

Kapitel 7. Numerisk derivering och integration

Numerisk beräkning av bestämda integraler har gamla anor inom matematiken, och härleder sig ofta från rent praktiska ytbestämningsproblem. Problemet med *cirkelns kvadratur*, som var ett av antikens tre olösta problem, ledde till olika försök att beräkna π (Hippokrates, Pappus och Arkimedes).

Detta klassiska problem gav också upphov till benämningen **numerisk kvadratur** för numerisk beräkning av integraler. De moderna metoderna för numerisk integration, liksom derivering, stöder sig på **differenskalkylen**.

Differenser används också vid numerisk beräkning av derivator.

7.1. Numerisk derivering

Antag att vi vill beräkna derivatan av en funktion $f(x)$ i en punkt $x = a$. Genom att utveckla funktionen i Taylors serie kring denna punkt får vi

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\theta)}{2}h^2,$$

där θ är en punkt som hör till intervallet $[a, a + h]$. Funktionen derivata i punkten $x = a$ kan då approximeras med differenskvoten

$$\frac{\Delta f(a)}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a) + f''(\theta)\frac{h}{2},$$

som närmar sig den exakta derivatan mer och mer, då $h \rightarrow 0$ (åtminstone i teorin).

Vi kan lätt skriva ett kort MATLAB-program för att undersöka detta. Om det t.ex. tillämpas på sinusfunktionen, så märker vi genom att beräkna skillnaden mellan differenskvoten och den exakta derivatan, att den först minskar, då h avtar (vilket man kunde vänta sig), men börjar växa igen, om h är tillräckligt litet.

Detta kan förklaras på följande sätt. Antag, att avrundningsfelet vid beräkningen av sinusfunktionen är ϵ . I stället för den matematiska felgränsen

$$\left| \frac{\Delta f(a)}{h} - f'(a) \right| \leq \frac{h}{2} |f''(\theta)|$$

kommer vi i praktiken att få det approximativa felet

$$\left| \frac{\Delta f(a)}{h} - f'(a) \right| \approx \frac{h}{2} |f''(\theta)| + \frac{2\epsilon}{h},$$

som förutom det matematiska felet, som beror på att Taylorserien avbrutits, också inkluderar avrundningsfelet. Vi kan lätt se, att detta fel minimeras, då $h = 2\sqrt{\epsilon/|f''(\theta)|}$. Felet kan uttryckas i en allmännare form, om vi antar, att det absoluta avrundningsfelet ϵ är mindre än ett tal $\delta > 0$, och att funktionens andra derivata är uppifrån begränsad: $|f''(x)| \leq M$. Då minimeras det totala felet av $h_{\min} = 2\sqrt{\delta/M}$, och felets minimivärde blir $2\sqrt{\delta M}$.

Ett annat sätt att reducera felet vid beräkningen av derivatan är att använda en noggrannare formel, t.ex. den **centrala differenskvoten**:

$$\delta_h f(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Om vi utvecklar både $f(a+h)$ och $f(a-h)$ i Taylors serie och subtraherar, så får vi $\delta_h f(a) = f'(a) + \frac{h^2}{3!} f'''(a) + \frac{h^4}{5!} f^{(5)}(a) + \dots$, varvid det matematiska felet blir av storleksordningen $\mathcal{O}(h^2)$.

7.2. Differenskalkylens grunder

Vi skall nu ge en kort introduktion till den **finita differenskalkylen**, som infördes av Brook Taylor (1685-1731) i början av 1700-talet ¹. Låt oss anta, att f är en funktion av en variabel x , och att f är definierad över nätet $x_i = a + (i - 1)h$, $i = 1, 2, \dots, n$. Vi kan alltså anta, att funktionsvärdena $f(a)$, $f(a + h)$, \dots , $f(a + [n - 1]h)$ är kända.

Vi definierar därpå **(framåt)differensoperatorn**

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x).$$

Denna operator är linjär, emedan villkoret

$$\Delta[af(x) + bg(x)] = a\Delta f(x) + b\Delta g(x)$$

¹Brook Taylor: "Methodus incrementorum directa et inversa", 1715

gäller för alla a, b . Räknereglerna för differensoperatoren påminner om reglerna för differentiering, tex

$$\Delta[f(x)g(x)] = f(x+h)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$$

$$\Delta[f(x)/g(x)] = [g(x)g(x+h)]^{-1}[g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)] \quad (\text{bevis?})$$

Emedan $\Delta f(x)$ i sin tur är en funktion av x , så kan differensoperatoren tillämpas flere gånger, vilket leder till $\Delta[\Delta f(x)] = \Delta^2 f(x)$, eller i allmänhet $\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)]$ (den n :te differensen).

Om $f(x) = ax^2 + bx + c$ finner man pga lineariteten

$$\Delta f(x) = a[(x+h)^2 - x^2] + b(x+h-x) = 2ahx + ah^2 + bh$$

samt

$$\Delta^2 f(x) = 2ah^2.$$

Om vi fortsätter att bilda differenser finner vi att $\Delta^3 f(x)$ och alla högre ordningens differenser är lika med noll.

Detta leder oss till **differenskalkylens fundamentalsats**, som gäller för ett polynom av n :te graden:

Den n :te differensen av ett n :te gradens polynom, vars ledande koefficient är olika noll, är en konstant, och den $(n+1)$:a differensen är noll.

Beviset för denna sats följer av ett lemma: Om $f(x)$ är ett polynom av n :te graden, så är $\Delta f(x)$ ett polynom av $(n - 1)$:a graden. Detta lemma kan bevisas på följande sätt:

Om speciellt $f(x) = x^n$, så gäller

$$\Delta f(x) = (x+h)^n - x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^{n-k} x^k - x^n = nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2} + \dots + h^n.$$

Härav inses, att om man tillämpar differensoperatoren på x^n , så kommer man att få ett polynom av $(n-1)$:a graden med den ledande koefficienten nh . På grund av linearitetsegenskapen följer då, att differensoperatoren minskar gradtalet för varje term i polynomet med 1. Härmed är lemmat bevisat. Fundamentalsatsen kan därpå bevisas genom att man tillämpar lemmat n gånger. Polynomet reduceras därigenom till en konstant, som visar sig bli $n!h^n$ (kontrollera!). Nästa differens försvinner, varmed satsen är bevisad.

När man räknar med differenser, är det nyttigt att ställa upp ett **differensschema**. Ett sådant schema kan man konstruera på följande sätt:

$$\begin{array}{cccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 f(0) & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \Delta f(0) & & \cdot \\
 f(1) & & \Delta^2 f(0) & \\
 & \Delta f(1) & & \Delta^3 f(0) \\
 f(2) & & \Delta^2 f(1) & \\
 & \Delta f(2) & & \Delta^3 f(1) \\
 f(3) & & \Delta^2 f(2) & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

Exempel: (Partiellt) differensschema för en serie värden ($\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots$) av en funktion f :

$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0		0		1
	0		1	
0		1		-4
	1		-3	
1		-2		6
	-1		3	
0		1		-4
	0		-1	
0		0		1

Vi ser härav också, hurudan effekt en störning i ett funktionsvärde kan åstadkomma i de högre differenserna. Av denna orsak har **differenskontroller** en stor betydelse när det gäller att upptäcka räknefel.

Differenserna i ovanstående tabell är proportionella mot binomialkoefficienter. Vi inser detta genom att introducera den så kallade **skiftoperatorn** E , som kan användas för att generera en funktionsvärdestabell:

$$Ef(x) = f(x + 1) \quad (\text{antag : } h = 1).$$

Denna operator är också linjär. Upprepad tillämpning av definitionen ger

$$E^n f(x) = \underbrace{EE \dots E}_{n \text{ st.}} f(x) = f(x + n).$$

Vi inför också definitionerna $E^0 f(x) = f(x)$ samt $E^{-n} f(x) = f(x - n)$. På grund av differensoperatorns definition gäller $\Delta = E - 1$, och upprepad tillämpning av denna formel ger

$$\Delta^n = (E - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k$$

pga binomialteoremet. Låt oss anta, att $f(x) = 0$ ($x \neq 0$), men att $f(0) = 1$. Vi finner då att de enda differenser som skiljer sig från noll är

$$\Delta^n f(-k) = (-1)^{n-k} \binom{n}{k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

För en godtycklig funktion f gäller för den **n :te framåt differensen**:

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + k)$$

7.3. Approximationsformler och numerisk integration

Vid många praktiska tillämpningar känner man endast till ett ändligt antal värden av en okänd funktion. I sådana fall lönar det sig att utnyttja dessa funktionsvärden för att konstruera en approximerande funktion, som man sedan kan operera med i de fortsatta beräkningarna.

För att konstruera en sådan funktion kan man använda en linjär operator L , som verkar på en klass av funktioner, dvs $L[af(x) + bg(x)] = aLf(x) + bLg(x)$. En dylik operator kan t.ex. ange en integration, derivering eller interpolation.

Antag, att f är en funktion, som är känd i punkterna x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. En numerisk approximation av $Lf(x)$ innebär då, att vi försöker bestämma koefficienterna i ett uttryck av den allmänna formen

$$\begin{aligned} Lf(x) = & a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \dots + a_nf(x_n) \\ & + b_1f'(x_1) + b_2f'(x_2) + \dots + b_nf'(x_n) \\ & + c_1f''(x_1) + c_2f''(x_2) + \dots + c_nf''(x_n) + \dots, \end{aligned}$$

där många koefficienter kan vara noll. För enkelhetens skull skall vi anta, att approximationsformeln endast beror av funktionsvärdena, dvs att b -, c -koefficienterna etc. är lika med noll.

För att bestämma koefficienterna a_i , står det tre metoder till vårt förfogande, som alla är ekvivalenta och ger samma resultat. Den första metoden går ut på att bestämma ett polynom, som approximerar funktionen f (enligt någon av de metoder som beskrevs i kapitel 3), och att vi sedan opererar på detta polynom med operatoren L . Detta kallas för den **analytiska substitutionsmetoden**.

Den andra metoden går ut på att man serieutvecklar varje term i en lämplig Taylor's serie och identifierar koefficienterna för derivator av samma ordning. Som ett exempel på tillämpningen av denna metod skall vi här visa hur man kan finna **Simpsons integrationsformel**:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = a_{-1}f(-1) + a_0f(0) + a_1f(1).$$

Om vi sätter $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + f'''(0)x^3/6 + \dots$, så kan ekvationens vänstra medlems uttryck skrivas i formen

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = 2f(0) + 2f''(0)/3! + 2f^{iv}(0)/5! + \dots,$$

eftersom denna integral försvinner för udda potenser av x .

För termerna i högra membrum fås efter substitution av Taylor-utvecklingen

$$a_{-1}f(-1) = a_{-1}f(0) - a_{-1}f'(0) + a_{-1}f''(0)/2! - a_{-1}f'''(0)/3! + \dots$$

$$a_0f(0) = a_0f(0)$$

$$a_1f(1) = a_1f(0) + a_1f'(0) + a_1f''(0)/2! + a_1f'''(0)/3! + \dots$$

Genom att identifiera koefficienterna för $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, \dots etc fås ekvationerna

$$2 = a_{-1} + a_0 + a_1$$

$$0 = -a_{-1} + a_1$$

$$\frac{2}{3} = a_{-1} + a_1$$

$$0 = -a_{-1} + a_1$$

$$\frac{2}{5} = a_{-1} + a_1 + \epsilon,$$

där $\epsilon =$ felet.

Ekvationssystemets lösning är $a_{-1} = a_1 = 1/3$, $a_0 = 4/3$, som ger den sedvanliga formeln

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{f(-1)}{3} + \frac{4f(0)}{3} + \frac{f(1)}{3}.$$

Den tredje metoden, som kräver att formeln skall gälla *exakt* för potensräckan $f(x) = 1, x, x^2, x^3, \dots$ så långt vi kan (eller vill) gå beskrevs ganska utförligt i Vetenskapliga beräkningar II.

Den användes där för att härleda ett uttryck för **Gauss kvadraturformel**. En allmän integrationsformel av Gauss typ (där alltså sampelpunkterna inte är fixerade) kan skrivas

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),$$

där $p(x)$ betecknar en **viktsfunktion**. Gauss behandlade själv fallet med $p(x) = 1$ ². De viktigaste integrationsformlerna av detta slag, där sampelpunkterna x_i utgör nollställen för de associerade ortogonala polynomen, ges i nedanstående tabell:

²*Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*, Göttingen 1814

Namn	Integr. intervall	Viktsfunkt.	Ass. polynom	w_i
<i>Gauss-Legendre</i>	$[-1, 1]$	1	$P_n(x)$	$2(1 - x_i^2)^{-1} [P'_n(x_i)]^{-2}$
<i>Gauss-Laguerre</i>	$[0, \infty]$	e^{-x}	$L_n(x)$	$(n!)^2 x_i^{-1} [L'_n(x_i)]^{-2}$
<i>Gauss-Hermite</i>	$[-\infty, +\infty]$	e^{-x^2}	$H_n(x)$	$2^{n+1} n! \sqrt{\pi} [H'_n(x_i)]^{-2}$

Nollställen och vikter finns tabulerade tex i *Abramowitz* och *Stegun*: Handbook of mathematical functions.

Om sampelpunkterna är på förhand *fixerade*, och belägna på jämnt avstånd från varandra (dvs $x_i = 0, h, 2h, \dots, nh$) får man en integrationsformel av **Newton-Cotes** typ³:

$$\int_0^{nh} f(x) dx = nh \sum_{i=0}^n C_i^{(n)} f(x_i).$$

Formlerna för små värden av n har begåvats med särskilda namn. Sålunda kallas formeln för $n = 1$ för **trapetsformeln**, formeln för $n = 2$ **Simpsons regel** samt formeln för $n = 3$ **treåttondelsregeln** etc. Nedanstående tabell ger vikterna för formlerna med $n = 1, 2, \dots, 6$:

³Newton: *Methodus Differentialis*, 1711; Cotes: *De Methodo Differentiali Newtoniana*, 1722 (posth.)

Tabell över Cotes' tal.

n	N	$NC_0^{(n)}$	$NC_1^{(n)}$	$NC_2^{(n)}$	$NC_3^{(n)}$	$NC_4^{(n)}$	$NC_5^{(n)}$	$NC_6^{(n)}$	Restterm
1	2	1	1						$8.3 \cdot 10^{-2} \cdot h^3 \cdot f''(\xi)$
2	6	1	4	1					$1.1 \cdot 10^{-2} \cdot h^5 \cdot f^{iv}(\xi)$
3	8	1	3	3	1				$3.9 \cdot 10^{-2} \cdot h^5 \cdot f^{iv}(\xi)$
4	90	7	32	12	32	7			$8.5 \cdot 10^{-3} \cdot h^7 \cdot f^{vi}(\xi)$
5	288	19	75	50	50	75	19		$2.3 \cdot 10^{-2} \cdot h^7 \cdot f^{vi}(\xi)$
6	840	41	216	27	272	27	216	41	$6.4 \cdot 10^{-3} \cdot h^9 \cdot f^{viii}(\xi)$

Cotes formler kan härledas på följande sätt. Vi har tidigare beskrivit Lagranges interpolationspolynom $p_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$, där $l_i(x)$ är ett polynom av gradtalet $n - 1$, som har formen

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) / \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)$$

Här gäller $x_i = x_0 + ih$, och om vi sätter $x = x_0 + sh$, så får vi $x - x_j = x - x_0 - jh = (s - j)h$, $x_i - x_j = (i - j)h$ och $dx = hds$.

Därav följer att polynomet l_i kan skrivas

$$l_i = \frac{s(s-1) \cdots (s-i+1)(s-i-1) \cdots (s-n)}{i(i-1) \cdot (1)(-1) \cdot (i-n)}$$

och vi får

$$\int_{x_0}^{x_n} p_{n-1}(x) dx = nh \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n y_i \int_0^n l_i ds$$

Om vi inför beteckningen $C_i^{(n)} = (1/n) \int_0^n l_i ds$ (Cotes' tal), så kan integrationsformeln skrivas

$$\int_{x_0}^{x_n} p_{n-1}(x) dx = nh \sum_{i=0}^n C_i^{(n)} y_i = (x_n - x_0) \sum_{i=0}^n C_i^{(n)} y_i$$

Man kan lätt visa, att Cotes' tal uppfyller villkoren $C_i^{(n)} = C_{n-i}^{(n)}$ och $\sum_{i=0}^n C_i^{(n)} = 1$.

Som exempel skall vi beräkna Cotes' tal i Simpsons regel ($n = 2$):

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{(s-1)(s-2)}{(-1)(-2)} ds = \frac{1}{6} \\ C_1^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{s(s-2)}{1(-1)} ds = \frac{4}{6} \\ C_2^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{s(s-1)}{2 \cdot 1} ds = \frac{1}{6} \end{array} \right.$$

Härav följer

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx (x_2 - x_0) \left(\frac{1}{6} y_0 + \frac{4}{6} y_1 + \frac{1}{6} y_2 \right)$$

7.4. Sammansatta kvadraturregler och Kronrods metod

Istället för de enkla n -punktsreglerna, som beskrevs i föregående avsnitt, brukar man ofta kombinera dem genom att uppdelat integrationsintervallet $[a, b]$ i ett antal underintervall (även kallade **paneler**), och tillämpa en kvadraturregel på varje delintervall och addera. Vi kan därvid stöda oss på regeln

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx.$$

Om man tillämpar samma regel på varje delintervall, och deras ändpunkter är ekvidistanta, brukar man tala om en **sammansatt** (eller **komposit**) kvadraturregel.

Den sammansatta trapetsregeln kan man finna t ex på följande sätt: Antag, att h är delintervallets bredd, och att intervallens ändpunkter ges av ekvationen $x_i = a + ih$. Genom att tillämpa trapetsregeln på intervallen $[a + ih, a + (i + 1)h]$ och addera, får vi då

$$\begin{aligned} \int_a^b dx &= h \left[\frac{f(a)}{2} + f(a + h) + \dots + f(b - h) + \frac{f(b)}{2} \right] - \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n f'' \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) + \dots \\ &= T_{n+1} + R_{n+1}, \end{aligned}$$

där R_{n+1} anger resttermen. Om funktionens andra derivator inte gör alltför stora språng inom integrationsintervallet, kan vi approximera summan i resttermen med $nf''(\xi)$, varav följer

$$R_{n+1} \approx -\frac{nh^3}{12}f''(\xi) + \dots \approx -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi).$$

En sammansatt Simpsons regel finner man på ett liknande sätt genom att dela upp intervallet på $2n$ delintervall:

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a + h) + 2f(a + 2h) + \dots + 4f(b - h) + f(b)] - (b - a)\frac{h^4}{180}f^{iv}(\xi) + \dots \\ &(h = (b - a)/2n). \end{aligned}$$

Genom uppdelning av integrationsintervallet på flere delintervall kan man uppenbarligen beräkna integralen noggrannare. Eftersom resttermen för trapetsregeln är proportionell mot h^2 , borde felet avta med en fjärdedel (om funktionen är välartad), om man fördubblar antalet delintervall. De bästa approximationerna till integralen för ett givet antal delintervall får man genom att välja en integrationsformel av Gauss' typ, där intervallens ändpunkter är nollställen för ett ortogonalt polynom. Genom att utöka antalet punkter i en kvadraturformel av Gauss' typ, får man oftast noggrannare resultat, men intervallens ändpunkter och vikterna måste beräknas på nytt.

Den ryske matematikern *Alexander Kronrod* undersökte 1964, om det var möjligt att förbättra Gauss kvadraturformler genom att utöka antalet sampelpunkter och samtidigt bevara sampelpunkterna i den ursprungliga Gauss-formeln. Kronrod utgick alltså från en Gauss-formel av typen $G_n = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$, och bestämde koefficienterna i den modifierade formeln

$$K_{2n+1} = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) + \sum_{j=1}^{n+1} b_j f(y_j),$$

som har n sampelpunkter gemensamma med G_n . K_{2n+1} har ytterligare $n + 1$ sampelpunkter och skilda vikter a_i, b_j . Gauss-kvadraturen G_n baserar sig på ett polynom av gradtalet $2n - 1$, medan K_{2n+1} , som bestäms av $3n + 2$ parametrar a_i, b_j, y_j , baserar sig på ett polynom av gradtalet $3n + 1$. För att beräkna parametrarna krävs det alltså totalt $2n + 1$ funktionsberäkningar.

Som uppskattning på felet kan man välja skillnaden $|G_n - K_{2n+1}|$, och använda K_{2n+1} som en uppskattning på integralen. Erfarenheten visar dock, att man på detta sätt överskattar felet, och att en mera realistisk uppskattning på felet är $(200|G_n - K_{2n+1}|)^{1.5}$. En Gauss-kvadratur, i kombination med en Kronrod-kvadratur, anses numera som en av de noggrannaste metoderna att beräkna allmänna integraler. Metoder för numerisk beräkning av integraler, som baserar sig på Gauss-Kronrod kvadratur, används numera bl.a. i Mathematica och Texas Instruments grafiska räknare (TI-85 etc.). I MATLAB ingår två adaptiva kvadraturprocedurer, av vilka `quad` baseras på en Simpson-regel, och `quadl` använder Lobatto-kvadratur, en modifierad Gauss-metod baserad på ett Jacobipolynom som ger stor noggrannhet ⁴.

Många program för automatisk beräkning av bestämda integraler använder nuförtiden en (globalt) adaptiv metod, som försöker anpassa sampelpunkterna och vikterna efter integranden. För detta ändamål använder man en "lokal kvadratur-modul", vars uppgift är att först tillämpa en kvadraturformel med $n + 1$ punkter på intervallet, samt därpå fördubbla antalet intervall, och upprepa beräkningen. Om storleken av förändringen i det beräknade värdet därvid är mindre än ett givet värde ϵ , har beräkningen konvergerat. Om inte, halveras det ursprungliga integrationsintervallet, och de båda delintervallen behandlas var för sig med den lokala kvadratur-modulen. Om summan av absoluta värdet av förändringarna i de beräknade värdena inom de båda delintervallen är mindre än ϵ , har beräkningen konvergerat. I annat fall halveras det delintervall, där det större felet förekom, varpå behandlingen upprepas. På detta sätt kan man isolera de ställen, där funktionen "uppför sig illa".

⁴W. Gandi och W. Gautschi: "Adaptive Quadrature - Revisited" (se <http://www.inf.ethz.ch/personal/gander/>)