

Kapitel 1. Vågrörelselära: interferens och diffraktion

[Understanding physics: 12.7-12.9, 12.11-12.12, 12.15]

Som en inledning till den moderna fysiken skall vi studera hur två vågrörelser påverkar varandra. Detta sker med hjälp av den s.k. **superpositionsprincipen**, som säger att

om ett medium störs av två växelverkande vågrörelser, så är den totala störningen som åstadkoms lika med den algebraiska summan av de störningar, som vågrörelserna åstadkommer var för sig.

Då två vågrörelser $y_1(x, t)$ och $y_2(x, t)$ superponeras, blir alltså den totala störningen

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t).$$

1.1. Interferens mellan vågor

Om vi låter två identiska sinusformiga vågor som är i fas interferera, så kommer summeringen av vågorna att ge upphov till en ny sinusvåg med samma frekvens, men dubbelt så stor amplitud. Detta kallas för **konstruktiv interferens**.

Om de två sinusvågorna är identiska, men har fasskillnaden π ($=180^\circ$), så kommer de att ta ut varandra, och ger då inte upphov till någon störning. Detta fenomen kallar vi **destruktiv interferens**.

Observera att destruktiv interferens kan inträffa, om vågrörelsernas källor S_1 och S_2 oscillerar i fas (dvs de har samma värde av fassvinkeln ϕ då $t = 0$), men är förskjutna en halv våglängd i förhållande till varandra. En våg som utsänds från S_2 är då ur fas med beloppet π då den når fram till S_1 . Typen av interferens är därför beroende av fasskillnaden mellan vågorna i den punkt där de superponeras.

De båda källorna S_1 och S_2 och punkten P där deras växelverkan observeras behöver inte befinna sig på samma räta linje. Vår beskrivning av interferensfenomenet kan alltså lätt utsträckas till två dimensioner. Typen av interferens bestäms av den extra vägsträcka $x_2 - x_1$ som vågorna måste färdas från S_2 innan de når P .

Låt oss nu för enkelhetens skull anta att de båda källorna S_1 och S_2 har samma amplitud, frekvens och fas (*synkrona källor*). Störningarna, som vågorna från S_1 och S_2 alstrar i punkten P kan då beskrivas med två gående vågor:

$$y_1 = A \sin(kx_1 - \omega t + \phi)$$

$$y_2 = A \sin(kx_2 - \omega t + \phi).$$

Av superpositionsprincipen följer då

$$y = y_1 + y_2 = A[\sin(kx_1 - \omega t + \phi) + \sin(kx_2 - \omega t + \phi)],$$

som med hjälp av den trigonometriska identiteten $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin[(\alpha + \beta)/2] \cos[(\alpha - \beta)/2]$ kan skrivas

$$y = 2A \sin \left[\frac{k(x_1 + x_2)}{2} - \omega t + \phi \right] \cos \left[\frac{k(x_1 - x_2)}{2} \right].$$

Vi skall nu behandla två specialfall:

a) Vägskillnaden är ett **heltaligt** antal våglängder, dvs $(x_2 - x_1) = n\lambda = 2\pi n/k$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Då är $x_2 = x_1 + 2\pi n/k \Rightarrow (x_1 + x_2) = 2x_1 + 2\pi n/k \Rightarrow k[(x_1 + x_2)/2] = kx_1 + n\pi$. Ekvationens sinuskomponent är alltså $\sin(kx_1 - \omega t + \phi + n\pi) = \pm \sin(kx_1 - \omega t + \phi)$, där plustecknet gäller om n är jämnt, och minustecknet i motsatt fall.

Cosinuskomponenten av den totala störningen kan i sin tur uttryckas som $\cos[k(x_1 - x_2)/2] = \cos(-n\pi)$. Om n är udda, så blir uttrycket $+1$, och då n är jämnt, så blir det -1 . Ekvationen för den totala störningen blir alltså

$$y = 2A \sin(kx_1 - \omega t + \phi) = 2y_1,$$

som beskriver en gående våg med dubbelt så stor amplitud som en av de ursprungliga vågorna. I a)–fallet får vi alltså *konstruktiv* interferens.

b) Vägskillnaden är ett **halvtaligt** antal våglängder. I detta fall gäller $(x_2 - x_1) = (2n + 1)\lambda/2 = (2n + 1)\pi/k$, $n = 0, 1, 2, \dots$, som leder till $\cos[k(x_1 - x_2)/2] = \cos\{ -[(k/2)(2n + 1)\pi/k] \} = \cos\{ -(2n + 1)\pi/2 \} = 0$. Således gäller alltid $y = 0$, och vi får destruktiv interferens i b)–fallet.

Ekvationen för den totala störningen y kan också skrivas $y = A' \sin[k(x_1 + x_2)/2 - \omega t + \phi]$, som är en gående våg med variabel amplitud: $A' = 2A \cos[k(x_1 - x_2)/2]$. Eftersom vågens intensitet är proportionell mot kvadraten på amplituden, kommer den att variera som en \cos^2 –funktion av vägskillnaden $(x_1 - x_2)$. Man kommer därför att se alternerande intensitetsmaxima och –minima (ett **interferensmönster**), som är typiskt för interferens mellan vågor.

Ljus, liksom elektromagnetisk strålning i allmänhet, har typiska vågegenskaper, såsom frekvens, våglängd, amplitud och fas. Man skulle därför vänta sig att se ett interferensmönster på en skärm som belyses av två ljuskällor. Detta sker dock endast om man kan kontrollera ljuskällans fas, som t.ex. i en laser, som alltid ger koherent ljus.

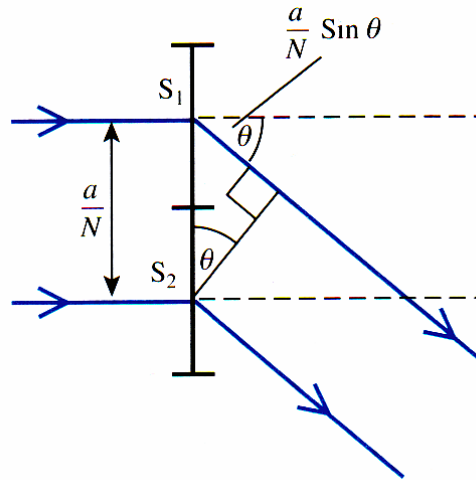
Men man kan också konstruera två källor som oscillerar i fas utgående från en enda ljuskälla, om man låter ljuset gå genom två spalter på samma avstånd från källan, innan det träffar skärmen. Dessa sekundära ljuskällor är i fas (*koherenta*) och kan producera interferens. Fassettskillnaden mellan vågorna bestäms av vägskillnaden mellan de sekundära källorna, och fassettskillnaden i en given punkt är därför bestämd.

Med hjälp av två spalter kan man alltså producera koherenta vågor och observera interferens, ett fenomen som upptäcktes av engelsmannen Thomas Young i början av 1800-talet.

1.2. Diffraktion och upplösningförmåga

Interferens kan också uppstå mellan vågor som kommer från olika punkter på samma vågfront. Detta fenomen kallas för **diffraktion**. Även om vi vanligen behandlar ljusvågor, är det skäl att minnas att diffraktion kan uppträda vid alla typer av vågrörelse. Vi ska betrakta en plan våg som infaller vinkelrätt mot en avlång spalt med bredden a .

För att studera diffraktionen i spalten tänker oss vågfronten uppdelad på N delar, var och en med bredden a/N . Enligt Huygens princip kommer varje del att fungera som en självständig källa. Vi skall betrakta superposition av vågor från två närliggande delar S_1 och S_2 , som betraktas under vinkeln θ i förhållande till den infallande vågens riktning.



Vägskillnaden mellan vågkammarna från S_1 och S_2 är $(a/N) \sin \theta$ som synes av figuren. I föregående avsnitt såg vi att en vägskillnad av en våglängd (λ) mellan två vågkammor svarar mot fasdifferensen 2π . Vägskillnaden $(a/N) \sin \theta$ svarar därför mot fasdifferensen

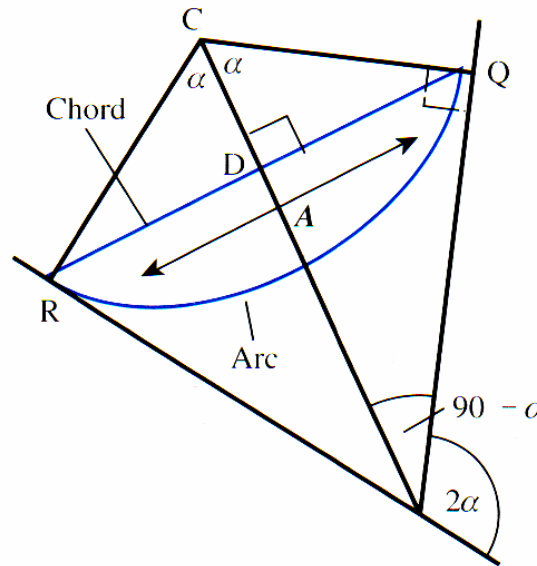
$$\phi = 2\pi \left[\frac{\frac{a}{N} \sin \theta}{\lambda} \right]$$

Vi skall nu försöka superponera N vågor med lika stora amplituder A' men med fasvinklar som växer med beloppet ϕ från den ena vågen till den andra. Metoden som används kallas *addition av fasvektorer* (en fasvektor är ett komplext tal som representerar både amplitud och fas av en sinuskurva).

Med hjälp av denna metod kan vi beräkna resultatet av att superponera två vågor med amplituderna A_1 och A_2 , som skiljer sig i fas med beloppet ϕ . Man kan representera vågamplituderna med två vektorer \mathbf{A}_1 och \mathbf{A}_2 med den mellanliggande vinkeln ϕ . Resultatet av superpositionen ges av resultantvektorn $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$. På samma sätt fås resultatet av att superponera N vågor med lika stor amplitud A' men med fasvinklar som växer med beloppet ϕ genom att konstruera en "vektorbåge". Om N får växa mot oändligheten övergår vektorbågen till en cirkelbåge, där resultantvektorn är en korda. Fasdifferensen 2α mellan den första och N :te spaltdelen ges av vinkeln mellan tangenterna till cirkelbågen i dess ändpunkter. Den totala fasdifferensen är $N\phi$, varav följer $2\alpha = N\phi$ (se bild 12.38 i boken).

Ur längden av kordan RQ kan vi beräkna A_θ , som är den resulterande vågamplituden i riktningen θ . Observera, att då $\theta = 0$, och således även $\phi = 0$ enligt uttrycket ovan (då vågen fortskrider utan att ändra riktning), så är den maximala amplituden A_0 en rät linje med längden NA' , eftersom alla delamplituderna har samma längd. Längden av denna linje är lika med längden av bågen RQ.

Som vi ser av figuren nedan är $A_\theta/A_0 = \text{kordan RQ}/\text{bågen RQ}$. Om C är cirkelns medelpunkt och CD är medelnormalen till RQ, så är $\sin \alpha = \text{RD}/\text{RC}$.



Således är $\text{RD} = \text{RC} \sin \alpha$ och $\text{RQ} = 2\text{RC} \sin \alpha$. På grund av radianens definition är båglängden $\text{RQ} = 2\text{RC}\alpha$, och vi får alltså

$$\frac{A_\theta}{A_0} = \frac{\text{kordan RQ}}{\text{bågen RQ}} = \frac{2\text{RC} \sin \alpha}{2\text{RC}\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Eftersom intensiteten av en våg är proportionell mot kvadraten på amplituden, så blir intensitetsförhållandet

$$\frac{I_\theta}{I_0} = \frac{A_\theta^2}{A_0^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$$

Av sambandet mellan ϕ och θ följer att även vinkeln α kan uttryckas med θ :

$$\alpha = \frac{N\phi}{2} = \frac{N}{2} \cdot 2\pi \left[\frac{\frac{a}{N} \sin \theta}{\lambda} \right] = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta.$$

Då $\alpha \rightarrow 0$ och $\sin \alpha \rightarrow 0$ och således $\sin \alpha / \alpha \rightarrow 1$ blir intensiteten maximal (I_0). Då α växer, kommer I_θ att oscillera med minskande amplitud. Då θ växer, kommer också α att växa, så att I_θ som funktion av α uppvisar både maximer och minimer.

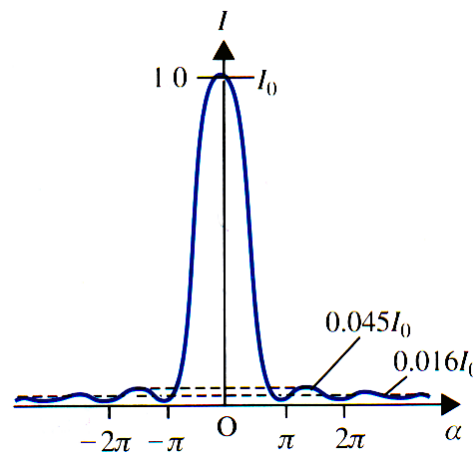
Minimerna uppstår då $\sin \alpha = 0$, dvs då $\alpha = n\pi$. Sidomaximernas lägen på ömse sidor om det centrala maximet I_0 kan bestämmas grafiskt ur en figur. De uppträder för $\alpha \approx \pm 1.430\pi$, $\pm 2.459\pi$, $\pm 3.471\pi$, ... (lösningar till den transcendentala ekvationen $\alpha = \tan \alpha$), eller approximativt $\alpha = (2n + 1)\pi/2$. De motsvarande värdena av $\sin \theta$ blir då

$$\sin \theta = \frac{\alpha \lambda}{\pi a} = \left(\frac{2n + 1}{2} \right) \frac{\lambda}{a}$$

De maximala intensiteterna blir då approximativt

$$\frac{I_\theta}{I_0} = \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} = \frac{4}{(2n + 1)^2 \pi^2}.$$

Intensiteterna för de två första sidomaxima ($n = 1, 2$) blir alltså approximativt $I_1 = 0.045I_0$ och $I_2 = 0.016I_0$. Fastän de är små, kan sidomaximerna ändå påverka diffraktionsmönstret.



Det första sidomaximet (för $n = 1$) inträffar då $\sin \theta \approx \frac{3\lambda}{2a}$. Om $a < \lambda$ så finns det inte något värde av θ som satisfierar denna ekvation, och inga sidomaximer observeras. Men om $a \gg \lambda$ så kommer sidomaximerna att inträffa vid så små vinklar θ , att det blir svårt att observera diffraktionseffekterna. Våglängden för synligt ljus varierar mellan 400 och 750 nm, och öppningarna i optiska instrument (t.ex.

linsens diameter) är mycket större än så. Därför kan man vanligen försumma diffraktionseffekterna för ljusvågor, och som en första approximation kan man anse att ljuset rör sig rätlinjigt. Men detta gäller inte för ljudvågor, där våglängden kan vara flera meter, så att diffraktionseffekterna kan vara betydliga.

I ett optiskt instrument sprider diffraktionen ljusets intensitet utanför det område som täcks av ljusstrålen och suddar ut bilden. Det innebär att den noggrannhet varmed bilden kan lokaliseras beror på våglängden av det använda ljuset.

Betrakta ljuset som kommer från två närliggande källor och passerar genom en öppning med bredden a . Källorna kan t.ex. vara stjärnor som observeras genom ett teleskop där objektivets diameter är a . Två (överlappande) diffraktionsmönster kommer då att ses på en skärm som placeras bakom öppningen.

Bilderna av de två källorna på skärmen kan upplösas (dvs separeras) ifall de centrala maximerna i de båda diffraktionsmönstren kan åtskiljas i mönstret. En praktisk, men något godtycklig metod som kallas *Rayleighs kriterium* (efter John Strutt, Lord Rayleigh, 1842-1919) är att anse de båda källorna vara upplösta ifall det centrala maximet i diffraktionsmönstret för den ena källan sammanfaller med det första minimet i den andra källans diffraktionsmönster.

Som vi tidigare har visat, kommer det första minimet att inträffa då $\alpha = \pi$, dvs då $\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta = \pi$ och således $\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$. Detta betyder, att kriteriet för att källorna skall kunna upplösas, då de betraktas genom en spalt, svarar mot en minimal vinkelresolution (eftersom θ är liten)

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{a}$$

Man kan visa, att Rayleighs kriterium för den minimala vinkelresolutionen för en *cirkulär* öppning med diametern d kan uttryckas

$$\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{d}.$$

För att få en hög resolution (dvs litet $\Delta\theta$) borde man därför använda ljus av kort våglängd och en stor öppning. Detta är orsaken till att man strävar efter att använda stora objektiv i astronomiska instrument (förutom att de samlar mera ljus).

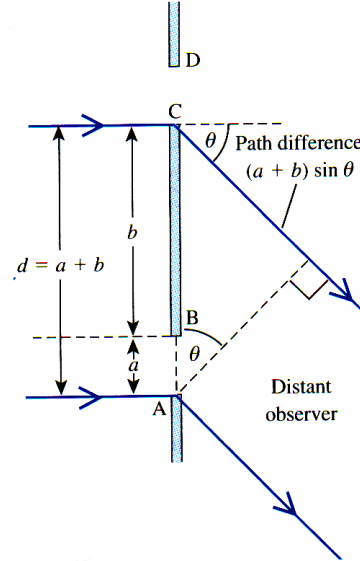
Upplösningsförmågan för ett teleskop växer, då objektivdiametern ökar. Teoretiskt borde man med ett 5-meters teleskop kunna nå en vinkelupplösning av $0.11''$, men i praktiken är det inte möjligt. Detta beror på turbulens i atmosfären, som åstadkommer slumpmässiga fasvariationer hos de elektromagnetiska vågorna. Bilden av en stjärna kan då uppdelas på flere bilder, som undergår ständiga förändringar. Den verkliga resolutionen kan därför vara sämre än $0.5''$, beroende på "seeing".

Det finns flere sätt att kringgå detta problem. Ett sätt är att skicka upp teleskopet i en bana runt jorden, utanför jordatmosfärens störande inverkan. En annan lösning, som på sista tiden mycket diskuterats, går ut på att försöka kompensera effekterna av rörelserna i jordatmosfären (*adaptiv optik*).

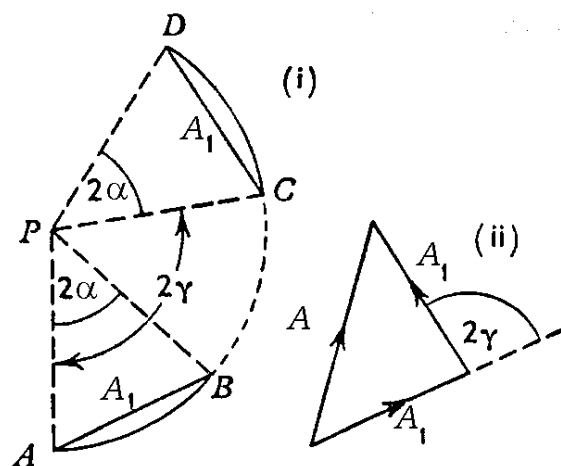
1.3. Interferens och diffraktion från två spalter

Thomas Young gjorde år 1801 ett experiment, där han lät ljus, som passerat genom en smal spalt träffa en skärm, som hade två små hål, som var mycket nära varandra. Bakom skärmen placerade han en annan skärm, där han uppfångade strålarna från de två hålen. Istället för en jämnt upplyst skärm, kunde han då observera en serie med färgade band, som småningom försvann, när han ökade avståndet mellan hålen.

Vi ska tänka oss två rektangulära spalter med bredden a på avståndet b ifrån varandra, och uppdelat varje spalt i identiska remsor. Bidragen från varje spalt adderas vektoriellt (liksom vid behandlingen av diffraktion). Om vi först behandlar spalten AB, så ser vi att diagrammet är likadant som vi fick för diffraktion i en spalt, där $\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$.



Om vi adderar bidragen från båda spalterna, AB och CD, så får vi ett diagram, som visas i fig. (i) på nästa sida. Mellan bidragen från spalterna finns en ogenomskinlig komponent BC. Vägskillnaden mellan vågor som utsänds från punkten A och punkten C är $(a + b) \sin \theta$, och fasskillnaden mellan dessa vågor blir då $\frac{2\pi}{\lambda}(a + b) \sin \theta = 2\gamma$, varav följer $\gamma = \frac{\pi(a+b)}{\lambda} \sin \theta$. Vinkeln mellan tangenterna till cirkelbågen i A och C är således 2γ . Eftersom $b \gg a$, så är $\gamma \gg \alpha$.



Den resulterande intensiteten för vågor från två spalter som betraktas under vinkeln θ kan beräknas genom addition av amplituderna, som beskrivs av kordorna AB och CD. Eftersom båda amplituderna har storleken A_1 fås amplituden A (se fig. (ii) ovan) ur cosinusteoremet $A^2 = A_1^2 + A_1^2 + 2A_1^2 \cos 2\gamma = 2A_1^2(1 + \cos 2\gamma)$.

Med hjälp av den trigonometriska formeln $\cos 2\gamma = 2 \cos^2 \gamma - 1$ kan ekvationen skrivas i formen $A^2 = 4A_1^2 \cos^2 \gamma$, eller alltså $A = 2A_1 \cos \gamma$. För en enkel spalt fann vi i föregående avsnitt att

$$\frac{A_\theta}{A_0} = \frac{\text{kordan RQ}}{\text{bågen RQ}} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Då detta resultat tillämpas på den ena av spalterna fås $\frac{A_1}{A_0} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$. Amplituden för en våg som går rakt igenom ($\theta = 0$) är $2A_0$. Den *totala* amplituden för vinkeln θ blir då

$$A = 2A_1 \cos \gamma = 2A_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \cos \gamma,$$

och intensiteten för denna vinkel blir alltså $\frac{I_\theta}{I_0} = \frac{A^2}{4A_0^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \cos^2 \gamma$, där I_0 är intensiteten för båda spalterna, då vågen går rakt igenom ($\theta = 0$).

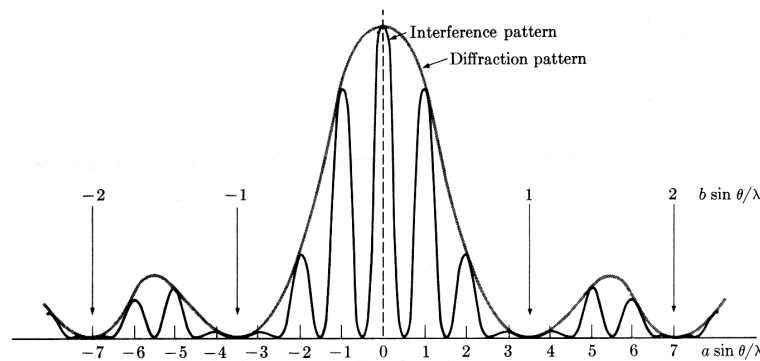
Den första faktorn i ekvationen (dvs $\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$) uttrycker diffraktionsmönstret för en spalt, som kan skrivas med hjälp av spaltbredden a som

$$\left[\frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta} \right]^2$$

Den andra faktorn i ekvationen (alltså $\cos^2 \gamma$) anger interferensmönstret för två källor. Denna faktor kan skrivas i formen $\cos^2 \left[\frac{\pi(a+b)}{\lambda} \sin \theta \right]$. Intensitetsmaxima uppstår då $\gamma = n\pi$, dvs om $\frac{\pi(a+b)}{\lambda} \sin \theta = n\pi$, som kan skrivas som $(a + b) \sin \theta = n\lambda$ eller

$$d \sin \theta = n\lambda$$

där $d = a + b$ anger avståndet mellan två ekvivalenta punkter, A och C, eller B och D, på spalterna.



Om $b \gg a$, som vanligen gäller, så varierar den andra faktorn (interferensfaktorn) snabbare än den första. Vi får då ett mönster som består av ett snabbt föränderligt interferensmönster från de två spalterna, som har formen $\cos^2 \gamma$, och moduleras av enveloppfunktion av formen $\sin^2 \alpha / \alpha^2$ som anger diffraktion i en spalt (se bilden ovan). Detta innebär, att interferensmönstret vanligen försvinner för vissa värden av θ .

Youngs interferensmönster från två spalter kan iakttas på en skärm som placeras bakom spalterna. Om d är känt, så kan våglängden λ beräknas ur den inramade ekvationen, om man mäter skillnaden i vinkel mellan på varandra följande maxima eller minima. På grund av att maxima och minima inte är så tydliga, är det svårt att bestämma vinkelseparationen noggrant, och därur våglängden. För detta ändamål används *diffraktionsgitter*, som består av ett stort antal smala spalter. Också för ett sådant gitter gäller samma villkor för intensitetsmaxima som för två spalter.

Observera, att interferens och diffraktion egentligen är två sätt att betrakta samma fenomen. *Diffraktion* betecknar vanligen spridningen i vågmönstret, som beror på interferens mellan närliggande punkter på **samma** vågfront, medan *interferens* betecknar interferensen mellan vågor från **olika** källor, eller från olika partier av samma vågfront som har blivit åtskilda och sedan förenade på nytt.

1.4. Röntgendiffraktion (Braggspridning)

Röntgenstrålarna är i likhet med ljusstrålarna elektromagnetiska vågor, men deras våglängd är av storleksordningen 0.1 nm, dvs ca 1/1000 av ljusets. Då röntgenstrålar faller på ett diffraktionsgitter med mycket smala spalter, t.ex. $d = 1\mu\text{m}$, följer av gitterekvationen att diffraktionsvinkeln av första ordningen ($n = 1$) kan beräknas ur formeln $\theta = \arcsin \frac{\lambda}{d} = \arcsin 10^{-4} \approx 0.0057^\circ$.

En så liten vinkel är det mycket svårt att mäta noggrant. Därför måste vi använda ett gitter med ett spaltavstånd av storleksordningen 0.1 nm för att kunna mäta våglängder i röntgenområdet. Det kan vara mycket svårt att konstruera ett sådant gitter, men i naturen finns ett sådant färdigt, nämligen atomstrukturen i ett kristallgitter.

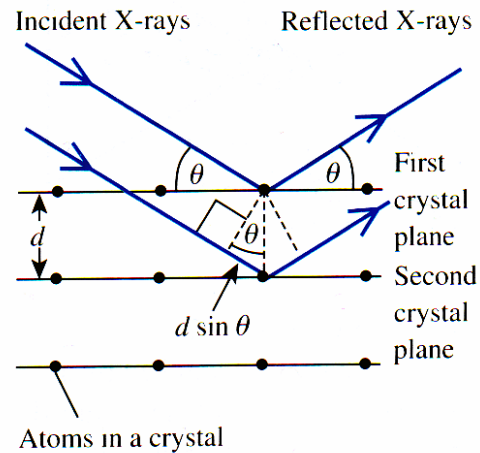
För att fullt förstå vad som händer då en röntgenstråle träffar en kristall borde man beakta dess tredimensionella struktur. Dessutom är det fråga om spridning av elektromagnetiska vågor från atomer eller molekyler och inte vågrörelse genom spalter. Men det grundläggande interferensvillkoret kan man ändå finna genom att studera interferens mellan vågor som sprids från närliggande plan bildade av kristallens atomer. Principiellt kan alltså problemet studeras i två dimensioner.

Antag att röntgenstrålarna sprids så, att vinkeln θ mellan de spridda strålarna och kristallplanet är lika stor som vinkeln mellan de infallande röntgenstrålarna och kristallplanet. Man kan då anse att röntgenstrålarna

'reflekteras' i planet. Konstruktiv interferens mellan två vågor som infaller under samma vinkel mot närliggande plan inträffar, ifall de reflekterade strålarnas vägskillnad är en heltalig multipel av våglängden (se figuren), dvs

$$2d \sin \theta = n\lambda,$$

där n är ett heltal och d avståndet mellan närliggande plan.



Ekvationen kallas **Braggvillkoret** efter William Henry Bragg och William Lawrence Bragg (far och son), som fann det år 1912. Villkoret leder också till konstruktiv interferens för röntgenstrålar, som reflekterats från andra och tredje kristallplanet, osv. Det påminner om motsvarande ekvation för diffraktionsgittret, men man bör minnas, att d och θ tolkas på annat sätt.

Fenomenet, som kallas *Braggspridning*, kan utnyttjas på följande sätt: a) Om vi känner d , θ och n så kan λ beräknas. Denna metod används i *röntgenspektrometrar* för att bestämma våglängder. b) Om vi känner θ , n och λ , så kan vi bestämma d , avståndet mellan planen i en kristall. Denna metod kallas för *kristalldiffraktion* och är ett viktigt hjälpmedel vid strukturbestämningar av molekyler och kristaller. Strukturen av DNA-molekylen t.ex. har bestämts på detta sätt.

Interferens kan också observeras mellan andra plan i samma kristall. Om avståndet mellan kristallplanen är d' blir Braggvillkoret i detta fall $2d' \sin \theta' = n\lambda$. Braggvillkoret är alltså mera komplicerat än villkoret för det endimensionella gittret.

1.5. Stående vågor

Om vågor infaller mot en fixerad punkt i ett medium (en sträng, t.ex.), så kommer de att reflekteras. Den infallande vågen kan beskrivas med gående våg i $-x$ -riktningen $y_1 = A \sin(kx + \omega t + \phi)$. Den reflekterade vågen, som har samma amplitud och frekvens men rör sig i $+x$ -riktningen kommer då att beskrivas då av ekvationen $y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi)$.

I praktiken ändras vanligen fasen vid reflektion, men detta har oftast inte någon större inverkan på resultatet. Med hjälp av superpositionsprincipen kan vi beräkna den resulterande störningen genom att addera vågorna: $y = y_1 + y_2 = A \sin(kx + \omega t + \phi) + A \sin(kx - \omega t + \phi)$. Med hjälp av identiteten

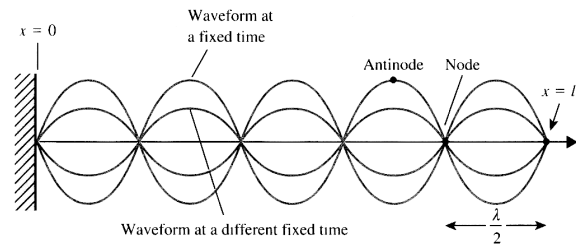
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right]$$

följer härav $y = 2A \sin(kx + \phi) \cos \omega t$.

För att förenkla behandlingen skall vi välja $x = 0$ som den punkt där strängen är fixerad. För $x = 0$ gäller då alltid $y = 0$ varav följer att $\phi = 0$ och ekvationen kan skrivas

$$y = 2A \sin kx \cos \omega t$$

Observera, att oscillationerna i x och t sker nu oberoende av varandra. Vågrörelsen fortskrider inte genom mediet, det finns ingen gående våg. Vågorna som alstras kallas därför **stående** (eller *stationära*) vågor. Ekvationen ovan kan tolkas som enkel harmonisk rörelse $y = A' \cos \omega t$, där amplituden $A' = 2A \sin kx$ är en funktion av positionen längs strängen. I en bestämd punkt oscillerar störningen med en konstant amplitud A' (se figuren).



Observera, att i vissa punkter (där $kx = n\pi$) är amplituden A' alltid noll. Sådana punkter kallas **noder**. Villkoret för en nod kan alltså uttryckas $\frac{2\pi x}{\lambda} = n\pi$, och de inträffar alltså då $x = \frac{1}{2}n\lambda$, dvs med ett mellanrum av en halv våglängd längs strängen. I vissa andra punkter (för vilka $kx = \frac{1}{2}(2n + 1)\pi$, dvs $x = \frac{2n+1}{4}\lambda$) är amplituden $2A$. De kallas **antinoder** och befinner sig mittemellan noderna.

Om strängen fixeras i båda ändarna, så måste de fungera som noder i alla stående vågrörelser. På grund av valet av origo befinner sig den ena noden i $x = 0$. Om längden av strängen är l , så kan vi tillämpa nodvillkoret $kx = n\pi$ på den andra änden där $x = l$, och får då $kx = kl = n\pi$ och $\frac{2\pi l}{\lambda} = n\pi$, dvs

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

För ett bestämt värde av l så får man stående vågor endast för vissa våglängder och således endast bestämda frekvenser

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2l}$$

där n är ett heltal. Dessa frekvenser, som kallas resonansfrekvenser, bestäms av strängens längd l , och den gående vågens hastighet v . I boken visas också, att vågens hastighet längs strängen, och således resonansfrekvensen när den är fastspänd i vardera ändan, beror av spänningen i strängen och massan per enhetslängd. Denna princip används i musikinstrument. För att ändra resonansfrekvensen för en sträng, ändrar man spänningen eller längden.

Blåsinstrument använder stående ljudvågor för att alstra toner. Värdet av resonansfrekvensen beror då på längden av luftpelarens höjd i instrumentet. Om instrumentet är stängt i båda ändarna, uppstår där noder, men om det är stängt i den ena änden, uppstår där en nod, och i den andra änden en antinod. Tonerna som alstras i ett musikinstrument, ger sällan upphov till enkla sinusvågor, utan vanligen förekommer andra frekvenser (övertoner, som svarar mot större värde av n) jämte grundfrekvensen, som har $n = 1$.

1.6. Vågekvationen

Som vi tidigare sett, kan en gående våg längs x -axeln uttryckas genom ekvationen

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \phi)$$

Vi ska derivera denna ekvation partiellt två gånger, både med avseende på x och t :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -kA \cos(\omega t - kx + \phi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(\omega t - kx + \phi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t - kx + \phi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t - kx + \phi)$$

Genom att dividera $\partial^2 y / \partial^2 x$ med $\partial^2 y / \partial^2 t$ får vi (jfr ekv. 12.5)

$$\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} = \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}.$$

Man kan visa, att detta resultat gäller för en godtycklig funktion av formen $f(kx \pm \omega t \pm a)$, där a är en konstant. Således gäller följande ekvation (som kallas **vågekvationen**)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Detta resultat kan generaliseras till tre dimensioner:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

där symbolen ξ använts för att beteckna störningen.

Den inramade ekvationen säger, att vi kan uttrycka den andra rumsderivatan av en störning i ett godtyckligt medium som en konstant C multiplicerad med den andra tidsderivatan av störningen. Konstantens värde är $1/v^2$, dvs om $\partial^2 y / \partial^2 x = C \partial^2 y / \partial^2 t$, så är $v = \sqrt{1/C}$.