

15 Elfält från laddningsdistributioner (varausjakaumista)

Lärandemål:

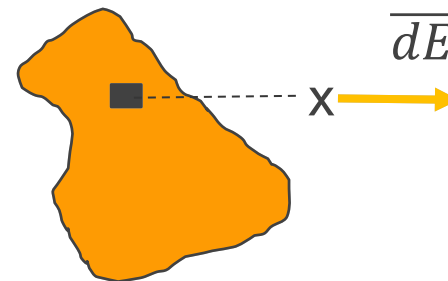
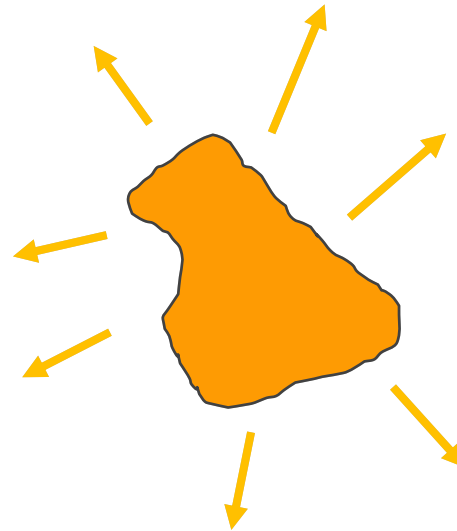
- Kunna bestämma integralen för att beräkna elfältet från en kontinuerlig laddningsdistribution vid vilken punkt som helst
- Kunna använda korrekta analytiska elfältsapproximationer för olika laddningsdistributioner
- Kunna numeriskt beräkna elfältet vid vilken punkt som helst från en laddningsdistribution



Det totala elfältet får man då man summerar ihop elfältet från alla punktladdningar

Hur skall man beräkna elfält från komplicerade laddningsdistributioner med "oändligt många punktladdningar"?

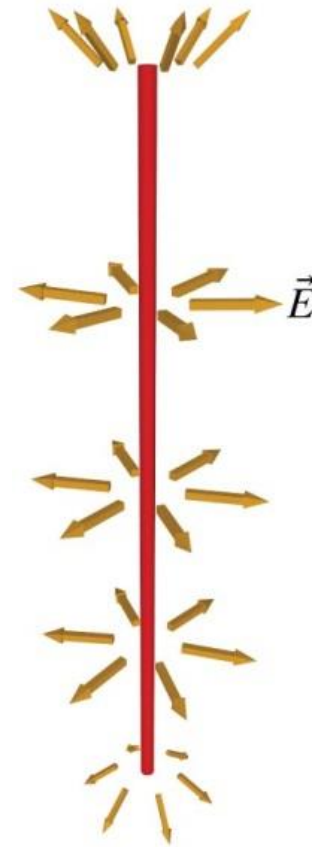
Dela in kroppen i många små (men inte för många) volymenheter och summa ihop elfältet från dessa alla



Hur ser elfält ungefär ut från
en stav med en positiv
laddningsdensitet λ (C/längd)?

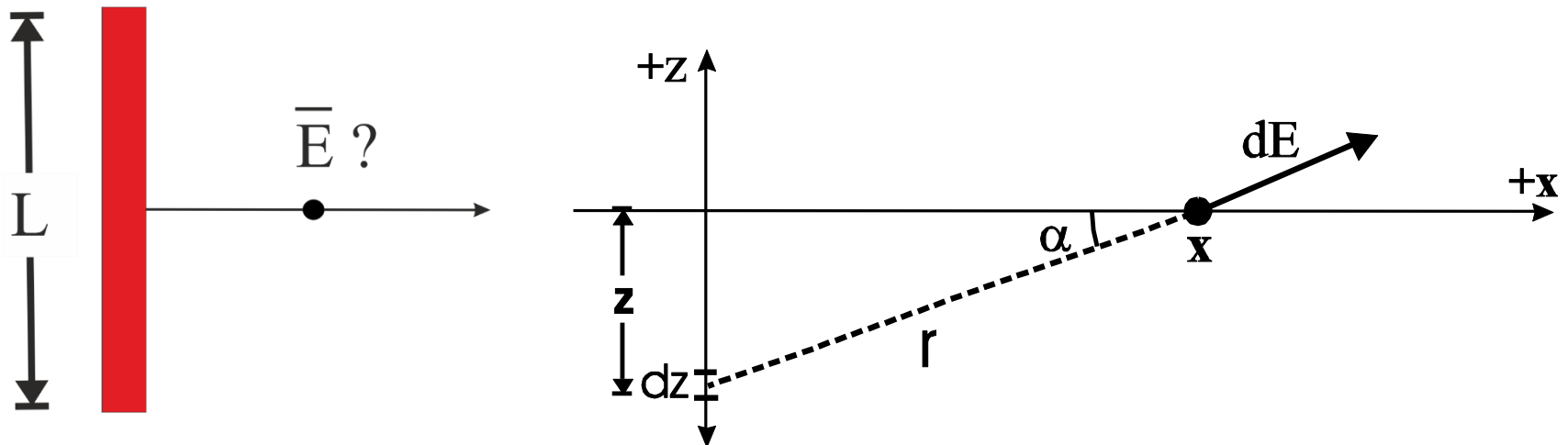


Hur ser elfält ungefär ut från
en stav med en positiv
laddningsdensitet λ (C/längd)?



Exempel: lång stav

Beräkna elfältet som en funktion av avståndet från mitten av en jämnt laddad stav med laddningen $+Q$ och längden L

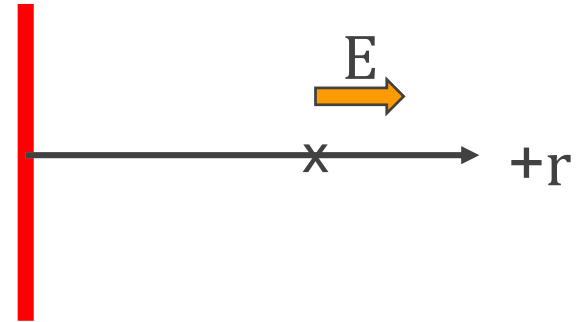


Bestäm $|d\vec{E}|$



Elfältet radiellt ut från mitten
av en stav med längden L och
laddningen Q är:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{Q}{r\sqrt{r^2 + (L/2)^2}} \right]$$



Vad är det approximativa elfältet:

- a) mycket nära staven ($r \ll L$)
- b) om $L=0$
- c) om staven är jättelång ($L \gg r$) ?



Vilka av följande påståenden ökar storleken på det elektriska fältet vid punkten?

Laddad stav, isolator
(jämn laddningsdensitet)

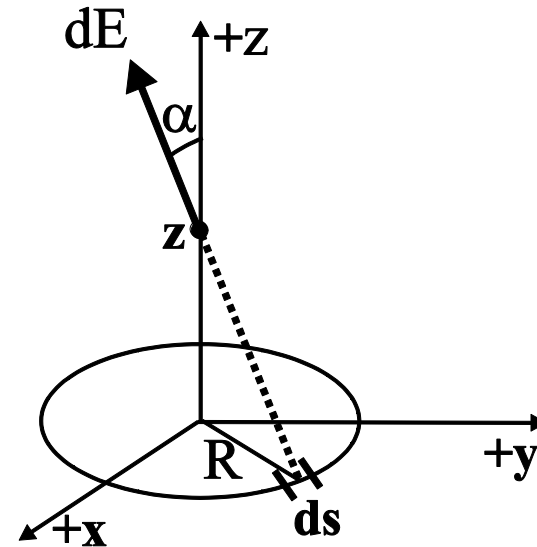
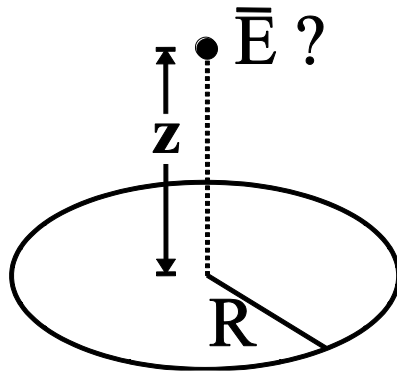


- a) Flytta punkten längre från staven
- b) Flytta punkten närmare staven
- c) Gör staven längre utan att öka laddningen
- d) Gör staven kortare utan att öka laddningen
- e) Gör staven tjockare utan att öka laddningen
- f) Öka laddningen på staven
- g) Minska laddningen på staven
- h) Gör staven längre, men hålla laddningsdensiteten konstant



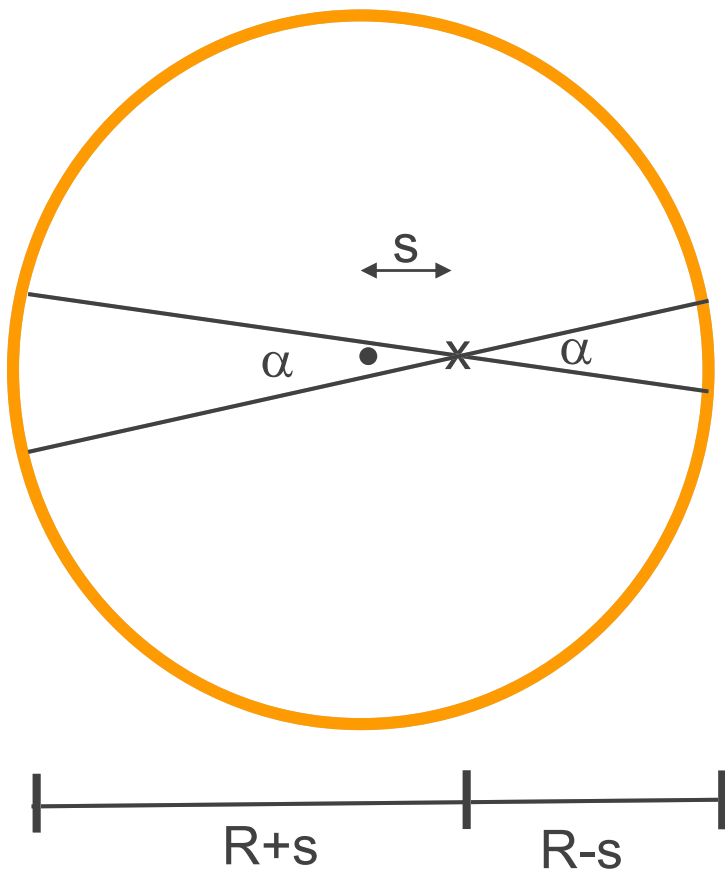
Exempel: Ring

En jämnt laddad ring med radien R har totala laddningen $+Q$. Beräkna det elektriska fältet från ringen i en punkt som ligger på ringens axel, på avståndet z från ringens centrum

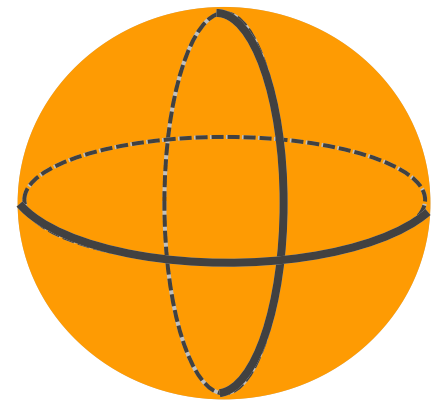


Elfält in i ringen

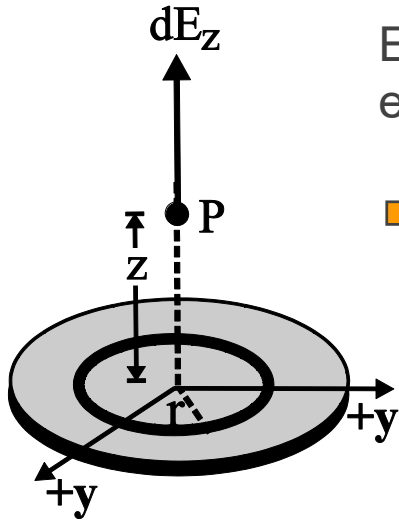
En jämnt laddad ring med radien R har totala laddningen $+Q$.
Är elfältet inne i ringen noll?



Vad är elfältet inne i en
sfär med radien R och
laddningen $+Q$ på
sfärens yta?



En jämnt laddad skiva med radien R har totala laddningen $+Q$. Beräkna det elektriska fältet från skivan i punkt P som ligger på skivans axel, på avståndet z från skivans centrum



Laddningsdensitet

$$\sigma = \frac{Q}{\text{Area}} = \frac{Q}{\pi R^2}$$

Laddningen i den tunna ringen:

$$dQ = dA \cdot \sigma = 2\pi r dr \cdot \sigma$$

Elfältet på höjden z från en ring med radien r :

$$\bar{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Qz}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow dE(z) = \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

Variabel byte: $g = z^2 + r^2$

$$\Rightarrow r = \sqrt{g - z^2}$$

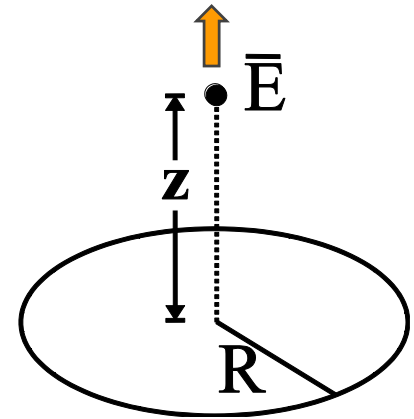
$$\Rightarrow \frac{dg}{dr} = 2r = 2\sqrt{g - z^2}$$

Nya integrationsgränser:

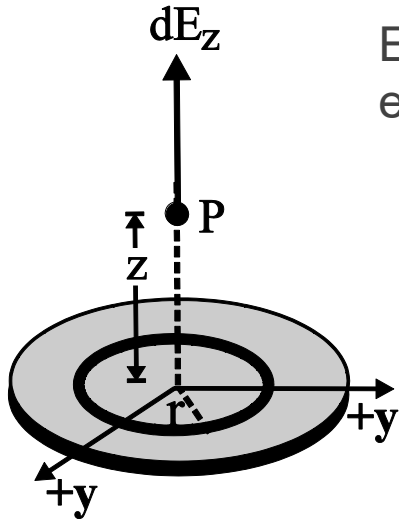
$$\begin{array}{l} r = 0 \\ r = R \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} g = z^2 \\ g = z^2 + R^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow E(z) = \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{\sqrt{g - z^2} dg}{2\sqrt{g - z^2} g^{3/2}} = \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{dg}{2g^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \left[\frac{-1}{g^{1/2}} \right]_{z^2}^{z^2+R^2} = \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{1}{z} \right]$$

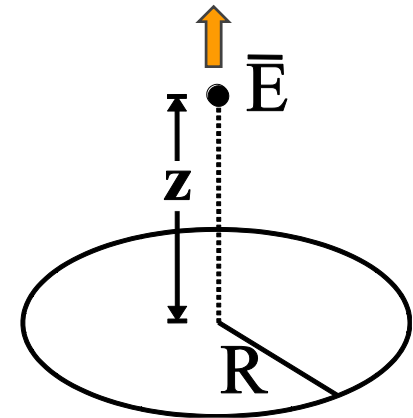


En jämnt laddad skiva med radien R har totala laddningen $+Q$.
Beräkna det elektriska fältet från skivan i punkt P som ligger på skivans axel, på avståndet z från skivans centrum



Elfältet på höjden z från en ring med radien r :

$$\bar{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Qz}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$



$$\Rightarrow E(z) = \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{1}{z} \right]^* = \frac{\sigma}{2\epsilon} \left[1 - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right]$$

$$z \ll R \Rightarrow \boxed{E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon}} \text{ Konstant, oberoende från avståndet till skivan}$$

Visa från * att: $E(z) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{z^2}$ då $z \gg R$

$$\sqrt{1 + x^2} \approx 1 + x^2/2 \quad \text{då } x \ll 1$$

Laddningsdensitet

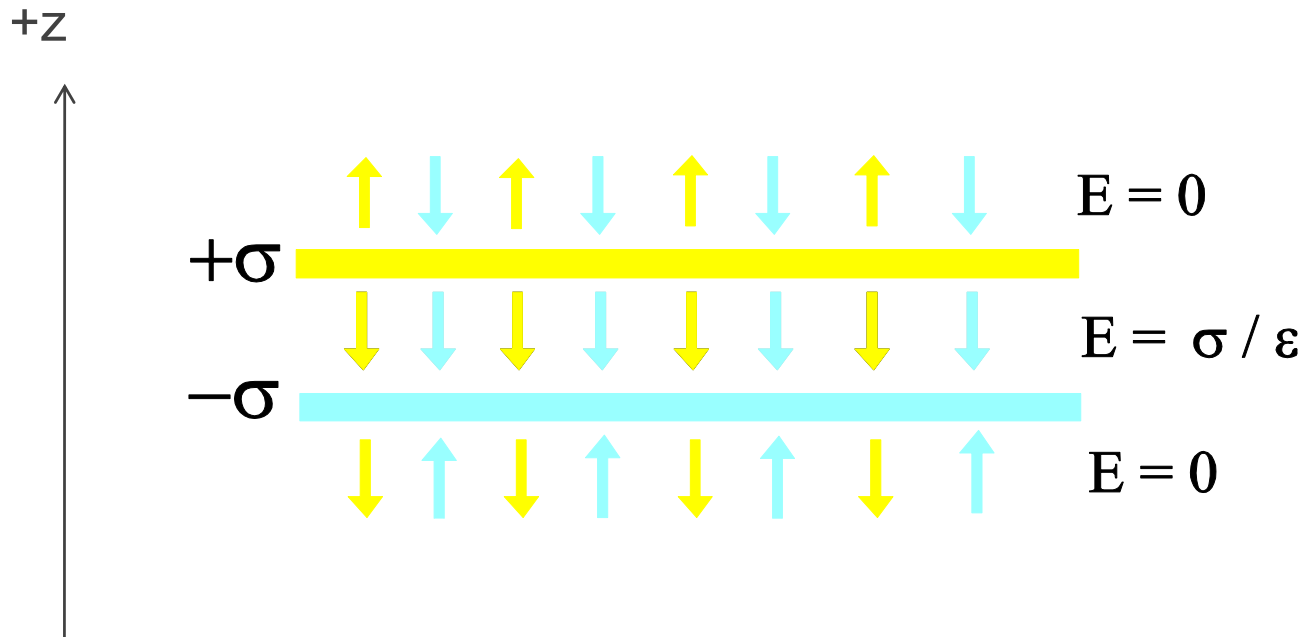
$$\sigma = \frac{Q}{\text{Area}} = \frac{Q}{\pi R^2}$$

Laddningen i den tunna ringen:

$$dQ = dA \cdot \sigma = 2\pi r dr \cdot \sigma$$



$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$



Kondensator

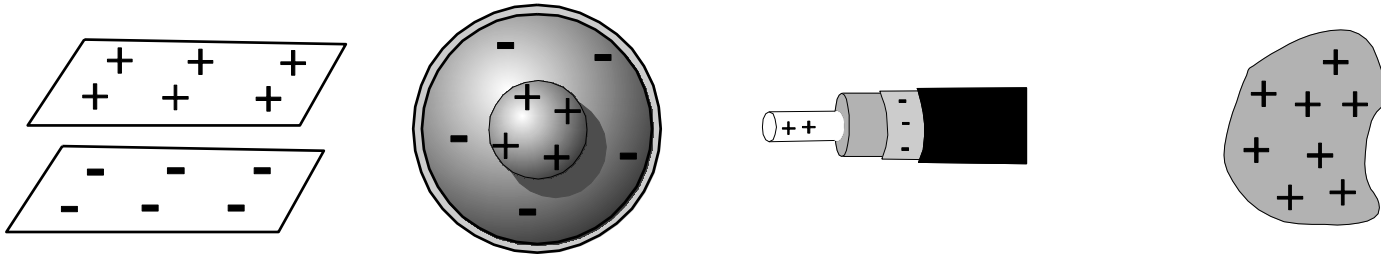


Kondensatorer

Vilka två ledare som helst separerade av vakuum eller dielektrisk material fungerar som en kondensator

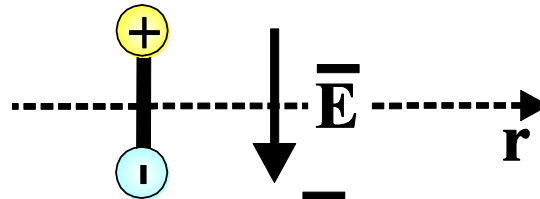
Kondensatorer kan lagra elektrisk energi

Olika kroppar har olika förmåga att lagra laddning, så kapacitansen C beror av **geometrin, storleken och ämnet mellan plattorna**



Elektriska fält

1) Elektrisk dipol



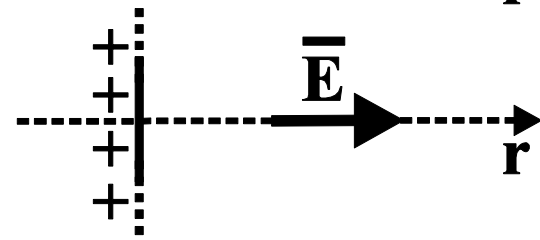
$$E \propto \frac{1}{r^3}$$

2) Punktladdning



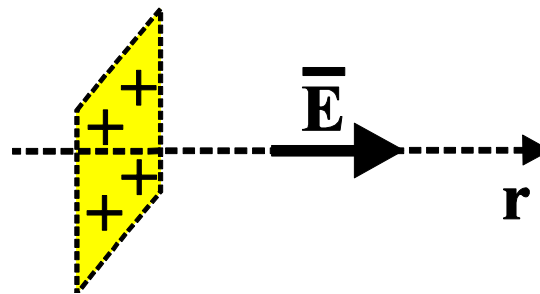
$$E \propto \frac{1}{r^2}$$

3) Oändlig laddad stav



$$E \propto \frac{1}{r}$$

4) Oändlig laddad yta

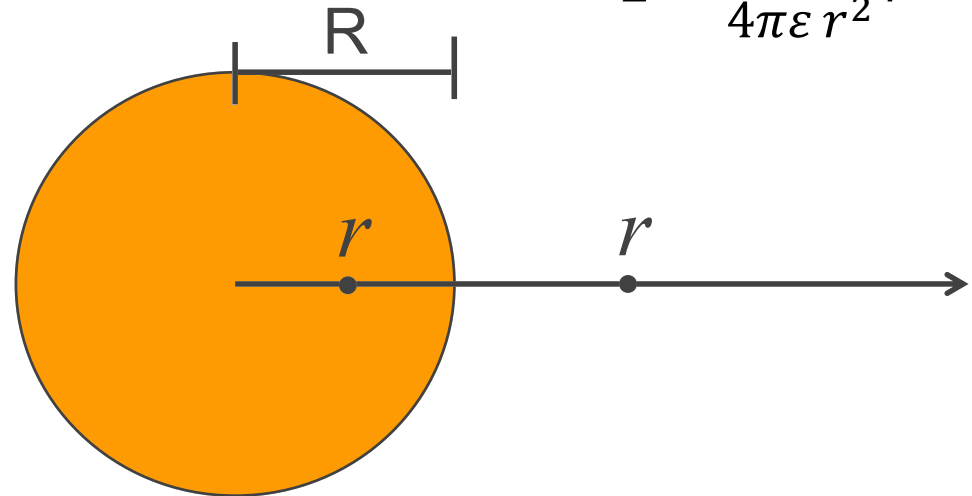


$$E \text{ konstant}$$

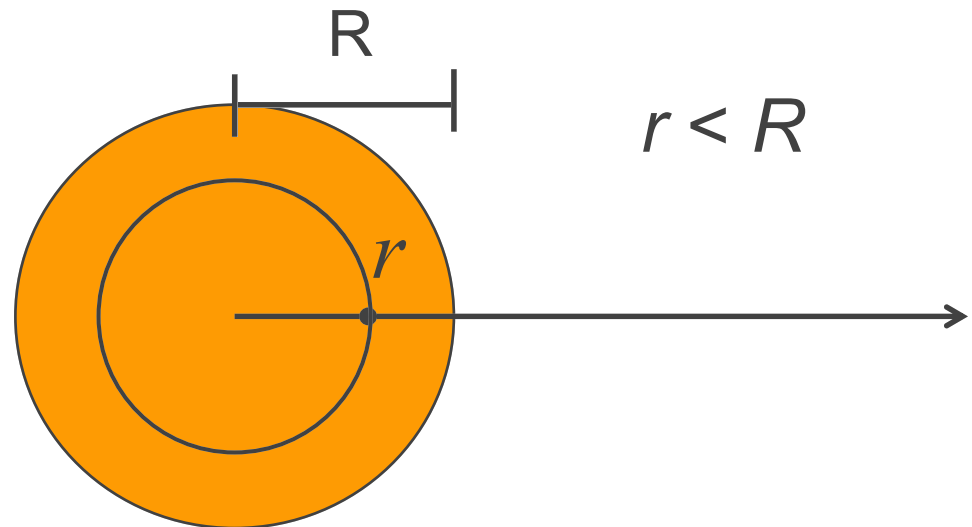


Beräkna elfältet som en funktion av avståndet r från centrum av en jämnt laddad dielektriska sfär med radien R och totala laddningen Q

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$



Dielektriskt material
=
en isolator som
polariseras i ett elfält



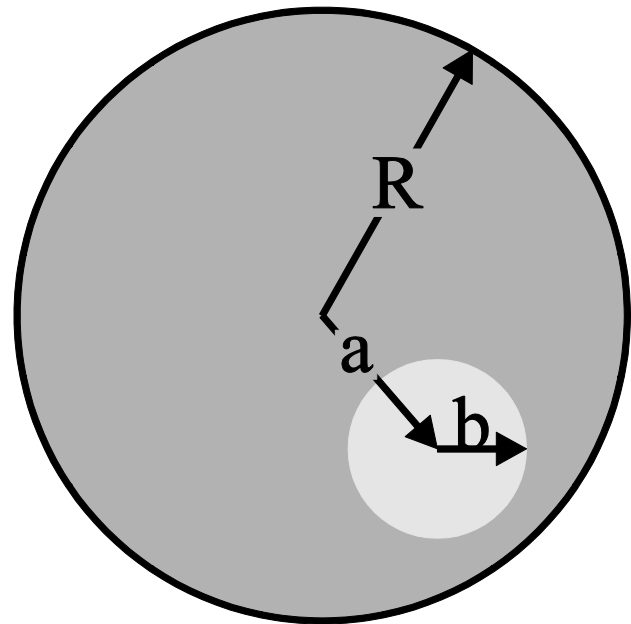
Laddningsdensitet (C/m^3):

$$\rho = \frac{Q}{\text{Volym}} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$



Vi har en dielektrisk sfär med radien R och laddningsdensiteten ρ som innehåller en sfärisk kavitet med radien b och vars centrum befinner sig vid ändan av vektorn $\mathbf{a}$ ($b < a < R$).

Bestäm elfältet inne i kaviteten, och visa att den är konstant i hela kaviteten



Lärandemål:

- Kunna bestämma integralen för att beräkna elfältet från en kontinuerlig laddningsdistribution vid vilken punkt som helst
- Kunna använda korrekta analytiska elfältsapproximationer för olika laddningsdistributioner
- Kunna numeriskt beräkna elfältet vid vilken punkt som helst från en laddningsdistribution

