

# Kapitel 5. Linjära ekvationssystem och egenvärdesproblem

Några av den linjära algebrans huvuduppgifter är att

- a) lösa det linjära ekvationssystemet  $Ax = b$ , och att
- b) lösa egenvärdesproblemet  $Ax = \lambda x$ .

Man har uppskattat, att linjära ekvationssystem förekommer i ca 75% av alla vetenskapliga problem. Egenvärdesproblem stöter man på i vitt skilda fysikaliska beräkningar såsom vibrationsproblem, resonans, studiet av kritiska reaktorer, och många andra fall.

Eftersom matriser spelar en stor roll vid alla dessa beräkningar skall vi börja med en kortfattad framställning av grunderna till matrisalgebran.

## 5.1. Matriser och deras egenskaper

En rektangulär  $m \times n$ -matris  $A$  med  $m$  rader och  $n$  kolonner uttrycks som ett rektangulärt schema av tal (matriselement):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eller, mera kortfattat,  $A = (a_{ij})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Om  $m = n$ , så kallas  $A$  en **kvadratmatris**.

Om  $m = 1$  kallas matrisen för en **radvektor**, och om  $n = 1$  kallas den **kolonnvektor**. I en kvadratmatris bildar elementen  $a_{ii}$  en diagonal (**huvuddiagonalen**). En **diagonalmatris** har element olika noll endast på diagonalen:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix},$$

dvs  $D_{ij} = d_i \delta_{ij}$ , där  $\delta_{ij}$  betecknar *Kroneckers delta*<sup>1</sup>, som är lika med 0, då  $i \neq j$ , men lika med 1, då  $i = j$ . En diagonal matris  $D$  betecknas också ibland  $\text{diag}(d_1 d_2 \dots d_n)$ . En speciell diagonalmatris är **enhetsmatrisen**  $I_n = \text{diag}(111 \dots 1)$ , dvs  $I_n = (\delta_{ij})$ .

Två matriser  $A$  och  $B$  är *identiska*, om  $a_{ij} = b_{ij} \forall i, j$ . Produkten av en matris  $A$  och en skalär  $\alpha$  är en matris  $\alpha A = (\alpha a_{ij})$ . Produkten av två matriser  $A$  ( $m \times p$ ) och  $B$  ( $p \times n$ ) är en matris  $C$  ( $m \times n$ ) med elementen

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Matrismultiplikationen är **associativ**:

$$A(BC) = (AB)C$$

och **distributiv**:

$$A(B + C) = AB + AC$$

men i allmänhet **inte kommutativ**:

$$AB \neq BA$$

Den **transponerade** matrisen  $A^T$  fås genom omkastning av rader och kolonner i matrisen  $A$ , dvs om  $B = A^T$ , så är  $b_{ij} = a_{ji} \forall i, j$ . En kolonnvektor är således en transponerad radvektor.

---

<sup>1</sup>efter Leopold Kronecker, tysk matematiker (1823-1891)

För en transponerad matris gäller

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Om varje element i en matris ersätts med sitt komplexa konjugat, erhålls en **komplext konjugerad** matris  $A^*$ . Matrisen  $(A^*)^T$  som betecknas  $A^\dagger$  kallas ofta **adjungerad**.

Med en **triangulär** matris förstår vi en matris av formen

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n-1} & l_{n-2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$L$  sägs vara en **vänstertriangulär** (eller undre triangulär) och  $R$  är en **högertriangulär** (eller övre triangulär) matris. Summor, produkter och inverser av triangulära matriser är triangulära matriser av samma typ.

**Determinanten** för en kvadratmatris  $A$  betecknas  $\det A$  (eller  $|A|$ ). Följande regler är tillräckliga för att beräkna  $\det A$  för en godtycklig matris  $A$ :

- 1) Determinantens värde förändras ej om en rad (eller kolonn) multiplicerad med ett tal  $\alpha$  adderas till en annan rad (resp. kolonn).
- 2) Determinanten för en triangulär matris är lika med produkten av huvuddiagonalens element:  $\det R = r_{11}r_{22} \cdots r_{nn}$ ,  $\det L = l_{11}l_{22} \cdots l_{nn}$ .
- 3) Om två rader (resp. kolonner) kastas om, så multipliceras determinanten med  $-1$ .

Dessutom gäller följande regler:  $\det A = \det A^T$  och  $\det(AB) = \det A \det B$ .

Om  $\det A \neq 0$ , så sägs  $A$  vara **icke-singulär** (eller reguljär). Varje icke-singulär kvadratmatris har en **invers**  $A^{-1}$ , som uppfyller villkoret  $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ . För inversen av en produkt gäller  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  (jfr motsvarande regel för produkten av två transponerade matriser):

En kvadratmatris som uppfyller villkoret  $A = A^T$  kallas **symmetrisk**. Produkten av två symmetriska matriser är symmetrisk endast om de kommuterar. En  $m \times n$ -matris  $A$  är **ortogonal**, om den uppfyller villkoret  $A^T A = I$ . Om  $m = n$  så följer av detta att  $A^T = A^{-1}$ , och sålunda gäller dessutom  $AA^T = I$  i detta fall.

En matris med komplexa element, som uppfyller villkoret  $A = A^\dagger$  kallas **hermitesk**, och är analog med en symmetrisk matris. De ortogonala matriserna motsvaras i detta fall av **unitära** matriser, som uppfyller villkoret  $U^\dagger U = I$ . En hermitesk matris sägs vara **positivt definit**, ifall den motsvarande kvadratiska formen  $x^T A x$  uppfyller villkoret  $x^T A x > 0 \forall x \neq 0$ .

## 5.2. Linjära ekvationssystem

Lösning av linjära ekvationssystem tillhör de vanligaste problemen man stöter på i fysiken. Ofta är det fråga om många ekvationer med många obekanta, och det är därför inte heller att förundra sig över att några av de första datortillämpningarna just gällde lösning av ekvationssystem<sup>2</sup>. Symboliskt kan ett dylikt ekvationssystem framställas i matrisform:

$$Ax = b,$$

där  $A$  är en kvadratisk (koefficient)matris av ordningen  $n$ ,  $b$  är en given kolonnvektor med  $n$  rader, och  $x$  är en kolonnvektor med  $n$  obekanta.

Det finns många olika sätt att lösa ekvationssystem. Ett av dem baserar sig på **Cramers regel**<sup>3</sup>. Om  $\det A = D \neq 0$  och  $b \neq 0$  så har ekvationssystemet  $Ax = b$  lösningen  $x_k = D_k/D$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , där  $D_k$  betecknar den determinant som fås om den  $k$ :te kolonnen i  $D$  utbyts mot  $b$ . Cramers regel är identisk med  $x = A^{-1}b$ . Denna metod lämpar sig bara för ekvationssystem med ett litet antal obekanta. Om vi t.ex. skulle försöka tillämpa denna metod på ett system med 30 ekvationer, skulle man vara tvungen att beräkna 31 st 30-radiga determinanter.

---

<sup>2</sup>John V. Atanasoff: *Computing Machine for the Solution of Large Systems of Linear Algebraic Equations* (1940)

<sup>3</sup>Gabriel Cramer: *Introduction à l'analyse de lignes courbes algébriques*, Geneve (1750)

Om man skulle upplösa determinanterna direkt, skulle det behövas  $31 \cdot 30! \cdot 29$  multiplikationer, och ett motsvarande antal additioner. Även på en snabb dator som kan göra  $10^9$  räkneoperationer per sekund, skulle det ta lång tid: enligt boken av Kahaner, Moler och Nash<sup>4</sup> ca  $7.5 \cdot 10^{18}$  år ! Man skulle också kunna tänka sig att lösa ekvationssystemet genom att *invertera* matrisen  $A$ :  $x = A^{-1}b$ , men detta lönar sig i allmänhet inte, bl.a. på grund av att det finns snabbare metoder, som vi skall se senare.

En stor matris kan uppta mycket utrymme i en dators minne. Ofta innehåller en matris ett stort antal element, som är lika med noll, och den säges då vara **gles**. Om matrisen är gles, lönar det sig ofta att endast lagra de matriselement, som är olika noll. I sådana fall måste man också använda någon metod för att ange matriselementens läge i den ursprungliga matrisen. Ett specialfall av en gles matris är en **bandmatris**, där de element, som är olika noll, befinner sig nära diagonalen:  $a_{i,j} = 0$  för alla  $i, j$  med  $|i - j| > m$  där  $m \ll n$ . **Bandvidden** sägs i detta fall vara  $2m + 1$ . Om  $m = 1$  sägs matrisen vara **tridiagonal**.

Om  $x^*$  är den beräknade lösningen till ett linjärt ekvationssystem  $Ax = b$ , så är felet  $e = x - x^*$ , och restvektorn (avvikelsen)  $r = b - Ax^* = A(x - x^*) = Ae$ . Avvikelsen anger här, hur stor skillnaden är, jämfört med ekvationssystemets högra medlemsvärde, då den beräknade lösningen substitueras. På grund av datorns begränsade noggrannhet blir dessa storheter aldrig exakt noll.

---

<sup>4</sup>*Numerical methods and software*

## 5.3. Direkta metoder för lösning av ekvationssystem

Låt oss anta att koefficientmatrisen  $A$  är varken gles eller *singulär*, dvs dess determinant är olika noll. En av de äldsta metoderna för att lösa ett dylikt ekvationssystem härleder sig från C.F. Gauss, och återupplivades av Wilkinson på 1960-talet.

Gauss metod<sup>5</sup> är ett sätt att eliminera de obekanta på ett systematiskt sätt, så att ekvationssystemet övergår i ett **triangulärt** system, som lätt kan lösas.

För att lättare förstå metoden skall vi börja med studera ett numeriskt exempel:

$$3x - 4y + z = 1$$

$$2x + y + 2z = 3$$

$$x + 2y - z = 5$$

---

<sup>5</sup>infördes ursprungligen av Gauss för att lösa normalekvationerna, som uppträder i samband med minsta kvadratmetoden, och beskrevs i *Theoria Motus* (metoden användes i ett specialfall redan av Lagrange i slutet av 1700-talet).



Om man dividerar den översta ekvationen med 3:

$$x - \frac{4}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3},$$

subtraherar 2 gånger denna ekvation från den andra ekvationen i systemet, och dessutom subtraherar ekvationen från den tredje ekvationen i systemet, så kan man eliminera  $x$  från de två nedersta ekvationerna i systemet:

$$\begin{aligned}\frac{11}{3}y + \frac{4}{3}z &= \frac{7}{3} \\ \frac{10}{3}y - \frac{4}{3}z &= \frac{14}{3}\end{aligned}$$

Om man dividerar den övre av dessa ekvationer med  $\frac{11}{3}$ :

$$y + \frac{4}{11}z = \frac{7}{11},$$

och subtraherar  $\frac{10}{3}$  gånger denna ekvation från den nedersta ekvationen får man

$$-\frac{84}{33}z = \frac{84}{33}.$$

Lösningen till den sistnämnda ekvationen blir  $z = -1$ , som substituerad i den övre ekvationen ger  $y = \frac{7}{11} - \frac{4}{11}z = 1$ . Genom att substituera värdet av  $y$  resp.  $z$  i den översta ekvationen i systemet fås slutligen

$$x = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 2.$$

Efter denna inledning, skall vi studera den allmänna proceduren. Antag, att  $Ux = b$  är ett linjärt ekvationssystem, där  $U$  är en *högertriangulär* matris, dvs ekvationssystemet har formen

$$u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n = b_1$$

$$u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n = b_2$$

...

$$u_{nn}x_n = b_n$$

Om vi antar, att  $u_{ii} \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  så kan man lösa ekvationerna genom successiva substitutioner:

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{b_n}{u_{nn}} \\x_{n-1} &= \frac{b_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}} \\&\dots \\x_1 &= \frac{b_1 - u_{1n}x_n - u_{1,n-1}x_{n-1} - \dots - u_{12}x_2}{u_{11}}\end{aligned}$$

I kompakt form kan de  $n - 1$  sista ekvationerna skrivas:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik}x_k}{u_{ii}}, \quad i = n - 1, \dots, 1$$

Eftersom de obekanta beräknas i baklänges ordning, kallas detta förfaringssätt **bakåtsubstitution**.

Vi skall nu övergå till att beskriva **Gauss elimineringsmetod**. Explicit kan vi skriva ekvationssystemet  $Ax = b$  i formen

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

...

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Om  $a_{11} \neq 0$ , så kan  $x_1$  elimineras från de  $n - 1$  sista ekvationerna genom att man subtraherar  $m_{i1} (= \frac{a_{i1}}{a_{11}})$  gånger den första ekvationen från den  $i$ :te ekvationen. Dessa ekvationer antar då formen

$$a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}$$

...

$$a_{n2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)},$$

där de nya koefficienterna är

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}, \quad b_i^{(2)} = b_i - m_{i1}b_1, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

(vi antar att  $A$  inte är singular så att systemet har en entydig lösning).

Detta nya ekvationssystem innehåller  $n - 1$  ekvationer med  $n - 1$  obekanta  $(x_2, \dots, x_n)$ . Om  $a_{22}^{(2)} \neq 0$ , så kan  $x_2$  elimineras på motsvarande sätt från de  $n - 2$  återstående ekvationerna. Om vi väljer

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, \quad i = 3, \dots, n,$$

så kan koefficienterna för detta system uttryckas

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)}, \quad b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2}b_2^{(2)}, \quad i = 3, \dots, n.$$

Elementen  $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, a_{33}^{(3)}, \dots$  som uppträder under elimineringsprocessen, kallas **pivotelement** (efter franska: *pivot*: tapp, axel). Om de är alla olika noll, så kan proceduren upprepas, ända tills man efter  $n - 1$  steg kommer fram till ekvationen

$$a_{nn}^{(n)} x_n = b_n^{(n)}.$$

Om man samlar ihop de första ekvationerna från varje steg i elimineringsprocessen fås det triangulära systemet

$$a_{11}^{(1)}x_1 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}$$

...

$$a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)},$$

som lätt kan lösas genom bakåtsubstitution. Eftersom högra membrum transformeras som kolonnerna i  $A$ , så kan proceduren beskrivas enklare genom att betrakta  $\mathbf{b}$  som den sista kolonnen i  $A$ , och sätta  $a_{i,n+1}^{(k)} = b_i^{(k)}$ .

I praktiken kan det inträffa, att koefficienten för en variabel, som skall elimineras, är mycket liten (eller t.o.m. 0). I sådant fall lönar det sig att ändra radernas ordningsföljd (dvs permutera dem), innan ifrågavarande variabel elimineras. Denna procedur kallas också **pivotering**. Som vi ser, kommer koefficientmatrixens element vid det  $k$ -te steget av elimineringsprocessen att modifieras enligt formeln

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}}a_{kj},$$

där  $i = k + 1, \dots, n$  och  $j = k + 1, \dots, n + 1$ .

Som ett exempel på detta skall vi studera ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \\ 7 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Om vi subtraherar  $\frac{-4}{7}$  gånger talen i den första raden från den andra raden, och  $\frac{7}{7}$  gånger talen i den första raden från den tredje raden, så får vi en **blockindelad matris**

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 7 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3/7 & -3/7 \\ 0 & 14 & -5 & 9 \end{array} \right)$$

Elimineringsprocessen avstannar här, eftersom vi inte kan subtrahera  $\frac{14}{0}$  gånger den andra raden från den tredje! Om vi istället kastar om den andra och tredje raden, så får vi matrisen

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 7 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 14 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & -3/7 & -3/7 \end{array} \right)$$

som ger ett triangulärt ekvationssystem, lösbart med bakåtsubstitution.

I praktiken använder man oftast **partiell pivotering**, vilket innebär att det största elementet i *pivot-kolonnen* på (eller under) diagonalen uppsöks. Därpå kastar man om *pivot-raden* och den rad, där detta största element befinner sig.

Nedan visas ett enkelt MATLAB-program som löser ett ekvationssystem med Gauss-eliminering och partiell pivotering:

```
function x=gauspp(A,b)
% Gauss eliminering med partiell pivotering
% A är en kvadratmatris av ordningen n
% b är en vektor med givna element
n = size(A,1);
for i=1:n-1
    [m,p]=max(abs(A(i:n,i))); % sök upp pivot-elementet
    p = p+i-1;
    sava = A(i,:); A(i,:)=A(p,:); A(p,:)=sava; % omkastning av rader
    savb = b(i); b(i)=b(p); b(p)=savb; % omkastning av element i b
    for j=i+1:n
        m=A(j,i)/A(i,i);
        A(j,i)=0;
```



```

        for k=i+1:n
            A(j,k)=A(j,k) - m*A(i,k);
        end
        b(j)=b(j)-m*b(i);
    end
end % elimineringsprocessen slutar här
% Påbörja bakåtsubstitutionen
x(n) = b(n)/A(n,n);
for i=n-1:-1:1
    for j=i+1:n
        b(i)=b(i)-A(i,j)*x(j);
    end
    x(i)=b(i)/A(i,i);
end % x är lösningsvektorn

```

Man kan visa, att bakåtsubstitutionsprocessen kräver ca  $n^2/2$  multiplikationer, medan elimineringsprocessen behöver ca  $n^3/3$  multiplikationer. Tiden, som åtgår till att lösa ett ekvationssystem enligt denna metod, blir därför proportionell mot  $n^3$ .

Gauss' elimineringsmetod kan också framställas i matrisform:

$$A = PLU,$$

där  $L$  och  $U$  är triangulära matriser, och  $P$  är en permutationsmatris, innehållande nollor och ettor, som anger radombytena (ibland skrivs ekvationen  $P'A = LU$ , men som vi ser, är  $P' = P^T$ ). Av denna orsak brukar Gauss metod också kallas för **LU-faktorisering** eller **triangulär faktorisering** av  $A$ . Då man löser ekvationssystemet på en dator, är det vanligen lämpligast att först lösa ekvationen  $Pz = b$  genom att permutera raderna i  $b$ , och därpå lösa  $Ly = z$  genom framåtsubstitution, och till sist lösa  $Ux = y$  genom bakåtsubstitution, dvs:

$$x = U^{-1}y = U^{-1}L^{-1}z = U^{-1}L^{-1}P^{-1}b = (PLU)^{-1}b = A^{-1}b.$$

I MATLAB kan LU faktorisering utföras med kommandot `lu`, som använder partiell pivotering. Om vi t.ex. tillämpar det på matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \\ 7 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

får vi resultatet:

```
>> [L,U]=lu(A)
```

L =

```
 1.0000      0      0
-0.5714  0.0000  1.0000
 1.0000  1.0000      0
```

U =

```
 7.0000  -7.0000  1.0000
      0  14.0000  -5.0000
      0      0  -0.4286
```

$L$  är här en 'undre triangulär' matris, där två rader blivit omkastade på grund av pivoteringen. Multiplikation visar, att  $LU = A$ .

Vi kan också utföra kommandot så, att permutationsmatrisen blir utskriven:

```
>> [L,U,P]=lu(A)
```

```
L =
```

```
  1.0000    0    0
  1.0000    1.0000    0
 -0.5714    0.0000    1.0000
```

```
U =
```

```
  7.0000  -7.0000    1.0000
    0    14.0000  -5.0000
    0    0    -0.4286
```

```
P =
```

```
  1    0    0
  0    0    1
  0    1    0
```

Matrisen  $P$  är permutationsmatrisen. I detta fall är produkten  $LU$  lika med den matris, som fås då de två sista raderna i  $A$  permuteras. Multiplikation med permutationsmatrisen återställer radernas ordningsföljd.