16 Elektrisk potential (sähköinen potentiaali)

Lärandemål:

- Kunna matematiskt relatera till varandra elfält, elektrisk potentiell energi och elektrisk potential
- Kunna beräkna skillnader i den elektriska potentialen inne och runt ledare och isolatorer

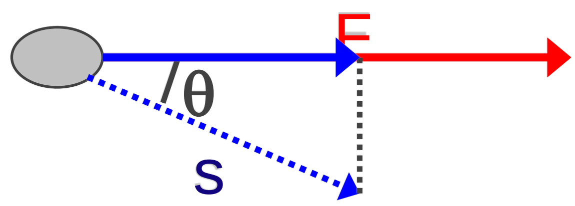
Energin för en ensam partikel: $E = mc^2 + K$

$$\Delta K = K_{slutliga} - K_{begynnelse}$$

Energiförändring för en ensam partikel:

$$\boxed{\Delta K_{system} = W_{omgivning}}$$

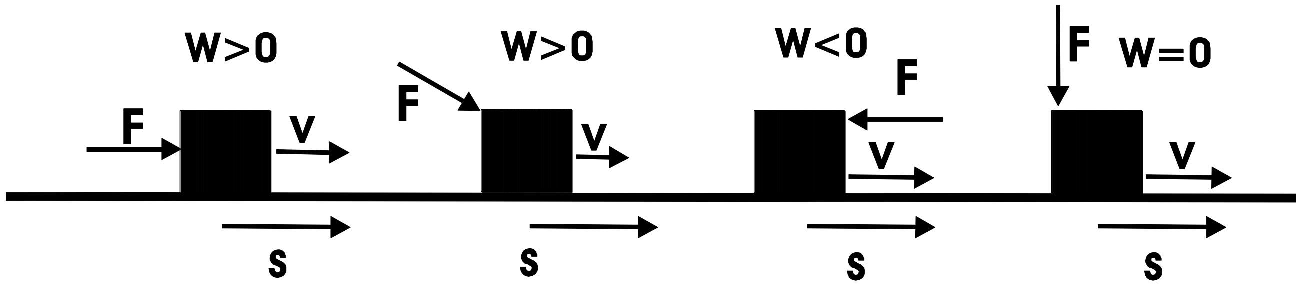
Arbete

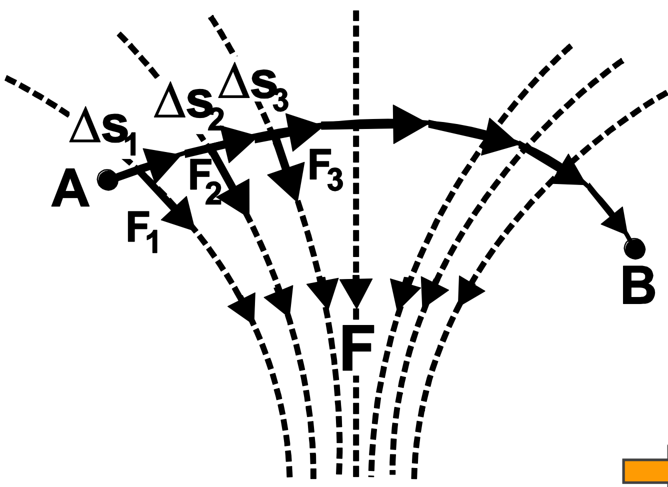


$$W = \left|\bar{F}\right|\left|\bar{s}\right|\cos(\theta)$$

$$\boxed{W = \bar{F} \bullet \bar{s}}$$

punktprodukt





$$W_{A\to B} = \bar{F}_1 \bullet \Delta\bar{s}_1 + \bar{F}_2 \bullet \Delta\bar{s}_2 + \ldots + \bar{F}_N \bullet \Delta\bar{s}_N$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \bullet \Delta\bar{s}_i$$

$$\boxed{W = \int_A^B \bar{F} \bullet d\bar{s}}$$

Kinetiska energiförändringen för partiklar i ett system (Δm=0):

$$\Delta K_{system} = W_{omgivning} + W_{inne\ i\ systemet}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta K_{system} - W_{inne\ i\ systemet} = W_{omgivning}$$

Definition av förändringen i systemets potentiella energi

$$\Delta U = -W_{inne\ i\ systemet}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta K_{system} + \Delta U = W_{omgivning}}$$

Energiförändringarna för partiklar i ett slutet system (Δm=0):

$$\Delta K_{system} + \Delta U = 0$$

En proton rör sig 4 cm i samma riktning vi har ett elfält 5000 N/C. |e| ~ 1.6e-19 C

a) Vad är förändringen i systemets potentiella energin?
b) Vad är förändringen i protonens kinetiska energi?

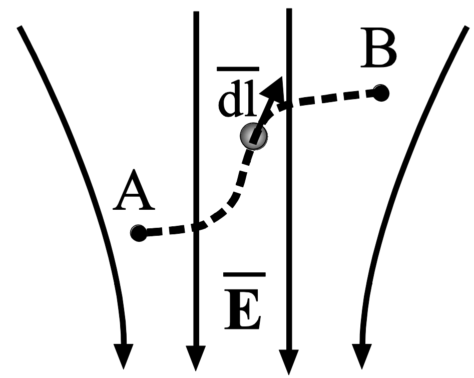
$$\Delta U = -W_{inne\ i\ systemet}$$

$$= -\bar{F} \cdot \Delta\bar{s} = -(F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z) = -\mathrm{e} E_x \Delta x$$

~ - (1.6e-19 C)(5000 N/C)(0.04 m) ~ <u>-3.2e-17 J</u>

Hur ändras svaren om vi har en elektron i stället för protonen?

Arbetet som görs då punktladdningen **dQ** förs från punkt *A* till *B* i ett elfält är:



$$\boxed{W_{A\Rightarrow B} = \int_A^B \overline{F} \bullet d\overline{l} = dQ\int_A^B \overline{E} \bullet d\overline{l}}$$

Den elektriska kraften är **konservativ**

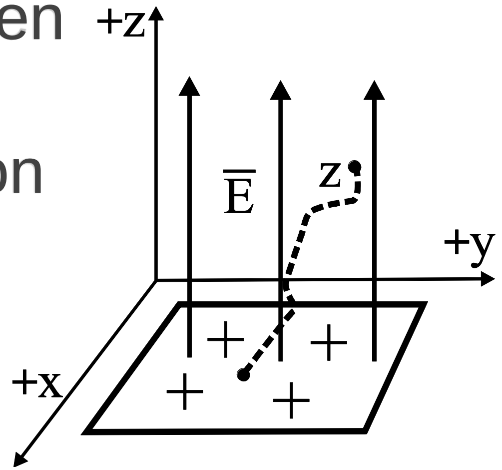
→ Arbetet beror bara av ändpunkterna

→ Arbetet kan ges med hjälp av **potentiell energi**

$$W_{A\to B} = U_A - U_B$$

$$\Delta U = U_B - U_A = -W_{A\to B}$$

Betrakta det konstanta elektriska fältet från en oändligt stor laddad platta. Vad är den elektriska potentiella energin som en funktion av höjden ovan plattan för en laddning dQ?



$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

$$W_{0\Rightarrow z} = U(0) - U(z) = dQ\int_0^z \bar{E} \bullet d\bar{l} = dQ\int_0^z E_z dz$$

$$= dQE_z \int_0^z dz = dQE_z z$$

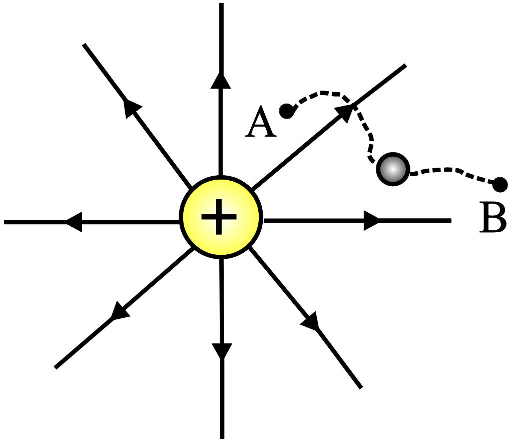
Vi väljer: $U(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad U(z) = \underline{\underline{-dQE_z z}}$$

Elektriska potentiella energin för system med två laddningar

Betrakta laddningarna, där den lilla laddningen **dQ** är i det **radiella elektriska fältet:**

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}$$



Vad är den elektriska potentiella energin för systemet som en funktion av avståndet mellan laddningarna?

$$W_{A\Rightarrow B} = U(A) - U(B) = dQ\int_A^B \bar{E}\bullet d\bar{l} = dQ\int_{r_A}^{r_B} E_r\,dr$$

$$= \frac{dQQ}{4\pi\varepsilon}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = \frac{dQQ}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{-1}{r_B} - \frac{-1}{r_A}\right] = \frac{dQQ}{4\pi\varepsilon r_A}$$

$$r_B = \infty$$

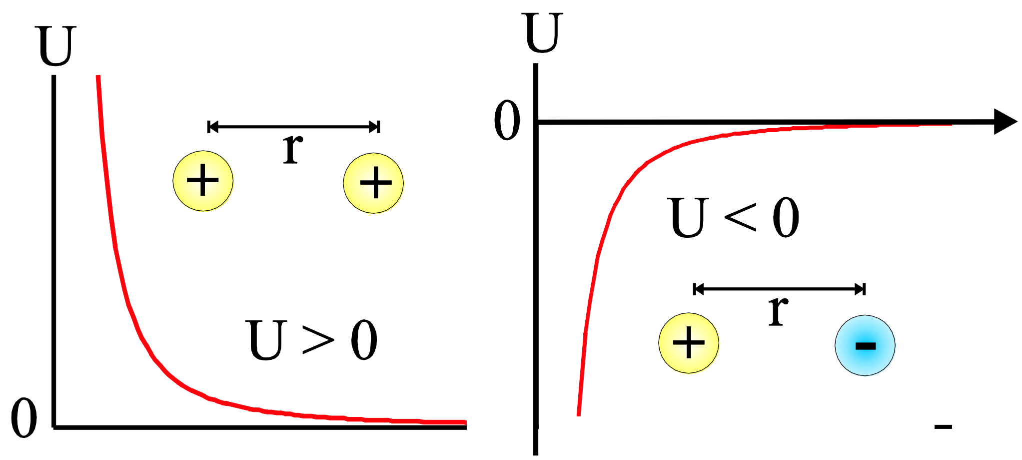
Elektriska potentiella energin för system med två laddningar:

$$U(r) = \frac{dQQ}{4\pi\varepsilon r}$$

Elektriska potentiella energin för system med två laddningar

→ Potentiella elektriska energin för ett system med två laddningar som en funktion av avståndet mellan laddningarna

$$\boxed{U(r) = \frac{dQ \cdot Q}{4\pi\varepsilon r}}$$



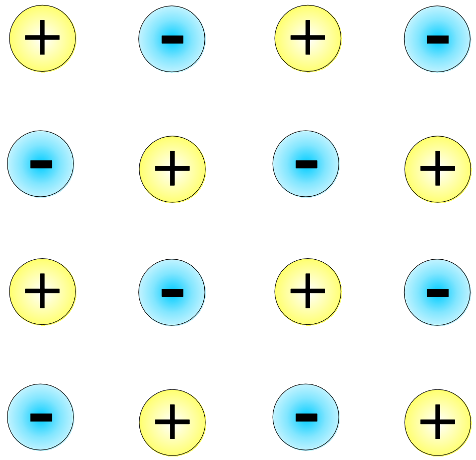
Laddningarna **repellerar** varandra, energi **frigörs**

Laddningarna **bundna** till varandra, energi **behövs** för att upplösa systemet

Elektriska potentiella energin för system med många laddningar

Potentiella elektriska energin för ett system med många laddningar blir:

$$\boxed{U_{Tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i<j}\frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}}}$$

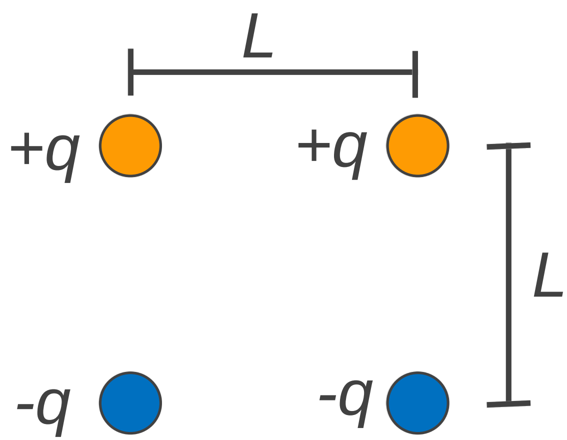


Laddningarna befinner sig i hörnen av en kvadrat med sidan *L*

a) Beräkna det arbete som måste utföras (energi som krävs) för att upplösa systemet (laddningarna förs oändligt långt från varandra)

b) Förklara med hjälp av resultatet i **a)** att det finns joniska gitterstrukturer (Ex. NaCl). Om du får byta laddningarnas platser, hur skall laddningarna placeras för att ha den lägsta energikonfigurationen och vad är dess potentiella energi?

c) Beräkna det arbete som måste utföras för att föra en extra laddning +*Q* till kvadratens mittpunkt



$$U_{Tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i<j} \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}}$$

Laddning=varaus, utföras=tehdä, upplösa=hajottaa, oändligt långt från varandra=äärettömän kauas toisistaan, gitterstrukturer=kiderakenteita

Elektrisk potential

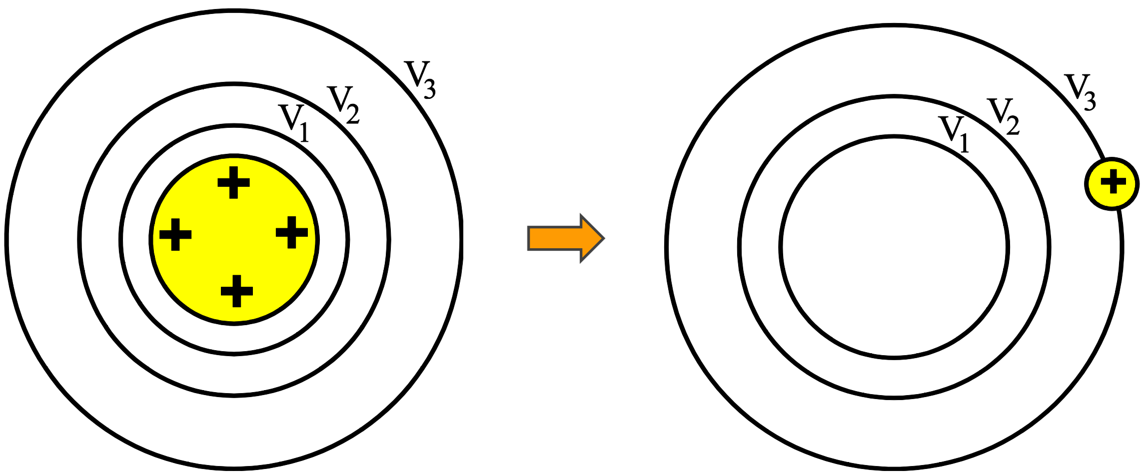
Definition: **Elektrisk potential** (potentiella energin per enhetsladdning)

$$\boxed{V = \frac{U}{Q_0}}$$

$[V]$ = V (volt)
= J/C

Potentialen för en punktladdning blir:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}}$$



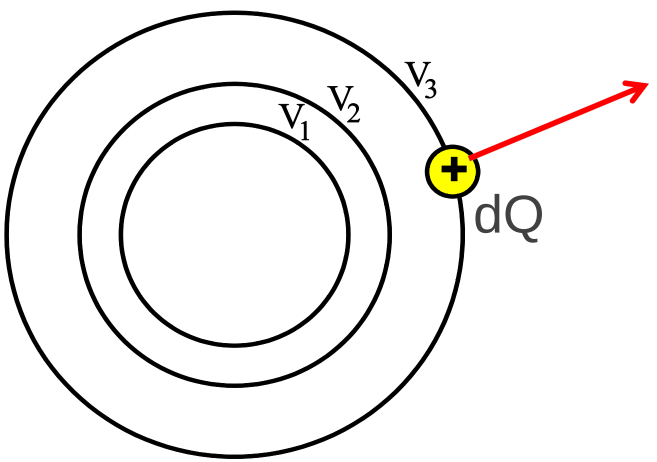
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}$$

$$U = VdQ = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{QdQ}{r}$$

Varför elektrisk potential?

1) Elektriska potentialen beror bara av laddningarna och deras geometri (Denna potential finns runt laddningarna oberoende ifall en testladdning q finns eller inte)

2) Ifall vi vet den elektriska potentialen i rymden, kan vi genast beräkna potentiella energin för en laddning dQ: *U = VdQ*



$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$K_1 + dQV_1 = K_2 + dQV_2$$

Potentialskillnad: $\Delta V = V_2 - V_1$

$$U = VdQ = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{QdQ}{r}$$

Potentialskillnaden mellan punkterna **a** och **b** är:

$$V_a - V_b = \frac{U_{a \Rightarrow b}}{Q_o} = \frac{1}{Q_o}\int_a^b \bar{F} \bullet d\bar{l} = \int_a^b \bar{E} \bullet d\bar{l}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \bar{E} \bullet d\bar{l}}$$

Vilket för konstant elfält i elfältets riktning blir:

$$\boxed{\Delta V = -E(b-a)}$$

$\longrightarrow$ Elfältets elhet: [E] = N/C = V/m, vilket oftast används

Exempel: En elektron som accelereras av en potentialskillnad 1 V
Får kinetiska energin: 1 eV (~1.6x10^{-19} J)

Hur beräkna potentialskillnaden?

A) Vi vet laddningarnas platser: r_1, r_2, …

Summa ihop potentialen från varje laddning

$$V_A = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_i}{r_i}$$

B) Vi vet elfältet

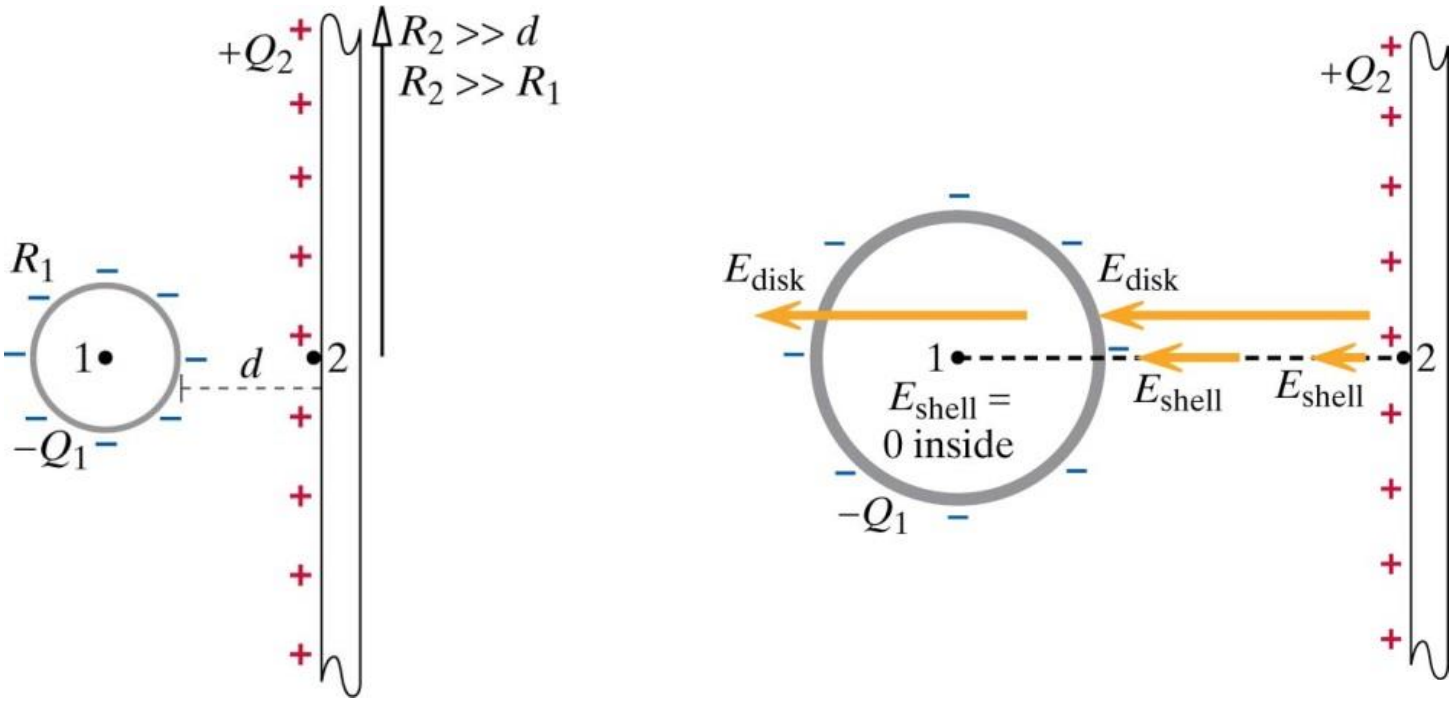
$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \bar{E} \bullet d\bar{l}$$

1: Välja bästa möjliga vägen från punkt a till b

2: Integrering om det är möjligt

3: Numerisk integrering annars

Beräkna den elektriska potentialskillnaden mellan punkt 1 och 2
Punkt 1 är inne i en glassfär med laddning $-Q_1$
Punkt 2 är på ytan av en rund platta med radien R_2 och laddning Q_2



$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \bar{E} \bullet d\bar{l} \qquad \bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} \qquad |E|_{platta} \approx \frac{Q/Area}{2\varepsilon}$$

Hur skulle situationen ändras om glassfären var en metallsfär?

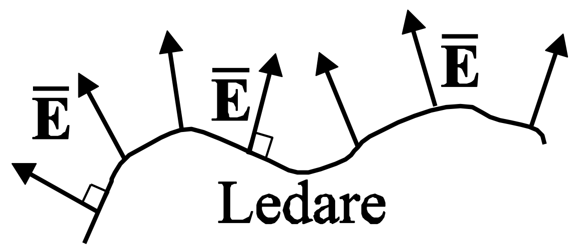
Ekvipotentialytor

Definition: En 3-dimensionell yta där potentialskillnaden är den samma i alla punkter kallas för en **ekvipotentialyta**

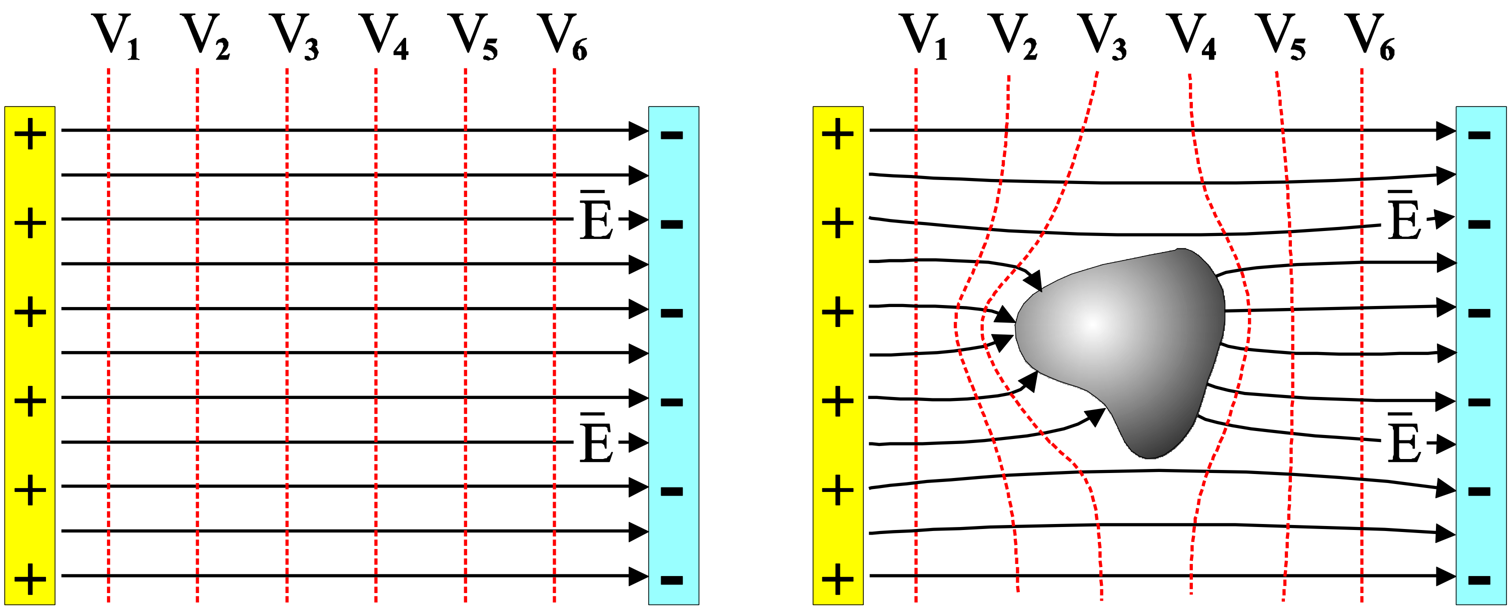
Det elektriska fältet är alltid vinkelrät mot en potentialyta

Det elektriska fältet från en ledare är alltid vinkelrät mot ledarens yta

→ Inget arbete görs då en laddning förflyttas på ytan av en ledare, vilket betyder att en ledares yta är en ekvipotentialyta



Elfält och potential för homogent elfält, och då en ledare sätts in i det homogena fältet



Elfält från potentialen

Potentialskillnaden mellan punkterna **a** och **b** definierades som:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \bar{E} \bullet d\bar{l}$$

$$V_b - V = \int_a^b dV \quad \longrightarrow \quad -dV = \bar{E} \bullet d\bar{l}$$

Elfältet och förflyttningsvektorn är:

$$\bar{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} \qquad d\bar{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$\longrightarrow$ Potentialskillnaden: $-dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$

Förflyttning i x-riktning (dy=dz=0), ger $-dV = E_x dx$

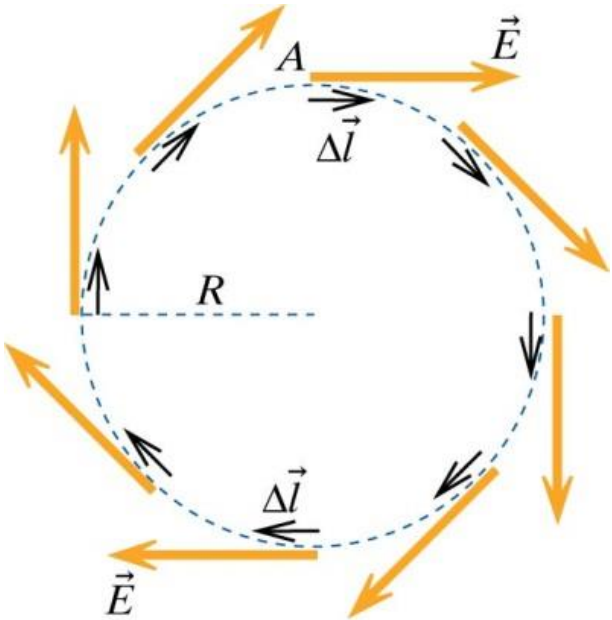
Elfält från potentialen

$$E_x = -\left(\frac{dV}{dx}\right)_{y,z=konst} \qquad E_y = -\left(\frac{dV}{dy}\right)_{x,z=konst} \qquad E_z = -\left(\frac{dV}{dz}\right)_{x,y=konst}$$

$$\boxed{\overline{E} = -\left(\frac{\delta V}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta V}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta V}{\delta z}\hat{k}\right)}$$

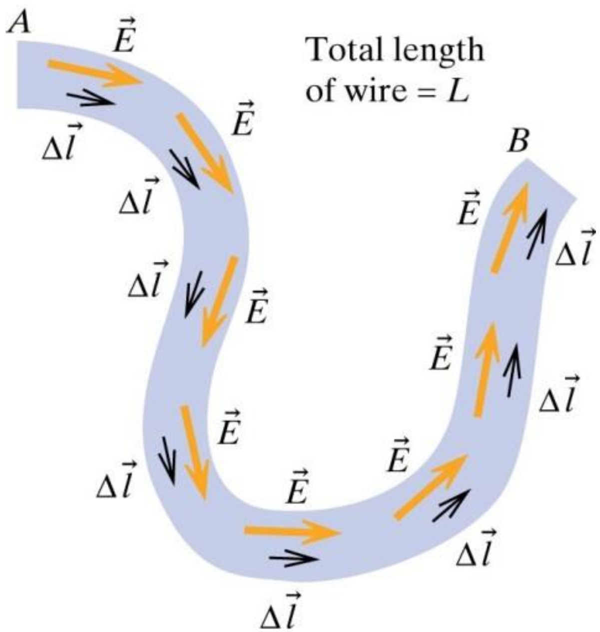
Elfältet är **gradienten** av potentialen: $\boxed{\overline{E} = -\nabla V}$

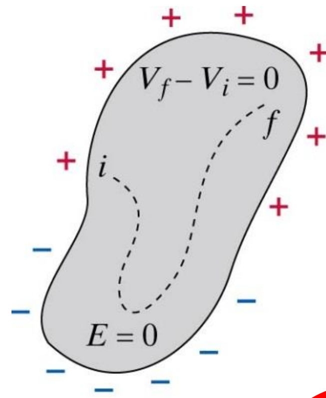
Där operatorn ∇ kallas för nabla $\nabla = \left(\frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right)$



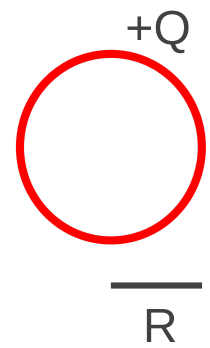
Vad skulle hända med en elektron som placeras vid punkten *A*?

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \bar{E} \bullet d\bar{l} = -2\pi R\left|\bar{E}\right|$$





Måste potentialen vara noll inne i en metall?

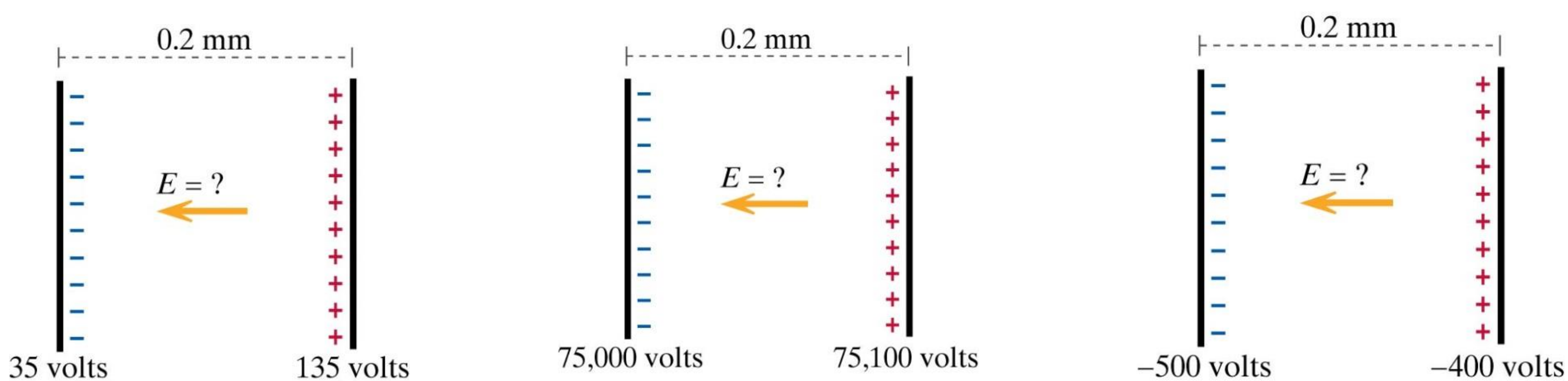


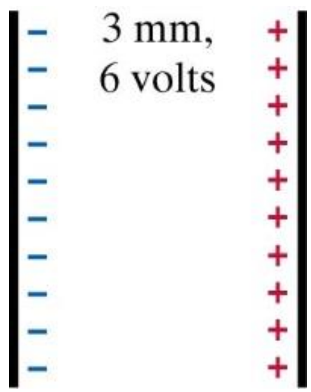
r > R: $\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}$

r <= R: $\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R}$

Vad är elfältet i vardera fallet?

<u>Alla samma: 500000 V/m</u>



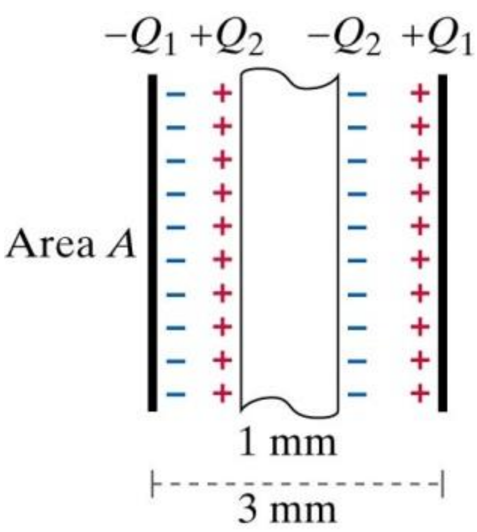


Vad är elfältet inne i kondensatorn?

$$\Delta V = \overline{E} \cdot \overline{dl}$$

$$\Rightarrow \quad |\overline{E}| = \frac{6 \text{ volt}}{0.003 \text{ m}} = \underline{\underline{2000 \text{ V/m}}}$$

Vi sätter en metall mellan kondensatorns plattor



Ändras elfältet och/eller potentialen mellan kondensatorplattorna?

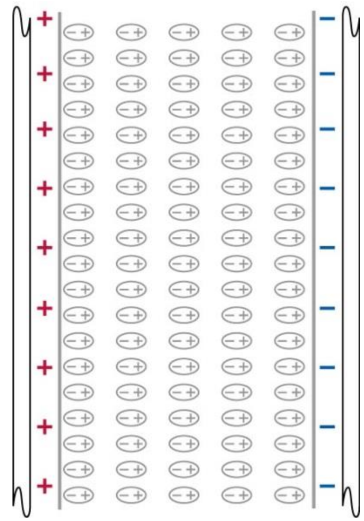
$\Rightarrow$ <u>E samma</u>

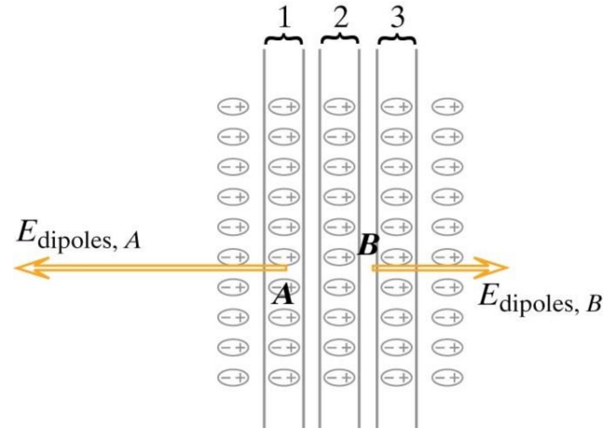
$$\Rightarrow \quad \Delta V = E \cdot 10^{-3} m + 0 \cdot 10^{-3} m + E \cdot 10^{-3} m$$

$$= E \cdot 2 \cdot 10^{-3} m = \underline{4 \text{ V}}$$

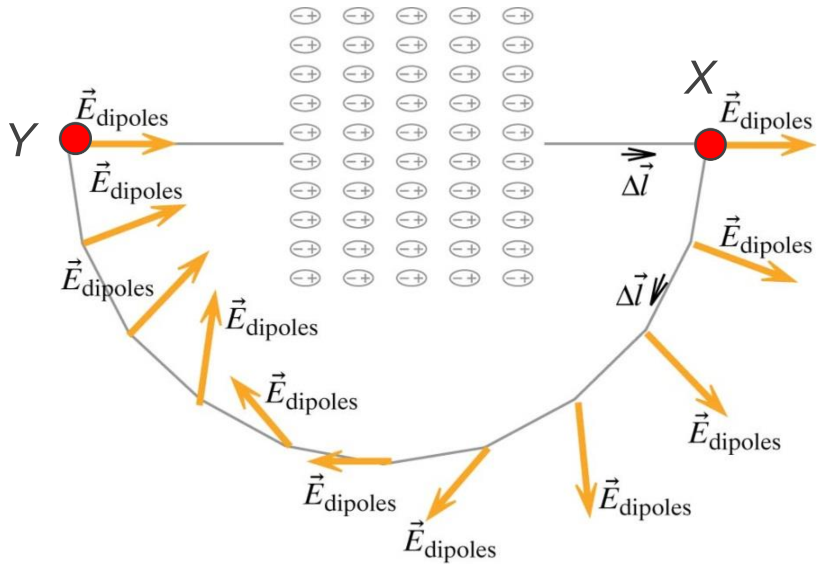
Potentialskillnaden för isolatorer

Elfältet inne i en ledare är noll → $\Delta V = 0$ mellan vilken punkt som helst inne i ledaren



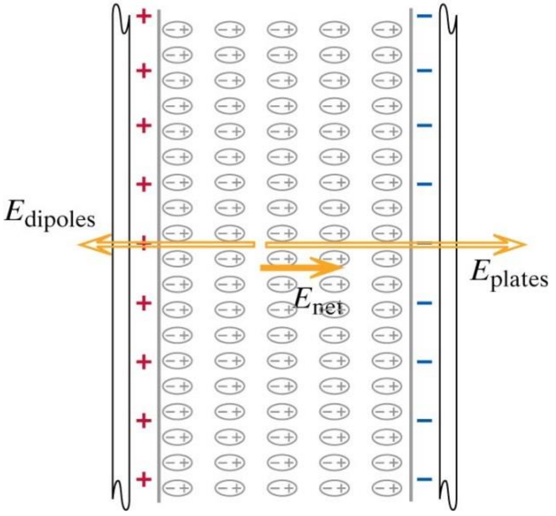


Vad är medelelfältet från materialet?
I vilken riktning är det?



$$\Delta V = -\int_X^Y \bar{E} \bullet d\bar{l} < 0$$

$$\Delta V = -\int_X^X \bar{E} \bullet d\bar{l} = 0$$

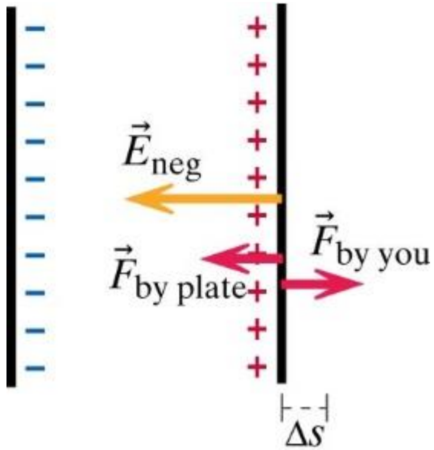


$$\bar{E}_{isolator} = \frac{\bar{E}_{Yttre}}{K}$$

Dielektriska material

Ämne	Dielektriska konstanten K	Dielektriska styrkan (10^6 V/m)
Vakuum	1	
Luft	1.00055	~3 (beror starkt på luftfuktigheten)
Glas	3-6	~40
Destillerat vatten	~80	
Metall	~ ∞	

Elfältets energidensitet



$$E_{enskiva} = \frac{Q/A}{2\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad F_{på\ skiva} = Q\frac{Q/A}{2\varepsilon}$$

Arbete att dra en skiva sträckan Δs

$$W = \Delta U = Q\frac{Q/A}{2\varepsilon}\Delta s = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{Q/A}{\varepsilon}\right)^2 A\Delta s = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \Delta Volym$$

⇒ Elfältets energidensitet

$$\boxed{\frac{\Delta U}{\Delta Volym} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

Elektron och positron står först stilla. Analysera situation då

1. Systemet består av elektronen och positronen
2. Systemet består endast av elektronen

$$U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{e^2}{r}$$

1.

$$\Delta K_1 + \Delta K_2 = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad \Delta K_1 = -\frac{\Delta U}{2}$$

2.

Systemet har ingen potentiell energi!

$$\Rightarrow \quad \Delta K_1 = -\Delta W_{omgivning}$$

Omgivningens energi minskar

Energin för positronen ökar också, varifrån kommer energin?

$$\boxed{\Delta(\text{Energi från fältet}) = 2\Delta K}$$

Lärandemål:

- Kunna matematiskt relatera till varandra elfält, elektrisk potentiell energi och elektrisk potential
- Kunna beräkna skillnader i den elektriska potentialen inne och runt ledare och isolatorer