3.3. Interpolationsmetoder

Antag, att vi önskar beräkna ett funktionsvärde $f(x)$, och att det beräknade funktionsvärdet är $f^*(x)$. Avvikelsen mellan $f^*(x)$ och $f(x)$, som vi betecknar $e(x) = f^*(x) - f(x)$, är således en funktion av x, vars graf brukar kallas felkurva. I det följande kommer vi närmast att syssla med linjär approximation, som innebär, att man försöker approximera en given funktion f med en approximationsfunktion f^*, som kan uttryckas som en linjär kombination (superposition) av $n+1$ (bas)funktioner $\phi_i, i = 0, 1, 2, \ldots, n$:

$$f^*(x) = c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \ldots + c_n\phi_n.$$

Här betecknar $c_0, c_1, \ldots$ parametrar, som skall bestämmas. Om t.ex. $\phi_i = x^i$, så är f^* ett n:te gradens polynom. Mängden av alla funktioner $\phi_i = x^i$ säges bilda en *bas* för alla polynom av gradtalet n.

Funktionen f kan vara angiven på olika sätt. En möjlighet är, att man anger funktionens värde i ett antal punkter x_i : $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m)$. Dessa värden bildar en tabell, som man kan uppfatta som en vektor i ett m-dimensionellt rum. Om funktionen ursprungligen angivits i form av en invecklad analytisk formel, kan man räkna ut en sådan tabell, något som på sin tid var en viktig sysselsättning för matematikerna.

Utgående från en dylik tabell kan man beräkna parametrarna c_i om man löser det linjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
\phi_0(x_0)c_0 + \phi_1(x_0)c_1 + \ldots + \phi_n(x_0)c_n &= f(x_0)\\
\phi_0(x_1)c_0 + \phi_1(x_1)c_1 + \ldots + \phi_n(x_1)c_n &= f(x_1)\\
&\ldots\\
\phi_0(x_m)c_0 + \phi_1(x_m)c_1 + \ldots + \phi_n(x_m)c_n &= f(x_m)
\end{aligned}$$

Om $m = n$ har vi vanligen en lösning. I detta fall brukar vi tala om interpolation. För att vi skall få en entydig lösning, måste funktionerna ϕ_i vara linjärt oberoende. Om $m > n$, finns det flere ekvationer än obekanta, och systemet sägs vara överdeterminerat. I ett sådant fall kan man inte få någon exakt lösning. Man kan då tillämpa utjämning, eller minsta kvadratmetoden på funktionskurvan.

Ett bekvämt sätt att se på en funktion är att uppfatta den som en vektor. Ett polynom av n:te ordningen kan sålunda uppfattas som en vektor i ett $n+1$-dimensionellt rum, om koefficienterna uppfattas som dess element. Ett nätverk med diskreta punkter är inte tillräckligt fint för att kunna användas som definitionsrum för en godtycklig deriverbar funktion. Man brukar därför säga, att en rymd av deriverbara funktioner är oändligt dimensionell.

Funktionsrum har mycket gemensamt med vanliga vektorrum. Man kan t.ex. definiera en norm som kvadratroten ur uttrycket

$$N_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} |f(x_i)|^2,$$

där $x_i = i/n \quad (0 \leq i \leq n)$ definierar ett "nät" för f inom intervallet [0,1]. Då n växer, dvs vi förfinar nätet, kommer N_n att närma sig kvadraten på normen av en kontinuerlig funktion f:

$$\lim_{n \to \infty} N_n(f) = \int_0^1 |f(x)|^2 dx \equiv \|f\|^2.$$

Normen av en godtycklig funktionsvektor f kan betecknas $\|f\|$. För en godtycklig norm gäller följande axiom: a) normen är icke-negativ, b) om en vektor multipliceras med ett godtyckligt reellt tal, så är dess norm lika med produkten av talets absoluta värde och vektorns norm, c) triangelolikheten, d) normen är noll om och endast om funktionsvektorn är identiskt noll.

Vi har redan tidigare definierat de vanligaste normerna för en kontinuerlig funktion över ett slutet intervall. En variant av minsta-kvadratnormen, eller den *euklidiska* normen, som också ofta kommer till användning, är den vägda euklidiska normen:

$$\boxed{\|f\|_{2,w} = \left[\int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Funktionen $w(x)$ brukar kallas viktsfunktion. Den antas vara kontinuerlig och strängt positiv inom det *öppna* intervallet (a, b).

Normerna är viktiga, emedan många approximationsmetoder grundar sig på minimering av någon norm av felfunktionen $e = f^* - f$. I dessa fall måste normen väljas med tanke på användningen av approximationsfunktionen f^*.

Detta leder till en geometrisk tolkning av approximationsfunktionen: Sök den vektor i det linjära underrum, som spännes av funktionerna $\phi_i, i = 1, 2, \ldots, n$ som har det kortaste avståndet till vektorn f. Detta problem kan man principiellt lösa med följande analogi från den vanliga vektorgeometrin: det kortaste avståndet mellan en punkt och ett linjärt underrum (tex ett plan i ett tredimensionellt rum) är längden av den vektor, som står *vinkelrätt* (ortogonalt) mot underrummet. Felvektorn $f^* - f$ bör alltså i det allmänna fallet vara ortogonal mot det underrum, som spännes av ϕ_i.

3.4. Polynomapproximation

En viktig klass av approximationsfunktioner är polynomen. Med ett (äkta) polynom av n:te ordningen förstår man en funktion av formen

$$p_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (a_n \neq 0).$$

Låt oss anta, att f är en funktion, som är kontinuerlig över det slutna, ändliga intervallet $[a, b]$. Den undre gränsen för alla möjliga värden av normen $\|f - p_n\|$, där p_n är ett godtyckligt polynom av n:te graden betecknas $E_n(f)$. Då gäller *Weierstrass' approximationsteorem* (1885)[1]: För varje kontinuerlig funktion f som definierats över ett slutet och begränsat intervall gäller att

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0.$$

Man kan även formulera approximationsteoremet så, att mot varje $\epsilon > 0$ svarar ett polynom p_n sådant att

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| < \epsilon.$$

[1] Karl Weierstrass, tysk matematiker (1815–1897)

Vi skall inte här gå in på beviset av detta teorem, som hör till approximationsteorins hörnstenar, utan endast nämna, att det numera kan utföras mycket elegant med hjälp av de s.k. Bernstein-polynomen, som konvergerar likformigt mot funktionen inom det slutna intervallet (se t.ex. P.J. Davis: *Interpolation and approximation*, kap. VI).

Ett enkelt och naturligt sätt att approximera en funktion med ett polynom är att låta det sammanfalla med funktionsvärdena i ett givet "nät" av punkter. Låt oss anta, att $x_i, i = 0, 1, 2, \ldots, m$ betecknar $m+1$ givna punkter i ett nät ($x_i \neq x_j$ då $i \neq j$, dvs punkterna är disjunkta). Vi konstruerar en polynomräcka med hjälp av rekursionslikheten

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= c_0 \\ &\ldots \\ \phi_i(x) &= \phi_{i-1}(x) + c_i(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}$$

Man kan lätt visa, att problemet med att bestämma ett polynom av m:te graden som sammanfaller med funktionsvärdena i $m+1$ punkter alltid har en entydig lösning av ovanstående form. Om vi betecknar polynomet med $p(x)$, så gäller enligt ovanstående ekvationer (oberoende av gradtalet)

$$\begin{aligned} p(x_0) &= c_0 \\ p(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0)\,, \\ &\dots \end{aligned}$$

där koefficienterna c_i går att beräkna genom successiva substitutioner. Detta innebär, att lösningen är *entydig*.

Denna typ av polynom kallas interpolationspolynom. Resttermen som man får vid approximation av en funktion f på detta sätt med ett polynom av m:te graden kan uttryckas

$$f(x) - p_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\alpha)}{(m+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m),$$

där $f^{(m+1)}(\alpha)$ är den $m+1$:a derivatan av f tagen i en punkt α, som tillhör intervallens föreningsmängd.

Ovan angavs ett sätt att beräkna ett godtyckligt interpolationspolynom, som dock inte alltid är särskilt praktisk. Med ett datorprogram är det förnuftigare att beräkna $p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)\dots$ i en given punkt x med hjälp av rekursionslikheterna

$$
\begin{aligned}
b_n &= c_n \\
b_{n-i} &= (x - x_{n-i})b_{n-i+1} + c_{n-i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
p_n(x) &= b_0
\end{aligned}
$$

(*Horners metod*, 1819[2], som ursprungligen utnyttjades för att finna nollställen för ett polynom).

Ett problem som ofta uppträder vid beräkningen av interpolationspolynom, är oscillation mellan nätpunkterna, som kan vara speciellt markant i intervallets ändpunkter, isynnerhet då man använder polynom av höga gradtal (Runges fenomen). Fenomenet, som upptäcktes år 1901 av Runge då han försökte interpolera funktionen $1/(1 + 25x^2)$ över intervallet $[-1, 1]$ är speciellt märkbart vid ekvidistant interpolation. Ett bättre resultat kan erhållas med hjälp av ortogonala polynom, som vi skall studera i nästa avsnitt. Om inte heller detta hjälper, kan man pröva rationella funktioner. Polynom av höga gradtal borde alltid undvikas, eftersom de leder till orealistiska oscillationer.

[2] William George Horner, engelsk matematiker (1786–1837)

Ett vanligt val av basfunktioner för ett interpolationspolynom till en talräcka $y_i, i = 1, 2, \ldots, n$ är

$$\phi_i(x) = x^{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Interpolationsfunktionen kan i detta fall uttryckas

$$p_{n-1}(x) = c_1 + c_2 x + \ldots + c_n x^{n-1}.$$

De obekanta koefficienterna $c_i, i = 1, 2, \ldots, n$ kan bestämmas genom att lösa ekvationssystemet

$$Bc = y,$$

där B betecknar $n \times n$-matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Determinanten av B, som brukar kallas Vandermondes determinant [3], har intressanta egenskaper. Om x_i uppfattas som variabler, så kan den tolkas som ett polynom i flera variabler, vars gradtal fås genom att addera exponenterna: $0 + 1 + 2 + \ldots + n - 1 = n(n-1)/2$. Vi inser också lätt, att $\det(B)$ försvinner, om t.ex. $x_n = x_1$, varav följer, att $x_n - x_1$ ingår som en faktor i $\det(B)$. På samma sätt visar man, att också differenserna $x_n - x_2$, $x_n - x_3, \ldots, x_n - x_{n-1}$ kommer att ingå som faktorer, varför produkten

$$\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i) = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})$$

ingår som faktor i $\det(B)$.

Genom ett analogt resonemang kan man visa, att också produkten $\prod_{i=1}^{n-2}(x_{n-1} - x_i)$ ingår som en faktor i $\det(B)$. Genom att upprepa proceduren, finner man till sist att produkten $\prod_{i>j=1}^{n}(x_i - x_j)$, ingår i $\det(B)$. Eftersom denna produkt (tolkad som ett polynom) har samma gradtal som determinanten, så har vi funnit alla faktorerna, varför polynomen endast kan skilja sig genom en konstant. Genom att jämföra samma term (välj t.ex. determinantens diagonala term) i båda uttrycken, finner man att denna konstant är ett, varav följer att

$$\det(B) \equiv \prod_{i>j=1}^{n}(x_i - x_j).$$

[3] Uppkallad efter Alexandre Théophile Vandermonde, fransk matematiker (1735–1796)

Vandermondes determinant visar alltså, att x–potenserna $x^i, i = 1, 2, \ldots, n-1$ är linjärt oberoende över en mängd av n disjunkta punkter. Genom att beräkna ett polynom av $n-1$:a graden i n disjunkta punkter kan man alltså (entydigt) göra en exakt rekonstruktion av polynomet.

Också andra basfunktioner kan användas. En mycket användbar typ av interpolationspolynom har uppkallats efter Lagrange[4]. Lagranges interpolationspolynom kan uttryckas

$$p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i l_i(x),$$

där $l_i(x)$ är ett polynom av gradtalet $n-1$ med egenskapen

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j; \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

På grund av egenskaperna för l_i gäller då, att

$$p_{n-1}(x_i) = y_1 l_1(x_i) + y_2 l_2(x_i) + \ldots + y_n l_n(x_i) = y_i l_i(x_i) = y_i.$$

[4] Joseph-Louis Lagrange: *Sur l'usage des courbes dans la solution des problèmes* (1795), som ingick i hans föreläsningar i l'École Normale.

Som vi också lätt inser, är matrisen B i detta fall en identitetsmatris. Polynomen l_i kan uttryckas

$$
\begin{aligned}
l_i(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} \\
&= \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x - x_j) / \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x_i - x_j).
\end{aligned}
$$

3.5. Ortogonala polynom

En viktig klass av ortogonala funktioner bildar de de ortogonala polynomen. Vi skall inte här beskriva deras allmänna teori i detalj, utan snarare behandla några exempel.

En av de viktigaste moderna approximeringsmetoderna baserar sig på Tjebysjev-polynomen, som man kan konstruera på följande sätt. Av cosinus-funktionens additions- och subtraktionsformler följer

$$\cos(n+1)\phi + \cos(n-1)\phi = 2\cos\phi\cos n\phi \quad (n \geq 1).$$

Detta leder till, att $\cos n\phi$ kan uttryckas som ett polynom i $\cos\phi$:

$$\begin{aligned}
\cos 2\phi &= 2\cos^2\phi - 1 \\
\cos 3\phi &= 2\cos\phi\cos 2\phi - \cos\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi \\
\cos 4\phi &= 2\cos\phi\cos 3\phi - \cos 2\phi = 8\cos^4\phi - 8\cos^2\phi + 1 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Om vi substituerar $x = \cos\phi$ (dvs $\phi = \arccos x$) fås en familj av polynom, som kallas Tjebysjevpolynom[5] : $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Tjebysjevpolynomen kan genereras ur rekursionsformeln

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x = xT_0(x),$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n \geq 1.$$

Den ledande koefficienten (a_n) är 2^{n-1} då $n \geq 1$. Polynomen uppfyller symmetriegenskapen

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

Tjebysjevpolynomen är definierade inom det slutna intervallet $[-1, 1]$, där de har n nollställen:

$$x_k = \cos\left[\frac{\pi}{2n}(2k+1)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

[5]Efter *Pafnuti Lvovitch Tjebysjev* (1821-1894), som definierade dem i en artikel med titeln *Sur les quadratures* (1874)

och $n+1$ extrema:

$$x'_k = \cos(k\pi/n), \quad T_n(x'_k) = (-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Detta följer direkt av att $\cos n\phi = 0$ då $\phi = \frac{\pi}{2n}(2k+1)$, och att $|\cos n\phi|$ antar sina maximivärden för $\phi = k\pi/n$.

Ortogonalitetsvillkor för Tjebysjevpolynomen:

a) kontinuerliga fallet: om

$$(f, g) = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

så gäller

$$(T_i, T_j) = \begin{cases} 0 & \text{om } i \neq j \\ \frac{\pi}{2} & \text{om } i = j \neq 0 \\ \pi & \text{om } i = j = 0 \end{cases}.$$

(Bevisas genom att sätta $x = \cos\phi$).

b) diskreta fallet: om

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k)g(x_k),$$

där x_k anger nollställen för $T_{m+1}(x)$, så gäller

$$(T_i, T_j) = \begin{cases} 0 & \text{om } i \neq j \\ (m+1)/2 & \text{om } i = j \neq 0 \\ m+1 & \text{om } i = j = 0 \end{cases} .$$

Man kan även bevisa den sk minimax–egenskapen: av alla n:te gradens polynom med den ledande koefficienten 1, så har $2^{1-n}T_n$ den minsta maximala normen i det slutna intervallet $[-1, +1]$.

Tjebysjevpolynomen kan användas för att approximera en funktion över intervallet $[-1, +1]$. Om funktionen är definierad över ett intervall $[a, b]$, kan man göra substitutionen $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$, som transformerar intervallet till $[-1, +1]$. Av interpolationspolynomets restterm ser man, att den för det mesta beter sig som ett oscillerande polynom. Detta är i skarp kontrast mot Taylor-approximationens felkurva, som växer brant (jfr tex exponentialfunktionen). Om en funktion kan approximeras av ett polynom, och nätpunkterna fritt kan väljas, så lönar det sig i allmänhet att välja ett Tjebysjevpolynom, vilket också visas av minimaxprincipen. Härom mera i nästa avsnitt.

Ett annat exempel på ortogonalpolynom är Legendrepolynomen [6], som definieras av

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Eftersom $(x^2-1)^n$ är ett polynom av gradtalet $2n$, så är $P_n(x)$ ett polynom av graden n. Som man ser, blir den ledande koefficienten $(2n)!/2^n(n!)^2$. Ortogonalitetsegenskapen kan uttryckas på följande sätt: Om $(f, g) = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$, så är

$$(P_n, P_m) = \begin{cases} 0, & \text{om } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{om } n = m \end{cases}.$$

Symmetriegenskapen är $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, och rekursionslikheten kan utryckas

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x),$$
$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = (3x^2-1)/2.$$

Legendrepolynomen är nyttiga vid approximation med euklidisk norm och viktsfunktionen $w(x) = 1$.

[6] Introducerade av Adrien-Marie Legendre (1752-1833) i *Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes* (1785)

3.6. Ekonomisering av potensserier

För att approximera en funktion kan man [som vi sett] använda en potensserie, som avbryts på ett lämpligt ställe. Om vi (t.ex.) approximerar $\cos x$ med de sex första termerna i Taylorserien, approximerar vi funktionen med ett alldeles speciellt polynom av tionde graden, utan att fråga om det var det ”bästa” polynomet av detta gradtal.

Men vad menar vi med ”bästa” polynom? Ett polynom som approximerar funktionen mycket bra nära mitten av ett intervall, och sedan blir allt sämre mot ändpunkterna (såsom alla Taylorserier gör). Att finna ett bättre polynom kräver någon form av ”ekonomiseringsmetod”, som vi nu skall beskriva.

Vanligen önskar man att felet skall vara litet över ett ändligt intervall (såsom [0,3]) och att nogrannheten är t.ex. 7 decimaler (om man använder enkel precision). Vi kan t.ex. fordra att det *det kvadratiska medelfelet* är så litet som möjligt över det betraktade intervallet. Eller också kan man kräva att det största felet inom intervallet skall vara mindre än det största felet som en approximation av liknande slag har inom samma intervall.

Ekonomiseringsmetoden introducerades av Cornelius Lanczos, som i boken *Applied Analysis* säger, att Taylorserien är mycket oekonomisk eftersom den tar all information från funktionsvärden i närheten av $x = 0$, och därför inte är särskilt användbar i tillämpningar. Han observerade att felet vid approximation med Tjebysjevpolynom beter sig mycket bättre än då man använder Taylorserier, resten beter sig i stort sett som den första bortlämnade termen.

Som ett exempel skall vi studera Taylorserien för $\cos x$ inom intervallet $[0, \pi]$. Den önskade noggrannheten må vara 10^{-6}. Om serien avkortas till nio termer kan den skrivas

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots - \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{16}}{16!}.$$

Felet i $\cos x$ då $x = \pi$ är mindre än $\frac{\pi^{18}}{18!}$ som är ca 10^{-7}, vilket är helt tillfredsställande. Att lämna bort termen som innehåller 10^{16} går inte, eftersom dess värde för $x = \pi$ är omkring 10^{-5}. Om man å andra sidan uppritar denna term som funktion av x inom det givna intervallet, så ser man att den är liten inom större delen av intervallet, och växer först i närheten av $x = \pi$.

Det kan därför vara på sin plats att göra variabelbytet $y = x/\pi$ och reducera intervallet till $[-1, 1]$ (eftersom $\cos x$ är en jämn funktion, är den symmetrisk kring origo). Vi får då serien

$$\cos \pi y = 1 - \frac{\pi^2}{2!}y^2 + \frac{\pi^4}{4!}y^4 - \ldots - \frac{\pi^{14}}{14!}y^{14} + \frac{\pi^{16}}{16!}y^{16},$$

som i princip är samma serie som förut, utom att variabeln nu är y.

Vi skulle önska göra oss av med termen y^{16}. Den påminner mycket om alla de lägre potenserna av y, och vi väntar oss därför att det finns en linjär kombination av dessa potenser som approximerar termen y^{16}. För den skull använder vi nu Tjebysjevpolynomen. Tjebysjevpolynomet $T_{16}(y)$ kan skrivas

$$T_{16}(y) = 2^{15}y^{16} - 2^{17}y^{14} + 13 \cdot 2^{14}y^{12} - 11 \cdot 2^{14}y^{10} + 165 \cdot 2^{9}y^{8} - 21 \cdot 2^{10}y^{6} + 21 \cdot 2^{7}y^{4} - 2^{7}y^{2} + 1,$$

varav följer att

$$y^{16} = \frac{T_{16}(y)}{2^{15}} - \frac{13}{2}y^{12} + \frac{11}{2}y^{10} - \frac{165}{64}y^{8} + \frac{21}{32}y^{6} - \frac{21}{256}y^{4} + \frac{1}{256}y^{2} - \frac{1}{2^{15}},$$

där termen som innehåller $T_{16}(y)$ kan försummas, eftersom varje Tjebysjevpolynom oscillerar exakt mellan -1 och $+1$, eftersom de i verkligheten är cosinusfunktioner.

Man kan nu visa, att om man ersätter y^{16} i den ursprungliga serieutvecklingen med approximationen ovan, så blir maximifelet i $\cos \pi y$ lika med $\frac{\pi^{16}}{2^{15} \cdot 16!} \approx 1.31 \cdot 10^{-10}$ som är betydligt mindre än termen y^{18} som tidigare lämnades bort. Den nya approximationen är alltså betydligt noggrannare än den tidigare!