Perusryhmä ja peiteavaruus

Pekka Pankka

26. lokakuuta 2014

Lukijalle

Kysymys: Voiko taulun ripustaa kahdella naulalla niin, että taulu tippuu, jos kumpi tahansa nauloista poistetaan?

Ensimmäinen reaktio tähän kysymykseen saattaa olla, että mitä tekemistä sillä on matematiikan kanssa. Kysymys on kuitenkin hyvin matemaattinen ja tehtävä on itseasiassa mahdollista mallintaa niin, että kysymykseen saadaan tyhjentävä vastaus. Kysymystä voidaan nimittäin myöskin kysyä, kun taulu halutaan ripustaa kolmella, neljällä tai k:lla naulalla, missä $k \geq 2$. Voidaan myös kysyä eroaako tilanne mitenkään yhden naulan tilanteesta.

Tätä viatonta kysymystä voi lähestyä algebrallisen topologian keinoin ja paljastuu, että ongelma on kuin luotu tulkittavaksi perusryhmän käsitteen avulla. Eräs vastaus kysymykseen onkin $aba^{-1}b^{-1}$, joka saadaan tutkimalla *kahdesti punkteeratun tason* $\mathbb{R}^2 \setminus \{e_1, -e_1\}$ perusryhmää $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{e_1, -e_1\}, 0)$. Hieman heuristisemmin voisi todeta, että ratkaisu kysymykseen löydetään tutkimalla tason osajoukon $\mathbb{R}^2 \setminus \{e_1, -e_1\}$ reikäisyyttä.[1]

Sama kysymys avaruuden reikäisyydestä on klassisen vitsin taustalla, jossa topologi ei erota donitsia ja kahvikuppia toisistaan. Kun tilanne mallinnetaan algebrallisen topologian keinoin[2] paljastuu, että donitsilla ja kahvikupilla on sama perusryhmä. Itseasiasassa paljastuu enemmän: donitsi ja kahvikuppi ovat itseasiassa samoja (eli homotopiaekvivalentteja) niin sanotun homotopiateorian kannalta.[3]

Tällä kursilla kurkistetaan algebrallisen topologia perusteisiin juuri homotopiateorian näkökulmasta. Yhtenä tavoitteena on selvittää, miksi $aba^{-1}b^{-1}$ on vastaus yllä esitettyyn ripustuskysymykseen ja mitä se oikein tarkoittaa. Samalla klassinen vitsi tulee puhki selitetyksi. Kurssin tarkoituksena on siis esitellä homotopiateorian peruskäsitteet kuten homotopiaekvivalenssi ja perusryhmä sekä tutustua tapoihin ratkaista topologia kysymyksiä niiden avulla. Kurssi alkaa topologisesti, mutta perusryhmään määrittelemisen jälkeen painopiste alkaa siirtymään kohti algebrallisempia kysymyksiä. Tavoitteena onkin tarkastella, miten topologisesti on mahdollista määritellä käsitteitä, joilla on luonnollinen algebrallinen rakenne ja kuinka algebraa voi hyödyntää topologisten ongelmien ratkaisussa. Tämä prosessi konkretisoituu erityisesti peiteavaruuksien

[1] Perusryhmän määritelmä selittää osaltaan, miten ripustusongelma voidaan tulkita kysymyksenä joukon $\mathbb{R}^2 \setminus \{e_1, -e_1\}$ reikäisyyteen. Tämän mallinnusongelman problematiikka jätetään (tarkoituksella) lukijalle.

[2] Jätetään jälleen lukijan harteille.

[3] Mallinnuksen voi tehdä myös niin, että joukot ovat samoja (eli homeomorfisia) topologian kannalta.

luokittelussa. Peiteavaruudet ovat erittäin tehokas työkalu avaruuden perusryhmää tutkittaessa ja peiteavaruuksien tunteminen antaa arvokasta algebrallista tietoa tutkittavasta ryhmästä.

Tämä kurssimateriaali poikkeaa totutusta. Tavanomaisen luento-opetuksen sijaan kurssi opetetaan syksyllä 2014 niin sanotulla *kisällimenetelmällä* (tai *käänteisen luokkahuoneen metodilla*[4]). Menetelmän ajatuksena on, että opiskelijat opiskelevat kurssin materiaalia luentojen kuuntelemisen sijaan suoritettavien tehtävien avulla. Tehtävien ratkaisut tulisikin ajatella sellaisena osana kurssimateriaalia, joka tuotetaan kurssin aikana. Tehtäviä suoritetaan sekä itsenäisesti että ohjatusti kurssin ohjaajan kanssa keskustellen. Materiaali on jaettu lukuihin ja kurssin ohjaaja kokoaa saavutetut tulokset, kun luku on käsitelty. Tämä materiaali on tarkoitettu yhden periodin kurssille.

Tällä metodilla on pitkät perinteet topologian opetuksessa. Tunnettu geometrinen topologi R.L. Moore[5] (1882-1974) kehitti 1910-luvulla "Mooren metodina" tunnettua opetustapaa, jossa opiskelijoille annettiin lähdemateriaalin sijaan tarvittavat määritelmät ja lauseiden väitteet. Opiskelijoiden tarkoituksena oli löytää tarvittavat todistukset väitteille.

Tämä luentomoniste keskittyy hyvin rajatusti tarkasteltavaan materiaaliin. Opiskelun tueksi on hyvä pitää käsillä topologian ja algebran lähdemateriaalia. Topologian esitiedoiksi riittää mainiosti metrisen topologian alkeiskurssin tiedot ja lähdemateriaaliksi esimerkiksi J. Väisälän kirja "Topologia I". Tarvittavat algebran tiedot rajoittuvat ryhmäteorian alkeisiin ja tarvittava materiaali on katettu jokaisessa ensimmäiselle algebran yliopistokursille suunnatussa materiaalissa kuten vaikkapa kirjassa J. Häsä, L. Oinonen, J. Rämö "Johdatus abstraktiin algebraan". Kurssien *Metriset avaruudet* ja *Algebra IA* tiedot ja materiaalit, kuten J. Parkkosen moniste "Algebra I" riittävät siis hyvin esitiedoiksi. Kurssin aikana tarvitaan joitakin käsitteitä yleisen topologian puolelta. Tarvittavaa materiaalia on käsitelty liitteessä ja tarvittavat asiat todistetaan kurssin aikana. Kiinnostunut lukija voi kuitenkin täydentää tietojaan esimerkiksi J. Väisälän kirjasta "Topologia II".

Koska käsillä oleva teksti on ensisijaisesti tarkoitettu kurssimateriaaliksi, tätä monistetta tuskin voi hyödyntää lähdeteoksena tai muuten kattavana lähteenä. Lukijaa suositellaankin tutustumaan A. Hatcherin kirjaan "Algebraic topology". Kirjasta on nopeasti muodostumassa algebrallisen topologian oppikirjojen moderni klassikko, eikä vähiten siksi, että kirja on saatavilla PDF-muodossa tekijän verkkosivulla. Kirja sopii myös erittäin hyvin algebrallisen topologian itseopiskelumateriaaliksi jatko-opiskelijoille. Tässä kurssimateriaalissa käsiteltävät asiat sisältyvän Hatcherin kirjan lukuun 1.

[4]engl. reverse classroom

[5]Yksi tunnetuimmista Mooren lauseista on 2-ulotteisen pallon $\mathbb{S}^2$ tunnistamisen mahdollistava karakterisointi. R.H.Bingin myöhemmin todistama hieman yksinkertaisemmin esitettävä versio tästä lauseesta on seuraava: *Olkoon X kompakti, yhtenäinen, lokaalisti yhtenäinen, metrinen avaruus, joka ei ole piste. Tällöin X on homeomorfinen pallon $\mathbb{S}^2$ kanssa, jos yksikään kahden pisteen joukko ei separoi avaruutta X ja jokainen ympyrän $\mathbb{S}^1$ upotus avaruuteen X separoi sen.*

Sisältö

Luku 1

Peruskäsitteitä

Heuristisesti homotopiateorialla tarkoitetaan jatkuvan muuntamisen teoriaa.[1]

Tässä luvussa tarkastellaan homotopiateorian peruskäsitteitä kuten kuvausten homotooppisuutta ja avaruuksien homotopiaekvivalenssia. Luvun tarkoituksena on esitellä tarvittava käsitteistö perusryhmän määrittelemiseksi ja antaa esimerkkejä homotooppisista kuvauksista ja homotopiaekvivalenteista avaruuksista. Luvun aikana huomataan, että joissakin konkreettisissa tilanteissa on helpompaa konstruoida haluttu homotopia kuin osoittaa, ettei vaadittavaa homotopiaa ole olemassa.

Ellei toisin mainita, X, Y ja Z ovat metrisiä avaruuksia. Lisäksi kaikki tarkasteltavat kuvaukset ovat jatkuvia ellei toisin mainita. Tuloavaruuksissa on käytössä tulometriikka ja osajoukoissa indusoitu metriikka.

Eukliidiset avaruudet (eli avaruudet $\mathbb{R}^n$) varustetaan tavallisella euklidisella metrikkalla, joka on euklidisen normin indusoima ellei toisin mainita. Tehtävät osoittavat, että tarkasteltavat kysymykset eivät kuitenkaan ole luonteeltaan metrisiä ja kysymyksissä ei olisi tarpeen kiinnittää juuri tätä metriikkaa. Tärkeämpää on tietää, millä topologialla avaruus $\mathbb{R}^n$ on varustettu eli mitkä ovat sen avoimet joukot. On kuitenkin huomattava, että vaikka teoria voidaan esittää suoraan yleisien topologisisten avaruuksien kontekstissa, ei näin saavutetusta yleisyydestä ole kurssin alkupuolella eristyistä hyötyä. Tarvitsemme yleisiä topologia avaruuksia luvussa 7 ja palaamme niihin silloin. Siihen asti käytämme termiä *avaruus* tarkoittamaan metristä avaruutta, ja luvusta 7 lähtien (takautuvasti) tarkoittamaan *topologista avaruutta*. Yleisestä topologiasta kiinnostunut lukija voi toki jo tässä vaiheessa tutustua liitteeseen A.

1.1 Homotopia

Jatkuvan muuntamisen idea tulee esille jo homotopian määritelmässä.

Määritelmä 1.1.1. *Olkoot $f\colon X \to Y$ ja $g\colon X \to Y$ jatkuvia kuvauksia. Jatkuva kuvaus $H\colon X \times [0,1] \to Y$ on* homotopia kuvauksesta f kuvaukseen g, *jos $H(x,0) = f(x)$ ja $H(x,1) = g(x)$ kaikilla $x \in X$.*

[1] Homotopian suora käännös voisi olla esimerkiksi 'samapaikkaisuus', mutta termiä ei yleensä käännetä lainkaan.

Tehtävä 1. *Määritellään kuvaukset* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *ja* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *kaavoilla* $f(x) = (x, \cos x)$ *ja* $g(x) = (x, \sin x)$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$. *Osoita, että kuvaus* $H\colon \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$(x, s) \mapsto (x + (1-s)s, (1-s)\cos x + s \sin x)\,,$$

on homotopia f*:stä* g*:hen.*

Määritelmä 1.1.2. *Jatkuvia kuvauksia* $f\colon X \to Y$ *ja* $g\colon X \to Y$ *sanotaan* homotooppisiksi, *jos on olemassa homotopia kuvauksesta* f *kuvaukseen* g. *Tällöin merkitään* $f \simeq g$.

Huomautus 1.1.3. *On tärkeää huomata, että määritelmän nojalla homotooppisella kuvauksilla on samat lähtö- ja maaliavaruudet.*

Erityisesti tulee huomata, että kuvaukset $f\colon X \to Y$, $g\colon X \to fX$ *ja* $h\colon A \to Y$ *ovat kaikki (formaalisti) eri kuvauksia, jos* $fX \neq Y$ *ja* $A \subset X$ *aito osajoukko, vaikka kuvaukset* g *ja* h *olisi määritelty kaavoilla* $g(x) = f(x)$ *kaikilla* $x \in X$ *ja* $h(x) = f(x)$ *kaikilla* $x \in A$.

Jatkossa tämä on erittäin tärkeää, koska tarkasteltaessa kahden avaruudelta X *avaruudelle* Y *määritellyn kuvauksen homotooppisuutta, kuvausten välisellä homotopialla on sama maaliavaruus* Y.

Homotopian käsitteen havainnollistamiseksi on hyvä tehdä seuraavat huomiot. Seuraavissa tehtävissä $f\colon X \to Y$ ja $g\colon X \to Y$ ovat jatkuvia kuvauksia ja $H\colon X \times [0,1] \to Y$ homotopia f:stä g:hen.

Tehtävä 2. *Olkoon* $s \in [0,1]$. *Tällöin* $h_s\colon X \to Y$, $h_s(x) = H(x,s)$, *on jatkuva kuvaus.*

Määritelmä 1.1.4. *Olkoon* $J \subset \mathbb{R}$ *väli. Jatkuvaa kuvausta* $\alpha\colon J \to Z$ *väliltä* J *avaruuteen* Z *sanotaan* poluksi. *Jos* $\alpha\colon [a,b] \to Z$ *on polku suljetulta (aidolta) väliltä* $[a,b]$ *avaruuteen* Z, *niin sanotaan, että* α on polku pisteestä $z_0 \in Z$ pisteeseen $z_1 \in Z$, *jos* $\alpha(a) = z_0$ *ja* $\alpha(b) = z_1$.

Tehtävä 3. *Olkoon* $x_0 \in X$. *Tällöin* $\alpha_{x_0}\colon [0,1] \to Y$, $\alpha_{x_0}(s) = H(x_0, s)$ *on polku pisteestä* $f(x_0)$ *pisteeseen* $g(x_0)$.

1.2 Esimerkkejä

Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan esimerkkejä kuvausten välisistä homotopioista.

Merkintä 1.2.1. *Tason* $\mathbb{R}^2$ *joukkoa*

$$\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| = 1\}$$

kutsutaan (euklidiseksi) yksikköympyräksi.[2]

Seuraavassa kolmessa tehtävässä $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ on inkluusiokuvaus $x \mapsto x$. Lisäksi $g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ on kuvaus $x \mapsto -x$.

[2] Kaavassa $|x|$ on pisteen $x = (x_1, x_2)$ euklidinen normi eli $|x|^2 = |(x_1, x_2)|^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Tehtävä 4. *Olkoon* $\iota\colon \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^2$ *inkluusiokuvaus* $\iota(x) = x$. *Osoita, että on olemassa homotopia* $\hat{H}\colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *kuvauksesta* $\hat{f} = \iota \circ f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ *kuvaukseeen* $\hat{g} = \iota \circ g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$.

Tehtävä 5. *Kokeile antaako edellisen tehtävän homotopian* $\hat{H}$ *kaava homotopian* $H\colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *kuvauksesta* f *kuvaukseen* g. Jatkokysymys: *Jos näin ei ole, niin etsi homotopia* $H\colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.[3]

Tehtävä 6. *Olkoon* $j\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *inkluusiokuvaus* $x \mapsto (x, 0)$. *Osoita, että kuvaukset* $f' = j \circ f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *ja* $g' = j \circ g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *ovat homotooppisia.*

1.3 Homotooppisuus relaationa

Homotopiateorian perushavaintoja on, että kuvausten homotooppisuus on ekvivalenssirelaatio.

Merkintä 1.3.1. *Joukko*

$$C(X,Y) = \{f\colon X \to Y : f \text{ on jatkuva}\}$$

on kaikkien jatkuvien kuvausten avaruudelta X *avaruudelle* Y *joukko.*

Kuvausten $f \in C(X,Y)$ ja $g \in C(X,Y)$ homotooppisuus, jota siis merkitään $f \simeq g$, määrittelee relaation $\simeq$ joukossa $C(X,Y)$.[4]

Lause 1.3.2. *Joukon* $C(X,Y)$ *relaatio* $\simeq$ *on ekvivalenssirelaatio.*

Lauseen 1.3.2 todistus on jaettu seuraavaan kolmeen tehtävään. Näissä tehtävissä f, g ja h ovat jatkuvia kuvauksia $X \to Y$.

Tehtävä 7. *Osoita, että* $f \simeq f$.

Tehtävä 8. *Jos* $f \simeq g$, *niin* $g \simeq f$.

Tehtävä 9. *Jos* $f \simeq g$ *ja* $g \simeq h$, *niin* $f \simeq h$. *Todista lause 1.3.2.*

Määritelmä 1.3.3. *Jatkuvan kuvauksen* $f \in C(X,Y)$ homotopialuokka *on* f*:n ekvivalenssiluokka* $[f]$ *relaatiossa* $\simeq$ *eli joukko*

$$[f] = \{g\colon X \to Y : g \simeq f\}.$$

[3] *Jatkokysymys 2 (extra):* Vaihda kuvaus g kuvaukseen $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $(x,y) \mapsto (x,-y)$ ja konstruoi homotopia $\hat{H}\colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ kuvauksesta $\hat{f} = \iota\circ f$ kuvaukseen $\hat{g} = \iota \circ g$. Kokeile nyt löytää homotopia $f \simeq g$. (Myöhemmin havaitaan, että tälläistä homotopiaa ei voi löytää. Kuvaukset $j \circ f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ja $j \circ h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ kuitenkin ovat homotooppisia, kun $j\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ on sama kuvaus kuin tehtävässä 6.)

[4] Formallisti kirjoitettaisiin $\simeq = \{(f,g) \in C(X,Y) \times C(X,Y) : f \simeq g\}$, mutta tälläinen formaali hienostelu johtaa jatkossa vain varsinaisen asian hämärtymiseen.

Merkintä 1.3.4. *Jatkuvien kuvausten $C(X,Y)$ homotopialuokkien joukkoa merkitään*

$$[X,Y] = \{[f]\colon f \in C(X,Y)\}.$$

Yleisellä tasolla voidaan (ehkä) ajatella, että homotopiateorian tarkoituksena on ymmärtää avaruuksien X ja Y välisten jatkuvien kuvausten homotopialuokat $[X,Y]$. Vaikka tätä voisikin pitää teorian tavoitteena, on teorialla muitakin tavoitteita (ja sovelluksia!) kuten myöhemmin huomaamme.

Joitakin huomioita homotopialuokkien joukosta. Seuraavissa tehtävissä $\varphi\colon X \to Y$ ja $\psi\colon Y \to Z$ ovat jatkuvia kuvauksia.

Tehtävä 10. *Olkoot $f\colon X \to Y$ ja $g\colon X \to Y$ homotooppisia jatkuvia kuvauksia. Tällöin $\psi \circ f \simeq \psi \circ g$.*

Tehtävä 11. *Kaava $[f] \mapsto [\psi \circ f]$ määrittelee kuvauksen $\psi_\flat\colon [X,Y] \to [X,Z]$.*[5]

Tehtävä 12. *Olkoot $f\colon Y \to Z$ ja $g\colon Y \to Z$ homotooppisia jatkuvia kuvauksia. Tällöin $f \circ \varphi \simeq g \circ \varphi$.*

Tehtävä 13. *Kaava $[f] \mapsto [f \circ \varphi]$ määrittelee kuvauksen $\varphi_\#\colon [Y,Z] \to [X,Z]$.*

1.4 Lisää tehtäviä

Tehtävä 14. *Olkoon V normiavaruus*[6] *ja olkoot $f_0\colon X \to V$ ja $f_1\colon X \to V$ jatkuvia kuvauksia. Tällöin $f_0 \simeq f_1$.*

Tehtävä 15. *Olkoon $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\colon |x| = 1\}$, missä $n \geq 0$, ja olkoot $f_0\colon X \to \mathbb{S}^n$ ja $f_1\colon X \to \mathbb{S}^n$ jatkuvia kuvauksia, joilla ei ole antipodaalisia arvoja eli $f_0(x) \neq -f_1(x)$ kaikilla $x \in X$. Tällöin $f_0 \simeq f_1$.*

Tehtävä 16. *Osoita vastaesimerkillä, että seuraava väite on väärin:* Jos $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ on homotooppinen kuvauksen $h_0\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $x \mapsto -x$, kanssa, niin on olemassa $x_0 \in \mathbb{S}^1$, jolle pätee $h(x_0) = -x_0$.

[5] Sanotaan myös, että kuvaus $\psi_\flat$ on "hyvin määritelty". Tässä tapauksessa tulee siis osoittaa, että $[\psi \circ g] = [\psi \circ f]$ kaikilla $g \in [f]$.

[6] Vektoriavaruus varustettuna normilla $|\cdot|\colon V \to [0,\infty)$.

Luku 2

Homotopiaekvivalenssi

Homotooppisuus määrittelee ekvivalenssirelaation kahden avaruuden välisten jatkuvien kuvausten joukkoon, eli antaa tavan samaistaa jatkuvia kuvauksia. Homotopiaekvivalenssin käsite antaa vastaavasti tavan samaistaa avaruuksia.

2.1 Määritelmiä

Määritelmä 2.1.1. *Jatkuva kuvaus $f\colon X \to Y$ on* homotopiaekvivalenssi*, jos on olemassa sellainen jatkuva kuvaus $g\colon Y \to X$, jolle pätee $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ ja $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Tällöin sanotaan, että kuvaus g on kuvauksen f* homotopiakäänteiskuvaus*. Lisäksi sanotaan, että avaruudet X ja Y ovat* homotopiaekvivalentit *ja merkitään $X \simeq Y$.*

Aloitetaan negatiivisella esimerkkillä avaruuksista, jotka eivät ole homotopiaekvivalentteja.

Esimerkki 2.1.2. *Olkoot $X = \{0\} \subset \mathbb{R}$ ja $Y = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$. Osoitetaan vastaoletuksella, että $X \not\simeq Y$. Oletetaan, että on olemassa homotopiaekvivalenssi $f\colon X \to Y$ ja olkoon $g\colon Y \to X$ kuvauksen f homotopiakäänteiskuvaus. Tällöin $g(f(0)) = 0$ ja $f(g(1)) = f(g(-1)) = f(0)$. Koska $f(0) = 1$ tai $f(0) = -1$, niin riittää tilanteen symmetrisyyden nojalla tarkastella tapausta $f(0) = -1$. (Tapaus $f(0) = 1$ jätetään kiinnostuneelle lukijalle.) Koska g on kuvauksen f homotopiakäänteiskuvaus, on olemassa homotopia $H\colon Y \times [0,1] \to Y$ kuvauksesta $f \circ g$ kuvaukseen id_Y.*

Huomataan aluksi, että

$$Y \times [0,1] = \{-1, 1\} \times [0,1] = (\{-1\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1])\,.$$

ja että $\{k\} \times [0,1]$ on yhtenäinen molemmilla $k \in \{-1, 1\}$. Erityisesti siis $\{1\} \times [0,1]$ on yhtenäinen.

Koska H on jatkuva, niin $H(\{1\} \times [0,1])$ on yhtenäinen. Koska avaruuden Y yhtenäiset komponentit ovat $\{1\}$ ja $\{-1\}$ niin saadaan, että $H(\{1\} \times [0,1]) \subset \{-1\}$ tai $H(\{1\} \times [0,1]) \subset \{1\}$. Tämä on nyt ristiriita, sillä $H(1,0) = f(g(1)) = f(0) = -1$ ja että $H(1,1) = \mathrm{id}_Y(1) = 1$.

Tehtävä 17. *Olkoot X, Y, ja Z avaruuksia. Tällöin $X \simeq X$. Jos $X \simeq Y$, niin $Y \simeq X$. Jos $X \simeq Y$ ja $Y \simeq Z$, niin $X \simeq Z$.*

Huomautus 2.1.3. *Mikäli $\mathcal{C}$ on joukko (metrisiä) avaruuksia, niin edellisen tehtävän perusteella homotopiaekvivalenssi määrittelee tähän joukkoon ekvivalenssirelaation. On kuitenkin tärkeää huomata, että ei ole olemassa kaikkien (metristen) avaruuksien joukkoa.*[1]

Homotopiaekvivalenssi on yksi tapa samaistaa avaruuksia topologiassa. Toinen (yleisempi) tapa on homeomorfisuus. Näistä homeomorfisuus on vahvempi seuraavassa mielessä.

Tehtävä 18. *Homeomorfiset avaruudet ovat homotopiaekvivalentteja. Itseasiassa homeomorfismi $f\colon X \to Y$ on myös homotopiaekvivalenssi.*

Homotopiaekvivalenssin merkitys on siinä, että avaruudet voivat olla homotopiaekvivalentteja olematta homeomorfisia. Näin ollen homotopiaekvivalenssi antaa joustavamman tavan samaistaa avaruuksia.

Merkintä 2.1.4. *Avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ joukkoa*

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\colon |x| = 1\}$$

kutsutaan (euklidiseksi) yksikköpalloksi[2] *tai* n-palloksi[3]. *Huomaa, että $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\} \subset \mathbb{R}$.*

Tehtävä 19. *Kuvaus $\rho\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$, $x \mapsto x/|x|$, on homotopiaekvivalenssi.*

Tehtävä 20. *Avaruudet $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ja $\mathbb{S}^{n-1}$ eivät ole homeomorfisia.*

Toisaalta homotopiaekvivalenssi säilyttää avaruuksien homotopiaominaisuuksia, kuten seuraavat tehtävät osoittavat.

Tehtävä 21. *Olkoon $\varphi\colon X \to Y$ homotopiaekvivalenssi. Tällöin kuvaus $\varphi_\#\colon [Y,Z] \to [X,Z]$ on bijektio.*

Tehtävä 22. *Olkoon $\psi\colon Y \to Z$ homotopiaekvivalenssi. Tällöin kuvaus $\psi_\flat\colon [X,Y] \to [X,Z]$ on bijektio.*

---

[1] Tämä on helppo havaita vaikkapa seuraavalla klassisella argumentilla: Oletetaan, että on olemassa kaikkien metristen avaruuksien joukko $\mathcal{M}$ eli $\mathcal{M} = \{(S, d_S)\colon d_S$ on metriikka joukossa $S\}$. Olkoon nyt $\mathcal{S}$ kaikkien niiden joukkojen kokoelma, jotka esiintyvät kokoelmassa $\mathcal{M}$ eli $\mathcal{S} = \{S\colon (S, d_S) \in \mathcal{M}\}$. Koska $\mathcal{M}$ on joukko, niin $\mathcal{S}$ on joukko. Näin ollen on olemassa $\{0,1\}$-metriikka d joukossa $\mathcal{S}$ eli $(\mathcal{S}, d) \in \mathcal{M}$. Näin ollen $\mathcal{S} \in \mathcal{S}$. Tämä on ristiriita, koska joukko ei voi olla itsensä alkio.

[2] Kaavassa $|x|$ on jälleen pisteen eukliden normi $|x|^2 = |(x_1, \ldots, x_{n+1})|^2 = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2$

[3] engl. n-sphere

2.2 Esimerkkejä

2.2.1 Retraktit

Tehtävän 19 kuvaus ρ on erikoistapaus retraktiosta.[4]

Määritelmä 2.2.1. *Olkoon $A \subset X$ osajoukko. Jatkuva kuvaus $f\colon X \to A$ on* retraktio, *jos $f(x) = x$ kaikilla $x \in A$. Joukkoa A sanotaan tällöin avaruuden X* retraktiksi.

Tehtävän 19 mukaan siis yksikköpallo $\mathbb{S}^{n-1}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ retrakti. Tehtävän 19 tapauksessa retraktio on homotopiaekvivalenssi.

Esimerkki 2.2.2. *Huomaa, että retraktin ei tarvitse olla homotopiaekvivalenssi. Esimerkin antaa vaikkapa vakiokuvaus $h\colon \{0,1\} \to \{0\}$ (eli kuvaus $x \mapsto 0$), joka on retrakti, mutta ei ole kuitenkaan ole homotopiaekvivalenssi, koska avaruudet $\{0,1\}$ ja $\{0\}$ eivät ole homotopiaekvivalentteja esimerkin 2.1.2 perusteella.*

Merkintä 2.2.3. *Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Merkitään avaruuden $\mathbb{R}^n$ x-keskistä r-säteistä avointa kuulaa*

$$B^n(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\}.$$

Origokeskistä r-säteistä avointa kuulaa merkitään $B^n(r) = B^n(0,r)$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ avointa yksikkökuulaa merkitään $B^n = B^n(1)$. Vastaavat suljetut kuulat ovat $\bar{B}^n(x,r)$, $\bar{B}^n(r)$ ja $\bar{B}^n$. Merkitään myös $S^{n-1}(x,r) = \partial B^n(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| = r\}$.

Tehtävä 23. *Olkoon $r > 0$ ja $A = B^n(2r) \setminus \bar{B}^n(r)$.[5] Tällöin A ja $\bar{A}$ ovat homotopiaekvivalentteja avaruuden $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ kanssa. Lisäksi $\bar{A}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ retrakti, mutta A ei ole.*

Tehtävä 24. *Osajoukko $\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\big) \times \{0\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,t) : t \in \mathbb{R}\}$ retrakti.*

2.2.2 Kutistuvat avaruudet

Tasosta $\mathbb{R}^2$ tiedämme, että $\mathbb{R}^2 \simeq \{0\}$, sillä tason $\mathbb{R}^2$ identtinen kuvaus on homotooppinen vakiokuvauksen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto 0$, kanssa. Taso $\mathbb{R}^2$ onkin erikoistapaus kutistuvasta avaruudesta.

Määritelmä 2.2.4. *Avaruus X on* kutistuva, *jos identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon X \to X$ on homotooppinen (jonkin) vakiokuvauksen $X \to X$, $x \mapsto x_0$, missä $x_0 \in X$, kanssa.*

Homotooppisessa mielessä kutistuvat avaruudet ovat erittäin yksinkertaisia.[6]

[4] Luonnollinen suomennos voisi olla 'vetäymä'. Ei yritetä kääntää tätä termiä.

[5] Joissakin yhteyksissä joukkoa A kutsutaan rengasalueeksi (engl. ring domain).

[6] Kutistuvat avaruudet eivät ole niin tylsiä kuin tämän perusteella voisi luulla. Whitehead osoitti 1935, että on olemassa pallon $\mathbb{S}^3$ sellainen kompakti osajoukko $\mathrm{Wh} \subset \mathbb{S}^3$ (Whiteheadin kontinuumi), että $\mathbb{S}^3 \setminus \mathrm{Wh}$ on kutistuva, mutta ei ole homeomorfinen punkteeratun pallon $\mathbb{S}^3 \setminus \{e_4\}$ kanssa. Erityisesti tästä seuraa, että on olemassa $\mathbb{R}^3$:n avoin aito osajoukko, joka on kutistuva, mutta ei ole homeomorfinen $\mathbb{R}^3$:n kanssa. Tulos romutti Whiteheadin oman todistuksen Poincarén konjektuurille (jonka todisti vasta Perelman).

Tehtävä 25. *Jos X on kutistuva, niin X on homotopiaekvivalentti pisteen kanssa eli homotopiaekvivalentti jokaisen avaruuden P kanssa, joka sisältää vain yhden pisteen.*

Kutistuvuus myös säilyy homotopiaekvivalenssissa.

Tehtävä 26. *Jos X on kutistuva ja $Y \simeq X$, niin Y on kutistuva.*

Homotopian mielessä kuvaukset kutistuvalta avaruudelta tai kutistuvalle avaruudelle ovat yksinkertaisia.

Tehtävä 27. *Jos Y on polkuyhtenäinen*[7] *avaruus ja X on kutistuva avaruus, niin joukot $[X, X]$, $[X, Y]$ ja $[Y, X]$ ovat yksiöita.*

2.2.3 Torukset

Tässä luvussa tarkastellaan hieman konkreettisia esimerkkejä torusten muodossa.

Sääntö 2.2.5. *Jatkossa eukliidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorilla e_k tarkoitetaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ standardikannan vastaavaa alkiota eli $e_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$, missä $x_{k,j} = 0$ ja $x_{k,k} = 1$ kaikilla $j = 1, \ldots, n$ ja $k = 1, \ldots, n$.*

Joukkoa

$$D = \{v + r\,(\cos(2\pi s)v + \sin(2\pi s)e_3) \in \mathbb{R}^3 \colon v \in \mathbb{S}^1 \times \{0\},\ 0 \le r \le 1/2,\ 0 \le s \le 1\} \subset \mathbb{R}^3,$$

kutsutaan tällä kurssilla *täydeksi* 3*-torukseksi (engl. solid* 3*-torus)*[8]. Jos avaruus X on homeomorfinen osajoukon $D \subset \mathbb{R}^3$ kanssa, kutsutaan jatkossa myös avaruutta X täydeksi 3-torukseksi.

Täysi 3-torus D on itseasiassa helpompi ymmärtää tuloavaruutena.

Tehtävä 28. *Kuvaus $f\colon \bar{B}^2 \times \mathbb{S}^1 \to D$,*

$$f(x, y) = (y, 0) + \frac{|x|}{2}\left(\frac{x_1}{|x|}(y, 0) + \frac{x_2}{|x|}e_3\right),$$

on homeomorfismi. (Kaavassa $x = (x_1, x_2)$.)

Tehtävä 29. *Täysi* 3*-torus D on homotopiaekvivalentti yksikköympyrän $\mathbb{S}^1$ kanssa.*

Täyden 3-toruksen D reunaa ∂D kutsutaan *torukseksi* (tai 2*-torukseksi*).[9]

Usein torukseksi kutsutaan tuloavaruutta $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Seuraavien tehtävien perusteella, terminologiassa ei ole ristiriitaa. Huomaa, että $\bar{B}^2 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Tehtävä 30. *Olkoot $A \subset X$ ja $B \subset Y$ osajoukkoja. Tällöin osajoukon $A \times B \subset X \times Y$ reuna on*

$$\partial(A \times B) = \big((\partial A) \times \bar{B}\big) \cup \big(\bar{A} \times (\partial B)\big).$$

Tehtävä 31. *Joukon $D \subset \mathbb{R}^3$ reuna on homeomorfinen tulon $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ kanssa.*

---

[7] Avaruus Y on polkuyhtenäinen, jos kaikilla pisteillä $x, y \in Y$ on olemassa polku $\gamma\colon [0,1] \to Y$, joka yhdistää pisteet x ja y, eli $\gamma(0) = x$ ja $\gamma(1) = y$.

[8] Joku voisi kutsua 'donitsiksi'.

[9] Jos avaruus Y on homeomorfinen osajoukon $\partial D \subset \mathbb{R}^3$ kanssa, kutsutaan jatkossa myös avaruutta Y 2-torukseksi.

2.3 Huomioita

Tässä luvussa olemme osoittaneet, että kaikilla $n \geq 1$ pallo $\mathbb{S}^{n-1}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ retrakti eli erityisesti $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$.

Fakta 2.3.1. *On syvällinen tulos, että $\mathbb{S}^{n-1}$ ei ole homotopiaekvivalentti pisteen kanssa millään $n \geq 1$, eli että $\mathbb{S}^{n-1}$ ei ole koskaan kutistuva.*

Tällä kurssilla osoitamme, että $\mathbb{S}^1 \not\simeq \{0\}$. Todistamme tuloksen seuraavasti: (1) Määrittelemme avaruuden perusryhmän ja osoitamme, että se on homotopia-invariantti[10], (2) osoitamme, että pisteen perusryhmä on triviaali ja (3) lopuksi osoitamme, että avaruudella $\mathbb{S}^1$ on epätriviaali perusryhmä.

Samaa argumenttia ei voi käyttää pallojen $\mathbb{S}^n$ tapauksessa, kun $n \geq 2$, sillä niiden perusryhmät ovat triviaaleja. Tässä tapauksessa on luonnollisempaa käyttää joko homotopiateorian sijasta muita algebrallisen topologian metodeja esimerkiksi homologiaa tai kohomologiaa tai tarkastella pallon $\mathbb{S}^n$ niin sanottuja korkeampia homotopiaryhmiä ja osoittaa, että $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$ ei ole yksiö. Nämä tulokset jäävät kuitenkin tämän kurssin ulkopuolelle.[11]

2.4 Lisää tehtäviä

Tehtävä 32. *Olkoot $Q = [-1,1] \times [0,2]$ ja $Q' = [-1,1] \times [-2,0]$ tason $\mathbb{R}^2$ neliöitä ja $E = \partial Q \cup \partial Q'$. Olkoon $R'' = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1),(0,-1)\}$ (eli "kahdesti punkteerattu taso"). Osoita, että E on avaruuden R'' retrakti.*

Tehtävä 33. *Olkoon E kuten tehtävässä 32. Osoita, että $E \simeq S^1(e_2,1) \cup S^1(-e_2,1)$, missä $e_2 = (0,1)$.*

Tehtävä 34. *Normiavaruuden V joukko A on* tähtimäinen*, jos on olemassa sellainen piste $x_0 \in A$, että jana $[x_0, x] = \{(1-t)x_0 + tx \in V : 0 \leq t \leq 1\}$ sisältyy joukkoon A kaikilla $x \in A$. Osoita, että tähtimäinen joukko on kutistuva. Anna esimerkki kutistuvasta joukosta $A \subset \mathbb{R}^2$, joka ei ole tähtimäinen.*

Tehtävä 35. *Tarkastele aakkosia* ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZÅÄÖ *tason $\mathbb{R}^2$ osajoukkoina. Argumentoi*[12]*, että aakkoset jakautuvat korkeintaan neljään homotopiaekvivalenssiluokkaan. Argumentoi, että luokkia on tasan neljä, jos tiedetään, että $\mathbb{S}^1 \not\simeq \{0\} \not\simeq E$ ja $\mathbb{S}^1 \not\simeq E$, missä E on kuten tehtävässä 32.*

Tehtävä 36. *Osoita, että* topologin sinikäyrä

$$S = \overline{\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}}$$

ei ole tason $\mathbb{R}^2$ kutistuva osajoukko.

[10] Eli että homotopiaekvivalenteilla avaruuksilla on isomorfiset perusryhmät.

[11] Katso esimerkiksi Hatcher *Algebraic topology* tai luentomuistiinpanot kurssille "Johdatus differentiaalimuotohin".

[12] Heuristinen argumentti esimerkiksi piirtämällä riittää.

Luku 3

Perusryhmä

Avaruuden perusryhmä koostuu silmukoiden homotopialuokista. Heuristisesti perusryhmä kerää tiedon silmukoilla tunnistettavista reikäisyydestä ja tavoista kiertää näitä "reikiä".

3.1 Silmukat

Määritelmä 3.1.1. *Avaruuden X polku $\alpha\colon [a,b] \to X$ on* silmukka, *jos $\alpha(a) = \alpha(b)$. Pistettä $\alpha(a)$ sanotaan silmukan α* kantapisteeksi.

Koska silmukka alkaa ja päättyy kantapisteeseensä, voidaan silmukoita helposti yhdistää.

Tehtävä 37. *Olkoot $a < b < c$ ja $\alpha\colon [a,b] \to X$ ja $\beta\colon [b,c] \to X$ silmukoita, joiden kantapiste on $x_0 \in X$. Tällöin $\alpha \star \beta\colon [a,c] \to X$,*

$$\alpha \star \beta(t) = \begin{cases} \alpha(t), & t \in [a,b] \\ \beta(t), & t \in [b,c] \end{cases}$$

on silmukka, jonka kantapiste on x_0.

Vaikka $\star$ vaikkuttaakin laskutoimitukselta sellaisten silmukoiden joukossa, joilla on sama (kiinnitetty) kantapiste, ei kyseessä ole hyvin määritelty laskutoimitus, sillä silmukkaa $\beta \star \alpha$ ei ole määritelty. Tämän ongelman voi ratkaista esimerkiksi seuraavasti.

Merkintä 3.1.2. *Olkoon $x_0 \in X$. Merkitään*

$$\mathcal{S}(X, x_0) = \{\alpha\colon [0,1] \to X\colon \alpha \text{ on silmukka ja } \alpha(0) = x_0\}.$$

Tehtävän 37 argumentti osoittaa, että seuraava laskutoimitus on hyvin määritelty.

Määritelmä 3.1.3. *Olkoon $x_0 \in X$. Laskutoimitusta $\cdot\colon \mathcal{S}(X,x_0)\times\mathcal{S}(X,x_0) \to \mathcal{S}(X,x_0)$, $(\alpha,\beta) \mapsto \alpha\beta$, missä $\alpha\beta\colon [0,1] \to X$ on silmukka*

$$\alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0,1/2] \\ \beta(2(t-1/2)), & t \in [1/2,1], \end{cases}$$

kutsutaan silmukoiden yhdistämikseksi.

Tämä laskutoimitus on olennaisesti käyttökelvoton esimerkiksi seuraavista syistä.

Tehtävä 38. *Laskutoimitus $\cdot$ joukossa $\mathcal{S}(X, x_0)$ ei ole liitännäinen*[1] *eikä sillä ole neutraalialkioita*[2]*.*

Edellisen tehtävän avulla on myöskin helppo huomata, että jo tapauksessa $X = [0, 1]$ ja $x_0 = 0$ avaruus $\mathcal{C}(X, x_0)$ on aivan liian monimutkainen verrattuna alkuperäiseen avaruuteen X. Ajatuksena onkin samaistaa silmukoita sopivilla homotopioilla eli siirtyä tarkastelemaan silmukoiden eräitä homotopialuokka.

3.2 Silmukkahomotopia

Ennen varsinaisia määritelmiä motivoidaan niiden merkitystä seuraavalla havainnolla.

Tehtävä 39. *Olkoon $\alpha\colon [0, 1] \to X$ silmukka, jonka kantapiste on $x_0 \in X$. Tällöin α on homotooppinen vakiokuvauksen $[0, 1] \to X$, $t \mapsto x_0$, kanssa.*

Kuten edellisessä tehtävässä havaittiin, silmukan määritelmässä oleva vaatimus päätepisteiden samuudesta ei rajoita silmukan kutistuvuutta lainkaan. Erityisesti siis havaitaan, että kaikki joukon $\mathcal{S}(X, x_0)$ silmukat ovat itseasiassa homotooppisia keskenään. Näin ollen pelkkä silmukoiden homotooppisuus ei kerro avaruudesta X mitään. Tilanne kuitenkin muuttuu mikäli vaaditaan, että myös käytetty homotopia säilyttää kantapisteen erikoisaseman.

Määritelmä 3.2.1. *Olkoot $\alpha\colon [0, 1] \to X$ ja $\beta\colon [0, 1] \to X$ avaruuden X silmukoita, joilla on sama kantapiste $x_0 \in X$. Jatkuva kuvaus $H\colon [0, 1] \times [0, 1] \to X$ on* silmukkahomotopia[3] *silmukasta α silmukkaan β, jos*

(a) $H(t, 0) = \alpha(t)$ ja $H(t, 1) = \beta(t)$ kaikilla $t \in [0, 1]$ ja

(b) $H(0, s) = x_0 = H(1, s)$ kaikilla $s \in [0, 1]$.

Jatkossa huomataan, että vaatimus, että silmukkahomotopia ei voi lainkaan siirtää kantapistettä x_0, rajoittaa huomaatavasti silmukoiden välisiä (silmukka)homotopioita.

Määritelmä 3.2.2. *Silmukoita $\alpha\colon [0, 1] \to X$ ja $\beta\colon [0, 1] \to X$, joilla on sama kantapiste $x_0 \in X$, sanotaan* homotooppisiksi silmukoiksi*, jos on olemassa silmukkahomotopia silmukalta α silmukkaan β.*

Koska silmukkahomotopia on olennaisessa roolissa jatkossa, ottamme käyttöön seuravan säännön.

Sääntö 3.2.3. *Mikäli α ja β ovat avaruuden X silmukoita, joilla on sama kantapiste, niin merkkinällä $\alpha \simeq \beta$ tarkoitetaan, että α ja β ovat homotooppisia silmukoita eli on olemassa silmukkahomotopia silmukalta α silmukalle β, ellei toisin mainita. Jatkossa $[\alpha]$ tarkoittaa kaikkien silmukan α kanssa homotooppisten silmukoiden joukkoa.*

[1] Laskutoimitus on liitännäinen, jos $a(bc) = (ab)c$ kaikilla alkioilla a, b, c.

[2] Laskutoimituksen neutraalialkio on alkio e, joka toteuttaa $ae = a = ea$ kaikilla alkioilla a.

[3] Nimitys ei ole yleisessä käytössä, mutta sitä käytetään tällä kurssilla.

Silmukkahomotopiassa asetettu rajoite kantapisteen siirrolle on itseasiassa hyvin luonnollinen, kun havaitaan, että avaruuden X silmukat itseasiassa vastaavat jatkuvia kuvauksia yksikköympyrältä $\mathbb{S}^1$ avaruuteen X. Silmukkahomotopia voidaan tällöin tulkita yksikköympyrällä määriteltyjen kuvausten homotopiana.

Seuraavissa tehtävissä $\theta\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ on jatkuva kuvaus $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

Tehtävä 40. *Olkoon $\hat{\alpha}\colon \mathbb{S}^1 \to X$ jatkuva kuvaus. Tällöin $\alpha = \hat{\alpha} \circ \theta\colon [0,1] \to X$ on silmukka, jonka kantapiste on $\hat{\alpha}(e_1)$.*

Tehtävä 41. *Olkoon $\alpha\colon [0,1] \to X$ silmukka, jonka kantapiste on $x_0 \in X$. Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus $\hat{\alpha}\colon \mathbb{S}^1 \to X$, joka toteuttaa ehdot $\alpha = \hat{\alpha} \circ \theta$ ja $\hat{\alpha}(e_1) = x_0$.*

Tehtävä 42. *Olkoon $H\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ silmukkahomotopia silmukalta $\alpha\colon [0,1] \to X$ silmukalle $\beta\colon [0,1] \to X$ ja olkoot $\hat{\alpha}\colon \mathbb{S}^1 \to X$ ja $\hat{\beta}\colon \mathbb{S}^1 \to X$ jatkuvia kuvauksia, kuten edellisessä tehtävässä. Tällöin on olemassa homotopia $\hat{H}\colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to X$ kuvauksesta $\hat{\alpha}$ kuvaukseen $\hat{\beta}$, joka toteuttaa ehdon $H = \hat{H} \circ (\theta \times \mathrm{id})$ eli $H(x,s) = \hat{H}(\theta(x), s)$ kaikilla $x \in X$ ja $s \in [0,1]$. Lisäksi*

(a) $\hat{H}(e_1, s) = \hat{\alpha}(e_1)$ kaikilla $s \in [0,1]$ ja

(b) $\hat{H}_s\colon \mathbb{S}^1 \to X$, $x \mapsto \hat{H}(x,s)$, on jatkuva kuvaus jokaisella $s \in [0,1]$.

Mainitaan vielä ennen perusryhmän määrittelyyn siirtymistä, että silmukkahomotopia on itseasiassa erikoistapaus yleisemmästä relatiivisen homotopian määritelmästä.

Määritelmä 3.2.4. *Olkoon $A \subset X$ osajoukko ja olkoot $f\colon X \to Y$ ja $g\colon X \to Y$ jatkuvia kuvauksia, jotka yhtyvät joukossa A eli $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in A$. Jatkuva kuvaus $H\colon X \times [0,1] \to Y$ on* homotopia kuvauksesta f kuvaukseen g joukon A suhteen, *jos*

(a) $H(x,0) = f(x)$ ja $H(x,1) = g(x)$ kaikilla $x \in X$ ja

(b) $H(x,s) = f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in A$ ja $s \in [0,1]$.

Tällöin sanotaan, että kuvaukset f ja g ovat homotooppisia joukon A suhteen *ja merkitään $f \simeq g \,\mathrm{rel} A$.*

Huomautus 3.2.5. *Luvuissa 1 ja 2 todistetuilla tuloksilla homotopioista (esimerkiksi tehtävillä 10 ja 12) on vasteneensa myös relatiiviselle homotopioille. Käsittelemme näitä tuloksia myöhemmin tässä luvussa.*

3.3 Perusryhmän määritelmä

Merkintä 3.3.1. *Olkoon $x_0 \in X$ ja merkitään*

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha]\colon \alpha \in \mathcal{S}(X, x_0)\}$$

eli $\pi_1(X, x_0)$ on silmukoiden joukon $\mathcal{S}(X, x_0)$ silmukkahomotopialuokkien joukko.

Joukon $\mathcal{S}(X, x_0)$ laskutoimitus $\cdot$ laskeutuu ekvivalenssiluokkien joukkoon $\pi_1(X, x_0)$.

Tehtävä 43. *Laskutoimitus* $\cdot\colon \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$,

$$[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha\beta],$$

on hyvin määritelty eli alkio $[\alpha\beta]$ *on riippumaton homotopialuokkien* $[\alpha]$ *ja* $[\beta]$ *edustajien valinnasta.*

Tämä laskutoimitus tekee joukosta $\pi_1(X, x_0)$ ryhmän.

Lause 3.3.2. *Pari* $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ *on ryhmä.*[4]

Osoittaaksemme, että $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ on ryhmä, tulee osoittaa, että laskutoimitus $\cdot$ on liitännäinen, että sillä on neutraalialkio ja että jokaisella alkiolla on käänteisalkio.

Seuraavissa tehtävissä α, β ja γ ovat avaruuden silmukoita, joiden kantapiste on x_0, eli joukon $\mathcal{S}(X, x_0)$ alkioita. Lisäksi $e_{x_0}\colon [0,1] \to X$, $t \mapsto x_0$.

Tehtävä 44. *Laskutoimitus* $\cdot$ *on liitännäinen eli* $[\alpha]([\beta][\gamma]) = ([\alpha][\beta])[\gamma]$.

Tehtävä 45. *Vakiosilmukan* e_{x_0} *homotopialuokka* $[e_{x_0}]$ *on laskutoimituksen* $\cdot$ *neutraalialkio.*

Tehtävä 46. *Alkion* $[\alpha]$ *käänteisalkio on homotopialuokka* $[\alpha^{-1}]$, *missä* $\alpha^{-1}\colon [0,1] \to X$ *on silmukka* $t \mapsto \alpha(1-t)$.

Lauseen 3.3.2 todistus. Tehtävien 44–46 perusteella $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ on ryhmä. □

Huomautus 3.3.3. *Tehtävän 46 polkua* α^{-1} *kutsutaan polun* α käänteispoluksi.

Määritelmä 3.3.4. *Ryhmä* $\pi_1(X, x_0)$ *on avaruuden* X perusryhmä kantapisteessä $x_0 \in X$.

Huomautus 3.3.5. *Ryhmän* $\pi_1(X, x_0)$ *neutraalialkio on vakiosilmiukan* $c_{x_0}\colon [0,1] \to X$, $t \mapsto x_0$, *homotopialuokka* $[c_{x_0}]$. *Jatkossa tätä neutraalialkiota merkitään lyhyesti joko symbolilla* e *(kuten usein algebrassa) tai symbolilla* 1 *(kuten usein homotopiateoriassa)*[5].

Luvun 2 perusteella tunnemme jo joidenkin avaruuksien perusryhmiä.

Korollaari 3.3.6. *Kutistuvan avaruuden* X *perusryhmä pisteessä* $x_0 \in X$ *on triviaali, eli* $\pi_1(X, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$. *Erityisesti* $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = \{[c_0]\}$ *kaikilla* $n \geq 1$.

Löytääksemme kuitenkin yhdenkin avaruuden, jonka perusryhmä ei ole triviaali, joudumme näkemään vaivaa. Tärkein tälläinen avaruus on yksikköympyrä $\mathbb{S}^1$. Luvussa 5.3 osoitamme seuraavan faktan.

Olkoon $k \in \mathbb{Z}$ ja merkitään $\alpha_k\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$, $t \mapsto (\cos(2\pi kt), \sin(2\pi kt))$.

Fakta 3.3.7. *Ryhmä* $\pi_1(\mathbb{S}^1, e_1)$ *on isomorfinen kokonaislukujen ryhmän* $(\mathbb{Z}, +)$ *kanssa ja kuvaus* $I\colon \mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{S}^1, e_1)$, $k \mapsto [\alpha_k]$, *on isomorfismi.*

Vaikka tämä tulos on mahdollista osoittaa myös suoraan, on se luonnollisinta osoittaa hyödyntäen peiteavaruuksien teoriaa. Tämän vuoksi lykkäämme tämän faktan todistusta. Koska monia perusryhmään liittyviä yleisiä tuloksia voidaan havainnollistaa hyödyntäen ympyrän perusryhmää, otetaan tämä fakta kuitenkin jo käyttöön.

[4] Jatkossa merkkinnällä $\pi_1(X, x_0)$ tarkoitetaan juuri tätä ryhmää.

[5] Ei siis saa sekoittaa lukuun $1 \in \mathbb{Z}$.

3.4 Perusryhmä ja kuvaukset

Eräs tärkeimmistä perusryhmään ominaisuuksista on, että avaruuksien välinen kuvaus indusoi homomorfismin vastaavien perusryhmin välille. Syntyvää kuvausta kutsutaan *indusoiduksi kuvaukseksi.*

Lause 3.4.1. *Olkoon $x_0 \in X$ ja $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin kaava $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ määrittelee kuvauksen $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$, joka on homomorfismi.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että f_* on hyvin määritelty. Todistus oleellisesti sama kuin tehtävän 10 argumentti. Olkoot $\alpha\colon [0,1] \to X$ ja $\alpha'\colon [0,1] \to X$ silmukoita, joiden kantapiste on x_0. Tällöin $f \circ \alpha$ ja $f \circ \alpha'$ ovat silmukoita, joiden kantapiste on $f(x_0)$. Oletetaan nyt, että $\alpha \simeq \alpha'$. Tällöin on olemassa silmukkahomotopia $H\colon [0,1]\times[0,1] \to X$ silmukasta α silmukkaan α'. Olkoon $F = f \circ H\colon [0,1] \times [0,1] \to Y$. Tällöin F on silmukkahomotopia silmukasta $f\circ\alpha$ silmukkaan $f\circ\alpha'$. Näin ollen $f\circ\alpha \simeq f\circ\alpha'$. Kuvaus f_* on siis hyvin määritelty.

Osoitetaan nyt, että f_* on homomorfismi. Olkoot $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$. Koska silmukoiden yhdistämisen määritelmästä seuraa suoraan $f \circ (\alpha\beta) = (f \circ \alpha)(f \circ \beta)$, niin pätee

$$f_*\left([\alpha][\beta]\right) = f_*[\alpha\beta] = [f \circ (\alpha\beta)] = [(f \circ \alpha)(f \circ \beta)] = [f \circ \alpha][f \circ \beta] = f_*[\alpha]f_*[\beta].$$

Kuvaus f_* on siis homomorfismi. □

Tällä lauseella on tärkeitä (mutta helppoja) seurauksia.

Tehtävä 47. *Olkoot $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to Z$ jatkuvia kuvauksia ja $x_0 \in X$. Tällöin $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$, missä $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$, $g_*\colon \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Z, g(f(x_0))$ ja $(g \circ f)_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, (g \circ f)(x_0))$.*

Tehtävä 48. *Jos $f\colon X \to Y$ on homotopiaekvivalenssi, niin $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ on isomorfismi kaikilla $x_0 \in X$.*[6]

Lause 3.4.2. *Olkoon $x_0 \in X$ ja olkoot $f\colon X \to Y$ ja $g\colon X \to Y$ jatkuvia kuvauksia. Jos $f \simeq g \operatorname{rel}\{x_0\}$, niin $f_* = g_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$.*

Todistusta varten tarvitsemme pienen muistinvirkistyksen.

Tehtävä 49. *Olkoot X,X',Y,Y' ja Z (metrisiä) avaruuksia. Olkoot lisäksi $f\colon X \to Y$ ja $f'\colon X' \to Y'$ jatkuvia kuvauksia. Tällöin $f \times f'\colon X \times X' \to Y \times Y'$ on jatkuva kuvaus. Jos lisäksi $h\colon Y \times Y' \to Z$ on jatkuva kuvaus, niin kuvaus $h \circ (f \times f')\colon X \times X' \to Z$ on jatkuva.*

[6] Kuten luennolla 24.9. keskusteltiin, tämä tehtävä on täysin väärässä paikassa. Sen voi tehdä kahdella mahdollisella tavalla. Vaihtoehto 1: (1 piste) Lisäämällä oletuksen, että kuvauksella f on homotopia käänteiskuvaus $g\colon Y \to X$, jolle pätee $g\circ f \simeq \mathrm{id}_X \operatorname{rel}\{x_0\}$ ja $f\circ g \simeq \mathrm{id}_Y \operatorname{rel}\{f(x_0)\}$. Tällöin voi hyödyntää tehtävää 47 ja lausetta 3.4.2. Vaihtoehto 2: (3 pistettä) Ratkaise tehtävä hyödyntäen kantapisteen vaihtoon liittyviä tekniikoita ja lausetta 3.5.3. Vinkkejä todistuksen vaiheista löytyy Kopasta.

Lauseen 3.4.2 todistus. Olkoon $\alpha\colon [0,1] \to X$ silmukka, jonka kantapiste on x_0. Osoitetaan, että $f \circ \alpha \simeq g \circ \alpha$. Tällöin $f_*[\alpha] = g_*[\alpha]$, joka todistaa väitteen.

Olkoon $F\colon X \times [0,1] \to Y$ homotopia kuvauksesta f kuvaukseen g joukon $\{x_0\}$ suhteen, ja määritellään $H\colon [0,1] \times [0,1] \to Y$, $H(t,s) = F(\alpha(t), s)$. Tällöin H on itseasiassa yhdistetty kuvaus $H = F \circ (\alpha \times \mathrm{id}_{[0,1]})$. Muistinvirkistyksen perusteella $\alpha \times \mathrm{id}_{[0,1]}\colon [0,1] \times [0,1] \to X \times [0,1]$ on jatkuva kuvaus ja siten myös H on jatkuva kuvaus. Koska $H(t,0) = F(\alpha(t),0) = f(\alpha(t))$, $H(t,1) = F(\alpha(t),1) = g(\alpha(t))$ ja $H(0,s) = F(\alpha(0),s) = x_0 = F(\alpha(1),s) = H(1,s)$ kaikilla $t,s \in [0,1]$, niin H on vaadittu homotopia. $\square$

Huomautus 3.4.3. *Yleisenä algebrallisena huomiona sanottakoon, että homomorfismin* $f_*\pi_1(X,x_0) \subset \pi_1(Y, f(x_0))$ *kuva eli joukko*

$$f_*\pi_1(X,x_0) = \{f_*[\alpha] \in \pi_1(Y, f(x_0))\colon [\alpha] \in \pi_1(X,x_0)\} \subset \pi_1(Y, f(x_0)).$$

on aliryhmä.

Sovelletaan kuvauksista saatuja tuloksia vielä retraktioihin.

Tehtävä 50. *Olkoon $A \subset X$ retrakti ja $x_0 \in A$. Tällöin $\iota_*\pi_1(A,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ on injektio, missä $\iota\colon A \to X$ on inkluusio $x \mapsto x$.*

3.5 Kantapiste ja polkukomponentti

Kuten edellä on huomattu, kantapisteellä $x_0 \in X$ on tärkeä rooli perusryhmän $\pi_1(X,x_0)$ määritelmässä – ryhmärakenne perustuu vahvasti kantapisteen käyttöön.

Monissa tilanteissa ei kuitenkaan varsinaisesti tarvise tietää mikä kantapiste on valittu, sillä tulokset ovat usein tästä valinnasta riippumattomia. Tarkastelemme nyt kantapisteeseen ja sen valintaan liittyviä seikkoja. Olennainen havainto on, että perusryhmä $\pi_1(X,x_0)$ riippuu (oleellisesti) ainoastaan pisteen x_0 polkukomponentista avaruudessa X.

Määritelmä 3.5.1. *Pisteen $x_0 \in X$* polkukomponentti *on osajoukko*

$$C(X,x_0) = \{x \in X\colon \text{ On olemassa pisteet } x_0 \text{ ja } x \text{ yhdistävä polku avaruudessa } X.\}$$

Määritelmä 3.5.2. *Avaruus X on* polkuyhtenäinen*, jos $C(X,x_0) = X$ jollakin (eli kaikilla) $x_0 \in X$.*

Tehtävä 51. *Perusryhmät $\pi_1(X,x_0)$ ja $\pi_1(C(x,x_0),x_0)$ ovat isomorfisia. Tarkemmin sanottuna inkluusiokuvauksen $\iota\colon C(X,x_0) \to X$, $x \mapsto x$, indusoima homomorfismi $\iota_*\colon \pi_1(C(X,x_0),x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ on isomorfismi.*

Tarkastellaan nyt kantapisteen vaihtoa polkukomponentin sisällä. Olkoon $\gamma\colon [0,1] \to X$ polku, joka lähtee pisteestä x_0 eli $\gamma(0) = x_0$. Merkitään $x_1 = \gamma(1)$. Ensimmäinen havainto on, että polku γ siirtää kantapisteen x_0 pisteeseen x_1 seuraavassa mielessä.

Tehtävä 52. *Olkoon* $\alpha\colon [0,1] \to X$ *silmukka, jonka kantapiste on* x_0*, eli* $\alpha \in \mathcal{S}(X, x_0)$*. Tällöin polku* $\gamma^{-1}\alpha\gamma\colon [0,1] \to X$*,*

$$\gamma^{-1}\alpha\gamma(t) = \begin{cases} \gamma^{-1}(3t), & t \in [0, 1/3] \\ \alpha(3(t - 1/3)), & t \in [1/3, 2/3] \\ \gamma(3(t - 2/3)), & t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

on silmukka, jonka kantapiste on x_1*, eli* $\gamma^{-1}\alpha\gamma \in \mathcal{S}(X, x_1)$*.*

Lisäksi tämä kantapisteen siirto sopii yhteen silmukkahomotopian kanssa.

Lause 3.5.3. *Kuvaus* $\Phi_\gamma\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$*,* $[\alpha] \mapsto [\gamma^{-1}\alpha\gamma]$*, on isomorfismi.*

Todistus on kolmevaiheinen.

Tehtävä 53. *Kuvaus* $\Phi_\gamma\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$*,* $[\alpha] \mapsto [\gamma^{-1}\alpha\gamma]$*, on hyvin määritelty eli* $[\gamma^{-1}\alpha'\gamma] = [\gamma^{-1}\alpha\gamma]$*, kun silmukoille* $\alpha \in \mathcal{S}(X, x_0)$ *ja* $\alpha' \in \mathcal{S}(X, x_0)$ *pätee* $\alpha \simeq \alpha'$*.*

Tehtävä 54. *Kuvaus* Φ_γ *on homomorfismi eli* $\Phi_\gamma([\alpha][\beta]) = (\Phi_\gamma[\alpha])(\Phi_\gamma[\beta])$ *kaikilla* $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$*.*

Tehtävä 55. *Homomorfismi* $\Phi_{\gamma^{-1}}$ *on homomorfismin* Φ_γ *käänteiskuvaus.*

Lauseen 3.5.3 todistus. Tehtävän 53 perusteella kuvaus Φ_γ on hyvin määritelty. Koska Ψ_γ on homomorfismi ja sillä on käänteiskuvaus, on se isomorfismi. □

Huomautus 3.5.4. *Lauseen 3.5.3 perusteella polkuyhtenäisen avaruuden* X *kaikki perusryhmät* $\pi_1(X, x)$*, missä* $x \in X$*, ovat isomorfisia keskenään. Tämän vuoksi, polkuyhtenäisten avaruuksien kohdalla, perusryhmän* $\pi_1(X, x_0)$ *kantapiste jätetään usein merkitsemättä ja merkitään lyhyesti* $\pi_1(X)$*. Tällä merkinnällä tarkoitetaan mitä tahansa (abstraktia) ryhmää*[7]*, joka on isomorfinen jonkin (ja siten kaikkien) perusryhmän* $\pi_1(X, x_0)$ *kanssa. On kuitenkin parempi välttää liiallisia samaistuksia ja jatkossakin kirjaamme ylös myös kantapisteen.*

3.6 Lisää tehtäviä

Tehtävä 56. *Olkoot* $\gamma\colon [0,1] \to X$ *ja* $\gamma'\colon [0,1] \to X$ *polkuja pisteestä* x_0 *pisteeseen* x_1*. Tällöin* $\Phi_\gamma = \Phi_{\gamma'}$*, jos* $\gamma \simeq \gamma' \operatorname{rel}\{0, 1\}$*.*

Tehtävä 57. *Mitä voit sanoa ryhmästä* $\pi_1(X, x_0)$*, jos* $\Phi_\gamma = \mathrm{id}$ *kaikilla silmukoilla* $\gamma \in \mathcal{S}(X, x_0)$*.*

Tehtävä 58. *Olkoot* $\sigma_0\colon \mathbb{S}^1 \to X$ *ja* $\sigma_1\colon \mathbb{S}^1 \to X$ *jatkuvia kuvauksia, joille pätee* $\sigma_0(e_1) = \sigma_1(e_1)$*. Olkoot lisäksi* $\gamma_k\colon [0,1] \to X$ *silmukoita pisteessä* $\sigma_0(e_1)$*, jotka on määritelty kaavoilla* $\gamma_k(t) = \sigma_k((\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$*. Osoita, että* $\sigma_0 \simeq \sigma_1 \operatorname{rel}\{\sigma(e_1)\}$[8]*, jos ja vain jos* $\gamma_0 \simeq \gamma_1 \operatorname{rel}\{0, 1\}$ *(eli silmukoina).*

[7]Voidaan myös ajatella ryhmien $\pi_1(X, x)$ isomorfialuokkana.

[8]Pahoittelen unohdusta aikaisemmasta versiosta.

Luku 4

Perusryhmän sovelluksia

Tässä luvussa esitellään joitakin sovelluksia, jotka voidaan todistaa heti, kun ympyrän $\mathbb{S}^1$ perusryhmä tunnetaan. Todistettavia tuloksia varten hyödynnämme seuraavia faktoja, jotka todistetaan luvussa 5.

Olkoon $k \in \mathbb{Z}$ ja merkitään $\alpha_k\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$, $t \mapsto (\cos(2\pi kt), \sin(2\pi kt))$.

Fakta 4.0.1. *Ryhmä $\pi_1(\mathbb{S}^1, e_1)$ on isomorfinen kokonaislukujen ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ kanssa ja kuvaus $I\colon \mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{S}^1, e_1)$, $k \mapsto [\alpha_k]$, on isomorfismi.*

Tämän faktan vaikein osa on osoittaa, että $[\alpha_1] = I(1)$ virittää ryhmän $\pi_1(\mathbb{S}^1, e_1)$.[1] Tätä varten tulee osoittaa, että $[\alpha_1] \neq 0$. Lisäksi tulee osoittaa, että muut alkiot ovat homotopialuokan $[\alpha_1]$ monikertoja. Näistä tiedoista seuraa lähes välittömästi, että I on isomorfismi.

4.1 Brouwerin kiintopistelause

Määritelmä 4.1.1. *Piste $x_0 \in X$ on kuvauksen $f\colon X \to X$* kiintopiste, *jos pätee $f(x_0) = x_0$.*

Brouwerin kiintopistelause tasossa on seuraava tulos.

Lause 4.1.2. *Jatkuvalla kuvauksella $f\colon \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$ on kiintopiste.*

Lauseen todistus perustuu vastaoletukseen ja seuraavaan konstruktioon. Oletaan, että kuvauksella $f\colon \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$ ei ole kiintopistettä.

Tehtävä 59. *Jos jatkuvalla kuvauksella $f\colon \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$ ei ole kiintopistettä, niin jokaisella $z \in \bar{B}^2$ on olemassa yksikäsittenen $t_z \in (0, \infty)$ jolle pätee*

$$|f(z) + t_z(z - f(z))| = 1.$$

[1] Alkio a virittää ryhmän G, jos $G = \langle a \rangle = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Tehtävä 60. *Kuvaus* $\varphi\colon \bar{B}^2 \to \mathbb{S}^1$,

$$z \mapsto f(z) + t_z(z - f(z)),$$

missä $t_z \in (0, \infty)$ *on kuten edellisessä tehtävässä, on jatkuva retraktio.*

Brouwerin kiintopistelauseen todistus. Jos kuvauksella f ei ole kiintopistettä, on olemassa retraktio $\varphi\colon \bar{B}^2 \to \mathbb{S}^1$. Näin ollen inkluusiokuvaus $\iota\colon \mathbb{S}^1 \to \bar{B}^2$, $x \mapsto x$, indusoi injektion $\iota_*\colon \pi_1(\mathbb{S}^1, e_1) \to \pi_1(\bar{B}^2, e_1)$ tehtävän 50 perusteella. Tämä on ristiriita, koska $\bar{B}^2$ on kutistuva, joten $\pi_1(\bar{B}^2, e_1)$ on triviaali ryhmä, mutta $\pi_1(\mathbb{S}^1, e_1)$ on epätriviaali. □

Huomautus 4.1.3. *Brouwerin kiintopistelause korkeammissa ulottovuuksissa sanoo, että jatkuvalla kuvauksella* $\bar{B}^n \to \bar{B}^n$ *on kiintopiste. Tämän todistaminen tapauksessa* $n > 2$ *ei kuitenkaan seuraa perusryhmään nojautuvalla argumentilla, sillä* $\pi_1(\mathbb{S}^n, e_1)$ *on triviaali kaikilla* $n \geq 2$ *(kuten myöhemmin osoitamme).*

4.2 Tuloavaruudet

Tuloavaruuden perusryhmä on tulontekijöiden perusryhmien tulo.

Tehtävä 61. *Olkoot* $p_X\colon X \times Y \to X$ *ja* $p_Y\colon X \times Y \to Y$ *projektiokuvaukset* $(x, y) \mapsto x$ *ja* $(x, y) \mapsto y$. *Tällöin homomorfismi* $P = ((p_X)_*, (p_Y)_*) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$, $[\alpha] \mapsto ((p_X)_*[\alpha], (p_Y)_*[\alpha])$, *on isomorfismi.*

Korollaari 4.2.1. *Avaruuden* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ *perusryhmä* $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (e_1, e_1))$ *on (isomorfinen) additiivisen ryhmän* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *kanssa.*

Koska avaruuksien $\bar{B}^2 \times \mathbb{S}^1$ ja $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ perusryhmät tunnetaan nyt hyvin, voidaan niitä käyttää kuvausten tutkimiseen. Seuraavissa tehtävissä $D \subset \mathbb{R}^3$ on kiinteä 3-torus kuten luvussa 1.

Tehtävä 62. *Olkoon* $x_0 \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. *Inkluusiokuvaus* $\iota\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \bar{B}^2 \times \mathbb{S}^1$ *ei ole homotooppinen* $\mathrm{rel}\{x_0\}$ *vakiokuvauksen* $x \mapsto x_0$ *kanssa.*

Tehtävä 63. *Olkoon* $x_0 = (1, 0, 0)$. *Homeomorfismi* $f\colon D \to D$, $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$, *ei ole homotooppinen* $\mathrm{rel}\{x_0\}$ *identtisen kuvauksen* $\mathrm{id}_D\colon D \to D$ *kanssa.*

Tehtävä 64. *On olemassa homeomorfismi* $\varphi\colon \partial D \to \partial D$, *joka ei ole minkään jatkuvan kuvauksen* $f\colon D \to D$ *rajoittuma.*

4.3 Kahdesti punkteerattu taso

Hyödynnetään nyt perusryhmän ja kuvausten välisestä suhteestä saatuja tuloksia ja osoitetaan, että kahdesti punkteeratun tason perusryhmä on epätriviaali ja että se ei ole isomorfinen punkteeratun tason perusryhmän kanssa. Koska homeomorfismi indusoi isomorfismin perusryhmien välille, voidaan siis tästä erityisesti päätellä, että $\mathbb{R}^2 \setminus \{e_1, -e_1\}$

ei ole homeomorfinen punkteeratun tason $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eikä tason $\mathbb{R}^2$ kanssa. Merkitään $R'' = \mathbb{R}^2 \setminus \{e_1, -e_1\}$ ja $R' = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Olkoot $\iota_+ \colon R'' \to \mathbb{R}^2 \setminus \{e_1\}$ ja $\iota_- \colon R'' \to \mathbb{R}^2 \setminus \{-e_1\}$ inkluusioita $x \mapsto x$. Olkoot myös $\alpha_+ \colon [0,1] \to R''$, $t \mapsto e_1 - (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, ja $\alpha_- \colon [0,1] \to R''$, $t \mapsto -e_1 + (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, silmukoita avaruudessa R''. Silmuikolla on yhteinen kantapiste, origo.

Tehtävä 65. *Tällöin* $[\iota_+ \circ \alpha_+] \neq 1$ *ja* $[\iota_+ \circ \alpha_-] = 1$ *ryhmässä* $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{e_1\}, 0)$. *Vastaavasti* $[\iota_- \circ \alpha_-] \neq 1$ *ja* $[\iota_- \circ \alpha_+] = 1$ *ryhmässä* $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{-e_1\}, 0)$.

Korollaari 4.3.1. *Tällöin* $[\alpha_+] \neq 1$ *ja* $[\alpha_-] \neq 1$ *ryhmässä* $\pi_1(R'', 0)$. *Lisäksi* $[\alpha_+] \neq [\alpha_-]$.

Tämän korollaarin taustalla on (triviaali!) algebrallinen oivallus: *Olkoon* $\varphi \colon G \to H$ *homomorfismi ryhmältä* G *ryhmälle* H. *Tällöin* φ *kuvaa neutraalialkion neutraalialkiolle eli* $\varphi(e_G) = e_H$. *Tämän väitteen kontrapostio on sanoo, että* $g \neq e_G$, *jos* $\varphi(g) \neq e_H$.

Korollaarin 4.3.1 todistus. Koska $(\iota_+)_*[\alpha_+] = [\iota_+ \circ \alpha_+] \neq 1$ ryhmässä $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{e_1\}, 0)$, niin $[\alpha_+] \neq 1$ ryhmässä $\pi_1(R'', 0)$. Vastaavasti todistetaan, että $[\alpha_-] \neq 1$. Toisaalta, jos pätisi $[\alpha_+] = [\alpha_-]$, niin $(\iota_+)_*[\alpha_+] = (\iota_+)_*[\alpha_-] = [\iota_+ \circ \alpha_-] = 1$. Tämä on ristiriita, joten $[\alpha_+] \neq [\alpha_-]$. □

Korollaarin 4.3.1 argumentilla voidaan itseasiassa todistaa paljon enemmänkin.

Tehtävä 66. *Kumpikaan alkiosta* $[\alpha_+]$ *ja* $[\alpha_-]$ *ei ole toisensa monikerta*[2] *eli* $[\alpha_-] \neq [\alpha_+]^k$ *millään* $k \in \mathbb{Z}$ *eikä* $[\alpha_+] \neq [\alpha_-]^k$ *millään* $k \in \mathbb{Z}$. *Erityisesti* $[\alpha_+] \neq [\alpha_-]^{-1}$.

Korotetaan seuraava havainto lauseeksi, koska siinä käytämme ensimmäistä kertaa algebrallista päättelyä topologisessa kysymyksessä.

Lause 4.3.2. *Avaruudet* $R'' = \mathbb{R}^2 \setminus \{e_1, -e_1\}$ *ja* $R' = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *eivät ole homeomorfisia.*

Aloitetaan kahdella algebrallisella havainnolla.

Tehtävä 67. *Olkoon* $\varphi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *isomorfismi additiiviselta ryhmältä* $(\mathbb{Z}, +)$ *itselleen. Tällöin joko* $\varphi = \mathrm{id}$ *tai* $\varphi = -\mathrm{id}$.

Tehtävä 68. *Olkoon* G *ryhmä, joka on isomorfinen ryhmän* $(\mathbb{Z}, +)$ *kanssa, ja* $\psi \colon G \to G$ *isomorfismi. Tällöin joko* $\psi = \mathrm{id}$ *tai* $\psi(a) = a^{-1}$ *kaikilla* $a \in G$.

Tehdään myös helppo topologinen havainto avaruudesta R''. Olkoon $\theta \colon R'' \to R''$ jatkuva kuvaus $x \mapsto -x$.

Tehtävä 69. *Tällöin* θ *on homeomorfismi, joka totettaa ehdot* $\theta \circ \theta = \mathrm{id}$, $\theta(0) = 0$ *ja* $\theta \circ \alpha_+ = \alpha_-$.

Koska lauseen 4.3.2 muotoilussa ei ole kiinnitetty huomiota kantapisteisiin, tehdään vielä yksi havainto.

[2] Huomaa, että $a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Tehtävä 70. *Jokaisella* $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *on olemassa homeomorfismi* $g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$*, jolle pätee* $g(x_0) = e_1$*.*

Lauseen 4.3.2 todistus. Oletetaan, että on olemassa homeomorfismi $h\colon R'' \to R'$. Olkoon $x_0 = h(0)$ ja $g\colon R' \to R'$ tehtävän 70 homeomorfismi. Tällöin $f = g \circ h\colon R'' \to R'$ on homeomorfismi, jolle pätee $f(0) = e_1$. Näin ollen $f_*\colon \pi_1(R'', 0) \to \pi_1(R', e_1)$ on isomorfismi.

Olkoon nyt $\theta\colon R'' \to R''$ tehtävässä 69 käsitelty homeomorfismi. Tällöin homomorfismi $\theta_*\colon \pi_1(R'', 0) \to \pi_1(R'', 0)$ on isomorfismi. Koska $\pi_1(R', e_1)$ on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}$ kanssa, niin näin ollen myös $\pi_1(R'', 0)$ on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}$ kanssa. Tehtävän 68 perusteella tällöin pätee joko $\theta_* = \mathrm{id}$ tai $\theta_* = -\mathrm{id}$. Näin ollen pätee joko $[\alpha_-] = \theta_*[\alpha_+] = [\alpha_+]$ tai $[\alpha_-] = \theta_*[\alpha_+] = [\alpha_+]^{-1}$. Tämä on ristiriita tehtävän 66 tuloksen kanssa. Avaruudet R'' ja R' eivät siis ole homeomorfisia. □

4.4 Pallot $\mathbb{S}^n$

Vaikka kysymys ei olekkaan sovelluksesta, osoitetaan vielä luvun lopuksi, että pallojen $\mathbb{S}^n$ perusryhmät ovat triviaaleja kaikilla $n \geq 2$. Kysymys sinänsä ei ole aivan triviaali, vaikka siltä ensinäkemältä vaikuttaakin. Jatkossa oletetaan, että pätee $n \geq 2$. Aloitetaan positiivisista tuloksista.

Tehtävä 71. *Olkoon* $P = \{te_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0\}$ *ja* $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus P$ *silmukka pisteessä* $-e_{n+1}$*. Tällöin* σ *on (silmukka)homotooppinen vakiopolun kanssa.*

Tehtävä 72. *Olkoon* $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{S}^n$ *sellainen silmukka, että* $e_{n+1} \notin \gamma[0,1]$*. Tällöin* γ *on homotooppinen vakiopolun kanssa.*

Sitten huonot uutiset.

Tehtävä 73. *On olemassa silmukka* $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{S}^n$*, joka on surjektio.*

Ongelma voidaan kuitenkin helposti korjata, koska olemme olettaneet $n \geq 2$.

Tehtävä 74. *Olkoon silmukka* $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{S}^n$*, jolle pätee* $\sigma(0) \neq e_{n+1}$*. Tällöin on olemassa silmukan* σ *kanssa homotooppinen silmukka* $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{S}^n$*, joka ei saa arvoa* e_{n+1} *eli* $e_{n+1} \notin \gamma[0,1]$*.*

Tehtävien 72 ja 74 avulla voidaan nyt päätellä haluttu tulos.

Tehtävä 75. *Pallon* $\mathbb{S}^n$ *(*$n \geq 2$*) perusryhmä* $\pi_1(\mathbb{S}^n, e_1)$ *on triviaali.*

4.5 Huomioita

Lauseen 4.3.2 todistuksessa käytettiin tietoa, että $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{e_1, -e_1\}, 0) \ncong \mathbb{Z}$. Tämä perusryhmä (luonnollisesti) tunnetaan tarkastikkin.

Fakta 4.5.1. *Ryhmä* $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{e_1, -e_1\}, 0)$ *on isomorfinen kahden alkion virittämän vapaan ryhmän* $\mathbb{F}_2$ *kanssa.*

Tämä todistetaan luvussa 8.

4.6 Lisää tehtäviä

Tehtävä 76. *Selitä, miksi tehtävässä 35 aakkoset jakautuvat täsmälleen neljään homotopialuokkaan.*

Luku 5

Peitekuvaukset ja -avaruudet

5.1 Määritelmiä

Määritelmä 5.1.1. *Jatkuva kuvaus $f\colon X \to Y$ on* peitekuvaus, *jos f on surjektio ja jokaisella pisteellä $y \in Y$ on sellainen ympäristö*[1] *V, että $f^{-1}V = \bigcup_{i \in I} U_i$, missä joukot U_i ovat avoimia, pareittain erillisiä (eli $U_i \cap U_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$) ja jokaisella indeksillä $i \in I$ kuvaus $f|U_i\colon U_i \to V$ on homeomorfismi. Joukkoa V sanotaan pisteen y* peiteympäristöksi kuvauksessa *f.*

Määritelmä 5.1.2. *Avaruus X on avaruuden Y* peiteavaruus, *jos on olemassa peitekuvaus $f\colon X \to Y$.*

Tehtävä 77. *Kuvaus $f_\infty\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, on peitekuvaus.*

Tehtävä 78. *Olkoon $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Kuvaus $f_k\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $(\cos t, \sin t) \mapsto (\cos(kt), \sin(kt))$, on hyvin määritelty ja peitekuvaus.*

Avaruudella on (yleensä) runsaasti keskenään erilaisia peiteavaruuksia. Seuraavan esimerkin tapaukseen palataan vielä myöhemmin.

Tehtävä 79. *Osoita piirtämällä, että avaruus $\hat{X} = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \mathbb{S}^1(4ke_1 + e_2, 1) \cup \{0\} \times \mathbb{R} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \mathbb{S}^1(4ke_2 + e_1, 1)$ on avaruuden $X = \mathbb{S}^1(e_1, 1) \cup \mathbb{S}^1(-e_1, 1)$ peiteavaruus.*

Vaikka peitekuvaus on aina lokaali homeomorfismi[2] eivät kaikki lokaalit homeomorfismit ole peitekuvauksia.

Tehtävä 80. *Olkoon $f_\infty\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ kuten tehtävässä 77. Kuvaukset $f_\infty|(-1,1)\colon (-1,1) \to \mathbb{S}^1$ ja $f_\infty|(-1,2)\colon (-1,2) \to \mathbb{S}^1$ ovat lokaaleja homeomorfismeja, mutta eivät peitekuvauksia.*[3]

[1] Avointa joukkoa V, joka sisältää pisteen $y \in Y$, sanotaan pisteen y *ympäristöksi.*

[2] Kuvaus $f\colon X \to Y$ on lokaali homeomorfismi, jos jokaisella $x \in X$ on olemassa ympäristö $U \subset X$, johon rajoitettuna kuvaus f on homeomorfismi eli rajoittumakuvaus $f|U\colon U \to fU$ on homeomorfismi.

[3] Tehtävä on mielekkäämpi, jos tarkastellaan kuvauksia $f_\infty|(-\pi,\pi)$ ja $f_\infty|(-\pi, 2\pi)$.

Huomautus 5.1.3. *Tehtävien 77 ja 78 kuvaukset asettuvat oikeaan kontekstiin, kun käytetään kompleksianalyysin merkintöjä. Ensin voidaan havaita, että kuvaus f_k on itseasiassa potenssikuvauksen $z \mapsto z^k$ rajoittuma yksikköympyrälle. Vaikka tästä ei vielä voida suoraan päätellä, että f_k on peitekuvaus, niin näin kuitenkin havaitaan välittömästi, että se on hyvin määritelty. Itseasiassa havaitaan myös, vaikka käyttämällä kompleksianalyysin tietoja, että potenssikuvaus $z \mapsto z^k$ on peitekuvaus $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eli $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Vaihtoehtoisesti saman väitteen voi todistaa tarkastelemalla samaa kuvausta reaalisissa koordinaateissa.*

Myös kuvauksella f_∞ on kompleksianalyyttinen tulkinta. Samaistamalla $\mathbb{R}$ ja reaalikselin $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$ kanssa havaitaan, että $f(t) = e^{it}$, missä $z \mapsto e^z$ on kompleksinen eksponenttifunktio ja i kompleksiyksikkö $i = (0, 1)$. Kuvauksen f_∞ nimi juontaa juurensa havaintoon, että $\# f_\infty^{-1}(w) = \infty$ kaikilla $w \in \mathbb{S}^1$.

Myös tässä tapauksessa kompleksinen tulkinta antaa enemmän tietoa. Eksponenttifunktio $z \mapsto e^z$ antaa nimittäin peitekuvauksen $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Selvästi homeomorfismit ovat peitekuvauksia. Käänteinen tulos on seuraava.

Tehtävä 81. *Injektiviinen peitekuvaus on homeomorfismi.*

5.2 Homotopian nosto

Peitekuvauksilla on ns. kuvaustennosto-ominaisuus. Yleinen lause sanoo, että kuvaus voidaan nostaa pitkin peitekuvausta, mikäli nostettava kuvaus ja peitekuvaus sopivat yhteen. Palaamme tähän yleiseen lauseeseen luvun lopussa. Todistamme sitä ennen joitakin erikoistauksia tästä tuloksesta, jotta saamme ympyrän perusryhmän karakterisoinnin päätökseen.

Määritelmä 5.2.1. *Jatkuva kuvaus $\hat{\varphi}\colon X \to \hat{Y}$ on kuvauksen $\varphi\colon X \to Y$* nosto *peitekuvauksessa $f\colon \hat{Y} \to Y$, jos $f \circ \hat{\varphi} = \varphi$.*

Ensimmäinen nostotulos liittyy polkuihin ja homotopioihin.

Lause 5.2.2. *Olkoon $F\colon [0,1]^2 \to X$ jatkuva kuvaus ja $f\colon \hat{X} \to X$ peitekuvaus. Olkoon $\hat{x}_0 \in \hat{X}$ sellainen piste, että $f(\hat{x}_0) = F(0,0)$. Tällöin on olemassa kuvauksen F nosto $\hat{F}\colon [0,1]^2 \to \hat{X}$ peitekuvauksessa f, joka toteuttaa ehdon $\hat{F}(0,0) = \hat{x}_0$.*

$$\begin{tikzcd} & \hat{X} \arrow[d, "f"] \\ {[0,1]^2} \arrow[ur, dashed, "\hat{F}"] \arrow[r, "F"'] & X \end{tikzcd}$$

Lauseen 5.2.2 nosto $\hat{F}$ on itseasiassa yksikäsitteinen. Tämä tulos seuraa suoraan seuraavasta yleisestä havainnosta.

Tehtävä 82. *Olkoon $\varphi\colon X \to Y$ kuvaus ja $f\colon \hat{Y} \to Y$ peitekuvaus. Olkoot $\hat{\varphi}\colon X \to \hat{Y}$ ja $\hat{\varphi}'\colon X \to \hat{Y}$ kuvauksen φ nostoja pitkin peitekuvasta f. Tällöin joukko*

$$\{x \in X\colon \hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}'(x)\}$$

on avoin ja suljettu.

Korollaari 5.2.3. *Lauseen 5.2.2 kuvaus $\hat{F}$ on yksikäsitteinen, eli mikäli $\hat{F}\colon [0,1]^2 \to \hat{X}$ on kuvauksen F nosto peitekuvauksessa f ja $\hat{F}'(0,0) = \hat{x}_0$, niin $\hat{F}' = \hat{F}$.*

Todistus. Koska pätee $\hat{F}(0,0) = \hat{F}'(0,0)$, niin joukko $E = \{x \in [0,1]^2\colon \hat{F}(x) = \hat{F}'(x)\}$ on avoin, suljettu ja epätyhjä. Koska $[0,1]^2$ on yhtenäinen, niin pätee $E = [0,1]^2$ eli $\hat{F} = \hat{F}'$. □

Lause 5.2.2 todistetaan peittämällä joukko $F[0,1]^2$ kuvaukseen f liittyvillä peiteympäristöillä ja nostamalla kuvaus F osissa pitkin peitekuvausta f. Tätä varten tarvitaan eräitä merkintöjä.

Olkoon $k \in \mathbb{Z}_+$ ja olkoon $Q^k_{ij} = [i/k, (i+1)/k] \times [j/k, (j+1)/k]$ jokaisella $(i,j) \in \{0,\dots,k-1\}^2$. Selvästi $\bigcup_{i,j} Q^k_{ij} = [0,1]^2$.

Tehtävä 83. *On olemassa sellainen $k \in \mathbb{Z}_+$, että jokaisella $(i,j) \in \{0,\dots,k-1\}^2$ on olemassa avoin joukko $V_{ij} \subset Y$, jolle pätee $FQ^k_{ij} \subset V_{ij}$ ja joka on pisteen $F(i/k, j/k)$ peiteympäristö peitekuvauksessa f.*

Lauseen 5.2.2 todistus on induktio yli nelöiden $\{Q^k_{ij}\colon (i,j) \in \{0,\dots,k-1\}^2\}$ joukon. Tätä varten indeksoimme nämä neliöt uudelleen. Merkitään $J_k = \{0,\dots,k-1\}$ ja $\mathcal{Q}_k = \{Q^k_{ij}\colon (i,j) \in J_k \times J_k\}$. Merkitään myös $\kappa_{ij} = (i/k, j/k)$ jokaisella $(i,j) \in J_k \times J_k$. Huomaa, että κ_{ij} on yksi neliön Q^k_{ij} kulmapisteistä.

Tehtävä 84. *Jokaisella $k \geq 1$ on olemassa bijektio $q_k\colon \{0,\dots,k^2-1\} \to J_k \times J_k$, jolla on seuraava ominaisuus: jos $0 < i \leq k^2 - 1$, niin $\kappa_{q_k(i)} \in Q^k_{q_k(i)} \cap \bigcup_{0 \leq j < i} Q^k_{q_k(j)}$ ja leikkaus on yhtenäinen.* [4]

Muotoillaan vielä tehtävän 83 tulos huomioksi, jota käytetään lauseen todistuksessa. Koska kyseessä on ainoastaan uudelleenmuotoilu, formaali todistus jätetään kiinnostuneelle lukijalle.

Lemma 5.2.4. *On olemassa sellainen $k \in \mathbb{Z}_+$, että jokaisella $0 \leq i \leq k^2 - 1$ on olemassa avoin joukko $W_i \subset Y$, jolle pätee $F(Q^k_{q_k(i)}) \subset W_i$ ja joka on pisteen $F(\kappa_{q_k(i)})$ peiteympäristö peitekuvauksessa f.*

Tehdään vielä yksi yleinen huomio todistukseen liittyen.[5]

---

[4] Itseasiassa voidaan valita, että leikkaus on joko yksi neliön $Q^k_{q_k(i)}$ sivuista tai kahden vierekkäisen yhdiste.

[5] Huomiota sovelletaan vain neliöihin Q^k_{ij}.

Tehtävä 85. *Olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus. Olkoon $\mathcal{A}$ avaruuden X lokaalisti äärellinen peite suljetuilla joukoilla eli $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = X$ ja jokaisella $x \in X$ on olemassa sellainen ympäristö U että $\#\{A \in \mathcal{A}\colon U \cap A \neq \emptyset\} < \infty$. Tällöin kuvaus f on jatkuva, jos $f|A\colon A \to Y$ on jatkuva jokaisella $A \in \mathcal{A}$.*

Lauseen 5.2.2 todistus. Olkoon $k \in \mathbb{Z}_+$ ja avoimet joukot W_i kuten lemmassa 5.2.4. Konstruoimme kuvauksen $\hat{F}$ (äärellisellä) induktiolla bijektion q_k avulla. Tarkemmin sanottuna konstruoimme jatkuvat kuvaukset $\hat{F}_j\colon E_j \to \hat{Y}$, missä $E_j = \bigcup_{0\le i\le j} Q^k_{q_k(i)}$, ja jotka toteuttavat ehdot

(a) $\hat{F}_0(0,0) = \hat{x}_0$,

(b) $\hat{F}_j|E_i = \hat{F}_i$ kaikilla $0 \le i < j$ ja

(c) $f \circ \hat{F}_j = F|E_j$ jokaisella $0 \le j \le k^2 - 1$.

Olkoon U_0 se joukon $f^{-1}W_0$ komponentti, joka sisältää pisteen $\hat{y}_0$. Koska pätee $f(\hat{y}_0) = \varphi(F(\kappa_{q_k(0)})) \in FQ^k_{q_k(0)} \subset W_0$, niin tälläinen joukko U_0 on olemassa. Määritellään nyt kuvaus $\hat{F}_0\colon Q^k_{q_k(0)} \to \hat{Y}$ kaavalla $\hat{F}_0 = (f|U_0)^{-1} \circ F|Q^k_{q_k(0)}$, missä $f|U_0$ on homeomorfismi $f|U_0\colon U_0 \to W_0$. Tällöin erityisesti, $\hat{F}_0$ on jatkuva ja toteuttaa ehdon $\hat{F}_0(0,0) = \hat{F}_0(\kappa_{q_k(0)}) = \hat{y}_0$.

Oletetaan nyt, että $0 \le j < k^2 - 1$ on sellainen indeksi, että olemme määritelleet kuvauksen $\hat{F}_j\colon E_j \to \hat{Y}$. Merkitään $Q = Q^k_{q_k(j+1)}$. Tällöin tehtävän 83 perusteella $Q \cap E_j$ on yhtenäinen ja sisältää neliön Q kulmapisteen $\kappa_{q_k(j+1)}$. Olkoon nyt U_{j+1} sellainen joukon $f^{-1}W_{j+1}$ komponentti, joka sisältää pisteen $\hat{F}_j(\kappa_{q_k(j)})$. Olkoon nyt $\hat{G}\colon Q^k_{q_k(j+1)} \to \hat{X}$ se yksikäsitteinen kuvaus, jolle pätee $\hat{G}(\kappa_{q_k(j+1)}) = \hat{F}(\kappa_{q_k(j+1)})$ ja $f \circ \hat{G} = F|Q^k_{q_k(j+1)}$. Koska $Q \cap E_j$ on yhtenäinen ja molemmat kuvaukset $\hat{F}_j|Q \cap E_j$ ja $\hat{G}|Q \cap E_j$ ovat kuvauksen $F|Q \cap E_j$ nostoja avaruuteen $\hat{X}$, jotka yhtyvät yhdessä pisteessä, niin noston yksikäsitteisyyden (tehtävä 82) nojalla $\hat{F}_j|Q \cap E_j = \hat{G}|Q \cap E_j$. Näin ollen kuvaus $\hat{F}_{j+1}\colon E_{j+1} \to \hat{X}$, joka on määritelty kaavoilla $\hat{F}_{j+1}|E_j = \hat{F}_j$ ja $\hat{F}_{j+1}|Q = \hat{G}$, on hyvin määritelty. Tehtävän 85 perusteella $\hat{F}_{j+1}$ on jatkuva. Selvästi $\hat{F}_{j+1}$ toteuttaa ehdot (a), (b) ja (c).

Näin ollen $\hat{F} = \hat{F}_{k^2-1}\colon [0,1]^2 \to \hat{X}$ on haluttu kuvauksen F nosto. □

Lauseella 5.2.2 on runsaasti seurauksia erityisesti polun- ja homotopian nostoon liittyen.

Määritelmä 5.2.5. *Olkoon $\alpha\colon [a,b] \to X$ polku, $f\colon \hat{X} \to X$ peitekuvaus ja $\hat{x}_0 \in \hat{X}$ piste, jolle pätee $f(\hat{x}_0) = \alpha(a)$. Polku $\hat{\alpha}\colon [a,b] \to \hat{X}$ on* polun α nosto pisteestä $\hat{x}_0$ kuvauksessa f*, jos $f \circ \hat{\alpha} = \alpha$ ja $\hat{\alpha}(a) = \hat{x}_0$.*

Tehtävä 86 (Polun nosto)**.** *Olkoon $\alpha\colon [0,1] \to Y$ polku, $f\colon \hat{Y} \to Y$ peitekuvaus ja $\hat{y}_0 \in \hat{Y}$ piste, jolle pätee $f(\hat{y}_0) = \alpha(0)$. Tällöin on olemassa pisteestä y_0 alkava polku $\hat{\alpha}\colon [0,1] \to \hat{Y}$, joka on polun α nosto kuvauksessa f pisteestä $\hat{y}_0$.*

Tehtävä 87 (Homotopian nosto)**.** *Olkoon* $F\colon [0,1]\times[0,1]\to Y$ *silmukkahomotopia silmukalta* $\alpha\colon [0,1]\to Y$ *silmukalle* $\alpha'\colon [0,1]\to Y$*, joiden kantapiste on* $y_0\in Y$*. Olkoon* $f\colon \hat{Y}\to Y$ *peitekuvaus ja* $\hat{y}_0\in\hat{Y}$ *piste, jolle pätee* $f(\hat{y}_0)=y_0$*. Tällöin on olemassa homotopia* $\hat{F}\colon [0,1]\times[0,1]\to Y \ \ \mathrm{rel}\{0,1\}$ *polulta* $\hat{\alpha}$ *polulle* $\hat{\alpha}'$*, missä* $\hat{\alpha}$ *ja* $\hat{\alpha}$ *ovat silmukoiden* α *ja* α' *nostot pisteestä* $\hat{y}_0$ *kuvauksessa* f*.*

5.3 Ympyrän perusryhmä

Ympyrän $\mathbb{S}^1$ perusryhmän voidaan laskea hyödyntämällä peitekuvausta $f_\infty\colon\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$. Tämä seuraa peitekuvausten ns. nosto-ominaisuudesta.

Lause 5.3.1. *Yksikköympyrän* $\mathbb{S}^1$ *perusryhmä* $\pi_1(\mathbb{S}^1,e_1)$ *on isomorfinen kokonaislukujen additiivisen ryhmän* $(\mathbb{Z},+)$ *kanssa.*

Todistuksessa tarvitaan edellisen luvun tekniikoita seuraavien tehtävien muodossa.

Tehtävä 88. *Olkoon* $\alpha\colon[0,1]\to\mathbb{S}^1$ *silmukka pisteessä* e_1*. Tällöin on olemassa polku* $\tilde{\alpha}\colon[0,1]\to\mathbb{R}$*, joka toteuttaa ehdot* $\tilde{\alpha}(0)=0$ *ja* $f_\infty\circ\tilde{\alpha}=\alpha$*.*

Tehtävä 89. *Olkoon* $F\colon[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{S}^1$ *jatkuva kuvaus, joka toteuttaa ehdon* $F(0,0)=e_1$*. Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus* $\tilde{F}\colon[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$*, joka toteuttaa ehdot* $\tilde{F}(0,0)=0$ *ja* $f_\infty\circ\tilde{F}=F$*.*

Huomautus 5.3.2. *Edellisten tehtävien faktat vaikuttavat abstrakteilta, mutta kysymyksessä on loppujen lopuksi kysymys sellaisten jatkuvien funkioiden* $\tilde{\alpha}$ *ja* $\tilde{F}$ *etsimisestä, jotka toteuttavat ehdot*

$$\alpha(t)=(\cos(\tilde{\alpha}(t)),\sin(\tilde{\alpha}(t))$$

ja

$$F(t,s)=(\cos(\tilde{F}(t,s)),\sin(\tilde{F}(t,s))$$

kaikilla $t\in[0,1]$ *ja* $s\in[0,1]$*. Jokaisessa konkreettisessa tilanteessa, nämä funkiot siis voidaan löytää periaatteessa käsin ratkaisemalla nämä yhtälöt. Koska emme kuitenkaan ole varsinaisesti kiinnostuneita tästä teknisestä vaiheesta, käytämme juuri todistettuja yleisiä tuloksia.*

Lauseen 5.3.1 perustuu kolmeen havaintoon, jotka hyödyntävät kahta edellistä havaintoa.

Tehtävä 90 (Kandidaatit)**.** *Olkoon* $k\in\mathbb{Z}$ *ja* $\tilde{\alpha}_k\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ *polku* $t\mapsto 2\pi kt$*. Tällöin* $\alpha_k=f_\infty\circ\tilde{\alpha}_k\colon[0,1]\to\mathbb{S}^1$ *on silmukka pisteessä* e_1*, eli* $[\alpha_k]\in\pi_1(\mathbb{S}^1,e_1)$*.*

Tehtävä 91 (Nostot)**.** *Olkoon* $\alpha\colon[0,1]\to\mathbb{S}^1$ *silmukka pisteessä* e_1 *ja olkoon* $\tilde{\alpha}\colon[0,1]\to\mathbb{S}^1$ *polun* α *nosto origosta kuvauksessa* f_∞ *eli* $\tilde{\alpha}(0)=0$ *ja* $f_\infty\circ\tilde{\alpha}=\alpha$*. Tällöin* $\tilde{\alpha}(1)\in 2\pi\mathbb{Z}$ *eli* $\tilde{\alpha}(1)=2\pi k$ *jollain* $k\in\mathbb{Z}$*.*

Tehtävä 92 (Riippumattomuus)**.** *Olkoot* $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ *ja* $\alpha'\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ *silmukoita pisteessä* e_1*, jotka ovat homotooppisia eli* $[\alpha] = [\alpha']$*. Tällöin vastaavilla nostoilla* $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *ja* $\tilde{\alpha}'\colon [0,1] \to \mathbb{R}$*, jotka alkavat origosta, on sama päätepiste, eli* $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$*.*

Tehtävä 93 (Yhdistäminen)**.** *Olkoot* $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ *ja* $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ *silmukoita pisteessä* e_1*. Tällöin* $\widetilde{\alpha\beta}(1) = \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1)$*.*

Lauseen 5.3.1 todistus. Määritellään funktio $\Phi\colon \mathcal{S}(\mathbb{S}_1, e_1) \to \mathbb{Z}$ kaavalla

$$\alpha \mapsto \frac{\tilde{\alpha}(1)}{2\pi}.$$

Koska tehtävän 91 perusteella $\tilde{\alpha}(1) \in 2\pi\mathbb{Z}$, tämä funktio on hyvin määritelty. Jos α ja α' ovat homotooppisia silmukoita joukossa $\mathcal{S}(\mathbb{S}^1, e_1)$, niin tehtävän 92 perusteella $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$ eli $\Phi(\alpha) = \Phi(\alpha')$. Funkion Φ arvo riippuu siis ainoastaan silmukan homotopialuokasta. Näin ollen funkio $\varphi\colon \pi_1(\mathbb{S}^1, e_1) \to \mathbb{Z}$, $[\alpha] \mapsto \Phi(\alpha)$, on hyvin määritelty.

Tehtävän 90 perusteella funktio φ on surjektio. Lisäksi tehtävän 93 perusteella kaikilla $[\alpha], [\beta] \in \pi_!(\mathbb{S}, e_1)$ pätee

$$\varphi([\alpha][\beta]) = \varphi([\alpha\beta]) = \Phi(\alpha\beta) = \widetilde{\alpha\beta}(1)/(2\pi) = \left(\tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1)\right)/(2\pi) = \varphi([\alpha]) + \varphi([\beta]).$$

Funktio φ on siis surjektiivinen homomorfismi.

Homomorfismi φ on itseasiassa isomorfismi. Tätä varten tulee osoittaa, että φ on injektio. Koska φ on homomorfismi riittää siis osoittaa, että $\varphi^{-1}(0) = \{[\alpha_0]\}$. Olkoon $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ sellainen silmukka pisteessa e_1, että $\varphi([\gamma]) = 0$. Tällöin polun γ nostolle $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ origosta pätee $\tilde{\gamma}(1) = \Phi(\gamma) = 0$. Näin ollen $\tilde{\gamma}$ on silmukka. Koska $\mathbb{R}$ on kutistuva, on olemassa silmukkahomotopia $\tilde{H}\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ polusta $\tilde{\gamma}$ vakiopolkuun $\tilde{\alpha}_0$ eli polkuun $t \mapsto 0$. Tällöin $H = f_\infty \circ H\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ on homotopia polusta γ vakiopolkuun α_0. Näin ollen $[\gamma] = [\alpha_0]$. Surjektiivinen homomorfismi φ on siis myös injektio ja siten isomorfismi. $\square$

5.4 Yleinen nostolause

Määritelmä 5.4.1. *Avaruus* X *on* lokaalisti polkuyhtenäinen*, jos jokaisen pisteen* $x \in X$ *jokainen ympäristö* $U \subset X$ *sisältää pisteen* x *polkuyhtenäisen ympäristön* $V \subset U$*.*

Lause 5.4.2. *Olkoon* X *polkuyhtenäinen ja lokaalisti polkuyhtenäinen avaruus,* $\varphi\colon X \to Y$ *kuvaus ja* $f\colon \hat{Y} \to Y$ *peitekuvaus. Olkoot* $x_0 \in X$ *ja* $\hat{y}_0 \in \hat{Y}$ *pisteitä, joille pätee* $\varphi(x_0) = f(\hat{y}_0)$*. Tällöin on olemassa kuvauksen* φ *nosto* $\hat{\varphi}\colon X \to \hat{Y}$ *kuvauksessa* f*, jolle pätee* $\hat{\varphi}(x_0) = \hat{y}_0$*, jos* $\varphi_*\pi_1(X, x_0) \subset f_*\pi_1(\hat{Y}, \hat{y}_0)$*.*

$$\begin{tikzcd} & \hat{Y} \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\hat{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

Itseasiassa lauseen 5.4.2 riittävä ehto $\varphi_*\pi_1(X, x_0) \subset f_*\pi_1(\hat{Y}, \hat{y}_0)$ on myös välttämätön.

Tehtävä 94. *Olkoon $f\colon \hat{Y} \to Y$ peitekuvaus, $\hat{\varphi}\colon X \to \hat{Y}$ kuvaus ja $x_0 \in X$. Tällöin $(f \circ \hat{\varphi})_*\pi_1(X, x_0) \subset f_*\pi_1(\hat{Y}, \hat{\varphi}(x_0))$.*

Lauseen 5.4.2 todistus perustuu seuraaviin huomioihin, jotka puolestaan perustuvat lauseeseen 5.2.2 ja sen seurauksiin (tehtävät 86 ja 87).

Tehtävä 95. *Olkoon $\alpha\colon [a, b] \to X$ silmukka pisteessä x_0 ja $\hat{\beta}\colon [a, b] \to \hat{Y}$ polun $\beta = \varphi \circ \alpha\colon [a, b] \to Y$ nosto pisteestä $\hat{y}_0$ peitekuvauksessa f. Tällöin $\hat{\beta}$ on silmukka, jos $\varphi_*\pi_1(X, x_0) \subset f_*\pi_1(\hat{Y}, \hat{y}_0)$.*

Tehtävä 96. *Olkoot $\alpha\colon [a, b] \to Y$ ja $\alpha'\colon [a, b] \to Y$ polkuja pisteestä x_0, joilla on sama päätepiste eli $\alpha(b) = \alpha'(b)$. Olkoot $\hat{\beta}\colon [a, b] \to \hat{Y}$ ja $\hat{\beta}'\colon [a, b] \to \hat{Y}$ polkujen $\beta = \varphi \circ \alpha$ ja $\beta' = \varphi \circ \alpha'$ nostot pisteestä x_0 kuvauksessa f. Tällöin $\hat{\beta}(b) = \hat{\beta}'(b)$.*

Lauseen 5.4.2 todistus. Koska X on polkuyhtenäinen, voidaan jokaisella $x \in X$ valita polku $\gamma_x\colon [0, 1] \to X$ pisteestä x_0 pisteeseen x. Olkoon $\hat{\beta}_x\colon [0, 1] \to \hat{Y}$ polun $\beta_x = \varphi \circ \gamma_x\colon [0, 1] \to Y$ pisteestä $\hat{y}_0$ alkava nosto kuvauksessa f.

Määritellään nyt kuvaus $\hat{\varphi}\colon X \to \hat{Y}$ kaavalla

$$x \mapsto \hat{\beta}_x(1).$$

Tällöin

$$f \circ \hat{\varphi}(x) = f(\hat{\beta}_x(1)) = \beta_x(1) = \varphi(\gamma_x(1)) = \varphi(x)$$

jokaisella $x \in X$. Riittää siis osoittaa, että $\hat{\varphi}$ on jatkuva ja että $\hat{\varphi}(x_0) = \hat{\beta}_{x_0}(0) = \hat{y}_0$.

Osoitetaan ensin, että $\hat{\beta}_{x_0}(0) = \hat{y}_0$. Koska $\gamma_{x_0}(1) = x_0$, niin γ_{x_0} on avaruuden X silmukka pisteessä x_0. Näin ollen tehtävän 95 perusteella $\hat{\beta}_{x_0}$ on silmukka. Erityisesti siis pätee $\hat{\beta}_{x_0}(1) = \hat{\beta}_{x_0}(0) = \hat{y}_0$ polun β_{x_0} noston määritelmän perusteella. Näin ollen

$$\hat{\varphi}(x_0) = \hat{\beta}_{x_0}(1) = \hat{y}_0.$$

Osoitetaan nyt, että $\hat{\varphi}$ on jatkuva. Olkoon $x \in X$ ja olkoon V pisteen $\varphi(x)$ peiteympäristö kuvauksessa f. Olkoon $U \subset \hat{Y}$ se joukon $f^{-1}V$ komponentti, joka sisältää pisteen $\hat{\varphi}(x)$. Koska X on lokaalisti polkuyhtenäinen ja $\varphi^{-1}V \subset X$ on pisteen x ympäristö, on olemassa pisteen x ympäristö $W \subset \varphi^{-1}U$, joka on polkuyhtenäinen. Osoitetaan nyt, että $\hat{\varphi}W \subset U$;

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[ur, dashed, "\hat{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & V \end{tikzcd}$$

Kuvaus $\hat{\varphi}$ on tällöin jatkuva.

Koska W on polkuyhtenäinen, voidaan jokaisella $x' \in W$ valita polku $\sigma_{x'}\colon [0, 1] \to W$ pisteestä x pisteeseen x'. Tällöin poluilla $\gamma_x \star \sigma_{x'}$ ja $\gamma_{x'}$ on samat päätepisteet x_0 ja x', missä $\gamma_x \star \sigma_{x'}$ on yhdistetty polku kuten tehtävässä 37.

Tarkastellaan nyt polun $\varphi \circ (\gamma_x \star \sigma_{x'})$ pisteestä $\hat{y}_0$ alkavaa nostoa kuvauksessa f. Operaation $\star$ määritelmän nojalla, havaitaan aluksi, että

$$\varphi \circ (\gamma_x \star \sigma_{x'}) = (\varphi \circ \gamma_x) \star (\varphi \circ \sigma_{x'}) = \beta_x \star (\varphi \circ \sigma_{x'}).$$

Olkoon $\hat{\delta}_{x'} \colon [0,1] \to \hat{Y}$ polku, joka on polun $\delta_{x'} = \varphi \circ \sigma_{x'}$ pisteestä $\hat{\beta}_x(1)$ alkava nosto kuvauksessa f. Tällöin $\hat{\beta}_x \star \hat{\delta}_{x'}$ on polun $\varphi \circ (\gamma_x \star \sigma_{x'})$ pisteestä $\hat{y}_0$ alkava nosto kuvauksessa f. Koska $\sigma_{x'}[0,1] \subset W$, niin $\varphi \circ \sigma_{x'}[0,1] \subset V$. Näin ollen noston yksikäsitteisyyden perusteella, $\hat{\delta}_{x'}[0,1] \subset U$, koska $\hat{\delta}_{x'}(0) = \hat{\beta}_x(1) = \hat{\varphi}(x) \in U$. Näin ollen tehtävän 96 perusteella poluilla $\hat{\beta}_x \star \hat{\delta}_{x'}$ ja $\hat{\beta}_{x'}$ on samat päätepisteet. Erityisesti siis pätee

$$\hat{\varphi}(x') = \hat{\beta}_{x'}(1) = \hat{\beta}_x \star \hat{\delta}_{x'}(1) = \hat{\delta}_{x'}(1) \in U.$$

Näin ollen $\hat{\varphi} W \subset U$. Kuvaus $\hat{\varphi}$ on siis jatkuva. □

5.5 Algebran peruslause

Algebran peruslause sanoo, että jokaisella kompleksikertoimisella polynomilla on (kompleksinen) juuri.[6]

Lause 5.5.1. *Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ($a_n \neq 0$) ja $P \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polynomifunktio $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$. Tällöin on olemassa $z_0 \in \mathbb{C}$, jolle pätee $P(z_0) = 0$.*

Algebran peruslause antaa kompleksikertoimisten polynomien tekiöihin jaon.

Tehtävä 97. *Olkoon P asteen $n \in \mathbb{Z}_+$ polynomi (kuten lauseessa 5.5.1) ja z_0 polynomin P juuri (eli $P(z_0) = 0$). Tällöin $P(z) = (z - z_0)Q(z)$, missä Q on polynomi astetta $n-1$.*

Algebran peruslauseen todistus perustuu vastaoletukseen. Aloitetaan todistus kahdella huomiolla, joista selviää miten vastaoletusta voi hyödyntää.

Tehtävä 98. *Olkoon $\pi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ peitekuvaus $z \mapsto e^z$. Jos polynomilla P ei ole juuria, niin on olemassa jatkuva kuvaus $f \colon \mathbb{C} \to C$, jolle pätee $P = \pi \circ f$.*

Tehtävä 99. *Jos polynomilla P ei ole juuria, niin jokaisella $r > 0$ silmukka $\gamma_r \colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma_r(t) = P(re^{it})$, on kutistuva. Erityisesti $[\gamma_r] = 1 \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, P(r))$.*

Ristiriita saadaan nyt aikaan siitä, että hyvin suurilla säteen $r > 0$ arvoilla silmukka γ_r ei voi olla homotooppinen vakiokuvauksen kanssa. Tähän tarvitaan seuraava huomio.

Tehtävä 100. *Olkoon $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ asteen $n \geq 1$ polynomi. Tällöin on olemassa sellainen $R > 0$, että jana[7] $[P(z), z^n]$ sisältyy joukkoon $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ kaikilla $|z| > R$.*

Tehtävä 101. *Olkoon $R > 0$ kuten edellisessä tehtävässä ja $r > R$. Olkoot $\beta_r \colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ polku $t \mapsto tP(r) + (1-t)r^n$ ja $\sigma_r \colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ silmukka $t \mapsto r^n e^{i2\pi nt}$. Tällöin $[\beta_r \star \sigma_r \star \beta_r^{-1}] = [\gamma_r]$ ryhmässä $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, P(r))$.*

Tehtävä 102. *Olkoon $r > R$. Tällöin $[\gamma_r] \neq 0 \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, P(r))$.*

Yhdistämällä tehtävien 98 ja 102 havainnot saadaan haluttu ristiriita ja Algebran peruslauseen todistus päätökseen.

[6] Algebran peruslauseelle ei tunneta puhtaasti algebrallista todistusta, mutta useita todistuksia käyttäen muita menetelmiä. Tässä siis topologinen todistus.

[7] Janalla $[x, y]$ tarkoitetaan joukkoa $\{tx + (1-t)y \colon t \in [0,1]\}$.

5.6 Lisää tehtäviä

Tehtävä 103. *Olkoon $\hat{X}$ avaruuden X yhtenäinen peiteavaruus. Osoita, että $\hat{X}$ on polkuyhtenäinen, jos X on polkuyhtenäinen. Osoita, $\hat{X}$ on lokaalisti polkuyhtenäinen, jos X on lokaalisti polkuyhtenäinen.*

Luku 6

Peiteavaruudet ja peiteryhmät

Tässä luvussa tarkastellaan avaruuden perusryhmän yhteyttä peiteavaruuksiin universaalipeitteen avulla. Tässä luvussa kaikki avaruudet ovat polkuyhtenäisiä ja lokaalisti polkuyhtenäisiä ellei toisin mainita.

6.1 Alkeishavaintoja peiteavaruuksista

Tehtävän 81 perusteella tiedämme, että injektiivinen peitekuvaus on homeomorfismi. Tarkastellaan nyt algebrallista ehtoa, milloin kaksi peiteavaruutta ovat homeomorfisia. Aloitetaan seuraavalla havainnoilla.

Tehtävä 104. *Olkoon $\varphi\colon X \to Y$ kuvaus, $p\colon \hat{Y} \to Y$ peitekuvaus ja $\hat{\varphi}\colon X \to \hat{Y}$ kuvauksen φ nosto peitekuvauksessa p. Tällöin $\hat{\varphi}$ on peitekuvaus, jos φ on peitekuvaus.*

Tehtävä 105. *Olkoon $\varphi\colon X \to Y$ kuvaus, $p\colon \hat{Y} \to Y$ peitekuvaus ja olkoot $\hat{\varphi}\colon X \to \hat{Y}$ ja $\hat{\varphi}'\colon X \to \hat{Y}$ kuvauksen φ nostoja peitekuvauksessa p. Tällöin $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}'$, jos X on yhtenäinen ja on olemassa $x_0 \in X$, jolle pätee $\hat{\varphi}(x_0) = \hat{\varphi}'(x_0)$.*

Tehtävä 106. *Olkoot $\varphi\colon X \to Z$ ja $\psi\colon Y \to Z$ polkuyhtenäisten avaruuksien peitekuvauksia ja $x_0 \in X$ sekä $y_0 \in Y$ pisteitä, joille pätee $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$ ja $\varphi_*\pi_1(X, x_0) = \psi_*\pi_1(Y, y_0)$. Tällöin kuvauksen φ nosto $\varphi'\colon X \to Y$ on peitekuvaus, jolle pätee $\varphi'(x_0) = y_0$, ja kuvauksen ψ nosto $\psi'\colon Y \to X$ on peitekuvaus, jolle pätee $\psi'(y_0) = x_0$ ovat toistensa käänteiskuvauksia.*

Korollaari 6.1.1. *Olkoot $\varphi\colon X \to Z$ ja $\psi\colon Y \to Z$ polkuyhtenäisten avaruuksien peitekuvauksia, joille pätee*

$$\varphi_*\pi_1(X, x_0) = \psi_*\pi_1(Y, y_0)$$

joillakin $x_0 \in X$ ja $y_0 \in Y$. Tällöin on olemassa homeomorfismi $\theta\colon X \to Y$, jolle pätee $\varphi = \psi \circ \theta$.

Soveltamalla tätä korollaaria identtiseen kuvaukseen $\psi = \mathrm{id}\colon Y \to Y$, saadaan seuraava tulos.

Korollaari 6.1.2. *Olkoon $f\colon X \to Y$ peitekuvaus ja $x_0 \in X$. Jos $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ on surjektio, niin f on homeomorfismi.*

Erityisesti siis voidaan päätellä, että peitekuvauksen $\varphi\colon X \to Z$ indusoima homomorfismi $\varphi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, \varphi(x_0))$ ei ole surjektio, jos X ei ole homeomorfinen avaruuden Z kanssa. On ollennaista huomata, että tämä homomorfismi φ_* on itseasiassa aina injektio.

Tehtävä 107 (Peitekuvaus indusoi injektion perusryhmien välille)**.** *Olkoon $f\colon X \to Y$ peitekuvaus ja $x_0 \in X$. Tällöin homomorfismi $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ on injektio.*

6.2 Yhdestiyhtenäinen peiteavaruus

Määritelmä 6.2.1. *Avaruus X on* yhdestiyhtenäinen*, jos X on polkuyhtenäinen ja $\pi_1(X, x_0)$ on triviaali ryhmä jollakin (eli kaikilla) $x_0 \in X$.*

Määritelmä 6.2.2. *Avaruuden X peiteavaruutta $\tilde{X}$ kutsutaan* universaalipeitteeksi*, jos $\tilde{X}$ on yhdestiyhtenäinen.*

Esimerkki 6.2.3. *Reaaliakseli $\mathbb{R}$ on yksikköympyrän $\mathbb{S}^1$ universaalipeite. Taso $\mathbb{R}^2$ on punkteeratun tason $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ universaalipeite.*

Esimerkki 6.2.4. *Pallo $\mathbb{S}^n$ on yhdestiyhtenäinen jokaisella $n \geq 2$. Erityisesti se on oma universaalipeitteensä. Samoin $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on yhdestiyhtenäinen jokaisella $n \geq 3$ ja on oma universaalipeitteensä.*

Universaalipeitteen nimitys tulee sen universaaliominaisuudesta, joka sanoo, että jokainen peitekuvaus $\hat{X} \to X$ faktoroi peitekuvauksen universaalipeitteeltä avaruudelle X.

Lause 6.2.5. *Olkoon $\tilde{X}$ avaruuden X universaalipeite ja $\pi\colon \tilde{X} \to X$ peitekuvaus. Olkoon lisäksi $\psi\colon \hat{X} \to X$ peitekuvaus. Tällöin on olemassa peitekuvaus $\hat{\pi}\colon \tilde{X} \to \hat{X}$, jolle pätee $\pi = \psi \circ \hat{\pi}$.*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, dashed, "\hat{\pi}"'] \arrow[dd, "\pi"] \\ \hat{X} \arrow[dr, "\psi"'] & \\ & X \end{tikzcd}$$

Vaikka universaaliominaisuus onkin nimetty juhlallisesti lauseeksi, on se itseasiassa kuitenkin vain seurausta yleisestä kuvauksen nostosta. Tämä on helppo havaita, kun diagrammia katsotaan eri suunnasta:

$$\begin{tikzcd} & \hat{X} \arrow[d, "\psi"] \\ \tilde{X} \arrow[ur, dashed, "\hat{\pi}"] \arrow[r, "\pi"'] & X \end{tikzcd}$$

Lauseen 6.2.5 todistus siis kiteytyy seuraavaan huomioon.

Tehtävä 108. *Kuvauksella* $\pi\colon \tilde{X} \to X$ *on olemassa nosto* $\hat{\pi}\colon \tilde{X} \to \hat{X}$.

Korollaari 6.1.2 antaa universaalipeiteen yksikäsitteisyyden (homeomorfismia vaille).

Korollaari 6.2.6. *Olkoot* $\tilde{X}$ *ja* $\tilde{X}'$ *avaruuden* X *universaalipeitteitä. Tällöin kuvaus* $\tilde{\pi}'\colon \tilde{X}' \to \tilde{X}$, *joka on peitekuvauksen* $\pi'\colon \tilde{X}' \to X$ *nosto kuvauksessa* $\pi\colon \tilde{X} \to X$, *on homeomorfismi.*

Universaalipeite on eräs tärkeimmistä tavoista tutkia avaruuden perusryhmää kuten seuraavassa luvussa havaitaan. Näin ollen oleelliseksi kysymykseksi nouseekin, milloin avaruudella on universaalipeite. Postiviinen vastaus annetaan luvussa 7.

6.3 Peiteryhmä

Määritelmä 6.3.1. *Homeomorfismi* $\varphi\colon \hat{X} \to \hat{X}$ *on peitekuvauksen* $p\colon \hat{X} \to X$ peitetransformaatio[1] *(engl.* covering transformation *tai* deck transformation*), jos pätee* $p \circ \varphi = p$.

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \hat{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Tehtävä 109. *Olkoon* $p\colon \tilde{X} \to X$ *universaalipeite ja* $f\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ *jatkuva kuvaus, joka toteuttaa ehdon* $p \circ f = p$. *Tällöin* f *on homeomorfismi.*

Merkintä 6.3.2. *Peitekuvauksen* $\pi\colon \hat{X} \to X$ *peitetransformaatioden joukkoa merkitään* $\mathcal{D}(\hat{X}, \pi)$.

Tehtävä 110. *Olkoon* $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ *peitekuvaus* $t \mapsto e^{i2\pi t}$ *(eli* $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$*). Olkoon* $\varphi_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_k(t) = t + k$ *jokaisella* $k \in \mathbb{Z}$. *Tällöin* $\mathcal{D}(\mathbb{R}, p) = \{\varphi_k : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$.

Peitetransformaatiot muodostavat ryhmän, joka on avaruuden $\hat{X}$ homeomorfismien ryhmän Homeo$(\hat{X})$ aliryhmä.

Tehtävä 111. *Pari* $(\mathrm{Homeo}(\hat{X}), \circ)$, *missä laskutoimitus* $\circ$ *on kuvausten yhdistäminen, on ryhmä ja* $\mathcal{D}(\hat{X}, \pi)$ *on sen aliryhmä.*[2]

Määritelmä 6.3.3. *Ryhmää* $\mathcal{D}(\hat{X}, \pi)$ *kutsutaan peitekuvauksen* π peiteryhmäksi.

[1] Termi peitemuunnos (tai säiemuunnos) olisi parempaa kieltä. Tyydytään tällä kurssilla kuitenkin tähän termiin.

[2] Muista, että ryhmän G osajoukko H on *aliryhmä*, jos $g^{-1}h \in H$ pätee kaikilla $g, h \in H$. Huomaa, että tällöin H on itsekkin myös ryhmä.

6.4 Säikeet ja perusryhmä

Peiteryhmä $\mathcal{D}(\hat{X}, \pi)$ ja avaruuden X perusryhmä ovat kiinteässä yhteydessä toisiinsa. Aloitetaan peiteryhmään tutustuminen pienellä ekskursiolla säikeen $\pi^{-1}(x_0)$ permutaatioiden yhteydestä perusryhmään. Seuraavissa tehtävissä $p\colon \hat{X} \to X$ on peitekuvaus ja $x_0 \in X$.

On hyödyllistä ottaa käyttöön seuraava termi.

Määritelmä 6.4.1. *Joukon E permutaatioiden (eli bijektioiden $E \to E$) ryhmää kutsutaan joukon E* symmetriaryhmäksi[3] *ja sitä merkitään* $\mathrm{Sym}(E)$.

Ensimmäiseksi havaitaan, että polun noston avulla voidaan määritellä 'säikeiden' (engl. *fiber*) permutaatioita.

Olkoon $\gamma\colon [0,1] \to X$ silmukka pisteessä x_0 ja olkoon jokaisella $\hat{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ polku $\tilde{\gamma}_{\hat{x}_0}\colon [0,1] \to X$ pisteestä $\hat{x}_0$ alkava polun γ nosto. Määritellään kuvaus $\Psi_\gamma\colon p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_0)$ kaavalla

$$\hat{x} \mapsto \tilde{\gamma}_{\hat{x}}(1).$$

Tehtävä 112. *Kuvaus Ψ_γ on bijektio.*

Permutaatio Ψ_γ riippuu ainoastaan polun γ homotopialuokasta.

Tehtävä 113. *Jos $\sigma\colon [0,1] \to X$ on silmukka pisteessä x_0, joka on homotooppinen silmukan γ kanssa, niin $\Psi_\sigma = \Psi_\gamma$.*

Tehtävän 112 perusteella on siis olemassa hyvin määritelty kuvaus

$$\Psi\colon \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Sym}(p^{-1}(x_0)), \quad [\gamma] \mapsto \Psi_\gamma.$$

Huomaa, että kuvauksen Ψ arvot ovat joukon $\mathrm{Sym}(p^{-1}(x_0))$ alkiota eli kuvauksia itsekkin. Näin saatu kuvaus Ψ on itseasiassa homomorfismi.

Tehtävä 114. *Olkoot $[\gamma], [\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$. Tällöin*

$$\Psi([\gamma][\sigma]) = \Psi([\sigma]) \circ \Psi([\gamma]).$$

Yleensä sanotaan, että homomorfismi Ψ määrittelee perusryhmän $\pi_1(X, x_0)$ toiminnan säikeessä $p^{-1}(x_0)$. Tällä tarkoitetaan, että homomorfismin Ψ avulla voidaan määritellä kuvaus $\pi_1(X, x_0) \times p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_0)$ kaavalla

$$([\gamma], \hat{x}_0) \mapsto \Psi([\gamma])(\hat{x}_0) \ \ (= \Psi_\gamma(\hat{x}_0))\,.$$

Huomautus 6.4.2. *Ryhmän G toiminnalla avaruudessa Z tarkoitetaan yleensä (jatkuvaa) kuvausta $A\colon G \times Z \to Z$, joka toteuttaa ehdot (1) kuvaus $A_g\colon Z \to Z$, $A_g(z) = A(g, z)$ on homeomorfismi jokaisella $g \in G$ ja (2) $A_{gh} = A_g \circ A_h$ kaikilla $g, h \in G$. Usein toimintaa A merkitään lyhyesti $(g, x) \mapsto gx$.*

Koska $p^{-1}(x_0)$ on diskreetti joukko, tiedetään, että $\mathrm{Sym}(p^{-1}(x_0)) = \mathrm{Homeo}(p^{-1}(x_0))$. Näin ollen kuvauksen Ψ maalijoukkona on itseasiassa joukon $p^{-1}(x_0)$ homeomorfismit.

[3] Laskutoimitus on luonnollisesti kuvausten yhdistäminen.

Ryhmä $\pi_1(X, x_0)$ toimii säikeeseen $p^{-1}(x_0)$ *transitiivisesti*, jolla tarkoitetaan seuraavaa.

Tehtävä 115. *Olkoot $\hat{x}, \hat{x}' \in p^{-1}(x_0)$. Tällöin on olemassa sellainen $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, jolle pätee $\Psi([\gamma])(\hat{x}) = \hat{x}'$.*

6.5 Peiteryhmä ja perusryhmä

Tehtävän 109 perusteella myös peiteryhmä $\mathcal{D}(\hat{X}, p)$ toimii säikeeseen $p^{-1}(x_0)$. Tämä toiminta ei kuitenkaan yleensä ole transitiivistä ja tästä voidaan päätellä, että kaikki permutaatiot $\Psi([\gamma])$ eivät vastaa peitetransformaatioita.

Tehtävä 116. *Palaa tehtävään 79 ja argumentoi, että käyttämäsi peitekuvauksen $p\colon \hat{X} \to X$ peiteryhmä ei toimi transitiivisesti säikeeseen $p^{-1}(0)$ löytämällä pisteet $x, x' \in p^{-1}(0)$, joita ei voi kuvata toisilleen millään peiteryhmän alkiolla.*

Peitekuvausten teorian avulla voimme kuitenkin vastata tarkisti kysymykseen, mitä alkioita peiteryhmässä $\mathcal{D}(\hat{X}, p)$ on, seuraavan olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen avulla. Huomaa, että $\hat{X}$ on oletettu polkuyhtenäiseksi.

Lause 6.5.1. *Olkoon $p\colon \hat{X} \to X$ peitekuvaus ja $x_0 \in X$.*

($\exists$) *Olkoot $\hat{x}_0, \hat{x} \in p^{-1}(x_0)$. Jos $p_*\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0) \subset p_*\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$, niin on olemassa peitetransformaatio $\varphi\colon \hat{X} \to \hat{X}$, jolle pätee $\varphi(\hat{x}_0) = \hat{x}$.*

($\exists!$) *Olkoot φ ja ψ peitetransformaatioita ryhmässä $\mathcal{D}(\hat{X}, p)$. Jos on olemassa $\hat{x} \in \hat{X}$, jolle $\varphi(\hat{x}) = \psi(\hat{x})$, niin tällöin $\varphi = \psi$.*

Kohdan ($\exists!$) todistus on lähellä tehtävän 82 todistusta.

Tehtävä 117. *Olkoon $\varphi\colon \hat{X} \to \hat{X}$ peitekuvauksen $p\colon \hat{X} \to X$ peitetransformaatio (eli alkio ryhmässä $\mathcal{D}(\hat{X}, p)$). Tällöin*

$$\{\hat{x} \in \hat{X} \colon \varphi(\hat{x}) = \hat{x}\}$$

on avoin ja suljettu joukko.

Lauseen 6.5.1 todistus. Todistetaan ensin ($\exists$). Tarkastellaan kolmiota

$$\begin{tikzcd} & \hat{X} \arrow[d, "p"] \\ \hat{X} \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

Koska oletuksen perusteella $p_*\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0) \subset p_*\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$, niin kuvausten nostolauseen (lause 5.4.2) perusteella on olemassa sellainen kuvauksen $p\colon \hat{X} \to X$ nosto $\varphi\colon \hat{X} \to \hat{X}$ pitkin peitekuvausta $p\colon \hat{X} \to X$, jolle pätee $\varphi(\hat{x}_0) = \hat{x}$. Kuvaus φ on tällöin määritelmän nojalla peitetransformaatio (katso tehtävä 104).

Todistetaan nyt ($\exists!$). Olkoot $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\hat{X}, p)$. Koska $\mathcal{D}(\hat{X}, p)$ on ryhmä, niin $\varphi^{-1} \circ \psi \in \mathcal{D}(\hat{X}, p)$. Koska $\varphi(\hat{x}_0) = \psi(x_0)$, niin $\varphi^{-1} \circ \psi(x_0) = \varphi^{-1}(\varphi(x_0)) = x_0$. Peitetransformaatiolla $\varphi^{-1} \circ \psi$ on siis kiintopiste x_0. Näin ollen tehtävän 117 perusteella pätee $\varphi^{-1} \circ \psi = \mathrm{id}_{\hat{X}}$ eli $\psi = \varphi$, koska $\hat{X}$ on oletettu polkuyhtenäiseksi. □

Peiteryhmän alkiot $\mathcal{D}(\hat{X}, p)$ siis vastaavat jollain tavalla avaruuden X perusryhmän $\pi_1(X, x_0)$ alkiota. Universaalipeitteen $\tilde{X}$ tapauksessa tämä vastaavuus on bijektiviinen. Olkoon $p\colon \tilde{X} \to X$ peitekuvaus ja olkoon $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.

Määrittelemään kuvaus $\Theta\colon \mathcal{D}(\hat{X}, p) \to \pi_1(X, x_0)$ seuraavasti. Olkoon $\varphi \in \mathcal{D}(\hat{X}, p)$ ja olkoon $\gamma_\varphi\colon [0,1] \to \hat{X}$ polku pisteestä $\hat{x}_0$ pisteeseen $\varphi(\hat{x}_0)$. Määritellään

$$\Theta(\varphi) = [p \circ \gamma_\varphi].$$

Tehtävä 118. *Kuvauksen Θ arvo $\Theta(\varphi)$ pisteessä $\varphi \in \mathcal{D}(\hat{X}, p)$ ei riipu polun γ_φ valinnasta.*

Tehtävä 119. *Kuvaus Θ on homomorfismi eli $\Theta(\varphi \circ \psi) = \Theta(\varphi)\Theta(\psi)$ kaikilla $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\hat{X}, p)$.*

Homomorfismi Θ on itseasiassa isomorfismi.

Korollaari 6.5.2. *Olkoon $\tilde{X}$ avaruuden X universaalipeiteavaruus, $p\colon \tilde{X} \to X$ peitekuvaus ja $x_0 \in X$. Tällöin kuvaus $\Theta\colon \mathcal{D}(\tilde{X}, p) \to \pi_1(X, x_0)$ on isomorfismi.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että Θ on injektio. Oletetaan, että $\Theta(\varphi) = 1$. Tällöin $[p \circ \gamma_\varphi] = 1$. Koska p on peitekuvaus, niin homotopian nosto-ominaisuuden perusteella, γ_φ on silmukka pisteessä $\hat{x}_0$. Näin ollen $\varphi(\hat{x}_0) = \gamma_\varphi(1) = \hat{x}_0$. Näin ollen $\varphi = \mathrm{id}$.

Osoitetaan nyt, että Θ on surjektio. Olkoon $\gamma\colon [0,1] \to X$ silmukka pisteessa x_0 ja $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to X$ silmukan γ nosto kuvauksessa p pisteestä $\hat{x}_0$. Koska $\pi_1(\tilde{X}, \hat{x}_0) = 1$, on olemassa kuvauksen p nosto $\varphi\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$, jolle pätee $\varphi(\hat{x}_0) = \gamma(1)$. Nyt $\Theta(\varphi) = [\gamma]$. □

6.6 Peiteavaruuksien luokittelu

Avaruuden X peiteavaruudet voidaan täysin luokitella perusryhmän $\pi_1(X, x_0)$ aliryhmien avulla, jos avaruudella X on universaalipeiteavaruus. Tätä varten tarvitaan kuitenkin tekijäavaruuden käsitettä (liite A.4).

Korollaarin 6.5.2 perusteella tiedätään, että perusryhmä $\pi_1(X, x_0)$ on isomorfinen peitekuvauksen $p\colon \tilde{X} \to X$ peiteryhmän $\mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ kanssa, jos $\tilde{X}$ on universaalipeiteavaruus. Triviaali huomio on, että erityisesti ryhmien $\mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ ja $\pi_1(X, x_0)$ aliryhmät vastaavat toisiaan. Tarkemmin tämän voi sanoa, että korollaarin 6.5.2 isomorfismi $\Theta\colon \mathcal{D}(\tilde{X}, p) \to \pi_1(X, x_0)$ indusoi bijektion näiden ryhmien aliryhmien joukkojen välille.

Olkoon nyt $H \subset \mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ aliryhmä. Nyt voidaan määritellä avaruuden $\tilde{X}$ relaatio $\sim_H$ kaavalla $x \sim_H y$, jos ja vain jos on olemassa $h \in H$, jolle pätee $h(x) = y$.

Tehtävä 120. *Relaatio $\sim_H$ on ekvivalenssirelaatio.*

Koska $\sim_H$ on ekvivalenssirelaatio, voidaan tarkastella tekijäavaruutta $\tilde{X}/\sim_H$, jota usein merkitään lyhyesti $\tilde{X}/H$. Olkoon vastaavaa tekijäkuvaus $x \mapsto [x]$ kuvaus $p_H \colon \tilde{X} \to \tilde{X}/H$.

Tekijätopologian universaaliominaisuuden nojalla (lause A.4.5) nämä tekijäavaruudet ovat itseasiassa hyvin luonnollisia.

Tehtävä 121. $\star$ *Olkoon $H \subset \mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ aliryhmä. Tällöin p_H on peitekuvaus.*

Tehtävä 122. *Olkoon $H \subset \mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ aliryhmä. Tällöin on olemassa peitekuvaus $\bar{p}_H \colon \tilde{X}/H \to X$, jolle pätee $p = \bar{p}_h \circ p$;*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, "p_H"'] \arrow[dd, "p"] \\ \tilde{X}/H \arrow[dr, dashed, "\bar{p}_H"'] & \\ & X \end{tikzcd}$$

Erityisesti voidaan poimia seuraavat havainnot.

Tehtävä 123. $\star$ *Avaruus $\tilde{X}/\{e\}$ on homeomorfinen universaalipeitteen $\tilde{X}$ kanssa. Lisäksi $\tilde{X}/\mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ on homeomorfinen avaruuden X kanssa.*

Ryhmän $\mathcal{D}(\tilde{X}, p)$ aliryhmät siis antavat avaruuden X peiteavaruuksia. Luonnollisena kysymyksenä nyt herääkin kuinka ryhmän $\mathcal{D}(\tilde{X}, p) \cong \pi_1(X, x_0)$ aliryhmät tarkalleen ottaen vastaavat peiteavaruuksia. Tätä varten tarkastellaan hieman kantanpisteiden siirtämistä ja aliryhmän konjugaattisivuluokkia.

Määritelmä 6.6.1. *Olkoon G ryhmä, $H \subset G$ aliryhmä ja $g \in G$. Aliryhmää gHg^{-1} kutsutaan aliryhmän H* konjugaatti sivuluokaksi. *Aliryhmä H on* normaali, *jos se on itsensä ainoa konjugaatti sivuluokka eli $gHg^{-1} = H$ kaikilla $g \in G$.*

Pieni algebrallinen välipala on palauttaa mieleen edellisen määritelmän asiat.

Tehtävä 124. *Olkoon G ryhmä ja H aliryhmä. Tällöin gHg^{-1} on aliryhmä. Jos $gHg^{-1} \subset H$ kaikilla $g \in G$, niin H on normaali.*

Kantapisteen vaihto vastaa homomorfismin p_* kuvan siirtymistä konjugaattisivuokkaan.

Tehtävä 125. *Olkoon $p \colon \hat{X} \to X$ peiteavaruus, $x_0 \in X$ ja $\hat{x}_0 \in \hat{X}$. Olkoon $\varphi \in \mathcal{D}(\hat{X}, p)$. Tällöin on olemassa sellainen $[\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, jolle pätee $p_*\pi_1(\hat{X}, \varphi(\hat{x}_0)) = [\beta]p_*\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0)[\beta]^{-1}$.*

Toisaalta aliryhmien konjugaattisivuluokat vastaavat isomorfisia avaruuksia.

Määritelmä 6.6.2. *Kantapisteellisen avaruuden (X, x_0) peiteavaruuksia $(\hat{X}, \hat{x}_0)$ ja $(\check{X}, \check{x}_0)$ sanotaan* isomorfisiksi, *jos on olemassa homeomorfismi $f \colon \hat{X} \to \check{X}$, jolle pätee $f(\hat{x}_0) = \check{x}_0$.*

Tehtävä 126. *Olkoon* $x_0 \in X$*,* $H \subset \pi_1(X, x_0)$ *aliryhmä,* $g \in \pi_1(X, x_0)$ *ja* $H' = gHg^{-1}$*. Tällöin on olemassa homeomorfismi* $f\colon \tilde{X}/\Theta^{-1}(H) \to \tilde{X}/\Theta^{-1}(H')$*.*

Peiteavaruuksien luokittelulause voidaan nyt ilmaista seuraavasti.[4]

Lause 6.6.3. *Olkoon* X *avaruus, jolla on universaalipeiteavaruus* $\tilde{X}$*, ja* $x_0 \in X$*. Olkoon* Peite(X) *kantapisteellisen avaruuden* (X, x_0) *kaikkien peiteavaruuksien isomorfialuokkien joukko. Tällöin on olemassa bijektio joukolta* Peite(X) *ryhmän* $\pi_1(X, x_0)$ *kaikkien aliryhmien konjugaatisivuluokkien joukolle.*

Todistetaan vielä lopuksi tehtävästä 109 vahva versio.

Lause 6.6.4. *Olkoon* X *avaruus, jolla on universaalipeite* $\tilde{X}$ *ja olkoon* $\hat{X}$ *avaruuden* X *peiteavaruus ja* $p\colon \hat{X} \to X$ *peitekuvaus. Tällöin jokainen jatkuva kuvaus* $f\colon \hat{X} \to \hat{X}$*, joka toteuttaa ehdon* $p \circ f = p$*, on homeomorfismi.*

Todistus. Koska f on kuvauksen p nosto kuvauksessa p, niin f on peitekuvaus. Olkoon $\hat{x} \in \hat{X}$. Riittää osoittaa, että $f_*\colon \pi_1(\hat{X}, \hat{x}) \to \pi_1(\hat{X}, f(\hat{x}))$ on surjektio.

Olkoon $\tilde{p}\colon \tilde{X} \to X$ universaalipeitekuvaus ja $\hat{p}\colon \tilde{X} \to \hat{X}$ peitekuvaus, joka toteuttaa ehdon $\tilde{p} = p \circ \hat{p}$. Olkoon $\hat{f} = f \circ \hat{p}\colon \tilde{X} \to \hat{X}$. Tällöin on olemassa kuvauksen $\hat{f}$ nosto $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ kuvauksessa $\hat{p}$.

Koska $\tilde{f}$ on peitekuvaus, on se tehtävän 109 perusteella homeomorfismi. Lisäksi

$$\tilde{p} \circ \tilde{f} = p \circ \hat{p} \circ \tilde{f} = p \circ f \circ \hat{p} = p \circ \hat{p} = \tilde{p}$$

eli $\tilde{f}$ on peitekuvauksen $\tilde{p}$ peitetransformaatio. Olkoon $\tilde{x} \in \hat{p}^{-1}(\hat{x})$ ja olkoon $\tilde{\sigma}\colon [0,1] \to \tilde{X}$ sellainen polku pisteestä $\tilde{x}$, että $\Theta(\tilde{f}) = [\tilde{p} \circ \tilde{\sigma}]$. Tällöin $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{\sigma}(1)$. Olkoon $\sigma = \hat{p} \circ \sigma$. Nyt $\hat{x} = \sigma(0)$ ja $f(\hat{x}) = f(\hat{p}(\tilde{x})) = \hat{p}(\tilde{f}(\tilde{x})) = \hat{p}(\tilde{\sigma}(1)) = \sigma(1)$.

Osoitetaan, että $\Psi_\sigma \pi_1(\hat{X}, \hat{x}) \subset f_* \pi_1(\hat{X}, \hat{x})$. Tällöin $f_* \pi_1(\hat{X}, \hat{x}) \supset \pi_1(\hat{X}, f(\hat{x}))$ eli f_* on surjektio.

Olkoon $\alpha\colon [0,1] \to \hat{X}$ silmukka pisteessä $\hat{x}$ ja $\tilde{\alpha}$ silmukan α pisteestä $\tilde{x}$ lähtevä nosto kuvauksessa $\hat{p}$. Olkoon myös $\tilde{\sigma}'$ polun σ pisteestä $\tilde{\alpha}(1)$ lähtevä nosto. Nyt polun $\gamma = \sigma^{-1}\alpha\sigma$ pisteestä $\tilde{f}(\tilde{x})$ lähtevä nosto $\tilde{\gamma}$ on $\tilde{\gamma} = \tilde{\sigma}^{-1}\tilde{\alpha}\tilde{\sigma}'$. Koska $\Theta(\tilde{f}) = [\tilde{p} \circ \tilde{\sigma}] = [\tilde{p} \circ \tilde{\sigma}']$, niin $\tilde{f}(\tilde{\alpha}(0)) = \tilde{\sigma}^{-1}(0)$ ja $\tilde{f}(\tilde{\alpha}(1)) = \tilde{\sigma}'(1)$. Näin ollen $\tilde{f} \circ \tilde{\alpha} \simeq \tilde{\gamma} \operatorname{rel}\{0,1\}$. Nyt

$$f \circ \alpha = f \circ \hat{p} \circ \tilde{\alpha} = \hat{p} \circ \tilde{f} \circ \tilde{\alpha} \simeq p \circ \tilde{\gamma} = \gamma \operatorname{rel}\{0,1\}.$$

Näin ollen $f_*[\alpha] = \Psi_\sigma[\alpha]$. □

[4] Todistus sisältyy edellisiin tehtäviin.

Luku 7

Universaalipeiteavaruus

Tässä luvussa konstruoimme annetulle avaruudelle X universaalipeitteen $\tilde{X}$. Universaalipeiteavaruus $\tilde{X}$ määritellään ensin joukkona. Koska jatkossa haluamme kuitenkin tarkastella myös jatkuvia kuvauksia universaalipeitteeltä, tullaan tälle joukolle $\tilde{X}$ antamaan topologia. Konstruktiosta johtuen on luonnollisempaa määritellä universaalipeitteen $\tilde{X}$ avoimet joukot kuin yrittää määritellä metriikkaa tässä joukossa. Huomaa, että joukon konstruktio $\tilde{X}$ tulee antamaan luonnollisen kuvauksen $\tilde{X} \to X$, jonka haluamme olevan peitekuvaus. Näin ollen avaruuden $\tilde{X}$ metrikkaa ei voi valita vapaasti. Joissakin tapauksissa avaruudella $\tilde{X}$ on luonnollinen metriikka, joka heijastelee avaruuden X metriikkaa. Tälläisen metriikan olemassa olo kuitenkin luonteeltaan pikemminkin geometrinen kuin topologinen kysymys.

Tässä luvussa tehtävän konstruktion tärkein ominaisuus on universaalipeitteen olemassaolon osoittaminen suurelle luokalle avaruuksia. Konstruktion yleisyyden vuoksi ei universaalipeiteestä kuitenkaan saada mitään lisätietoa. Koska universaalipeiteavaruuden ymmärtäminen (ja sen peitetransformaatioiden) vastaa avaruuden perusryhmän tuntemista, jääkin usein tehtäväksi löytää universaalipeite konkreettisesti muilla metodeilla ja löydetyn avaruuden avulla tutkia perusryhmää. Luvun lopussa selvitämmekin kahdesti punkteeratun tason perusryhmän tällä tavoin.

7.1 Yleinen konstruktio

Ensimmäinen havainto on, että on olemassa avaruuksia, joilla ei ole universaalipeiteavaruutta. Universaalipeiteavaruuden olemassaoloon nimittäin vaaditaan, että avaruus on semilokaalisti yhdestiyhtenäinen.

Määritelmä 7.1.1. *Avaruus X on* semilokaalisti yhdestiyhtenäinen*, jos jokaisella pisteellä $x \in X$ on olemassa sellainen ympäristö U, että inkluusion $\iota\colon U \to X$ indusoima kuvaus $\iota_*\colon \pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ on triviaali homomorfismi eli $g \mapsto e$ kaikilla $g \in \pi_1(U,x)$.*

Tämä ehto on välttämätön seuraavan havainnon nojalla.

Tehtävä 127. *Oletetaan, että avaruudella X on yhdestiyhtenäinen peiteavaruus $\tilde{X}$ ja että $p\colon \tilde{X} \to X$ on peitekuvaus. Olkoon $x \in X$ ja $U \subset X$ pisteen x peiteympäristö* *kuvauksessa p. Tällöin jokainen silmukka $\sigma\colon [0,1] \to U$ pisteessä x on kutistuva avaruudessa X. Eli inkluusion $\iota\colon U \to X$ indusoima kuvaus $\iota_*\colon \pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ on triviaali.*

Jotkin ihan tutut avaruudet eivät ole semilokaalisti yhdesti yhtenäisiä.

Tehtävä 128. *Hawaiilainen korvarengas eli avaruus*

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_+} S^1(\frac{1}{k}e_1, \frac{1}{k}) \subset \mathbb{R}^2$$

ei ole semilokaalisti yhdestiyhtenäinen.

7.1.1 Avaruuden $\tilde{X}$ konstruktio

Tässä konstruktiossa ja seuraavissa luvuissa siis oletetaan, että avaruus X on polkuyhtenäinen, lokaalisti polkuyhtenäinen ja semilokaalisti yhdesti yhtenäinen.

Olkoon $x_0 \in X$ ja $\mathcal{P}(X, x_0)$ avaruuden X pisteestä x_0 lähtevien polkujen joukko, eli

$$\mathcal{P}(X, x_0) = \{\gamma\colon [0,1] \to X : \gamma(0) = x_0\}.$$

Aseteaan joukossa $\mathcal{P}(X, x_0)$ ekvivalenssi relaatio $\sim$ ehdolla $\gamma \sim \sigma$, jos ja vain jos $\gamma(1) = \sigma(1)$ ja $\gamma \simeq \sigma \operatorname{rel}\{0,1\}$.

Tehtävä 129. *Relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio joukossa $\mathcal{P}(X, x_0)$.*

Merkintä 7.1.2. *Olkoon $\tilde{X}_{x_0}$ ekvivalenssiluokkien joukko*

$$\tilde{X}_{x_0} = \mathcal{P}(X, x_0)/\!\sim .$$

Polun $\gamma \in \mathcal{P}(X, x_0)$ ekvivalenssiluokkaa merkitään $\bar{\gamma}$.

Alaindeksillä x_0 ei jatkossa ole suurta merkitystä, joten se jätetään jatkossa pois merkintöjen helpottamikseksi eli merkitään $\tilde{X} = \tilde{X}_{x_0}$. Tulee kuitenkin muistaa, että konstruktio vaatii kantapisteen $x_0 \in X$ valinnan.

Joukko $\tilde{X}$ tulee olemaan kandidaattimme universaalipeitteeksi. Vastaavasti kandidaattimme peitekuvaukseksi $\tilde{X} \to X$ on kuvaus

$$p\colon \tilde{X} \to X, \quad \bar{\gamma} \mapsto \gamma(1).$$

Huomaa, että p on hyvin määritelty, koska samassa ekvivalenssiluokassa olevilla poluilla on sama päätepiste.

Joukon $\tilde{X}$ piste $\bar{\gamma}$ on siis polkujen homotopialuokka, missä luokkaan kuuluvat polut yhdistävät pisteen x_0 pisteeseen $\gamma(1)$. Huomaa kuitenkin, että kaikki polut, jotka yhdistävät pisteitä x_0 ja $\gamma(1)$ eivät välttämättä kuulu samaan luokkaan. Itseasiassa voidaan tehdä seuraava huomio.

Tehtävä 130. *Olkoot $\gamma, \sigma \in \mathcal{P}(X, x_0)$ sellaisia polkuja, että $\gamma(1) = \sigma(1)$. Tällöin $[\gamma\sigma^{-1}] \neq 1 \in \pi_1(X, x_0)$, jos ja vain jos $\bar{\gamma} \neq \bar{\sigma}$.*

Näin ollen joukossa $\tilde{X}$ on pisteeseen $x \in X$ päättyvien polkujen homotopialuokkia yhtä paljon kuin perusryhmässä $\pi_1(X, x_0)$ on alkiota. Tämä yhteys voidaan myös formalisoida havaitsemalla, että perusryhmä $\pi_1(X, x_0)$ toimii avaruuteen $\tilde{X} = \mathcal{P}(X, x_0)/\sim$.

Tehtävä 131. *Olkoon $\mathcal{S}(X, x_0)$ avaruuden X silmukoiden joukko pisteessä x_0 kuten luvussa 3.1. Tällöin kuvaus $\mathcal{S}(X, x_0) \times \mathcal{P}(X, x_0) \to \mathcal{P}(X, x_0)$, $(\alpha, \gamma) \mapsto \alpha \star \gamma$, missä*

$$\alpha \star \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \leq 1/2 \\ \gamma(2t-1), & t \geq 1/2 \end{cases}$$

on hyvin määritelty.

Tehtävä 132. *Kuvaus $A_{x_0} \colon \pi_1(X, x_0) \times \tilde{X} \to \tilde{X}$, $([\alpha], \bar{\gamma}) \mapsto \overline{\alpha \star \gamma}$, on hyvin määritelty.*

Tehtävä 133. *Kuvaukselle A_{x_0} pätee $A_{x_0}([\alpha][\beta], \bar{\gamma}) = A_{x_0}([\alpha], A_{x_0}([\beta], \bar{\gamma}))$ kaikilla $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ ja $\bar{\gamma} \in \tilde{X}$.*

Tehtävä 134. *Kuvaus A_{x_0} toteuttaa ehdon, että kuvaus $\bar{\gamma} \mapsto A_{x_0}([\alpha], \bar{\gamma})$, on bijektio $\tilde{X} \to \tilde{X}$ jokaisella $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$.*

7.1.2 Avaruuden $\tilde{X}$ topologia

Määrittelemme joukolle $\tilde{X}$ topologian konkreettisesti antamalla osajoukkojen kokoelman $\tau_{\tilde{X}}$, joka toteuttaa topologian ehdot.[1]

Olkoon τ_X avaruuden X topologia eli avointen joukkojen kokoelma. Merkitään jokaisella avoimella joukolla $U \subset X$ inkluusiokuvausta $U \to X$ symbolilla ι_U. Valitaan nyt topologian τ_X osakokoelma $\mathcal{U}$, joka sisältää täsmälleen ne alkiot $U \in \tau_X$, jotka ovat polkuyhtenäisiä ja joille homomorfismi $(\iota_U)_* \colon \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ on triviaali jollain $x \in X$. Koska $U \in \mathcal{U}$ on polkuyhtenäinen, pätee itseasiassa, että homoformismi $(\iota_U)_* \colon \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ on triviaali kaikilla $x \in U$.

Joukoilla $\mathcal{U}$ on tärkeä rooli avaruudessa X. Ne muodostavat avaruuden X topologian kannan. Tarvitsemme jatkossa kuitenkin ainoastaan seuraavan havainnon.

Tehtävä 135. *Olkoon $V \subset X$ epätyhjä avoin joukko ja $x \in V$. Tällöin on olemassa $U \in \mathcal{U}$, joka on pisteen x ympäristö ja joka sisältyy joukkoon V eli $U \subset V$.*[2]

Huomautus 7.1.3. *Edellisestä tehtävästä seuraa, että kokoelma $\mathcal{U}$ on avaruuden X topologian kanta eli jokainen avaruuden X avoin joukko on yhdiste kokoelman $\mathcal{U}$ alkioista.*

Siirrytään nyt valitsemaan osajoukkoja avaruudesta $\tilde{X}$. Nämä joukot tulevat muodostamaan avaruuden $\tilde{X}$ topologian kannan. Käytetään hyväksi jo määrittelemäämme kuvausta $p \colon \tilde{X} \to X$, joka liittää jokaiseen homotopialuokkaan $\bar{\gamma}$ polkujen yhteisen päätepisteen $\gamma(1)$.

[1] Katso liite A

[2] Tehtävässä tarvitaan molempia tietoja, että X on lokaalisti polkuyhtenäinen ja semilokaalisti yhdestiyhtenäinen.

Olkoon $U \in \mathcal{U}$ ja $\gamma \in \mathcal{P}(X, x_0)$ polku pisteestä x_0 pisteeseen $\gamma(1) \in U$. Merkitään

$$U_{\bar{\gamma}} = \{\overline{\gamma \star \sigma} \in \tilde{X} : \sigma \in \mathcal{P}(U, \gamma(1))\} \subset \tilde{X}.$$

Huomaa, että $\mathcal{P}(U, \gamma(1))$ on siis niiden polkujen $\sigma : [0,1] \to U$ joukko, joilla pätee $\sigma(0) = \gamma(1)$.

Joukko $U_{\bar{\gamma}}$ todellakin riippuu ainoastaan homotopialuokasta $\bar{\gamma}$ eikä edustajasta γ.

Tehtävä 136. *Olkoot $\gamma_k : [0,1] \to X$ polkuja $(k = 1, 2)$ pisteestä x_0 pisteeseen $x \in U$. Jos $\overline{\gamma_1} = \overline{\gamma_2}$, niin*

$$\{\overline{\gamma_1 \star \sigma} \in \tilde{X} : \sigma \in \mathcal{P}(U, \gamma(1))\} = \{\overline{\gamma_2 \star \sigma} \in \tilde{X} : \sigma \in \mathcal{P}(U, \gamma(1))\}.$$

Itseasiassa joukko $U_{\bar{\gamma}}$ ei myöskään riipu polun γ päätepisteestä seuraavassa mielessä.

Tehtävä 137. *Olkoon $U \in \mathcal{U}$ ja olkoot $\gamma : [0,1] \to X$ ja $\sigma : [0,1] \to X$ polkuja pisteestä x_0 joukoon U eli $\gamma(1) \in U$ ja $\sigma(1) \in U$. Tällöin $U_{\bar{\gamma}} = U_{\bar{\sigma}}$, jos $\bar{\sigma} \in U_{\bar{\gamma}}$.*

Merkintä 7.1.4. *Merkitään*

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{U_{\bar{\gamma}} : U \in \mathcal{U},\ \bar{\gamma} \in \tilde{X},\ p(\bar{\gamma}) \in U\}.$$

Kokoelma $\tilde{\mathcal{U}}$ luonnollinen seuraavassa mielessä.

Tehtävä 138. *Olkoot $U \in \mathcal{U}$ ja $\bar{\gamma} \in \tilde{X}$ homotopialuokka, jolle pätee $p(\bar{\gamma}) \in U$. Tällöin $p|U_{\bar{\gamma}} : U_{\bar{\gamma}} \to U$ on bijektio.*

Valitaan nyt joukolle $\tilde{X}$ topologia, joka on kokoelman $\tilde{U}$ generoima (vrt. lause A.2.3). Tätä varten tarkistetaan, että kokoelma $\tilde{\mathcal{U}}$ toteuttaa seuraavan ehdon.

Tehtävä 139. *Olkoot $U, V \in \mathcal{U}$ ja $\bar{\gamma}, \bar{\sigma} \in \tilde{X}$. Oletetaan, että joukoilla $U_{\bar{\gamma}_1}, V_{\bar{\gamma}_2} \in \tilde{\mathcal{U}}$ on epätyhjä leikkaus. Olkoon $\bar{\sigma} \in U_{\bar{\gamma}_1} \cap V_{\bar{\gamma}_2}$. Tällöin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, että $W_{\bar{\sigma}} \subset U_{\bar{\gamma}_1} \cap V_{\bar{\gamma}_2}$.*[3]

Lause 7.1.5. *Kokoelma*

$$\tau_{\tilde{X}} = \{\bigcup_{B \in \tilde{\mathcal{U}}'} B : \tilde{\mathcal{U}}' \subset \tilde{\mathcal{U}}\}$$

on joukon $\tilde{X}$ topologia, jonka kanta on $\tilde{\mathcal{U}}$.

Todistus. Lauseen A.2.3 perusteella riittää tarkastaa kaksi ehtoa. Ensimmäinen ehto on, että kokoelman $\tilde{\mathcal{U}}$ alkiot peittävät joukon $\tilde{X}$. Tämä on triviaalisti totta, koska jokainen piste $\bar{\gamma} \in \tilde{X}$ kuuluu joukkoon $U_{\bar{\gamma}} \in \tilde{\mathcal{U}}$.

Toinen vaadittava ehto on, että mikäli kaksi kokoelman $\tilde{\mathcal{U}}$ alkiota U_{γ_2} ja V_{γ_2} leikkaavat, niin jokainen piste $x \in U_{\gamma_1} \cap V_{\gamma_2}$ kuuluu johonkin joukkoon $B \in \tilde{\mathcal{U}}$, joka puolestaan sisältyy leikkaukseen $U_{\gamma_1} \cap V_{\gamma_2}$. Tehtävän 139 perusteella tämä ehto toteutuu. □

[3] Tässä tarvitaan tehtävää 135.

7.1.3 Avaruus $\tilde{X}$ on peiteavaruus

Osoitetaan nyt, että tällä topologialla $\tau_{\tilde{X}}$ on halutut ominaisuudet eli että $p\colon \tilde{X} \to X$ on peitekuvaus. Seuraavassa luvussa osoitetaan, että $\tilde{X}$ on yhdestiyhtenäinen.

Tehtävä 140. *Olkoon $V \subset X$ avoin joukko. Tällöin $p^{-1}V$ on avoin joukko avaruudessa $\tilde{X}$ eli $p^{-1}V \in \tau_{\tilde{X}}$. Näin ollen kuvaus $p\colon \tilde{X} \to X$ on jatkuva kuvaus, kun $\tilde{X}$ varustetaan topologialla $\tau_{\tilde{X}}$.*

Lause 7.1.6. *Kuvaus $p\colon \tilde{X} \to X$, $\bar{\gamma} \mapsto \gamma(1)$, on peitekuvaus.*

Todistus. Koska p on jatkuva surjektio, niin riittää osoittaa, että jokaisella pisteellä $x \in X$ on peiteympäristö U peitekuvauksessa p.

Olkoon $x \in X$. Olkoon $U \in \mathcal{U}$ jokin joukko, joka sisältää pisteen x. Tällöin tehtävien 136 ja 137 perusteella $p^{-1}U = \bigcup_{\bar{\gamma}} U_{\bar{\gamma}}$, missä yhdiste on yli kaikkien homotopialuokkien $\bar{\gamma} \in p^{-1}(x)$. Lisäksi joko $U_{\bar{\gamma}} = U_{\bar{\sigma}}$ (jos $\bar{\gamma} = \bar{\sigma}$) tai $U_{\bar{\gamma}} \cap U_{\bar{\sigma}} = \emptyset$ (jos $\bar{\gamma} \neq \bar{\sigma}$). Näin ollen riittää osoittaa, että kuvauksen p rajoittumat $p|U_{\bar{\gamma}}\colon U_{\bar{\gamma}} \to U$ ovat homeomorfismeja kaikilla $\bar{\gamma} \in p^{-1}(x)$.

Olkoon $\bar{\gamma} \in p^{-1}(x)$. Tehtävän 138 perusteella $p|U_{\bar{\gamma}}\colon U_{\bar{\gamma}} \to U$ on bijektio. Osoitetaan ensin, että $p|U_{\bar{\gamma}}$ on jatkuva. Määritelmän nojalla tulee siis osoittaa, että jokaisella avoimella joukolla $V \subset U$, joukko $(p|U_{\bar{\gamma}})^{-1}V$ on avoin joukon $U_{\bar{\gamma}}$ relatiivitopologiassa.

Olkoon $V \subset U$ avoin joukko. Tällöin $V_{\bar{\gamma}} \subset U_{\bar{\gamma}}$. Koska $(p|U_{\bar{\gamma}})^{-1}V = V_{\bar{\gamma}} \in \tau_{\tilde{X}}$, on kuvaus $p|U_{\bar{\gamma}}$ jatkuva lauseen A.4.3 nojalla.

Osoitetaan nyt, että kuvaus $(p|U_{\bar{\gamma}})^{-1}\colon U \to U_{\bar{\gamma}}$ on jatkuva. Osoitetaan, että jokaiselle $x \in U$ ja pisteen $(p|U_{\bar{\gamma}})^{-1}(x)$ ympäristölle $W \subset U_{\bar{\gamma}}$ voidaan valita pisteen x ympäristö $V \subset U$, jolle pätee $(p|U_{\bar{\gamma}})^{-1}V \subset W$. Lemman A.3.3 perusteella $(p|U_{\bar{\gamma}})^{-1}V$ on tällöin avoin.

Olkoon $x \in U$ ja $W \subset U_{\bar{\gamma}}$ pisteen $\bar{\sigma} = (p|U_{\bar{\gamma}})^{-1}(x)$ ympäristö. Tällöin topologian $\tau_{\tilde{X}}$ määritelmän nojalla on olemassa joukko $V_{\bar{\sigma}} \in \tilde{\mathcal{U}}$, joka sisältyy joukkoon W. Koska $(p|U_{\bar{\gamma}})V_{\bar{\sigma}} = pV_{\bar{\sigma}} = V$ ja V on pisteen x ympäristö, niin V on haluttu joukko. □

7.1.4 Avaruus $\tilde{X}$ on yhdestiyhtenäinen

Osoitetaan lopulta, että $\tilde{X}$ on avaruuden X universaalipeiteavaruus.

Lause 7.1.7. *Avaruus $\tilde{X}$ on polkuyhtenäinen, lokaalisti polkuyhtenäinen ja yhdestiyhtenäinen.*

Korollaari 7.1.8. *Avaruus $\tilde{X}$ on avaruuden X universaalipeiteavaruus.*

Todistus. Koska $p\colon \tilde{X} \to X$ on peitekuvaus ja $\tilde{X}$ on yhdestiyhtenäinen, on $\tilde{X}$ avaruuden X universaalipeiteavaruus. □

Aloitetaan lauseen 7.1.7 todistus havainnolla. Olkoon $x \in X$ ja $c_x\colon [0,1] \to X$ vakiopolku $t \mapsto x$. Huomaa, että tällöin $\overline{c_x} \in \tilde{X}$. Olkoon $\bar{\gamma} \in \tilde{X}$ ja olkoon jokaisella $s \in [0,1]$ $\gamma_s\colon [0,1] \to X$ polku $\gamma_s(t) = \gamma(st)$.

Tehtävä 141. *Tällöin* $p(\overline{\gamma_s}) = \gamma(s)$ *jokaisella* $s \in [0,1]$*. Lisäksi kuvaus* $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \tilde{X}$*,* $s \mapsto \bar{\gamma}_s$*, on jatkuva.*

Tehtävä 142. *Polku* $\tilde{\gamma}$ *on polun* γ *pisteestä* $\bar{c}_{\gamma(0)}$ *alkava nosto kuvauksessa* p*, joka päättyy pisteeseen* $\bar{\gamma}$*.*

Lauseen 7.1.7 todistus. Tehtävän 141 perusteella jokainen piste $\bar{\gamma} \in \tilde{X}$ voidaan yhdistää polulla pisteeseen $\bar{c}_{x_0}$. Näin ollen $\tilde{X}$ on polkuyhtenäinen.

Avaruus $\tilde{X}$ voidaan osoittaa lokaalisti polkuyhtenäiseksi seuraavasti. Olkoon $\bar{\gamma} \in \tilde{X}$ ja $U \in \mathcal{U}$ joukko, joka on pisteen $p(\bar{\gamma}) = \gamma(1)$ ympäristö. Koska U on polkuyhtenäinen ja $p|U_{\bar{\gamma}}\colon U_{\bar{\gamma}} \to U$ on homeomorfismi, niin myös $U_{\bar{\gamma}}$ on polkuyhtenäinen. Avaruus $\tilde{X}$ on siis lokaalisti polkuyhtenäinen.

On siis jäljellä osoittaa, että $\tilde{X}$ on yhdestiyhtenäinen. Koska $p_*\colon \pi_1(\tilde{X}, \overline{c_{x_0}}) \to \pi_1(X, x_0)$ on injektio, riitää osoittaa, että $p_*\pi_1(\tilde{X}, \overline{c_{x_0}}) = \{[c_{x_0}]\}$.

Olkoon $\gamma\colon [0,1] \to X$ sellainen silmukka pisteessä x_0, että $[\gamma] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \overline{c_{x_0}})$. Koska $[\gamma] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \overline{c_{x_0}})$, on olemassa silmukka $\sigma\colon [0,1] \to \tilde{X}$ pisteessä $\overline{c_{x_0}}$, jolle pätee $p_*[\sigma] = [\gamma]$.

Olkoon $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \tilde{X}$ polun γ pisteestä $\bar{c}_{x_0}$ alkava (yksikäsitteinen) nosto peitekuvauksessa p. Koska $p \circ \sigma$ ja γ ovat homotooppisia ja homotooppisten polkujen nostoilla on samat päätepisteet (tehtävä 96), niin $\tilde{\gamma}(1) = \sigma(1) = \overline{c_{x_0}}$. Erityisesti siis $\tilde{\gamma}$ on silmukka pisteessä $\overline{c_{x_0}}$. Koska $\tilde{\gamma}(1) = \bar{\gamma}$, niin tällöin $\bar{c}_{x_0} = \bar{\gamma}$ eli polku γ on homotooppinen vakiopolun c_{x_0} kanssa. Näin ollen $[\gamma] = [c_{x_0}]$. Tämä havainto päättää todistuksen. □

7.2 Projektiiviset avaruudet $\mathbb{R}P^n$ ja Möbiuksen nauha

Tarkastellaan luvun lopuksi vielä kahta esimerkkiä, joissa peiteavaruuksien avulla voi laskea avaruuden perusryhmän.

Projektiivinen avaruus $\mathbb{R}P^n$ voidaan määritellä useilla ekvivalentilla tavoilla. Yksi näistä on seuraava. Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ pallolla $\mathbb{S}^n$ kaavalla $x \sim y$, jos ja vain jos $y = x$ tai $y = -x$. Ekvivalenssirelaatio siis samaistaa antipodipisteet x ja $-x$ kaikilla $x \in \mathbb{S}^n$.

Merkintä 7.2.1. *Merkitään*

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n / \sim .$$

Avaruudella $\mathbb{R}P^n$ on mielenkiintoisia ominaisuuksia.

Tehtävä 143. *Avaruus* $\mathbb{R}P^1$ *on homeomorfinen ympyrän* $\mathbb{S}^1$ *kanssa.*[4]

Avaruudet $\mathbb{R}P^n$, kun $n > 1$, eivät sen sijaan ole homeomorfisia pallojen $\mathbb{S}^n$ kanssa. Tämän väitteen todistaa helposti perusryhmän avulla. Riittää osoittaa, että $\mathbb{R}P^n$ ei ole yhdestiyhtenäinen. Etsitään kuitenkin avaruuden $\mathbb{R}P^n$ perusryhmä.

Tehtävä 144. *Tekijäkuvaus* $p\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$*,* $x \mapsto [x]$*, on peitekuvaus kaikilla* $n \geq 1$*.*

[4] Todistus piirtämällä.

Tehtävä 145. *Kuvaus* $\sigma\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$*,* $x \mapsto -x$*, on peitekuvauksen* p *ainoa epätriviaali peitetransformaatio.*

Tehtävä 146. *Ryhmä* $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [e_1])$ *on isomorfinen kahden alkion ryhmän* $\mathbb{Z}_2$ *kanssa.*

Ryhmän $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [e_1])$ laskemisessa käytettiin kuin varkain tietoa, että $\mathbb{S}^n$ on avaruuden $\mathbb{R}P^n$ universaalipeite.

Tarkastellaan nyt Möbiuksen nauhaa. Myös tässä tilanteessa on olemassa hyvin samankaltainen peitekuvaus. Perusryhmä on kuitenkin eri.

Olkoon $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ja merkitään

$$M = \{2(f(t), 0) + s(\cos(t/2)f(t), \sin(t/2)) \in \mathbb{R}^3 \colon (t, s) \in [0, 2\pi] \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\}.$$

Tehtävä 147. *Piirrä* M*.*

Tehtävä 148. *On olemassa peitekuvaus* $p\colon \mathbb{S}^1 \times (-1, 1) \to M$*, jolle pätee* $\#p^{-1}(x) = 2$ *kaikilla* $x \in M$*.*[5]

Koska $\mathbb{S}^1 \times (-1, 1)$ ei ole yhdestiyhtenäinen, ei tästä voida kuitenkaan päätellä, että $\pi_1(M, e_1) \cong \mathbb{Z}_2$. On olemassa kaksi eri reittiä päätellä, että Möbiuksen nauhan perusryhmä on $\mathbb{Z}$.

Tehtävä 149. *On olemassa peitekuvaus* $\tilde{p}\colon \mathbb{R} \times (-1, 1) \to M$*, jonka peiteryhmä on* $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times (-1, 1), \tilde{p}) = \{(x, y) \mapsto (x + \pi k, (-1)^k y) \colon k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$*.*

Tehtävä 150. *Möbiuksen nauha* M *on homotopiaekvivalentti ympyrän* $\mathbb{S}^1$ *kanssa.*

7.3 Lisää tehtäviä

Möbiuksen nauha on tietysti tunnettu ominaisuudestaan, että se on suunnistumaton pinta. Emme tällä kurssilla lähde määrittelemään suunnistusta tai todistamaan tätä tulosta. Lukija voi kuitenkin huvittua seuraavista tuloksista.

Tehtävä 151. $\star$ *Joukko* $M \setminus (S^1(0, 2) \times \{0\})$ *on yhtenäinen.*

Tämän havainnon perusteella voi osoittaa seuraavan hauskan faktan.

Tehtävä 152. $\star$ *Möbiuksen nauha* M *on homotopiaekvivelentti, mutta ei homeomorfinen, sylinterin* $\mathbb{S}^1 \times (-1, 1)$ *kanssa.*

[5] Eli p on ns. kaksi-yhteen peitekuvaus.

Luku 8

Kahdesti punkteerattu taso ja vapaat ryhmät

Tiedämme jo, että $\mathbb{R}^2 \setminus \{\pm e_1\}$ on homotopia ekvivalentti avaruuden $R = S^1(e_1, 1) \cup S^1(-e_1, 1) \subset \mathbb{R}^2$ kanssa. Tämän vuoksi riittää löytää perusryhmä $\pi_1(R, 0)$.

Lause 8.0.1. *Perusryhmä $\pi_1(R, 0)$ on isomorfinen ryhmän $\mathbb{F}_2$, eli kahden alkion virittämän vapaan ryhmän, kanssa.*

Palautetaan ensin mieleen, mitä perusryhmästä $\Gamma = \pi_1(R, 0)$ tiedetään. Olkoot $\gamma_k \colon [0, 1] \to R$ silmukoita $\gamma_1(t) = e_1 - e^{i2\pi t}$ ja $\gamma_2(t) = -e_1 + e^{i2\pi t}$, missä $t \in [0, 1]$. Olkoot $a = [\gamma_1]$ ja $b = [\gamma_2]$ vastaavat perusryhmän $\pi_1(R, 0)$ alkiot. Ryhmä Γ tietysti sisältää kaikki homotopialuokat $w_1 \cdots w_k$, missä $w_i \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ ja $k \geq 0$. Lauseen 8.0.1 sanookin nyt, että kaikki ryhmän alkiot ovat tätä muotoa ja että ryhmä Γ vastaa tälläisten sanojen muodostamaa luonnollista ryhmää.

Avaruutta R kutsutaan joskus *kahden terälehden ruusuksi.* Lauseen 8.0.1 todistuksen idea on seuraava. Konstruoidaan ruusulle peiteavaruus $\tilde{R}$, joka on yhdesti yhtenäinen. Osoitetaan, että peitekuvaus $\tilde{R} \to R$ on sellainen, että sen peiteryhmä on isomorfinen ryhmän $\mathbb{F}_2$ kanssa. Nyt korollaari 6.5.2 antaa, että perusryhmä $\pi_1(R, 0)$ on isomorfininen ryhmän $\mathbb{F}_2$ kanssa. Aloitetaan ryhmästä $\mathbb{F}_2$ ja palataan sitten avaruuteen $\tilde{R}$.

8.1 Ryhmä $\mathbb{F}_2$

Olkoon S mielivaltainen joukko, jonka alkiota kutsutaan jatkossa *kirjaimiksi* ja joukkoa S *aakkostoksi.* Olkoon $k \geq 0$. Kuvausta $w \colon \{1, \ldots, k\} \to S$ sanotaan *sanaksi.* Lukua k kutsutaan sanan w *pituudeksi.* Mikäli $k = 0$, joukko $\{1, \ldots, k\}$ tulkitaan tyhjäksi joukoksi ja vastaavaa kuvausta sanotaan *tyhjäksi kuvaukseksi* $\emptyset \colon \emptyset \to S$. Sanan $w \colon \{1, \ldots, k\} \to S$ saamat arvot esitetään yleensä $w_j = w(j)$ ja koko sana esitetään muodossa $w = w(1)w(2) \cdots w(k) = w_1 \cdots w_k$. Merkitään kaikkia kirjaimista muodostettavien sanojen joukkoa symbolilla $\mathcal{W}(S)$.

Esimerkki 8.1.1. *Olkoon $S = \{a, b\}$. Kaikki joukon S kirjaimista muodostettavat pituudeltaan alle kolmen kirjaimen sanat ovat $\emptyset$, a, b, aa, ab, ba ja bb.*

Tehtävä 153. *Kirjaimista S muodostettavien sanojen joukko on $\bigcup_{k\geq 0} S^k$.*

Joukossa $\mathcal{W}(S)$ luonnollinen laskutoimitus on sanojen yhdistäminen. Olkoot $u = u_1 \cdots u_m$ ja $v = v_1 \cdots v_n$ sanoja joukossa $\mathcal{W}(S)$. Määritellään sana uv kaavalla

$$uv = u_1 \cdots u_m v_1 \cdots v_n. \tag{8.1}$$

Tehtävä 154. *Kaava 8.1 määrittelee laskutoimituksen $\mathcal{W}(S) \times \mathcal{W}(S) \to \mathcal{W}(S)$.*

Sanojen yhdistäminen antama laskutoimitus ei kuitenkaan tee joukosta $\mathcal{W}(S)$ ryhmää.

Tehtävä 155. *Sanojen yhdistäminen on liitännäinen laskutoimitus ja sillä on neutraalialkio. Muilla alkioilla kuin neutraalialkiolla ei ole käänteisalkioita.*

Ryhmärakennetta varten laajennetaan aakkostoa S. Olkoon S' mielivaltainen joukko, jolla ei ole yhteisiä alkiota joukon S kanssa ja joka on bijektiivinen joukon S kanssa.[1] Olkoon $\varphi\colon S \to S'$ bijektio. Tarkastemalla laajempaa sanojen $\mathcal{W}(S \cup S')$ joukkoa voidaan määritellä formaalisti sanoille $\mathcal{W}(S)$ käänteisalkiot käyttäen joukkoa $\mathcal{W}(S')$ seuraavasti.

Olkoot u ja v sanoja joukossa $\mathcal{W}(S \cup S')$. Sanotaan, että sana v on sanan u *reduktio*[2], jos on olemassa $s \in S$ ja sellaiset sanat $w_1, w_2 \in \mathcal{W}(S \cup S')$, että pätee joko

$$u = w_1 s \varphi(s) w_2 \quad \text{tai} \quad u = w_1 \varphi(s) s w_2$$

ja

$$v = w_1 w_2.$$

Sanaa u sanotaan *minimaaliseksi*, jos sillä ei ole (epätriviaaleja) reduktioita. Sanaa v sanotaan sanan u *redusoiduksi muodoksi*, jos on olemassa sanat $u = w_1, \ldots, w_k = v \in \mathcal{W}(S \cup S')$, missä w_{i+1} on sanan w_i reduktio jokaisella $i = 1, \ldots, k-1$.

Tehtävä 156. *Jokaisella sanalla $u \in \mathcal{W}(S \cup S')$ on yksikäsitteinen redusoitu muoto.*[3]

Sanoja u ja v sanotaan ekvivalenteiksi ja merkitään $u \simeq v$, jos niillä on sama redusoitu muoto.

Tehtävä 157. *Joukon $\mathcal{W}(S \cup S')$ relaatio $\simeq$ on ekvivalenssirelaatio.*

Merkintä 8.1.2. *Olkoon $w \in \mathcal{W}(S \cup S')$. Merkitään*

$$[w] = \{u \in \mathcal{W}(S \cup S')\colon u \simeq w\}.$$

Merkintä 8.1.3. *Merkitään*

$$\mathbb{F}(S) = \mathcal{W}(S \cup S')/{\sim} \ \big(= \{[w]\colon w \in \mathcal{W}(S \cup S')\}\big)$$

ja, mikäli S on äärellinen joukko,

$$\mathbb{F}_{\#S} = \mathbb{F}(S).$$

[1] Tälläisen joukon löytää vaikka asettamalla $S' = S \times \{1\}$.

[2] Eli *supistus*.

[3] Vinkki: Jos olisi sana w, joilla olisi useampi redusoitu muoto, niin tällöin olisi lyhin tälläinen sana w. Aina voi kuitenkin konstruoida lyhyemmän. Ristiriita.

Sanojen yhdistämisen laskutoimitus laskeutuu luonnollisesti tekijäavaruuteen $\mathbb{F}(S)$ ja tekee siitä ryhmän.

Tehtävä 158. *Laskutoimitus* $\cdot\colon \mathbb{F}(S)\times\mathbb{F}(S) \to \mathbb{F}(S)$, $([u],[v]) \mapsto [uv]$, *on hyvin määritelty.*

Tehtävä 159. *Kaikilla* $s \in S$ *pätee* $[s]^{-1} = [\varphi(s)]$ *ja* $[\varphi(s)]^{-1} = [s]$.[4]

Tehtävä 160. *Pari* $(\mathbb{F}(S), \cdot)$ *on ryhmä.*

Määritelmä 8.1.4. *Ryhmää* $\mathbb{F}(S) = (\mathbb{F}(S), \cdot)$ *kutsutaan* joukon S virittämäksi vapaaksi ryhmäksi.

Nimitys vapaa ryhmä tulee huomiosta, että ryhmän $\mathbb{F}(S)$ alkioiden välillä ei ole epätriviaaleja relaatioita. Emme tässä formalisoi tätä hieman epämääräistä ilmaisua. Osoitetaan kuitenkin, että vapailla ryhmillä on seuraava universaaliominaisuus, joka vastaa tuttua lineaarialgebran tulosta, että lineaarikuvaus määräytyy kannan arvoista.

Tehtävä 161. *Olkoon* S *joukko,* G *ryhmä ja* $\psi\colon S \to G$ *kuvaus. Tällöin on olemassa homomorfismi* $\bar\psi\colon \mathbb{F}(S) \to G$, *jolle pätee* $\bar\psi([s]) = \psi(s)$ *kaikilla* $s \in S$*;*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "s\mapsto[s]"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \mathbb{F}(S) \arrow[r, dashed, "\bar\psi"] & G \end{tikzcd}$$

Tällä universaaliominaisuudella on monia seurauksia. Yksi on, että ryhmä $\mathbb{F}(S)$ riippuu ainoastaan joukon S kardinaliteetista.

Tehtävä 162. *Olkoon* $f\colon S \to R$ *bijektio. Tällöin on olemassa ryhmäisomorfismi* $\bar f\colon \mathbb{F}(S) \to \mathbb{F}(R)$, *jolle pätee* $\bar f([s]) = f(s)$ *kaikilla* $s \in S$.

Olemme nyt konstruoineet yleiset vapaat ryhmät. Kahden alkion virittämä vapaa ryhmä $\mathbb{F}_2$ on näistä siis yksi erikoistapaus.

8.2 Cayley-graafi $\mathrm{Cay}(\mathbb{F}_2, S)$

Tässä lyhyessä luvussa esitellään hieman terminologiaa liityen ryhmien Cayley-graafeihin. Luvun tarkoituksena on pohjustaa ruusun R peiteavaruuden $\tilde R$ konstruktiota ja yhteyttä ryhmään $\mathbb{F}_2$.

Määritelmä 8.2.1. *Olkoon* V *joukko. Paria* $\Gamma = (V, E)$, *missä* E *on joukko* $E \subset \{\{x,y\}\colon x, y \in V\}$, *kutsutaan* graafiksi. *Joukkoa* V *kutsutaan graafin* Γ *kärkipisteiden (engl. 'vertices') joukoksi ja joukkoa* E *sivujen (engl. 'edges') joukoksi.*

[4] Yleensä merkitäänkin lyhyesti $s^{-1} = \varphi(s)$.

Olkoon $\Gamma = (V, E)$ graafi. Joukon V alkiota $x, y \in V$ sanotaan *naapureiksi graafissa* Γ, jos $\{x, y\} \in E$. Tällöin merkitään $x \sim y$. Graafi Γ on *yhtenäinen*, jos kaikilla $x, y \in V$ on olemassa sellaiset alkiot $x_1, \ldots, x_k \in V$, joille pätee $x = x_0 \sim x_1 \sim \cdots \sim x_k = y$.

Alkioiden $x, y \in \Gamma$ *etäisyys* $d_\Gamma(x, y)$ *graafissa* Γ on

$$d_\Gamma(x, y) = \min\{k \geq 0 \colon x = x_0 \sim x_2 \sim \cdots \sim x_k = y\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Tehtävä 163. *Etäisyysfunktio d_Γ on metriikka joukossa V, jos graafi Γ on yhtenäinen.*

Ryhmään G ja sen kiinnitettyyn virittäjäjoukkoon S voidaan liittää luonnollisella tavalla graafi.

Määritelmä 8.2.2. *Ryhmää G sanotaan osajoukon $S \subset G$* virittämäksi, *jos*

$$G = \langle S \rangle := \{s_1^{\alpha_1} \cdots s_k^{\alpha_k} \colon s_1, \ldots, s_k \in S,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \{\pm 1\},\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Tälläistä osajoukkoa S sanotaan ryhmän G virittäjäjoukoksi. *Ryhmää sanotaan* äärellisesti viritetyksi, *jos sillä on äärellinen virittäjäjoukko.*

Määritelmä 8.2.3. *Ryhmän G* Cayley-graafi virittäjäjoukon S suhteen $\mathrm{Cay}(G, S)$ *on graafi $(G, \{\{g, gs\} \colon g \in G,\ s \in S \cup S^{-1}\})$.*

Tehtävä 164. *Cayley-graafi* $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ *on aina yhtenäinen.*

Tehtävä 165. *Etäisyysfunktion d_Γ antama metriikka on ryhmän G sanametriikka d_S virittäjäjoukon S suhteen:*

$$d_S(g, h) = ||gh^{-1}||,$$

missä $g, h \in G$ ja

$$||g|| = \min\{k \geq 0 \colon g = s_1 \cdots s_k,\ s_i \in S\}.$$

Edellisen tehtävän perusteella Cayley-graafin $\mathrm{Cay}(G, S)$ suljettupallo $B_\Gamma(e, k)$ metriikassa d_Γ on joukko

$$B_\Gamma(e, k) = \{g \in G \colon g = s_1 \cdots s_\ell,\ s_i \in S,\ \ell \leq k\}.$$

Tehtävä 166. *Olkoon $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}(\{a, b\})$. Piirrä metriset pallot $B_\Gamma(e, k) \subset \mathbb{F}_2$ Cayley-graafiin $\Gamma = \mathrm{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\})$, kun $k = 0, 1, 2, 3$.*

8.3 Cayley graafista universaalipeitteeseen $\tilde{R}$

Avaruuden $\tilde{R}$ konstruktion voi esittää ilman ekskursiota Cayley-graafeihin. Vapaan ryhmän Cayley-graafi asettaa kuitenkin konstruktion oikeaan kontekstiin, kuten (toivottavasti) seuraavasta esityksestä huomataan.

Aloitetaan havainnolla, että tehtävän 166 perusteella vapaan ryhmän $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}(\{a, b\})$ Cayley-graafi $\mathrm{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\})$ on "puu". Tämä "puu" koostuu numeroituvasta määrästä kärkipisteitä ja sivuja. Tämä kombinatoorinen objekti vaihdetaankin nyt vastaavaan topologiseen objektiin, jota joskus kutsutaan simplisiaaliseksi puuksi. Konstruoimme nyt tämän topologisen avaruuden tässä erikoistapauksessa.[5] Merkitään $\Gamma == (\mathbb{F}_2, E) = \mathrm{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\})$.

Olkoon $T = E \times [0,1]$. Asetamme joukkoon T topologian seuraavasti. Sanotaan, että $K \subset T$ on suljettu, jos $K \cap \{e\} \times [0,1]$ on suljettu jokaisella $e \in E$. Määritellään nyt $\tau_T = \{T \setminus K : K \text{ on suljettu.}\}$.

Tehtävä 167. *Kokoelma τ_T on joukon T topologia.*

Määritellään nyt $\tilde{R}$ avaruuden (T, τ_T) tekijäavaruutena. Ennen tarvittavan ekvivalenssirelaation määrittelemistä tehdään kuitenkin ensin pieni havainto.

Tehtävä 168. *Mikäli $e = \{g, h\} \in E$, niin tällöin joko $||g|| < ||h||$ tai $||g|| > ||h||$.*[6]

Tämän havainnon perusteella on olemassa hyvin määritellyt kuvaukset $e_+ : E \to \mathbb{F}_2$ ja $e_- : E \to \mathbb{F}_2$, joille pätee $e = \{e_-(e), e_+(e)\}$ ja $||e_-(e)|| < ||e_+(e)||$ kaikilla $e \in E$.

Tehtävä 169. *Kaikilla $e \in E$ pätee joko $e_+(e) = e_-(e)[a]$ tai $e_+(e) = e_-(e)[b]$.*

Olkoon nyt $\sim_\Gamma$ sellainen ekvivalenssirelaatio, että $(e, t) \sim_\Gamma (e', t')$, jos ja vain jos

$$\begin{cases} e_+(e) = e_-(e') \\ t = 1 \\ t' = 0 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} e_+(e') = e_-(e) \\ t = 0 \\ t' = 1 \end{cases}$$

Merkintä 8.3.1. *Olkoon $\tilde{R}$ joukko*

$$\tilde{R} = T/{\sim_\Gamma} .$$

Topologinen avaruus $\tilde{R}$ on tekijäavaruus $(\tilde{R}, \tau_{T/\sim_\Gamma})$. Kanonista tekijäkuvausta $(e,t) \mapsto [(e,t)]$ merkitään $p_\Gamma : T \to \tilde{R}$.

Tehtävä 170. *Piirrä avaruus $\tilde{R}$.*

Vaikka avaruus $\tilde{R}$ vaikuttaakin erikoiselta on se tässä yhteydessä luonnollinen.

Tehtävä 171. *Määritellään jokaisella $g \in \mathbb{F}_2$ kuvaus $\varphi_g : T \to T$ kaavalla $(\{h, h'\}, t) \mapsto (\{gh, gh'\}, t)$. Tällöin φ_g on hyvin määritelty ja jatkuva jokaisella $g \in \mathbb{F}_2$. Lisäksi $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ ja $\varphi_{gg'} = \varphi_g \circ \varphi_{g'}$ kaikilla $g, g' \in \mathbb{F}_2$.*

Tehtävä 172. *Jokaisella $g \in \mathbb{F}_2$ on olemassa jatkuva kuvaus $\bar{\varphi}_g : \tilde{R} \to \tilde{R}$, joka toteuttaa ehdon $p_\Gamma \circ \varphi_g = \bar{\varphi}_g \circ p_\Gamma$;*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, "p_\Gamma"'] & T \arrow[d, "p_\Gamma"] \\ \tilde{R} \arrow[r, dashed, "\bar{\varphi}_g"'] & \tilde{R} \end{tikzcd}$$

Tehtävän 171 perusteella ryhmä $\mathbb{F}_2$ toimii avaruudessa $\tilde{R}$.

[5] Toinen vaihtoehto olisi konstruoida suoraan osajoukko $\tilde{R} \subset \mathbb{R}^2$, jolla on samat ominaisuudet. Tälläinen konstruktio ei kuitenkaan ole havainnollisempi.

[6] Tämä havainto pätee ainostaan vapaille ryhmille!

Huomautus 8.3.2. *Tehtävän 172 ilmiötä kutsutaan kuvauksen (ja toiminnan) laskeutumiseksi tekijäavaruuteen.*

Osoitetaan nyt vihdoinkin, että $\tilde{R}$ on avaruuden R peiteavaruus.

Tehtävä 173. *Kaavalla*

$$[(e,t)] \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{jos } e_+(e) = e_-(e)[a] \\ \gamma_2(t), & \text{jos } e_+(e) = e_-(e)[b] \end{cases}$$

määritelty kuvaus $p_R\colon \tilde{R} \to R$ *on hyvin määritelty.*

Tehtävä 174. *Piirrä kuvaus* p_R.

Tehtävä 175. *Kuvaus* p_R *on peitekuvaus.*

Osoitetaan nyt kuvauksen p_R peiteryhmä on $\{\bar{\varphi}_g\colon g \in \mathbb{F}_2\} \cong \mathbb{F}_2$.

Tehtävä 176. *Olkoon* $z \in R$ *ja* $x, y \in p_R^{-1}(z)$. *Tällöin on olemassa sellainen* $g \in \mathbb{F}_2$, *että* $\bar{\varphi}_g(x) = y$. *Toisaalta* $p_R \circ \bar{\varphi}_g = p_R$ *kaikilla* $g \in \mathbb{F}_2$.

Viimeisenä vaiheena on jäljellä osoittaa, että avaruus $\tilde{R}$ on yhdesti yhtenäinen. Osoitetaan tämä todistamalla, että avaruus $\tilde{R}$ on itseasiassa kutistuva.

Olkoon $E_k = \{e \in E\colon ||e_+(e)|| \leq k\}$ ja $T_k = E_k \times [0,1]$ jokaisella $k \geq 0$. Merkitään myös $B_k = p_\Gamma(T_k)$ jokaisella $k \geq 0$.

Tehtävä 177. *Piirrä* B_k, *kun* $k = 0, 1, 2, 3$.

Tehtävä 178. *On olemassa homotopia* $H_2\colon B_2 \times [0,1] \to B_2$, *jolle pätee* $H_2(y,0) = y$ *ja* $H_2(y,1) \in B_1$ *kaikilla* $y \in B_2$ *ja* $H_2(x,s) = x$ *kaikilla* $x \in B_1$ *ja* $s \in [0,1]$.[7]

Tehtävä 179. *Jos jokaisella* $k \geq 1$ *on olemassa homotopia* $H_k\colon B_k \times [0,1] \to B_k$, *jolle pätee* $H_k(y,0) = y$ *ja* $H_k(y,1) \in B_k$ *kaikilla* $y \in B_k$ *ja* $H_k(x,s) = x$ *kaikilla* $x \in B_{k-1}$ *ja* $s \in [0,1]$, *niin tällöin on olemassa homotopia* $H\colon \tilde{R} \times [0,1] \to \tilde{R}$, *jolle pätee* $H(y,0) = y$ *ja* $H(y,1) = [(e_{\mathbb{F}_2}, 0)]$ *kaikilla* $y \in \tilde{R}$.

Tehtävä 180. *Avaruus* $\tilde{R}$ *on kutistuva.*

Tämä tehtävä päätti lauseen 8.0.1 (pitkän ja polveilevan) todistuksen.

Lauseen 8.0.1 todistus. Tehtävän 175 perusteella $\tilde{R}$ on avaruuden R peiteavaruus ja $p_R\colon \tilde{R} \to R$ peitekuvaus. Tehtävän 176 perusteella peitekuvauksen p_R peiteryhmä $\mathcal{D}(p_R)$ on isomorfinen vapaan ryhmän $\mathbb{F}_2$ kanssa. Koska $\tilde{R}$ on kutistuva tehtävän 180 perusteella, on korollaarin 6.5.2 nojalla $\pi_1(R, 0)$ isomorfinen peiteryhmän $\mathcal{D}(p_R)$ kanssa ja siten isomorfinen vapaan ryhmän $\mathbb{F}_2$ kanssa. Lause on todistettu. □

[7] Vihje: Piirrä kuva.

Liite A

Yleiset topologiset avaruudet

Tässä luvussa esitellään hyvin lyhyesti käsitteitä ja tuloksia, joita tarvitaan universaalipeiteen konstruktiossa ja peiteavaruuksien luokittelussa. Laajemmin asiaa käsittelee esimerkiksi J. Väisälän “Topologia II”.

Joukon topologia määritellään kertomalla, mitä osajoukkoja kutsutaan avoimiksi joukoiksi. Formaali määritelmä on seuraava.

Määritelmä A.0.3. *Olkoon X joukko. Potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ osajoukko τ on joukon X* topologia, *jos seuraavat ehdot toteutuvat:*

(a) $\emptyset \in \tau$ ja $X \in \tau$,

(b) τ sisältää jäsentensä äärelliset leikkaukset[1]*, ja*

(c) τ sisältää jäsentensä (mielivaltaiset) yhdisteet[2]*.*

Paria (X, τ) kutsutaan topologiseksi avaruudeksi *ja kokoelman τ alkioita kutsutaan avaruuden (X, τ)* avoimiksi joukoiksi.

Suljetut joukot ovat avointen joukkojen komplementteja.

Määritelmä A.0.4. *Topologisen avaruuden (X, τ) osajoukko $A \subset X$ on* suljettu, *jos $X \setminus A$ on avoin eli $X \setminus A \in \tau$.*

A.1 Esimerkkejä

Esimerkki A.1.1. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Määritellään kokoelma $\tau_{(X,d)} \subset \mathcal{P}(X)$ siten, että joukko $U \subset X$ kuuluu kokoelmaan $\tau_{(X,d)}$, jos jokaisella $x \in U$ on olemassa sellainen $r > 0$, että $B_d(x, r) \subset U$. Tällöin $\tau_{(X,d)}$ on topologia.*

Esimerkki A.1.2. *Olkoon X joukko. Tällöin $\tau = \{\emptyset, X\}$ on topologia.*

[1] Eli kaikilla $k \geq 1$ ja $\Omega_1, \ldots, \Omega_k \in \tau$ pätee $\Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_k \in \tau$.

[2] Eli $\bigcup_{\Omega \in \tau'} \Omega \in \tau$ jokaisella osajoukolla $\tau' \subset \tau$.

Esimerkki A.1.3. *Olkoon* $\pi\colon X \to Y$ *kuvaus ja* (X, τ) *topologinen avaruus. Määritellään* $\tau_\pi = \{U \subset Y : \pi^{-1}U \in \tau\}$. *Tällöin* (Y, τ_π) *on topologinen avaruus.*

Määritelmä A.1.4 (Relatiivitopologia)**.** *Olkoon* (X, τ) *topologinen avaruus ja* $A \subset X$. *Joukon* A *relatiivitopologia on kokoelma*

$$\tau|A = \{U \cap A \subset A \colon U \in \tau\}.$$

Esimerkki A.1.5. *Metrisen avaruuden* (X, d) *osajoukon* A *relatiivitopologia on metriikan* d *rajoittuman* d_A *määräämä topologia joukkoon* A *(eli metrisen avaruuden* (A, d_A) *topologia).*

A.2 Topologian kanta

Määritelmä A.2.1. *Topologian* τ *osajoukko* $\mathcal{B}$ *on* kanta, *jos jokainen joukko* $U \in \tau$ *on yhdiste kokoelman* $\mathcal{B}$ *joukoista, jotka sisältyvät joukkoon* U, *eli*

$$U = \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \subset U}} B.$$

Esimerkki A.2.2. *Olkoon* (X, d) *metrinen avaruus. Tällöin* $\mathcal{B} = \{B_d(x, r) \subset X : x \in X,\ r \geq 0\}$ *on topologian* $\tau_{(X,d)}$ *kanta.*

Lause A.2.3 (Kannan generoima topologia)**.** *Olkoon* $\mathcal{B}$ *kokoelma joukon* X *osajoukkoja, joka toteuttaa seuraavat ehdot:*

(1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ *ja*

(2) kaikilla $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *ja jokaisella* $x \in B_1 \cap B_2$ *on olemassa joukko* $B \in \mathcal{B}$, *joka toteuttaa ehdot* $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Tällöin kokoelma

$$\tau = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \colon \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$$

on avaruuden X *topologia ja* $\mathcal{B}$ *on tämän topologian kanta.*

Todistus. Selvästi $X \in \tau$, koska voidaan valita $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. Toisaalta myös $\emptyset \in \tau$, sillä voidaan valita $\mathcal{B}' = \emptyset$. Näin ollen ehto (a) on voimassa.

Osoitetaan nyt vaatimus (b). Olkoot $U_1, \ldots, U_k \in \tau$. Tulee osoittaa, että on olemassa osajoukko $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, jolle pätee $U := U_1 \cap \cdots \cap U_k = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$.

Kokoelman τ määritelmän perusteella, jokaisella $j = 1, \ldots, k$ voidaan valita sellainen osajoukko $\mathcal{B}_j' \subset \mathcal{B}$, että $U_j = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_j'} B$. Valitaan nyt jokaisella $x \in U$ joukko $B_x \in \mathcal{B}$ seuraavasti. Valitaan jokaisella $j = 1, \ldots, k$ joukko $B_j \in \mathcal{B}_j$, joka sisältää pisteen x. Merkitään induktiota varten $B_1' = B_1$. Ehdon (2) perusteella voidaan nyt induktiivisesti valita joukot $B_j' \in \mathcal{B}$ $(j = 2, \ldots, k)$, jotka toteuttavat ehdot $x \in B_j' \subset B_{j-1}' \cap B_j$. Näin saatu joukko B'_k toteuttaa ehdot $x \in x \in B'_k \subset U_j$ jokaisella $j = 1, \dots, k$. Valitaan nyt $B_x = B'_k$.

Edellisen konstruktion perusteella

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} B_x \subset U.$$

Voimme siis valita $\mathcal{B}' = \{B_x : x \in U\}$.

Osoitetaan vielä, että τ toteuttaa vaatimuksen (c). Olkoon $\tau' \subset \tau$ osajoukko. Kokoelman τ määritelmän nojalla, jokainen $U \in \tau'$ on yhdiste kokoelman $\mathcal{B}$ joukoista. Näin ollen joukko $\bigcup \tau' = \bigcup_{U \in \tau'} U$ on yhdiste kokoelman $\mathcal{B}$ eräiden osakokoelmien alkiosta. Näin ollen yhdiste $\bigcup \tau'$ kuuluu kokoelmaan τ eli ehto (c) toteutuu. (Lukija voi haluta kirjoittaa nämä osakokoelmat tarkemmin auki.) □

A.3 Jatkuvat kuvaukset

Kuvaus $f\colon X \to Y$ topologisten avaruuksien välillä on jatkuva, jos jokaisen avaruuden Y avoimen joukon alkukuva on avoin avaruudessa X. Formaalimmin saman voi sanoa seuraavasti.

Määritelmä A.3.1. *Kuvaus $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ topologisten avaruuksien välillä on* jatkuva*, jos $f^{-1}U \in \tau_X$ jokaisella $U \in \tau_Y$.*

Jatkuvuuden voi myös karakterisoida suljettujen joukkojen avulla.

Lemma A.3.2. *Kuvaus $f\colon X \to Y$ on jatkuva, jos jokaisen avaruuden Y suljetun joukon alkukuva on avoin avaruudessa X.*

Todistus. Olkoon $U \subset Y$ avoin. Tällöin $X \setminus U$ on suljettu avaruudessa Y. Oletuksen nojalla, $f^{-1}(Y \setminus U)$ on suljettu. Näin ollen joukko

$$X \setminus f^{-1}U = f^{-1}(Y \setminus U)$$

on suljettu. Joukko $f^{-1}U$ on siis avoin. Kuvaus f on näin ollen jatkuva. □

Lemma A.3.3. *Kuvaus $f\colon X \to Y$ on jatkuva, jos jokaisella $x \in X$ ja pisteen $f(x)$ ympäristöllä $V \subset Y$ on olemassa pisteen x ympäristö $U \subset X$, jolle pätee $fU \subset V$.*

Todistus. Olkoon $W \subset Y$ avoin joukko. Olkoon $x \in f^{-1}W$. Oletuksen perusteella on olemassa avoin joukko $U_x \subset X$ joka sisältää pisteen x ja jolle pätee $fU_x \subset W$. Näin ollen $U_x \subset f^{-1}W$. Tällöin

$$f^{-1}W = \bigcup_{x \in f^{-1}W} \{x\} \subset \bigcup_{x \in f^{-1}W} U_x \subset f^{-1}W.$$

Näin ollen $f^{-1}W = \bigcup_{x \in f^{-1}W} U_x$. Koska joukot U_x ovat avoimia, niin $\bigcup_{x \in f^{-1}W} U_x$ on avoin. Kuvaus f on siis jatkuva. □

A.4 Tekijätopologia

Luvuissa 7 ja 8 tarvitaan tekijätopologian käsitettä. Olkoon X joukko, $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukossa X ja $p\colon X \to X/\!\sim$ tekijäkuvaus $x \mapsto [x]$, missä $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$.

Lemma A.4.1. *Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Tällöin*

$$\tau_{X/\sim} = \{V \subset \tilde{X} : p^{-1}V \in \tau\}$$

on joukon $X/\!\sim$ topologia.

Todistus. Selvästi $X/\!\sim$ ja $\emptyset$ kuuluvat kokoelmaan $\tau_{X/\sim}$. Olkoot $V_1, \dots V_k \in \tau_{X/\sim}$. Koska

$$p^{-1}(V_1 \cap \cdots \cap V_k) = p^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap p^{-1}(V_k) \in \tau,$$

niin $V_1 \cap \cdots \cap V_k \in \tau_{X/\sim}$.

Olkoon $\tau' \subset \tau_{X/\sim}$ osajoukko. Tällöin

$$p^{-1}\left(\bigcup_{V \in \tau'} V\right) = \bigcup_{V \in \tau'} p^{-1}V \in \tau.$$

Näin ollen $\bigcup_{V \in \tau'} V \in \tau_{X/\sim}$. Kokoelma $\tau_{X/\sim}$ on siis topologia. $\square$

Määritelmä A.4.2. *Joukon $X/\!\sim$ topologiaa $\tau_{X/\sim}$ sanotaan* tekijätopologiaksi *ja avaruutta $(X/\!\sim, \tau_{X/\sim})$ avaruuden X* tekijäavaruudeksi.

Lause A.4.3. *Jos $A \subset X$ on topologisen avaruuden (X, τ) avoin joukko ja $f\colon X \to Y$ on kuvaus, niin rajoittuma $f|A\colon A \to Y$ on jatkuva relatiivitopologiassa $\tau|A$, jos $(f|A)^{-1}V \in \tau$ jokaisella avoimella joukolla $V \in Y$.*

Todistus. Olkoon $V \subset Y$ avoin. Tulee osoittaa, että $(f|A)^{-1}V \in \tau|A$. Koska $(f|A)^{-1}V$ ja $A \subset X$ ovat avoimia avaruudessa X, niin $(f|A)^{-1}V = \big((f|A)^{-1}V\big) \cap A$ on avoin avaruudessa X. Näin ollen $(f|A)^{-1}V \in \tau|A$ relatiivitopologian määritelmän nojalla. $\square$

Lause A.4.4. *Olkoon $(X/\tau, \tau_{X/\sim})$ avaruuden (X, τ) tekijäavaruus. Tällöin kuvaus $p\colon X \to X/\!\sim$ on jatkuva.*

Todistus. Jatkuvan kuvauksen määritelmän nojalla riittää osoittaa, että $p^{-1}U$ on avoin joukko jokaisella avoimella joukolla $U \subset X/\!\sim$. Tämä seuraa suoraan topologian $\tau_{X/\sim}$ määritelmästä. $\square$

Tekijätopologian merkitys kiteytyy seuraavaan huomioon.

Lause A.4.5. *Olkoon $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus ja $\sim_f$ ekvivalenssirelaatio avaruudessa X, joka on kuvauksen f indusoima eli $x \sim_f y$, jos ja vain jos $f(x) = f(y)$. Tällöin on* *olemassa kuvaus* $\bar{f}\colon X/{\sim_f} \to Y$, *joka toteuttaa ehdon* $f = \bar{f} \circ p_f$, *missä* $p_f\colon X \to X/{\sim_f}$ *on kanoninen projektio* $x \mapsto [x]$*;*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_f"'] & & Y \\
& X/{\sim_f} \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Jos lisäksi kuvaus f *on avoin (tai suljettu) surjektio, niin* $\bar{f}$ *on homeomorfismi.*

Todistus. Määritellään kuvaus $\bar{f}$ kaavalla $\bar{f}([x]) = f(x)$. Kuvaus on hyvin määritelty, koska kaikilla $y \in [x]$ pätee $f(y) = f(x)$. Osoitetaan, että $\bar{f}$ on jatkuva. Olkoon $U \subset Y$ avoin. Koska f on jatkuva, niin $f^{-1}U$ on avoin. Näin ollen $p_f^{-1}(\bar{f}^{-1}U) = f^{-1}U$ on avoin. Tekijätopologian määritelmän perusteella tällöin $\bar{f}^{-1}U$ on avoin. Kuvaus $\bar{f}$ on siis jatkuva.

Oletetaan nyt, että f on avoin surjektio. Tällöin $\bar{f}$ on bijektio. Osoitetaan, että $\bar{f}^{-1}$ on jatkuva. Olkoon $U \subset X/{\sim_f}$ avoin joukko. Tällöin $\bar{f}U = f(p_f^{-1}U)$ on avoin. Näin ollen $\left(\bar{f}^{-1}\right)^{-1} U$ on avoin. Kuvaus $\bar{f}^{-1}$ on siis jatkuva. Vastaavasti osoitetaan, että $\bar{f}^{-1}$, jos f on suljettu kuvaus. Kuvaus $\bar{f}$ on siis homeomorfismi. $\square$

Liite B

Kompleksitaso

Määritelmä B.0.6. *Kompleksitaso* $\mathbb{C}$ *on* kunta $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, *missä* $\cdot$ *on laskutoimitus*

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' - x'y).$$

Kunnan $\mathbb{C}$ *alkioita kutsutaan* kompleksiluvuiksi.

Laskutoimitus $+$ on tavallinen tason $\mathbb{R}^2$ yhteenlasku. Kunta $\mathbb{C}$ on kommutatiivinen eli vaihdannainen, eli $zw = wz$ kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$. Reaalilukujen kunta $\mathbb{R}$ yleensä samaistetaan kompleksilukujen alikunnan $\mathbb{R} \times \{0\}$ kanssa.

Lukua $i = (0, 1)$ kutsutaan *kompleksiyksiköksi* ja kompleksilukua $z = (x, y)$ merkitään yleensä $z = x + iy$. Huomaa, että tässä tehdään yhteydessä samaistetaan $1 = (1, 0)$. Tällöin

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + yi = x + iy.$$

Kompleksiluvun $z = x + iy \in \mathbb{C}$ normi $|z|$ on vektorin (x, y) eukliidinen normi $(x^2 + y^2)^{1/2}$. Kompleksiluvut $\mathbb{C}$ varustetaan tämän normin antamalla metriikalla (ja siten eukliidisella topologialla). Metrisesti (ja topologisesti) $\mathbb{C}$ on siis taso $\mathbb{R}^2$.

Luvun z *liittoluku* on $\bar{z} = x - iy$ eli $\bar{z} = (x, -y)$. Luvun ja sen liittoluvun tulo on luvun normin neliö eli $z\bar{z} = |z|^2$. Luvun $z = x + iy \neq 0$ käänteisalkio on

$$z^{-1} = z^{-1}\bar{z}^{-1}\bar{z} = (\bar{z}z)^{-1}\bar{z} = (x^2 + y^2)^{-1}(x - iy) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Olkoon $z = (x, y) \neq 0$. Tasogeometrian perustella on olemassa tasan yksi $\theta \in [0, frm{-}epi)$, joka toteuttaa ehdon

$$z = (x, y) = |z|(\cos\theta, \sin\theta) = |z| (\cos\theta + i \sin\theta).$$

Kulmaa θ sanotaan luvun z *vaihekulmaksi* ja kaavaa $z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$ luvun z *napakoordinaatti esitykseksi.*

Trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavojen perusteella

$$z^k = |z|^k (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta))$$

kaikilla $z \neq 0$ ja $k \in \mathbb{N}$.

Kompleksinen eksponenttifunktio $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ määritellään kaavalla

$$\exp(z) = e^x \left(\cos y + i \sin y\right).$$

Tälle funktiolle pätee

$$\exp(z + w) = (\exp z)(\exp w)$$

kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$. Koska $e^x = \exp x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin yleensä merkitään $e^z = \exp z$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Huomaa erityisesti, että $e^{iy} \in \mathbb{S}^1$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$.