallellt:**

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots = \sum_i \frac{1}{R_i}}$$

Tolv likadana motstånd med resistansen ***R*** är kopp- lade till en kubisk krets. Vad är resistansen mellan de diagonalt motstående hörnpunkterna **a** och **b**?



En ekvivalent krets:



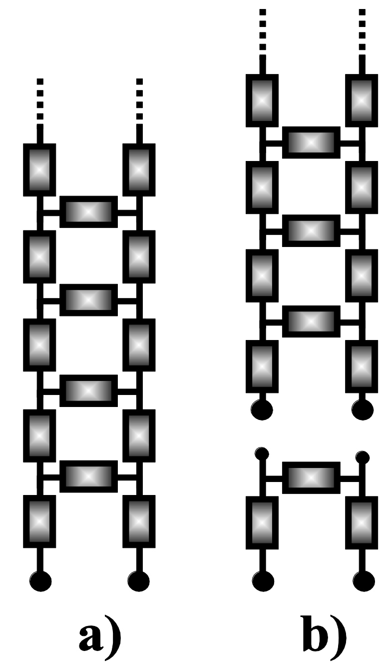
→ De tre motstånden nära **a** och **b** är parallellt kopplade, och motsvaras av resistansen: ***R***/3

→ De 6 motstånden i mitten motsvaras av: ***R***/6

→ Resistansen blir:

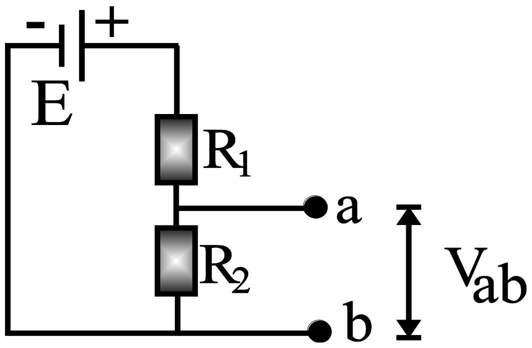
$$R_{ab} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \underline{\frac{5}{6}R}$$

Vad är den totala resistansen mellan de svarta cirklarna för den oändliga stegen av 1 W motstånd som är avbildad i figur **a)**?
Tips: betrakta figur **b)** där man har adderat ytterligare tre motstånd som är parallellt kopplade med den oändliga stegen.



svarta cirklarna=mustat ympyrät, oändliga stegen=ääretön tikapuu, motstånd=vastus, tips=vihje, betrakta=katso, adderat ytterligare=lisätty vielä

Spänningsfördelare



Spänningen för spänningskällan betecknas med E (V, volt)

$$V_{ab} = R_2 I = E\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

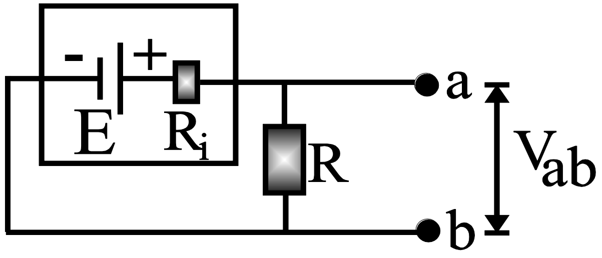
$0 < V_{ab} < E$

Strömmen i kretsen:

$$E = R \cdot I = (R_1 + R_2)I$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Realistiskt batteri

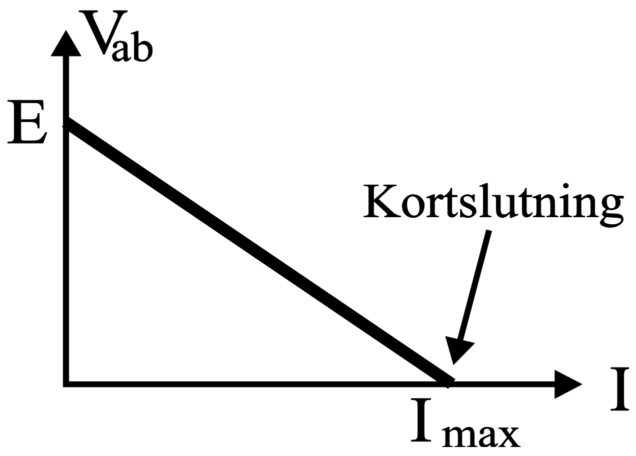


Strömmen i kretsen:

$$E = (R + R_i)I = R \cdot I + R_i I$$

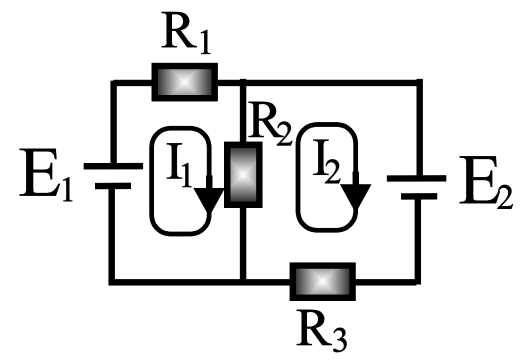
$$= V_{ab} + R_i I$$

$$\Rightarrow \quad V_{ab} = E - R_i I$$

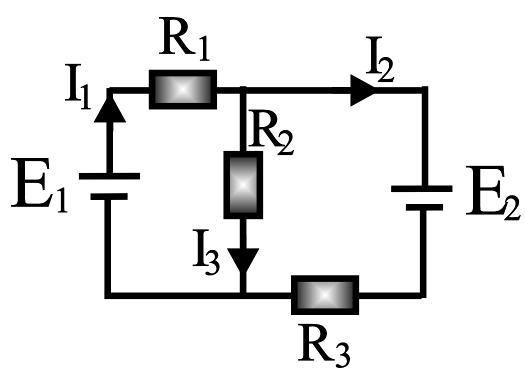


Beräkna strömmen genom varje motstånd. E_1 = 12.0 V, E_2 = 8.0 V,

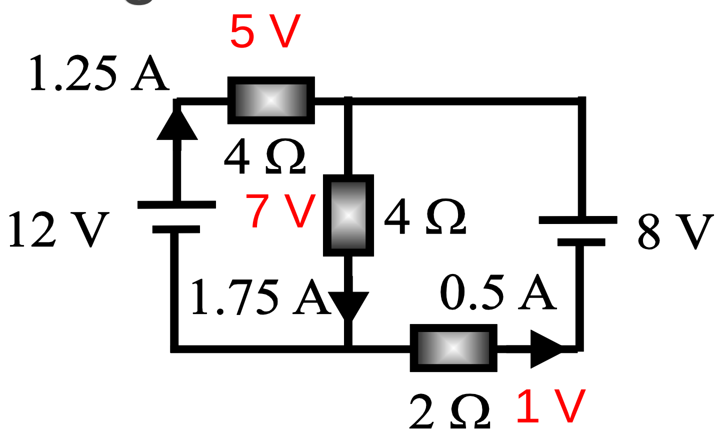
R_1 = 4.0 Ω, R_2 = 4.0 Ω, R_3 = 2.0 Ω



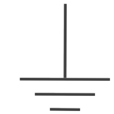
Alternativ lösning med hjälp av Kirschhoffs första lag



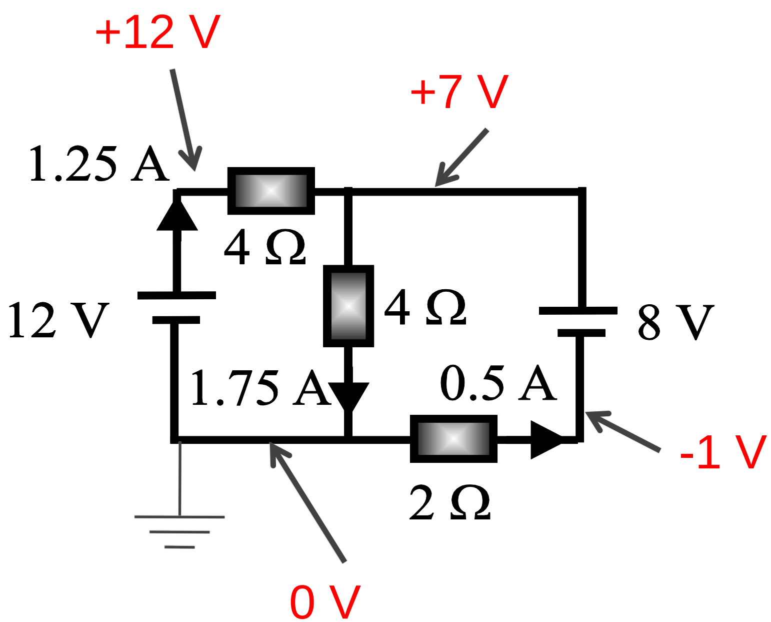
Jordning



$$V = R \cdot I$$


Jord

Jordning av en krets påverkar inte kretsens strömmar eller spänningsskillnader i <u>normala förhållanden</u>



Jordning av en krets har två funktioner

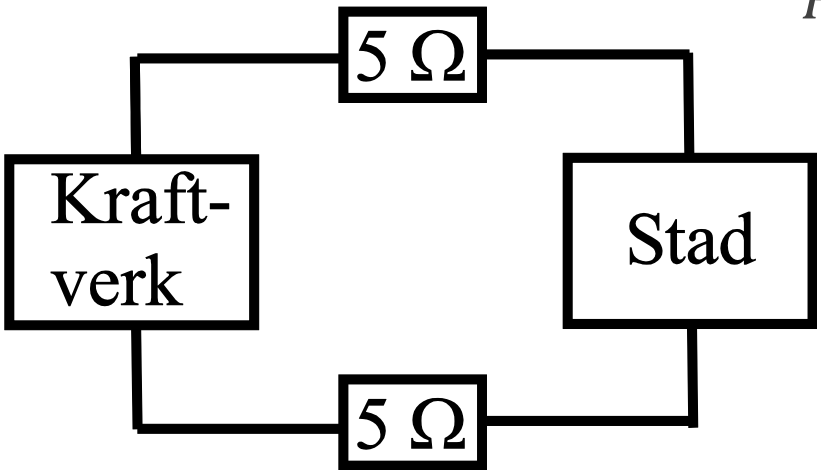
1. Bestämma kretsars referens spänning (kan koppla ihop kretsar)
2. Ifall kretsen fungerar fel, förhindrar människor från att få ström genom sig och dö eller skada sig

En stad behöver elektrisk effekt på 100 MW. Beräkna strömmen i ledningarna mellan staden och kraftverket och hur mycket effekt som går förlorad i ledningarna, ifall spänningen över ledningarna är:

$$P = IV$$

$$P = I^2 R$$

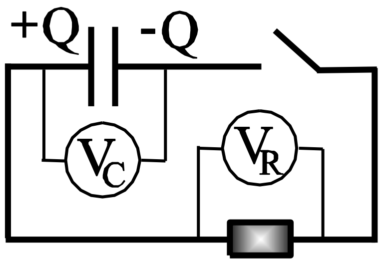
a) 2.5×10^5 V
b) 1.0×10^4 V



R-C kretsar

Hittills tittat bara på tidsoberoende system (V, I är konstant)

Kontakten först bruten och kondensatorn är laddad (t=0)



En RC-krets

t = 0

Kondensatorn: $V_C = \dfrac{Q}{C}$

Motståndet: $V_R = 0$

t > 0

Laddningen på kondensatorn minskar: $\Delta q < 0$

Strömmen genom motståndet: $I = -\dfrac{dq}{dt}$

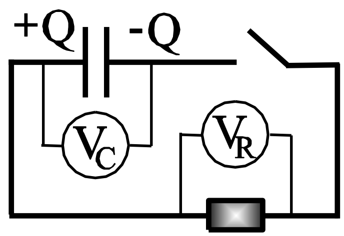
Spänningen över komponenterna:

$$V_C(t) = \frac{q}{C} \qquad V_R(t) = RI = -R\frac{dq}{dt}$$

Kirchhoffs II lag: (strömmen moturs)

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0$$

R-C kretsar



Kirchhoffs II lag: (strömmen moturs)

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0$$

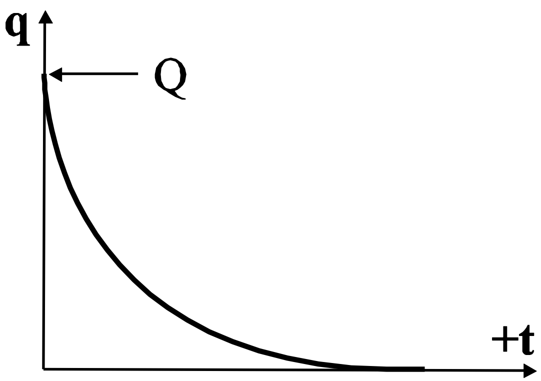
Differential-ekvation

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \;\Rightarrow\; \int_Q^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt' \;\Rightarrow\; \ln(q) - \ln(Q) = -\frac{t}{RC}$$

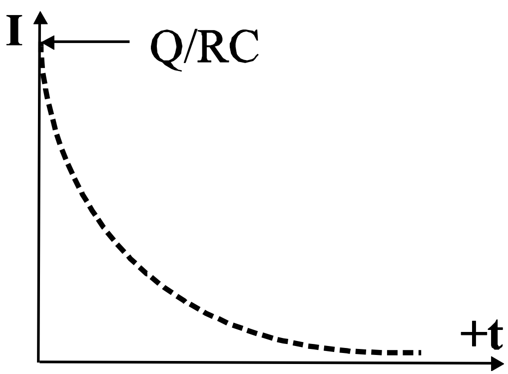
$$\Rightarrow\; \ln(q) - \ln(Q) = -\frac{t}{RC} \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\rightarrow \boxed{q(t) = Qe^{-\frac{t}{RC}}}$$

$$\boxed{I(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}}$$



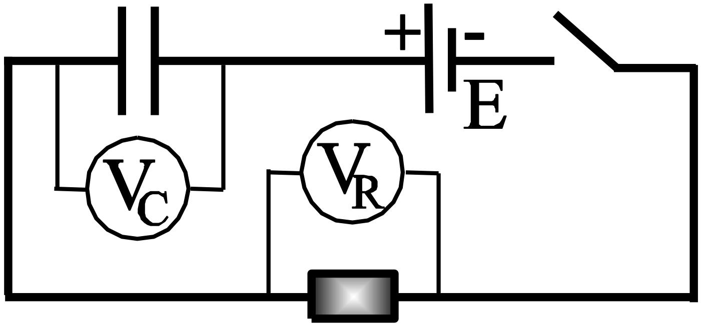
Laddningen på kondensatorn



Strömmen över motståndet

R-C kretsar

Laddning av en R-C krets



→ Kondensatorns laddning som en funktion av tiden

$$\boxed{q(t) = EC\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

Lärandemål:

- Kunna kvalitativt (beskriva, förklara) och kvantitativt (beräkna) hur en krets med en kondensator fungerar
- Kunna analysera en krets med hjälp av makroskopiska storheter såsom resistans och kapacitans