Dalla topologia formale all'analisi

Sara Negri

Febbraio 1996

Indice

Introduzione

In matematica, fino a tempi recenti, la maggior parte dell'attenzione è stata dedicata allo studio di strutture astratte. Il calcolo e le costruzioni sono state di importanza assai minore. I tentativi di fondare la matematica sul concetto di costruzione sono stati accolti con diffidenza dalla maggior parte dei matematici.

Negli ultimi due decenni l'approccio computazionale si è riproposto ravvivato principalmente dall'introduzione del computer elettronico ([ML1], [D]). È quindi emersa l'esigenza di una visione sistematica del campo di applicabilità del computer in matematica, in contrasto al suo ruolo pratico meramente calcolatorio. Abbiamo oggi numerose teorie fondazionali per la matematica che ci forniscono tale visione sistematica. Inoltre, alcuni di tali teorie si sono dimostrate essere direttaamente applicabili come linguaggi di programmazione. Fra questi, i linguaggi di maggior successo sono quelli basati sulle teorie costruttive dei tipi (ad es. Alf, Coq, LEGO). In essi, è possibile sviluppare dimostrazioni matematiche, costruzioni e computazioni in un modo uniforme. Dimostrazioni e costruzioni completamente formalizzate sono effettivamente eseguibili come programmi di computer.

La ricerca del contenuto computazionale delle teorie matematiche nel senso sopra specificato è stata finora fatta principalmente per le strutture discrete. Dapprima si trova una assiomatizzazione costruttiva della teoria che poi si implementa su computer attraverso una formalizzazione in teoria dei tipi. Recentemente, un'assiomatizzazione costruttiva ed una formalizzazione in teoria dei tipi è stata proposta per la topologia.

In questa tesi iniziamo il programma di assiomatizzare costruttivamente parti dell'analisi con la topologia formale. Come prerequisito, diamo una breve panoramica della topologia costruttiva pointfree, e proviamo alcuni risultati generali necessari nei capitoli successivi, come una versione costruttiva del teorema di rappresentazione di Stone per i reticoli distributivi. Come applicazione alla topologia, diamo una dimostrazione costruttiva del teorema di Tychonoff. L'analisi propriamente detta inizia con la definizione del continuo. Procediamo quindi applicando questo approccio a due casi rappresentativi: il teorema di Heine-Borel ed il teorema di Hahn-Banach. Le nostre dimostrazioni di questi risultati sono costruttive in un senso molto radicale. Dato che evitiamo le definizioni impredicative e le prove indirette, tali dimostrazioni sono algoritmi che prendono i dati delle ipotesi del teorema come argomenti, e computano la tesi che il teorema stabilisce, sotto queste ipotesi, come risultato.

Una continuazione naturale di questo lavoro è quindi data da una formalizzazione di queste dimostrazioni nei termini della teoria dei tipi, che, oltre a precisare il concetto intuitivo di algoritmo qui usato, permette di esprimere tali algoritmi nella forma di programmi la cui terminazione è dimostrabile.

I vari capitoli di questa tesi derivano dai seguenti articoli dell'autore (in parte in collaborazione):

- *Stone bases, alias the constructive content of Stone representation*, in "Logic and Algebra", Dekker ed., New York, (Proceedings of the International Conference on Logic and Algebra in memory of Roberto Magari, Pontignano 26-30 April, 1994).
- (con S. Valentini) *Tychonoff's theorem in the framework of formal topologies*, in The Journal of Symbolic Logic (in press).
- (con D. Soravia) *The continuum as a formal space*, Rapporto Interno n.4, 17-7-95, Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova (submitted for publication).
- (con J. Cederquist) *A constructive proof of the Heine-Borel covering theorem for formal reals*, Lecture Notes in Computer Science (in press).
- (con J. Cederquist e T. Coquand) *Helly-Hahn-Banach in Formal Topology*, forthcoming.

Per una sintesi dettagliata di questo lavoro rimandiamo il lettore alle introduzioni dei singoli capitoli.

Ringraziamenti

La mia gratitudine è dovuta soprattutto a Giovanni Sambin che mi ha introdotta alla topologia costruttiva attraverso le sue lezioni ed le sue pubblicazioni. Oltre a ciò mi ha suggerito alcuni argomenti specifici, in particolare la rappresentazione di Stone costruttiva, il teorema di Tychonoff, la definizione del continuo in topologia formale, oltre a fornire la nozione di topologia formale induttivamente generata, poi rivelatasi un potente strumento dimostrativo.

Desidero ringraziare anche Jan Cederquist, Thierry Coquand e Silvio Valentini che hanno collaborato con me in alcuni degli articoli sopra menzionati. Daniele Soravia si è dimostrato uno studente brillante con cui è stato un piacere collaborare.

Infine, ringazio Per Martin-Löf, Jan von Plato, Pino Rosolini e Jan Smith per l'interesse e l'aiuto nel mio lavoro.

Padova, febbraio 1996

Capitolo 1

Preliminari

1.1 La nozione di topologia formale

In questo capitolo daremo una breve introduzione per tutte le nozioni di base relative alle topologie formali necessarie per gli sviluppi dei capitoli successivi e per le quali non esiste ancora della letteratura pubblicata.

Le topologie formali sono state introdotte da P. Martin-Löf e G. Sambin ([S], [S1]) come un approccio costruttivo alla topologia, nella tradizione della versione di Johnstone delle *Grothendieck topologies* [J] e dei *Formal Spaces* di Fourman e Grayson [FG], ma mediante l'utilizzo di tecniche più semplici e basandosi su una teoria costruttiva degli insiemi, specificatamente la *Intuitionistic Type Theory* di Martin Löf ([ML2], [NPS], [SV]).

Classicamente, uno spazio topologico è una coppia $\langle X, \Omega(X)\rangle$, dove $\Omega(X)$ è la famiglia dei sottoinsiemi aperti della *collezione*[1] X. Lo scopo principale della topologia formale (cf. [J2]) è lo studio, in un contesto costruttivo, delle proprietà di uno spazio topologico che possono essere espresse senza alcun riferimento ai punti, ovvero senza alcun riferimento agli elementi della collezione X. In questo modo possiamo fare a meno delle collezioni nello studio della topologia (cf. [PV]).

Poiché uno spazio topologico (con punti) può sempre essere presentato usando una delle sue basi, la struttura astratta che considereremo è quella di monoide commutativo $\langle S, \cdot_S, 1_S\rangle$ ove l'insieme S corrisonde all'insieme degli elementi della base della topologia (con punti) $\Omega(X)$, $\cdot_S$ corrisponde all'operazione di intersezione tra aperti della base, ed 1_S corrisponde all'intera collezione X.

[1] Cf. [ML2] dove la nozione di insieme è confrontata con quella di collezione, qui chiamata *category*.

In una topologia ogni aperto è ottenuto come unione di elementi della base, ma l'unione non ha più alcun senso se rifiutiamo ogni riferimento ai punti; siamo quindi naturalmente indotti a pensare ad un aperto direttamente come ad un sottoinsieme dell'insieme S. Sfortunatamente questa idea non è completamente corretta dato che ci possono essere diversi sottoinsiemi della base la cui unione dà lo stesso aperto; quindi, al fine di definire meglio cosa corrisponde ad un insieme aperto, dobbiamo introdurre anche una relazione di equivalenza $\cong$ tra due sottoinsiemi U e V di S tale che $U \cong V$ vale se e solo se, indicando con c^* l'elemento della base che corrisponde all'aperto formale della base c, gli aperti $U^* \equiv \cup_{a \in U} a^*$ e $V^* \equiv \cup_{b \in V} b^*$ sono uguali. A questo scopo introduciamo una relazione infinitaria $\lhd$, che sarà detta *copertura*, tra un elemento a della base S e sottoinsiemi U di S il cui significato inteso è che $a \lhd U$ quando $a^* \subseteq U^*$, e quindi l'equivalenza $U \cong V$ significherà $(\forall u \in U)\ u \lhd V\ \&\ (\forall v \in V)\ v \lhd U$. Le condizioni che richiediamo per questa relazione sono un'immediata riformulazione della situazione insiemistica.

Oltre alla relazione di copertura, introduciamo un predicato Pos su S per esprimere positivamente (cioè senza usare la negazione) il fatto che un aperto di base è non vuoto. Il significato inteso di $Pos(a)$ è che a è abitato, cioè che c'è almeno un punto in a. Ad esempio, la definizione negativa di $Pos(a)$ data da "a è non vuoto" equivarrebbe a $\neg(a \lhd \emptyset)$, che dice soltanto che è impossibile che non ci sia un punto in a. Ancora peggiore sarebbe la scelta impredicativa di porre $Pos(a) \equiv (\forall U \subseteq S)(a \lhd U \rightarrow U \neq \emptyset)$, cioè ogni copertura di a è abitata, che pure si trova nella letteratura. Queste considerazioni ci conducono quindi alla seguente definizione.

Definizione 1.1.1 (topologia formale) *Una* topologia formale *su un insieme S è una struttura*

$$\mathcal{A} \equiv \langle S, \cdot_{\mathcal{S}}, 1_{\mathcal{S}}, \lhd_{\mathcal{A}}, Pos_{\mathcal{A}} \rangle$$

dove $\langle S, \cdot_{\mathcal{S}}, 1_{\mathcal{S}} \rangle$ è un monoide commutativo con unità, $\lhd_{\mathcal{A}}$ è una relazione, detta relazione di copertura, *tra elementi e sottoinsiemi di S tale che, per ogni $a, b \in S$ e per ogni $U, V \subseteq S$ valgono le seguenti condizioni:*

$$\textit{(reflexivity)} \quad \frac{a \in U}{a \lhd_{\mathcal{A}} U}$$

$$\textit{(transitivity)} \quad \frac{a \lhd_{\mathcal{A}} U \qquad U \lhd_{\mathcal{A}} V}{a \lhd_{\mathcal{A}} V}$$

$$\textit{($\cdot$ -left)} \quad \frac{a \lhd_{\mathcal{A}} U}{a \cdot b \lhd_{\mathcal{A}} U}$$

$$\textit{($\cdot$ -right)} \quad \frac{a \lhd_{\mathcal{A}} U \qquad a \lhd_{\mathcal{A}} V}{a \lhd_{\mathcal{A}} U \cdot V}$$

dove $U \lhd_{\mathcal{A}} V \equiv (\forall u \in U)(u \lhd_{\mathcal{A}} V)$ *e* $U \cdot V \equiv \{u \cdot v : u \in U, v \in V\}$.
Pos è un predicato su S, *detto* predicato di positività, *che soddisfa:*

$$\textit{(monotonicity)} \quad \frac{Pos(a) \qquad a \lhd_{\mathcal{A}} U}{(\exists b \in U)\ Pos(b)}$$

$$\textit{(positivity)} \quad a \lhd_{\mathcal{A}} a^+$$

dove $a^+ \equiv \{b \in S : (a =_S b)\ \&\ Pos(b)\}$.

Queste condizioni sono tutte una immediata trascrizione esatta delle precedenti considerazioni intuitive, tranne la condizione di *positivity*. Il primo motivo per introdurre la *positivity* è che essa permette di dimostrare che ogni aperto di base non positivo è coperto da qualunque sottoinsieme della base. Tecnicamente, la *positivity* permette anche dimostrazioni per casi su $Pos(a)$ per deduzioni che coinvolgono coperture (per una discussione dettagliata si veda [SVV]). Oltre a ciò l'introduzione di Pos aumenta l'espressività del linguaggio per la topologia formale; ad esempio l'uso del predicato Pos è essenziale se si vogliono rappresentare gli spazi connessi, la cui definizione diventa (si veda l'appendice di [M])

se $1 \lhd U$ *allora per arbitrari* $a, b \in U$ *tali che valgano* $Pos(a)$ *e* $Pos(b)$ *esistono* $a_0 = a, \ldots, a_n = b$ in U *tali che* $Pos(a_k \cdot a_{k+1})$ *per* $k < n$.

1.1.1 Il frame $Sat(\mathcal{A})$

Data una topologia formale $\mathcal{A}$, denoteremo con $Sat(\mathcal{A})$ la collezione dei *sottoinsiemi saturi* di $\mathcal{A}$, cioè dei sottoinsiemi U di S tali che $\mathcal{A}U = U$, ove $\mathcal{A}U = \{a \in S : a \lhd U\}$. Con le seguenti operazioni

- $\mathcal{A}U \wedge \mathcal{A}V \equiv \mathcal{A}U \cap \mathcal{A}V = \mathcal{A}(U \cdot V)$
- $\bigvee_{i \in I} \mathcal{A}U_i \equiv \mathcal{A}(\bigcup_{i \in I} U_i)$

$Sat(\mathcal{A})$ diventa un *frame*, cioè un'algebra di Heyting completa (cf. [S1], [BatS]).

1.1.2 Generazione induttiva di topologie formali

Poiché le coperture sono definite richiedendo la chiusura per determinate regole, è possibile generarle a partire da condizioni date, che consideriamo come assiomi, chiudendo per le regole di copertura, cioè *reflexivity*, *transitivity*, $\cdot$ *-left* e $\cdot$ *-right*, che possiamo considerare come regole di inferenza. Questo permetterà le dimostrazioni per induzione sulle derivazioni, che saranno il principale strumento tecnico di cui ci avvarremo.

Data una base S ed una relazione infinitaria

$$R(a, U), \text{ dove } a \in S,\ U \subseteq S,$$

diciamo che una copertura $\lhd$ soddisfa la relazione R se, per ogni $a \in S$ ed ogni $U \subseteq S$, $R(a, U)$ implica $a \lhd U$. Allora esiste la minima copertura che soddisfa R, che è ottenuta chiudendo R per le regole di copertura:

Definizione 1.1.2 (Copertura generata) *Data una relazione $R(a, U)$, diciamo che la relazione $a \lhd_R U$ vale se e solo se è derivabile dagli assiomi*

$$(axioms) \quad \frac{R(a, U)}{a \lhd_R U}$$

applicando le regole di copertura e la regola

$$(substitution) \quad \frac{a = b \quad a \lhd_R U}{b \lhd_R U}$$

Chiaramente, $\lhd_R$ è una copertura su $\mathcal{S}$, dato che è per definizione chiusa per le regole che definiscono le coperture; tale copertura è detta la *copertura generata da R*.

Si osservi che la regola di *substitution* è necessaria per assicurare che $\lhd_R$ sia una relazione, cioè rispetti l'uguaglianza in S (mentre *extensionality*, che afferma che l'uguaglianza tra i sottoinsiemi di S è rispettata, è derivabile usando *reflexivity* e *transitivity*).

Data una relazione infinitaria R ed un predicato Pos su S è possibile generare una topologia formale se sono soddisfatte opportune proprietà:

Proposizione 1.1.3 (Topologia Generata) *Sia R una relazione che soddisfa $R(a, U) \to R(a \cdot b, U \cdot \{b\})$ e sia Pos un predicato su S tale che valgano le seguenti proprietà:*

$$Pos(a \cdot b) \to Pos(a)\ ,$$

$$Pos(a) \to Pos(a \cdot a)\ ,$$

$$Pos(a)\ \&\ R(a, U) \to (\exists b \in U)\ Pos(b)\ .$$

Allora Pos è monotono rispetto alla copertura $\lhd_R$ generata da R.

Se inoltre vale $R(a, a^+)$ allora $\mathcal{A} \equiv \langle S, \cdot, 1_S, \lhd_R, Pos\rangle$ è una topologia formale, detta la topologia formale generata da R e Pos.

Dimostrazione: Diamo qui una traccia della dimostrazione. La prova della prima parte della proposizione consiste in quattro passi. Per prima cosa si osservi che la regola di $\cdot$ -*right* può essere equivalentemente sostituita dalle seguenti regole

$$(contraction) \qquad a \lhd_R \{a \cdot a\}$$

$$(localization) \quad \frac{a \lhd_R U}{a \cdot b \lhd_R U \cdot \{b\}}$$

che sono facilmente derivabili da $\cdot$ -*right*, mentre per il viceversa si deve usare *transitivity* e le seguenti istanze di *localization*:

$$\frac{a \lhd U}{a \cdot a \lhd U \cdot \{a\}} \quad \text{e, per ogni } u \in U, \quad \frac{a \lhd V}{u \cdot a \lhd \{u\} \cdot V} \ .$$

Il secondo passo consiste nel sostituire la regola di *transitivity* con la sua equivalente forma "localizzata"

$$(localized\ transitivity) \quad \frac{a \lhd U \cdot \{c\} \quad (\forall x \in U)\ (x \cdot c) \lhd V}{a \lhd V} \ .$$

Quindi *localization* può essere eliminata da ogni derivazione di una copertura: esplicitamente, essa può essere permutata "in sù" con tutte le regole che abbiamo introdotto per una presentazione alternativa della copertura, grazie alla scelta opportuna della forma di *transitivity*, e con gli assiomi per le condizioni richieste su R.

Infine *monotonicity* può essere dimostrata per induzione sulla lunghezza della derivazione in considerazione utilizzando la condizioni richieste su Pos per i casi di base e l'ipotesi induttiva per le regole rimanenti, cioè *reflexivity*, *localized transitivity*, $\cdot$ -*left* e *substitution*.

Per dimostrare che $\mathcal{A}$ è una topologia formale, resta da dimostrare solo la *positivity*. Essa è semplicemente ottenuta per assioma grazie all'ulteriore assunzione $R(a, a^+)$. □

1.2 Punti formali e topologia estensionale

Allo scopo di connettere l'approccio *pointfree* all'approccio tradizionale alla topologia, dobbiamo recuperare la nozione di punto. Poiché nell'approccio *pointfree* invertiamo il tradizionale ordine concettuale tra punti e aperti, e consideriamo questi ultimi come primitivi, i punti saranno definiti come particolari collezioni di aperti. Ricordiamo qui la definizione di punto (formale) di una topologia formale:

Definizione 1.2.1 *Sia* $\mathcal{A} \equiv \langle S, \cdot_S, 1_S, \lhd_{\mathcal{A}}, Pos_{\mathcal{A}} \rangle$ *una topologia formale. Un sottoinsieme* α *di* S *è detto un* punto formale *se per ogni* $a, b \in S$, $U \subseteq S$ *valgono le seguenti condizioni:*

1. $1 \in \alpha$;
2. $\dfrac{a \in \alpha \quad b \in \alpha}{a \cdot b \in \alpha}$;
3. $\dfrac{a \in \alpha \quad a \lhd U}{(\exists b \in U)(b \in \alpha)}$;
4. $\dfrac{a \in \alpha}{Pos(a)}$.

Per mantenere l'usuale intuizione sui punti, nel seguito scriveremo spesso $\alpha \Vdash a$ (*α forza a, o α è un punto in a*) al posto di $a \in \alpha$. Inoltre interpreteremo 1 come l'intero spazio, il prodotto come intersezione, $a \lhd U$ come "*a è incluso nell'unione di U*", e $Pos(a)$ come "*a è abitato*", che è un modo positivo di dire che a è non vuoto.

Se la topologia formale $\mathcal{A}$ è generata induttivamente da una relazione $R(a, U)$, ove $a \in S$ e $U \subseteq S$,[2], allora la condizione *3* di *monotonicity* può essere indebolita richiedendo che essa valga soltanto rispetto agli assiomi, dato che allora essa vale anche per la copertura generata (ammesso di assumere la *monotonicity* rispetto all'ordine indotto dal monoide, che significa rafforzare la condizione *2* in una doppia implicazione), cioè:

Proposizione 1.2.2 *Sia $\mathcal{A} \equiv \langle S, \cdot, 1_S, \lhd_R, Pos \rangle$ una topologia formale induttivamente generata come in 1.1.3. Allora $\alpha \subseteq S$ è un punto formale se e solo se soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $\alpha \Vdash 1$;
2. $\alpha \Vdash a$ & $\alpha \Vdash b$ *se e solo se* $\alpha \Vdash a \cdot b$;
3. $\dfrac{\alpha \Vdash a \quad R(a, U)}{(\exists b \in U)(\alpha \Vdash b)}$;
4. $\dfrac{\alpha \Vdash a}{Pos(a)}$.

Dimostrazione: È chiaro che le quattro condizioni valgono se α è un punto formale. Viceversa, basta dimostrare che vale

$$\frac{\alpha \Vdash a \quad a \lhd_R U}{(\exists b \in U)(\alpha \Vdash b)}$$

Ciò si ottiene per induzione sulla derivazione di $a \lhd_R U$. □

[2] Nella terminologia di [Si], dove vari modi equivalenti di definire i punti di uno spazio formale sono forniti, questo è il caso di uno spazio formale dato da una presentazione.

Per ogni topologia formale $\mathcal{A}$, lo spazio formale $Pt(\mathcal{A})$ dei punti formali su $\mathcal{A}$ può essere dotato di una topologia, detta *topologia estensionale*. Si definisca, per $a \in S$

$$ext(a) \equiv \{\alpha \in Pt(\mathcal{A}) : \alpha \Vdash a\}.$$

La famiglia $\{ext(a)\}_{a \in S}$ è una base per una topologia su $Pt(\mathcal{A})$. Infatti, dalla definizione di punto formale abbiamo $ext(1) = Pt(\mathcal{A})$, e quindi l'intero spazio è un aperto della base, ed $ext(a) \cap ext(b) = ext(a \cdot b)$, e quindi la famiglia è chiusa per intersezione. Se denotiamo $\cup_{b \in U} ext(b)$ con $ext(U)$, allora ogni aperto è della forma $ext(U)$ per $U \subseteq S$.

Sia $\Omega Pt(\mathcal{A})$ la topologia così ottenuta. Allora l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \phi : & Sat(\mathcal{A}) & \rightarrow & \Omega Pt(\mathcal{A}) \\ & U & \mapsto & ext(U) \end{array}$$

è chiaramente un morfismo suriettivo di frame, quindi è un isomorfismo di frame se e solo se è iniettivo. L'iniettività di ϕ corrisponde alla condizione

$$ext(U) = ext(V) \rightarrow U = V$$

che è equivalente a $ext(U) \subseteq ext(V) \rightarrow U \subseteq V$, che a sua volta è equivalente a

$$ext(a) \subseteq ext(V) \rightarrow a \in V. \tag{1.1}$$

Se vale la condizione (1.1), diciamo che la topologia formale è *estensionale* o *ha abbastanza punti*, dato che essa è classicamente equivalente a

$$a \notin V \rightarrow (\exists \alpha \in Pt(\mathcal{A}))(\alpha \Vdash a \ \& \ V \cap \alpha = \emptyset)$$

il cui contenuto intuitivo è che i punti sono abbastanza da "separare" aperti diversi.

Per il teorema di rappresentazione per frames mediante topologie formali ([BatS]), le topologie formali estensionali corrispondono esattamente agli *spatial* frames (o locales). Ricordiamo un ben noto risultato che connette la topologia *localica* o pointfree con quella classica con punti (cf. [J]):

Teorema 1.2.3 *La categoria degli* spatial frames *è equivalente alla categoria degli spazi topologici sobri.*

Quindi l'estensionalità per una topologia formale è un parametro che misura quanto lo spazio formale "assomiglia" al corrispondente spazio topologico classico. Tranne per pochi casi come le topologie formali di Scott (si veda [SVV]), una dimostrazione di estensionalità richiede assunzioni non costruttive. Ad esempio si deve utilizzare il teorema del filtro primo nel caso delle topologie formali di Stone (vedi capitolo 2, sezione 2.3) e la logica classica nel caso della topologia dei reali (vedi capitolo 4, sezione 4.5).

1.3 La categoria delle topologie formali

Per fare delle topologie formali una categoria, dobbiamo definire i morfismi (cf. [BatS], [N]).

Siano $\mathcal{A} = \langle S, \cdot_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}}, \lhd_{\mathcal{A}}, Pos_{\mathcal{A}} \rangle$, e $\mathcal{B} = \langle T, \cdot_{\mathcal{B}}, 1_{\mathcal{B}}, \lhd_{\mathcal{B}}, Pos_{\mathcal{B}} \rangle$ due topologie formali e siano $Pt(\mathcal{A})$ e $Pt(\mathcal{B})$ le rispettive collezioni di punti formali. Allora un'applicazione $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ deve corrispondere all'inversa di una funzione continua $f^* : Pt(\mathcal{B}) \longrightarrow Pt(\mathcal{A})$ tra spazi topologici, e quindi deve mandare aperti di base (cioè elementi di S) in aperti di $\mathcal{B}$. Poiché vogliamo evitare ogni riferimento ai punti, quindi alle unioni, un aperto di $\mathcal{B}$ può essere specificato solo da un sottoinsieme di T, con l'avvertenza che sottoinsiemi diversi possono dare lo stesso aperto. Per far fronte a questo problema, in 1.1 abbiamo introdotto la relazione di equivalenza

$$U \cong_{\mathcal{B}} V \equiv U \lhd_{\mathcal{B}} V \ \& \ V \lhd_{\mathcal{B}} U.$$

Siamo quindi ora in grado di esprimere nel nostro contesto le condizioni che richiediamo all'applicazione f da S ai sottoinsiemi di T perché corrisponda all'inversa di una applicazione continua:

- $f(1_{\mathcal{A}}) \cong_{\mathcal{B}} \{1_{\mathcal{B}}\}$;
- $f(a \cdot_{\mathcal{A}} b) \cong_{\mathcal{B}} f(a) \cdot_{\mathcal{B}} f(b)$;
- $\dfrac{a \lhd_{\mathcal{A}} U}{(\forall x \in f(a))\ x \lhd_{\mathcal{B}} f(U)}$, dove $f(U) \equiv \cup_{b \in U} f(b)$;
- $\dfrac{(\exists x \in f(a))\ Pos_{\mathcal{B}}(x)}{Pos_{\mathcal{A}}(a)}$.

Tuttavia, non possiamo ancora identificare i morfismi tra le topologie formali $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ con le applicazioni sopra definite dato che due applicazioni f e g che danno lo stesso aperto per ogni $a \in S$ devono coincidere. Quindi definiamo l'uguaglianza tra morfismi nel modo seguente

$$f =_{\mathcal{B}} g \equiv ((\forall a \in S)\ f(a) =_{\mathcal{B}} g(a)).$$

La composizione di morfismi, data da

$$(f \circ g) = f(g(a)) = \cup_{b \in g(a)} f(b),$$

risulta ben definita e l'unità è data dal morfismo $1(a) \equiv \{a\}$. Risulta immediato verificare che in questo modo si ottiene una categoria, che chiameremo categoria delle topologie formali, e denoteremo con **FTop**.

La categoria delle topologie formali è dotata di oggetto iniziale

$$\mathcal{P}(1) \equiv \langle \{1\}, \cdot, 1, \lhd, Pos \rangle$$

il cui monoide di base è il monoide banale consistente della sola unità, la cui copertura è data da

$$a \lhd U \equiv a \in U$$

ed in cui vale $Pos(1)$. È infatti immediato che per ogni topologia formale $\mathcal{A}$ esiste un unico morfismo $!_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(1)$ dato dall'applicazione che manda 1 in $\{1_{\mathcal{A}}\}$.

Categoricamente, i punti formali possono essere definiti come "elementi generalizzati" in **FTop**, ovvero i punti formali di una topologia formale si possono identificare con i morfismi verso l'oggetto iniziale.

Dato un punto formale α di $\mathcal{A}$, definiamo $f_\alpha(a) = 1$ se $\alpha \Vdash a$, altrimenti poniamo $f_\alpha(a) = \emptyset$. È immediato dalle definizioni che f_α è un morfismo di topologie formali. Se viceversa f è un morfismo da $\mathcal{A}$ verso l'oggetto iniziale, poniamo

$$\alpha_f \equiv \{a \in S : f(a) =_{\mathcal{P}(1)} 1\}.$$

Si vede allora che α_f è un punto formale. Inoltre la corrispondenza è biunivoca dato che $f_{\alpha_f} = f$ e che $\alpha_{f_\alpha} = \alpha$.

Tale caratterizzazione categoriale dei punti di una topologia formale ci sarà utile nello studio dei prodotti di spazi formali (cf. capitolo 3).

Capitolo 2

Basi di Stone e teoremi di rappresentazione

Lo scopo di questo capitolo è l'analisi del contenuto costruttivo del teorema di rappresentazione di Stone per i reticoli distributivi (cf. [St]), che stabilisce che ogni reticolo distributivo è isomorfo al reticolo degli aperti compatti di un opportuno spazio topologico, detto *spazio coerente*.

È ben noto (cf. [J]) che i reticoli distributivi formano una categoria equivalente alla categoria dei frames coerenti. Qui si vedrà che la categoria dei frames coerenti, a cui viene aggiunto un predicato costruttivo di apartness da 0, è equivalente alla categoria delle *topologie formali di Stone*. Queste ultime sono topologie formali in cui ogni aperto di base è compatto. Dimostreremo che ogni topologia formale di Stone può essere rappresentata da una struttura finitaria, che chiameremo *base di Stone*, sostituendo la relazione di copertura, che è una relazione tra elementi e sottoinsiemi, con una relazione definita induttivamente tra elementi e sottoinsiemi finiti. Il teorema di rappresentazione di Stone prende quindi la forma di un'equivalenza - dimostrata costruttivamente - tra la categoria dei reticoli distributivi con apartness da 0 e la categoria delle basi di Stone.

Questi risultati sono poi messi in relazione con quelli di Johnstone e con la rappresentazione topologica classica basata sui punti: per ottenere la rappresentazione mediante *spazi topologici coerenti* è necessario aggiungere i punti alla rappresentazione pointfree, il che equivale ad una prova di estensionalità per le topologie formali di Stone ovvero al teorema del Filtro Primo.

A parte l'interesse teorico a sé di questo capitolo, è importante sottolineare il fatto che la nozione di *compattificazione di Stone* di una topologia formale costituirà l'idea chiave necessaria per gli sviluppi e le applicazione dei capitoli 5 e 6.

2.1 Topologie formali di Stone e basi di Stone

In quanto segue saremo per lo più interessati ad una particolare sottocategoria piena, che denoteremo con **SFTop**, di **FTop** (introdotta nella sezione 1.3) i cui oggetti sono le topologie formali di Stone, che sono così definite:

Definizione 2.1.1 *Una topologia formale $\mathcal{A}$ è detta di* Stone *se $\lhd$ è una* copertura di Stone, *cioè ogniqualvolta $a \lhd U$ esiste un sottoinsieme finito K di U tale che $a \lhd K$.*

La notazione $\mathcal{P}_\omega S$ sarà utilizzata per denotare la collezione dei sottoinsiemi finiti di S; scriveremo inoltre $U \subseteq_\omega S$ per $U \in \mathcal{P}_\omega S$. Ricordiamo che, se S è un set nel senso della teoria dei tipi, pure $\mathcal{P}_\omega S$ lo è. Per i dettagli sulla presentazione tipo-teorica dell'insieme dei sottoinsiemi finiti di un insieme si veda l'appendice di [NV].

È ben noto (cf. e.g. [S] per maggiori dettagli) che ad una copertura $\lhd_\mathcal{A}$ su S è associato un operatore di chiusura $\mathcal{A}$ sulle parti di S, $\mathcal{P}S$, definito da $\mathcal{A}U \equiv \{a \in S : a \lhd_\mathcal{A} U\}$. Diremo che un sottoinsieme U di S è *$\mathcal{A}$-saturo* se $\mathcal{A}U = U$. Esiste una corrispondenza biunivoca tra coperture su S e operatori di chiusura su $\mathcal{P}S$ che soddisfano l'uguaglianza $\mathcal{A}(U \cdot V) = \mathcal{A}U \cap \mathcal{A}V$. In questo modo le topologie formali di Stone possono essere caratterizzate in termini di operatori di chiusura come stabilisce il seguente:

Lemma 2.1.2 *Una topologia formale $\mathcal{A}$ è di Stone se e solo se per ogni sottoinsieme U di S si ha*

$$\mathcal{A}U = \cup\{\mathcal{A}K : K \subseteq_\omega U\}.$$

Dimostrazione: L'essere $\mathcal{A}$ di Stone significa per definizione che $a \lhd U \rightarrow (\exists K \subseteq_\omega U)(a \lhd K)$, che è equivalente a $a \lhd U \leftrightarrow (\exists K \subseteq_\omega U)(a \lhd K)$, che è solo un altro modo per esprimere l'uguaglianza $\mathcal{A}U = \cup\{\mathcal{A}K : K \subseteq_\omega U\}$. □

L'interesse della caratterizzazione data sopra delle topologie di Stone sta nel fatto che gli operatori di chiusura soddisfacenti la condizione corrispondenti sono un ben noto oggetto di studio, e cioè gli *operatori di chiusura algebrici*. Per un risultato noto, che può essere provato costruttivamente, un operatore di chiusura $\mathcal{C}$ è algebrico se e solo se è *induttivo* cioè se l'unione di una famiglia diretta di sottoinsiemi $\mathcal{C}$-saturi è $\mathcal{C}$-satura.

Uno degli scopi di questo capitolo è sviluppare una trattazione strettamente finitaria delle topologie formali di Stone. Data una copertura $\lhd$ su S, definiamo la *traccia finita* $\prec_\lhd$ di $\lhd$ come la restrizione di $\lhd$ ad una relazione tra elementi e sottoinsiemi finiti di S:

$$a \prec_\lhd K \equiv a \lhd K \ (a \in S, K \in \mathcal{P}_\omega S).$$

Come vedremo, una topologia formale di Stone è univocamente determinata dalla sua restrizione ai sottoinsiemi finiti, cioè dalla sua traccia finita.

La nostra definizione di base è ottenuta per astrazione sulle tracce finite:

Definizione 2.1.3 *Una* base di Stone *è una quintupla*

$$\mathcal{S} \equiv \langle S, \cdot, 1_\mathcal{S}, \prec_\mathcal{S}, Pos_\mathcal{S} \rangle$$

ove:

- $(S, \cdot, 1_\mathcal{S})$ *è un monoide commutativo con unità;*
- $\prec_\mathcal{S}$ *è una* copertura finitaria, *cioè una relazione tra elementi e sottoinsiemi finiti di S che soddisfa formalmente le stesse condizioni di una copertura, cioè per ogni $a, b \in S$ e $K, L \in \mathcal{P}_\omega S$:*

  $\dfrac{a \in K}{a \prec K}$ *reflexivity,*

  $\dfrac{a \prec K \quad K \prec L}{a \prec L}$ *transitivity,*

  $\dfrac{a \prec K}{a \cdot b \prec K}$ $\cdot$ *-left,*

  $\dfrac{a \prec K \quad a \prec L}{a \prec K \cdot L}$ $\cdot$ *-right;*

- $Pos_\mathcal{S}$ *è una predicato su S che soddisfa:*

  $\dfrac{Pos_\mathcal{S}(a) \quad a \prec K}{(\exists b \in K) Pos_\mathcal{S}(b)}$ *monotonicity,*

  $\dfrac{Pos_\mathcal{S}(a) \to a \prec K}{a \prec K}$ *positivity.*

Data una topologia formale $\mathcal{A}$, la traccia finita di $\lhd_\mathcal{A}$ determina una base di Stone:

Proposizione 2.1.4 *Sia $\mathcal{A} \equiv \langle S, \cdot, 1, \lhd, Pos \rangle$ una topologia formale e sia $\prec_\lhd$ la traccia finita di $\lhd$. Allora la struttura $\mathbf{S}(\mathcal{A}) \equiv \langle S, \cdot, 1, \prec_\lhd, Pos \rangle$ è una base di Stone.*

Dimostrazione: Immediata dalle definizioni. Per quanto riguarda la regola $\cdot$ *-right*, osserviamo che $U \cdot V$ è finito se U e V sono finiti. □

Viceversa abbiamo la seguente:

Proposizione 2.1.5 *Data una base di Stone $\mathcal{S} \equiv \langle S, \cdot, 1, \prec, Pos \rangle$, sia $\lhd_\prec$ la minima copertura con traccia $\prec$, cioè la copertura induttivamente generata prendendo $a \lhd_\prec K$ come assiomi se $a \prec K$ e chiudendo per le regole di copertura, cioè* reflexivity, transitivity, $\cdot$ -left, $\cdot$ -right. *Allora per ogni $a \in S$ e $U \subseteq S$ abbiamo:*

$$a \lhd_\prec U \text{ se e solo se } \text{ esiste } K \subseteq_\omega U \text{ tale che } a \prec K. \tag{2.1}$$

Quindi $\mathbf{A}(\mathcal{S}) \equiv \langle S, \cdot, 1, \lhd_\prec, Pos \rangle$ è una topologia formale di Stone.

Dimostrazione: Banalmente $\lhd_\prec$ è una copertura.

Supponiamo che esista $K \subseteq_\omega U$ tale che $a \prec K$. Allora $a \lhd_\prec K$ segue dagli assiomi; da $K \subseteq_\omega U$ segue per *reflexivity* che $K \lhd_\prec U$ e quindi si ha $a \lhd_\prec U$ per *transitivity*.

Il viceversa è pure semplice, ma daremo qui la prova in dettaglio perché illustra il metodo di induzione sulle coperture, in questo caso sulla generazione di $\lhd_\prec$. Per gli assiomi e la regola di *reflexivity* la tesi è banale. Assumiamo allora che $a \lhd_\prec V$ sia stato ottenuta da $a \lhd_\prec U$ e $U \lhd_\prec V$ mediante *transitivity*. Per ipotesi induttiva, $a \prec K$ per qualche $K \subseteq_\omega U$ e per ogni $x \in K$, $x \prec L_x$ per qualche $L_x \subseteq_\omega V$. Per *reflexivity*, $L_x \prec \cup_{x \in K} L_x$, quindi per *transitivity* di $\prec$, $x \prec \cup_{x \in K} L_x$ per ogni $x \in K$, quindi $K \prec \cup_{x \in K} L_x$ ed infine $a \prec \cup_{x \in K} L_x$ per *transitivity*. Per $\cdot$ *-left* e $\cdot$ *-right* la prova è immediata.

Poiché per gli assiomi $a \prec K$ dà $a \lhd_\prec K$, $\lhd_\prec$ è una copertura di Stone per (2.1).

Per raggiungere la conclusione resta solo da dimostrare che Pos soddisfa *monotonicity* e *positivity* rispetto alla copertura $\lhd_\prec$. Per provare la monotonia, assumiamo che $Pos(a)$ valga e che $a \lhd_\prec U$. Allora esiste $K \subseteq_\omega U$ tale che $a \prec K$. Per *monotonicity* di Pos rispetto a $\prec$, $Pos(K)$ vale, quindi a maggior ragione vale $Pos(U)$. Infine, la premessa di *positivity*, cioè

$$Pos(a) \rightarrow a \lhd_\prec U$$

è equivalente a $a^+ \lhd_\prec U$. Inoltre, da $a^+ \prec a^+$, abbiamo $Pos(a) \rightarrow a \prec a^+$, che per *positivity* di Pos rispetto a $\prec$, dà $a \prec a^+$ e quindi $a \lhd_\prec a^+$. Questo, assieme a $a^+ \lhd_\prec U$, dà per *transitivity* $a \lhd_\prec U$. □

Siano $\lhd$ e $\lhd'$ coperture sulla stessa base S. Diciamo che $\lhd'$ è *quoziente* di $\lhd$ se per ogni $a \in S$, $U \subseteq S$,

$$a \lhd U \rightarrow a \lhd' U.$$

Questa relazione corrisponde all'inclusione insiemistica tra le estensioni delle relazioni $\lhd$ e $\lhd'$, cosicché diremo anche che $\lhd'$ è *maggiore* di $\lhd$, e scriveremo $\lhd \leq \lhd'$. Data una copertura $\lhd$, sia $\prec_\lhd$ la sua traccia finita. Per le proposizioni 2.1.4 e 2.1.5, $\prec_\lhd$ genera una copertura $\lhd_{\prec_\lhd}$ che è una copertura di Stone e quindi in generale non coincide con $\lhd$. Invero $\lhd$ è quoziente di $\lhd_{\prec_\lhd}$. Difatti, se $a \lhd_{\prec_\lhd} U$ allora esiste $K \subseteq_\omega U$ tale che $a \prec_\lhd K$ e quindi, poiché $\prec_\lhd$ è restrizione di $\lhd$, $a \lhd K$, cosicché $a \lhd U$. Inoltre $\lhd_{\prec_\lhd}$ è la massima copertura di Stone di cui $\lhd$ è quoziente. Al fine di dimostrare ciò, consideriamo una copertura di Stone $\lhd'$ di cui $\lhd$ è quoziente. Allora $a \lhd' U$ implica $a \lhd' K$ per qualche $K \subseteq_\omega U$, e quindi anche $a \lhd K$. Così, per definizione di traccia di una copertura, $a \prec_\lhd K$ e per definizione di copertura generata da una traccia $a \lhd_{\prec_\lhd} U$.

La copertura $\lhd$ coincide con $\lhd_{\prec_\lhd}$ se e solo se $\lhd$ è una copertura di Stone. Infatti, supponiamo che $\lhd = \lhd_{\prec_\lhd}$. Allora $\lhd$ è di Stone poiché $\lhd_{\prec_\lhd}$ è di Stone per quanto osservato sopra. Viceversa, $\lhd_{\prec_\lhd} \leq \lhd$ poiché $\lhd$ è quoziente di $\lhd_{\prec_\lhd}$. Dato che $\lhd_{\prec_\lhd}$ è la massima copertura di Stone di cui $\lhd$ è quoziente, anche l'uguaglianza opposta vale e la conclusione ne segue.

Denoteremo $\lhd_{\prec_\lhd}$ con $\lhd_\omega$ e la chiameremo la *compattificazione di Stone*[1] *di* $\lhd$. La discussione fatta sopra prova dunque la seguente proposizione:

Proposizione 2.1.6 *Una copertura $\lhd$ ammette una compattificazione di Stone $\lhd_\omega$, che è data dalla copertura indotta dalla sua traccia finita, $\lhd_{\prec_\lhd}$. Questa è la massima copertura di Stone di cui $\lhd$ è quoziente e coincide con $\lhd$ se e solo se $\lhd$ è una copertura di Stone.*

Abbiamo anche:

Corollario 2.1.7 *Una copertura $\lhd$ è di Stone se e solo se è assiomatizzabile finitariamente, cioè se esiste una relazione R tra elementi e sottoinsiemi finiti di S tale che $\lhd$ coincide con la copertura $\lhd_R$ generata da R.*

Data una topologia formale $\mathcal{A}$, sia $\mathcal{A}_\omega \equiv \mathbf{AS}(\mathcal{A})$, cioè, per le definizioni di $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ e $\lhd_\omega$, $\mathcal{A}_\omega \equiv \langle S, \cdot, 1, \lhd_\omega, Pos\rangle$. Allora, per le proposizioni 2.1.4 e 2.1.5, $\mathcal{A}_\omega$ è una topologia formale di Stone, detta la *compattificazione di Stone di $\mathcal{A}$*.

Date due topologie formali con lo stesso monoide di base e lo stesso predicato di positività, $\mathcal{A} \equiv \langle S, \cdot, 1, \lhd, Pos\rangle$ e $\mathcal{A}' \equiv \langle S, \cdot, 1, \lhd', Pos\rangle$, diciamo che $\mathcal{A}$ è quoziente di $\mathcal{A}'$ se la copertura $\lhd'$ è quoziente della copertura $\lhd$.

Riassumendo, abbiamo dimostrato:

Teorema 2.1.8 *Ogni topologia formale $\mathcal{A} \equiv \langle S, \cdot, 1, \lhd, Pos\rangle$ ammette una compattificazione di Stone $\mathcal{A}_\omega \equiv \langle S, \cdot, 1, \lhd_\omega, Pos\rangle$. Questa è la massima*

[1] Da non confondere con la nota compattificazione di Stone-Čech.

topologia formale di Stone di cui $\mathcal{A}$ è quoziente. Inoltre $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\omega$ se e solo se $\mathcal{A}$ è una topologia formale di Stone.

Un importante corollario del risultato visto sopra è il fatto che ogni topologia formale di Stone è determinata dalla sua traccia finita, che è una relazione tra elementi e sottoinsiemi finiti di S.

La definizione di morfismo tra basi di Stone è ottenuta nel modo naturale, analogamente a quella di morfismo tra topologie formali (cf. 1.3), tranne per il fatto che ogni elemento è mandato in un sottoinsieme finito della base. Data una base di Stone $\mathcal{S}$, denoteremo con $=_\mathcal{S}$ la relazione di equivalenza su $\mathcal{P}_\omega S$ definita da $K =_\mathcal{S} L \equiv K \prec_\mathcal{S} L \;\&\; L \prec_\mathcal{S} K$. Allora possiamo definire:

Definizione 2.1.9 *Un morfismo tra due basi di Stone*

$$\mathcal{S} \equiv \langle S, \cdot, 1_\mathcal{S}, \prec_\mathcal{S}, Pos_\mathcal{S} \rangle \text{ e } \mathcal{T} \equiv \langle T, \cdot, 1_\mathcal{T}, \prec_\mathcal{T}, Pos_\mathcal{T} \rangle$$

è una applicazione $f : S \to \mathcal{P}_\omega T$ che soddisfa formalmente le stesse condizioni di un morfismo tra topologie formali, cioè:

1. $f(1_\mathcal{S}) =_\mathcal{T} 1_\mathcal{T}$;
2. $f(a \cdot b) =_\mathcal{T} f(a) \cdot f(b)$;
3. $a \prec_\mathcal{S} K \to f(a) \prec_\mathcal{T} f(K)$;
4. $Pos_\mathcal{T}(f(a)) \to Pos_\mathcal{S}(a)$.

In modo analogo, l'uguaglianza tra morfismi $f, g : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ è definita da $f = g \equiv (\forall a \in S)(f(a) =_\mathcal{T} g(a))$.

Come per la categoria delle topologie formali, la composizione di morfismi $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ e $g : \mathcal{T} \to \mathcal{V}$ è definita da $(g \circ f)(a) \equiv g(f(a))$ e l'identità $1 : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ è il morfismo che manda ogni elemento nel suo singoletto, cioè $1(a) \equiv \{a\}$. In questo modo le basi di Stone formano una categoria che denoteremo con **SB**.

Sia **SFTop*** la categoria delle topologie formali di Stone con i *morfismi coerenti* cioè morfismi da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ indotti da applicazioni che mandano elementi della base di $\mathcal{A}$ in sottoinsiemi finiti della base di $\mathcal{B}$. Allora possiamo dimostrare che la corrispondenza biunivoca determinata da **A** e **S** tra basi di Stone e topologie formali di Stone si estende ad una equivalenza categoriale tra **SFTop*** e **SB**.

Osserviamo che ogni morfismo coerente f tra le topologie formali di Stone $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è anche un morfismo tra le basi di Stone $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ e $\mathbf{S}(\mathcal{B})$. Infatti, le condizioni *1* e *2* valgono poiché sui sottoinsiemi finiti le relazioni $=_\mathcal{B}$ e

$=_{\mathbf{S}(\mathcal{B})}$ coincidono. Per quanto riguarda la condizione *3*, supponiamo che $a \prec_{\lhd_{\mathcal{A}}} K$. Allora per definizione $a \lhd_{\mathcal{A}} K$. Dato che f è un morfismo di $\mathbf{SFTop}^*$, $f(a) \lhd_{\mathcal{B}} f(K)$, e poiché $f(K)$ è finito, $f(a) \lhd_{\prec_{\lhd_{\mathcal{B}}}} f(K)$. La condizione *4* vale banalmente poiché il predicato di positività è lo stesso.

Viceversa, ogni morfismo g tra le basi di Stone $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ è un morfismo tra le topologie formali di Stone $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ e $\mathbf{A}(\mathcal{T})$. La dimostrazione è banale, tranne che per la terza condizione. Infatti, sia $a \lhd_{\prec_{\mathcal{S}}} U$. Allora $a \prec_{\mathcal{S}} K$ per qualche $K \subseteq_\omega U$ e quindi, poiché g è un morfismo di basi di Stone, $g(a) \lhd_{\prec_{\mathcal{T}}} g(K)$. Siccome $g(K) \subseteq_\omega g(U)$, allora $g(a) \lhd_{\prec_{\mathcal{T}}} g(U)$.

Dunque $\mathbf{A}$ e $\mathbf{S}$ si estendono a dei funtori che sono l'identità sui morfismi tra $\mathbf{SB}$ e $\mathbf{SFTop}^*$. Quindi il funtore $\mathbf{A}$ è una biiezione sui morfismi, cioè è *pieno e fedele* (cf. [MCL]). Data che per ogni topologia formale di Stone $\mathcal{A}$ si ha $\mathcal{A} \cong \mathbf{A}(\mathbf{S}(\mathcal{A}))$, il funtore è anche *denso*.

Abbiamo quindi dimostrato:

Teorema 2.1.10 *La categoria* $\mathbf{SFTop}^*$ *delle topologie formali di Stone con i morfismi coerenti è equivalente alla categoria* $\mathbf{SB}$ *delle basi di Stone.*

Osserviamo che la dimostrazione di questa equivalenza, come pure delle altre equivalenze provate in questo capitolo, è costruttiva poiché di fatto definiamo il funtore inverso, in questo caso $\mathbf{S}$. Menzioniamo soltanto il fatto che si può facilmente dare una nozione più generale di morfismo tra basi di Stone, con $f : S \to \mathcal{P}T$, in modo da ottenere una categoria equivalente a $\mathbf{SFTop}$.

2.2 La rappresentazione pointfree dei frames coerenti e dei reticoli distributivi

In questa sezione mostreremo come le basi di Stone diano una reppresentazione costruttiva dei reticoli distributivi e metteremo in relazione questo con la usuale versione *pointfree* della rappresentazione di Stone, basata sui *frames coerenti* (vedi [J], II.3.4).

Poiché le basi di Stone sono dotate di un predicato costruttivo di positività, tratteremo qui una struttura più ricca di quella di reticolo distributivo, precisamente quella di reticolo distributivo con un predicato che riflette le proprietà di *Pos*. Diciamo che $\_ \#0$ è un predicato di *apartness da* 0 in un reticolo distributivo L se valgono le proprietà seguenti per ogni $a \in L$ e $K \subseteq_\omega L$:

$$\frac{a\#0 \quad a \leq \vee K}{(\exists b \in K)(b\#0)}\ (m) \qquad\qquad \frac{a\#0 \to a \leq \vee K}{a \leq \vee K}\ (p)$$

cioè se valgono le proprietà corrispondenti a *monotonicity* e *positivity* nella forma

$$\frac{Pos(a) \to a \lhd U}{a \lhd U} .$$

Il nome "apartness" è giustificato dal fatto che il predicato $\_ \#0$ soddisfa, come si vede facilmente, la seguente condizione

$$\neg(a\#0) \leftrightarrow a = 0, \tag{2.2}$$

che è un'istanza di una delle proprietà che definiscono un predicato di apartness (cf. [TvD]). Così un reticolo con apartness da 0 ha una uguaglianza a 0 *stabile*, cioè tale che $\neg\neg(a = 0)$ vale se e solo se $a = 0$ vale. D'altra parte, possiamo provare *classicamente* che il predicato definito da $\neg(a = 0)$ è un predicato di apartness da 0. Questo è il più debole predicato di apartness da 0 come si vede dalla condizione (2.2).

Un morfismo tra reticoli distributivi con apartness

$$f : (L_1, \#_1) \to (L_2, \#_2)$$

è un morfismo di reticoli tale che, per ogni $a \in L_1$,

$$f(a)\#_2 0 \to a\#_1 0.$$

La categoria dei reticoli distributivi con apartness sarà indicata con $\mathbf{DLat}_\#$.

Dato un reticolo distributivo con apartness da 0, $(L, \#)$, sia $\mathcal{S}_L$ la *base di Stone associata a* L, definita da $\mathcal{S}_L \equiv \langle L, \wedge, 1, \prec_L, Pos_L\rangle$, ove poniamo

$$\begin{array}{rcl} a \prec_L K & \equiv & a \leq \vee K \\ Pos_L(a) & \equiv & a\#0. \end{array}$$

Viceversa, data una base di Stone $\mathcal{S} \equiv \langle S, \cdot, 1, \prec, Pos\rangle$, otteniamo un reticolo distributivo con apartness da 0 definendo

$$Sat(\mathcal{S}) \equiv \{\mathcal{S}K : K \subseteq_\omega S\}, \ \text{ove} \ \ \mathcal{S}K \equiv \{a \in S : a \prec K\}.$$

Allora $Sat(\mathcal{S})$, con le operazioni definite da

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}K \vee \mathcal{S}L & \equiv & \mathcal{S}(K \cup L) \\ \mathcal{S}K \wedge \mathcal{S}L & \equiv & \mathcal{S}K \cap \mathcal{S}L \end{array}$$

massimo e minimo dati da $\mathcal{S}\{1\}$ e $\mathcal{S}\emptyset$ rispettivamente e apartness

$$\mathcal{S}K\#0 \equiv Pos(K) ,$$

è un reticolo distributivo con apartness da 0. $Sat(\mathcal{S})$ è detto il reticolo dei (sottoinsiemi) *saturi* della base di Stone $\mathcal{S}$.

Quindi abbiamo:

Proposizione 2.2.1 *Ogni reticolo distributivo L è isomorfo al reticolo dei (sottoinsiemi) saturi della base di Stone $\mathcal{S}_L$.*

Dimostrazione: Per prima cosa osserviamo che ogni sottoinsieme saturo di $\mathcal{S}_L$ è la saturazione di un singoletto, poiché per ogni $K \subseteq_\omega L$, $\mathcal{S}K = \mathcal{S}\{\vee K\}$. Quindi l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \phi : & L & \rightarrow & Sat(\mathcal{S}_L) \\ & a & \mapsto & \mathcal{S}\{a\} \end{array}$$

è suriettiva. Poiché $S\{a\}$ è uguale a $\{b \in L : b \leq a\}$, che sarà denotato con $\downarrow a$ per brevità, ϕ è chiaramente iniettiva. Questa applicazione è un morfismo di reticoli perché $\phi(a \vee b) \equiv \mathcal{S}\{a \vee b\} = \mathcal{S}\{a, b\} \equiv \mathcal{S}\{a\} \vee \mathcal{S}\{b\}$; inoltre ϕ rispetta l'inf poiché $\downarrow (a \wedge b) = (\downarrow a) \cap (\downarrow b)$. Il massimo è rispettato per definizione e così pure il minimo dato che $\mathcal{S}\{0\} = \mathcal{S}\emptyset$. Infine ϕ è un isomorfismo di reticoli con apartness poiché, per ogni $a \in L$, $\mathcal{S}\{a\}\#0$ equivale a $Pos_L(a)$ che equivale a $a\#0$. □

Sia $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ un morfismo di basi di Stone. Allora è facile dimostrare che l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} Sat(f) : & Sat(\mathcal{S}) & \rightarrow & Sat(\mathcal{T}) \\ & \mathcal{S}K & \mapsto & \mathcal{T}(f(K)) \end{array}$$

è un morfismo di reticoli con apartness, e la funtorialità è immediata. Per la proposizione sopra enunciata, Sat è un funtore denso. Inoltre abbiamo:

Lemma 2.2.2 *Il funtore Sat determina una corrispondenza biunivoca tra* $\mathbf{SB}(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ *e* $\mathbf{DLat}_\#(Sat(\mathcal{S}), Sat(\mathcal{T}))$.

Dimostrazione: Siano $f, g \in \mathbf{SB}(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ e supponiamo $Sat(f) = Sat(g)$. Allora per ogni $a \in S$, $Sat(f)(\mathcal{S}\{a\}) = Sat(g)(\mathcal{S}\{a\})$, cioè $\mathcal{T}f(a) = \mathcal{T}g(a)$, i.e. $f(a) =_\mathcal{T} g(a)$. Per definizione di uguaglianza tra morfismi coerenti, $f = g$, cosicché l'iniettività è dimostrata. Per quanto riguarda la suriettività, sia $h \in \mathbf{DLat}_\#(Sat(\mathcal{S}), Sat(\mathcal{T}))$. Siccome per ogni $a \in S$, $h(\mathcal{S}\{a\}) \in Sat(\mathcal{T})$, allora sappiamo che $h(\mathcal{S}\{a\}) = \mathcal{T}(K_a)$, per un opportuno sottoinsieme finito K_a di T. Definiamo $f : S \rightarrow \mathcal{P}_\omega T$ mediante $f(a) \equiv K_a$. A questo punto, la verifica che f è un morfismo di basi di Stone è un controllo di routine. □

Il lemma sopra enunciato ed il teorema 2.1.10 dimostrano il seguente:

Teorema 2.2.3 *La categoria* $\mathbf{DLat}_\#$ *dei reticoli distributivi con apartness è equivalente alla categoria* **SB** *delle basi di Stone con i morfismi coerenti e alla categoria* $\mathbf{SFTop}^*$ *delle topologie formali di Stone con i morfismi coerenti.*

Prima di continuare con la rappresentazione dei reticoli distributivi mediante frames coerenti, introduciamo la categoria dei frames con apartness da 0. Di fatto, forniremo qui un'estensione del teorema di rappresentazione per i frames (cf. [BatS]) mostrando che la categoria dei frames con apartness da 0 è equivalente alla categoria delle topologie formali.

L'apartness da 0 in un frame è definita come l'apartness da 0 in un reticolo, tranne per il fatto che dobbiamo considerare sup arbitrari, cioè richiediamo:

$$\frac{a\#0 \quad a \leq \vee U}{(\exists b \in U)(b\#0)}\ (m) \qquad\qquad \frac{a\#0 \rightarrow a \leq \vee U}{a \leq \vee U}\ (p).$$

Dato un predicato $\_\ \#0$ di apartness da 0 sulla base S di un frame F, possiamo estenderlo all'intero frame F definendo, per $a \in F$,

$$a\#_F 0 \equiv (\exists b \in S)(b \leq a \ \&\ b\#0).$$

È infatti facile dimostrare che, per ogni $a \in S$, $a\#_F 0$ equivale a $a\#0$, cioè $\_\ \#_F 0$ estende $\_\ \#0$, e che $\_\ \#_F 0$ è pure un predicato di apartness da 0.

Diciamo che un morfismo di frames è un morfismo di frames con apartness da 0 tra $(F_1, \#_1)$ e $(F_2, \#_2)$ se, per ogni $a \in S_1$ (base di F_1), vale

$$f(a)\#_2 0 \rightarrow a\#_1 0.$$

Denoteremo con $\mathbf{Frm}_\#$ la categoria così ottenuta e la chiameremo la categoria dei frames con apartness.

Sia Sat il funtore che associa ad una topologia formale $\mathcal{A}$ il frame dei suoi sottoinsiemi saturi, $Sat(\mathcal{A}) \equiv \{\mathcal{A}U : U \subseteq S\}$ con operazioni di inf finito e di sup arbitrario date da

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}U \wedge \mathcal{A}V & \equiv & \mathcal{A}U \cap \mathcal{A}V, \\ \vee_{i \in I}\mathcal{A}U_i & \equiv & \mathcal{A}(\cup_{i\in I} U_i). \end{array}$$

Una base di $Sat(\mathcal{A})$ è data dalle saturazioni dei singoletti di S, cioè

$$\{\mathcal{A}\{a\} : a \in S\}.$$

Su tale base un predicato di apartness da 0 è definito da:

$$\mathcal{A}\{a\}\#_{Sat} 0 \ \equiv \ Pos(a).$$

Se $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ è un morfismo di topologie formali, allora

$$Sat(f) : Sat(\mathcal{A}) \rightarrow Sat(\mathcal{B})$$

è definito da

$$Sat(f)(\mathcal{A}U) \equiv \mathcal{B}(f(U))$$

e risulta essere un morfismo tra frames con apartness.

Il funtore Sat è denso poiché per ogni $(F, \#) \in \mathbf{Frm}_{\#}$ possiamo costruire una topologia formale $\mathcal{A}$ tale che $(F, \#) \cong (Sat(\mathcal{A}), \#_{Sat})$. Sia S una base di F e definiamo, per ogni $a \in S$, $U \subseteq S$:

$$\begin{array}{rcl} a \lhd U & \equiv & a \leq \vee U, \\ Pos(a) & \equiv & a\#0. \end{array}$$

Allora $\mathcal{A} \equiv \langle S, \cdot, 1, \lhd, Pos \rangle$ è una topologia formale e l'applicazione

$$\begin{array}{rcl} (Sat(\mathcal{A}), \#_{Sat}) & \rightarrow & (F, \#) \\ \mathcal{A}U & \mapsto & \vee U \end{array}$$

determina un isomorfismo tra frames con apartness. Inoltre l'assegnazione

$$\begin{array}{rcl} Sat : \mathbf{FTop}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) & \rightarrow & \mathbf{Frm}_{\#}(Sat(\mathcal{A}), Sat(\mathcal{B})) \\ f & \mapsto & Sat(f) \end{array}$$

è una biiezione, cioè Sat è pieno e fedele. Possiamo quindi concludere:

Teorema 2.2.4 *La categoria delle topologie formali* **FTop** *è equivalente alla categoria dei frames con apartness da* 0 $\mathbf{Frm}_{\#}$.

L'equivalenza tra $\mathbf{SFTop}^*$ e la categoria dei frames coerenti si otterrà ora come un caso particolare del teorema 2.2.4. Richiamiamo dapprima dalla letteratura alcune definizioni e proprietà di base riguardanti i frames coerenti (cf. [J]).

Definizione 2.2.5 *Sia F un frame. Diciamo che un elemento a di F è* compatto *(* finito*) se per ogni $U \subseteq F$ tale che $a \leq \vee U$ esiste $K \subseteq_\omega U$ tale che $a \leq \vee K$.*

Se F è il frame degli aperti di uno spazio topologico, si ottiene l'usuale definizione di aperto compatto. Gli elementi compatti di un frame formano un sup-semireticolo, infatti abbiamo:

Lemma 2.2.6 *Sia F un frame. Allora:*

1. *0 è compatto;*
2. *Se a e b sono compatti, allora $a \vee b$ è compatto.*

In generale, gli elementi compatti di un frame non sono chiusi per inf. Questo fatto giustifica la seguente definizione:

Definizione 2.2.7 *Un frame F è* coerente *se:*

1. *Gli elementi compatti $K(F)$ di F formano un sottoreticolo di F;*
2. *Ogni elemento di F è sup di elementi compattti, cioè $K(F)$ genera F.*

I frames coerenti costituiscono una categoria **CohFrm** i cui oggetti sono frames coerenti e i cui morfismi $f : F_1 \to F_2$ sono morfismi coerenti di frames, cioè applicazioni che preservano gli inf finiti ed i sup arbitrari e che mandano $K(F_1)$ in $K(F_2)$. Fornendo ai frames coerenti un predicato di apartness da 0, otteniamo la categoria $\mathbf{CohFrm}_{\#}$ dei frames coerenti con apartness.

Dimostreremo ora che l'equivalenza enunciata da 2.2.4 si restringe ad un'equivalenza tra $\mathbf{SFTop}^*$ e $\mathbf{CohFrm}_{\#}$. Questo ci permetterà di usare la nozione di topologia formale di Stone (o equivalentemente di base di Stone) in luogo della nozione di frame coerente con apartness da 0.

Al fine di dimostrare che per ogni topologia formale di Stone $\mathcal{A}$, $Sat(\mathcal{A})$ è un frame coerente, dimostriamo prima un lemma che caratterizza gli elementi compatti di $Sat(\mathcal{A})$ in termini di coperture.

Lemma 2.2.8 *Sia $\mathcal{A}$ una topologia formale e sia $U \in Sat(\mathcal{A})$. Allora U è compatto in $Sat(\mathcal{A})$ se e solo se per ogni $V \in Sat(\mathcal{A})$,*

$$U \lhd V \to U \lhd L$$

per un opportuno sottoinsieme finito L di V.

Dimostrazione: Supponiamo che U sia compatto in $Sat(\mathcal{A})$ ed assumiamo $U \lhd V$. Poiché $\mathcal{A}V = \vee_{a \in V}\mathcal{A}\{a\}$, questa ipotesi può essere equivalentemente espressa dalla validità della disuguaglianza $U \leq \vee_{a \in V}\mathcal{A}\{a\}$ nel frame $Sat(\mathcal{A})$. Per la compattezza di U in $Sat(\mathcal{A})$, esiste $L \subseteq_\omega V$ tale che $U \leq \vee_{a \in L}\mathcal{A}(a)$, che è equivalente a $U \lhd L$. Viceversa, sia $U \leq \vee_{i \in I}V_i$, ove $V_i \in Sat(\mathcal{A})$. Allora $U \lhd \cup_{i \in I}V_i$, quindi per ipotesi esiste $L \subseteq_\omega \cup_{i \in I}V_i$ tale che $U \lhd L$. Sia I_0 il sottoinsieme finito di I tale che $L \subseteq \cup_{i \in I_0}V_i$. Allora $U \lhd \cup_{i \in I_0}V_i$, cioè $U \leq \vee_{i \in I_0}V_i$, quindi U è compatto nel frame $Sat(\mathcal{A})$. □

Osserviamo come corollario il fatto seguente. Sia U un elemento compatto del frame $Sat(\mathcal{A})$. Allora esiste $K \subseteq_\omega U$ tale che $U = \mathcal{A}(K)$. Infatti, per *reflexivity* $U \lhd U$, e quindi, per il lemma sopra enunciato, esiste $K \subseteq_\omega U$ tale che $U \lhd K$. Poiché vale in generale che $K \lhd U$, abbiamo $U =_{\mathcal{A}} K$, e quindi, dato che U è $\mathcal{A}$-saturo, $U = \mathcal{A}(K)$.

Si osservi comunque che il viceversa non vale necessariamente, ed infatti U può essere la saturazione di un sottoinsieme finito di S senza essere compatto.

Invece, nel caso in cui la topologia formale $\mathcal{A}$ è di Stone, le saturazioni dei singoletti sono dei compatti, per il lemma 2.2.8 e la definizione di copertura di Stone. Quindi, per il lemma 2.2.6, la saturazione di ogni sottoinsieme finito di S è un compatto. Possiamo dunque concludere:

Proposizione 2.2.9 *Sia $\mathcal{A}$ una topologia formale di Stone. Allora U è compatto in $Sat(\mathcal{A})$ se e solo se esiste $K \subseteq_\omega U$ tale che $U = \mathcal{A}(K)$.*

Definiamo $Sat_\omega(\mathcal{A}) \equiv \{\mathcal{A}K : K \subseteq_\omega S\}$. Quindi si ottiene facilmente il seguente risultato:

Proposizione 2.2.10 *Sia $\mathcal{A}$ una topologia formale. Allora $\mathcal{A}$ è una topologia formale di Stone se e solo se gli elementi compatti di $Sat(\mathcal{A})$ coincidono con $Sat_\omega(\mathcal{A})$.*

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente:

Teorema 2.2.11 *Per ogni topologia formale di Stone $\mathcal{A}$, $Sat(\mathcal{A})$ è un frame coerente.*

Dimostrazione: Per dimostrare che $Sat_\omega(\mathcal{A})$ è un sottoreticolo di $Sat(\mathcal{A})$, dobbiamo solo controllare che è chiuso rispetto all'operazione di inf finito. Chiaramente il massimo elemento di $Sat(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}\{1\}$, è compatto. Supponiamo quindi U, $V \in Sat_\omega(\mathcal{A})$. Per la proposizione 2.2.9, esistono $K \subseteq_\omega U$ e $L \subseteq_\omega V$ tali che $U = \mathcal{A}K$ e $V = \mathcal{A}L$. Ricordiamo che in ogni topologia formale $\mathcal{A}$ l'uguaglianza $\mathcal{A}U \cap \mathcal{A}V = \mathcal{A}(U \cdot V)$ vale per ogni $U, V \subseteq S$. Allora $U \wedge V \equiv U \cap V = \mathcal{A}(U \cdot V)$, ed anche $U \wedge V = \mathcal{A}(K \cdot L)$, ove $K \cdot L \subseteq_\omega U \cdot V$. Quindi, ancora per la proposizione 2.2.9, $U \wedge V$ è compatto. Infine, per il lemma 2.1.2, $Sat_\omega(\mathcal{A})$ genera $Sat(\mathcal{A})$. □

Si osservi che la $\mathcal{S}$-saturazione e la $\mathbf{A}(\mathcal{S})$-saturazione coincidono sui sottoinsiemi finiti di S, cioè per ogni $K \subseteq_\omega S$, $\mathcal{S}K = (\mathbf{A}(\mathcal{S}))K$. Quindi gli elementi compatti del frame coerente $Sat(\mathbf{A}(\mathcal{S}))$ sono esattamente gli elementi di $Sat(\mathcal{S})$. Poiché $Sat(\mathcal{S})$ genera (chiudendo per unioni dirette) il frame coerente con apartness $Sat(\mathbf{A}(\mathcal{S}))$, la proposizione 2.2.1 ed il teorema 2.2.11 insieme danno:

Corollario 2.2.12 Rappresentazione di Stone pointfree per i reticoli distributivi. *Ogni reticolo distributivo (con apartness) è isomorfo al reticolo degli elementi compatti di un frame coerente (con apartness).*

Si noti che la dimostrazione del teorema di rappresentazione di Stone pointfree sopra enunciato è completamente costruttiva e non richiede l'uso del teorema del filtro primo o di suoi equivalenti.

Possiamo ora dimostrare il reciproco di 2.2.11, cioè che ogni frame coerente con apartness è isomorfo a $Sat(\mathcal{A})$ per una opportuna topologia formale di Stone $\mathcal{A}$. Sia dunque F un frame coerente con apartness $\_\#0$, e si consideri la base di Stone $\mathcal{S}_L$ associata al sottoreticolo L degli elementi compatti di F. Per i risultati della sezione 2.1, si ottiene una topologia formale di Stone $\mathcal{A}$ definendo $\mathcal{A} \equiv \mathbf{A}(\mathcal{S}_L)$. Si osservi che per ogni $a \in L$, $U \subseteq L$, vale $a \lhd_{\mathcal{A}} U$ se e solo se esiste $K \subseteq_\omega U$ tale che $a \leq \vee K$ cioè se e solo se $a \in \mathcal{I}(U)$, ove $\mathcal{I}(U)$ denota l'ideale generato da U in L. Quindi $Sat(\mathcal{A})$ coincide con il frame degli ideali di L, che indicheremo con $Idl(L)$. Si consideri ora l'applicazione

$$\begin{array}{rccl} \phi: & F & \rightarrow & Sat(\mathcal{A}) \\ & a & \mapsto & \downarrow_L a \equiv \{b \in L : b \leq a\}. \end{array}$$

Poiché L genera F, ϕ è iniettiva. Per quanto riguarda la suriettività, si osservi che per ogni sottoinsieme $\mathcal{A}$-saturo $\mathcal{A}U$, $\mathcal{A}U = \downarrow \vee U$ dato che per ogni $b \in L$, $b \in \mathcal{A}U$ se e solo se esiste $K \subseteq_\omega U$ tale che $b \leq \vee K$ se e solo se (per compattezza di b) $b \leq \vee U$.

La biiezione ϕ è un morfismo di frame dato che è una applicazione monotona con inversa pure monotona, data da $\psi(I) \equiv \vee I$, per ogni $I \in Idl(L)$. Invero ϕ è un morfismo di frames con apartness poiché per ogni $a \in K(F)$, $\phi(a)\#_{Sat}0$ se e solo se $\downarrow_L a\#_{Sat}0$ se e solo se $a\#_F 0$. Possiamo riassumere il risultato sopra dimostrato con il seguente:

Proposizione 2.2.13 *Per ogni frame coerente con apartness F esiste una topologia formale di Stone $\mathcal{A}$ tale che $F \cong Sat(\mathcal{A})$. Tale topologia formale $\mathcal{A}$ è data dalla topologia degli ideali del reticolo distributivo degli elementi compatti di F.*

Se F è il frame coerente dei sottoinsiemi saturi di una topologia formale di Stone, utilizzando la caratterizzazione degli elementi compatti di $Sat(\mathcal{A})$ fornita da 2.2.10, otteniamo:

Corollario 2.2.14 *Se $\mathcal{A}$ è una topologia formale di Stone, l'applicazione*

$$\begin{array}{rcl} \phi \quad : Sat(\mathcal{A}) & \rightarrow & Idl(Sat_\omega(\mathcal{A})) \\ U & \mapsto & \downarrow U \equiv \{\mathcal{A}K : K \subseteq_\omega U\} \end{array}$$

è un isomorfismo di frame con inversa $\psi(I) \equiv \vee I$.

La proposizione 2.2.13 ed il teorema 2.2.11 danno (dato che la coerenza è preservata da isomorfismi di frame):

Teorema 2.2.15 *Sia F un frame con apartness da 0. Allora F è coerente se e solo se esiste una topologia formale di Stone $\mathcal{A}$ tale che $F \cong Sat(\mathcal{A})$.*

Per la proposizione 2.2.13, $Sat : \mathbf{SFTop}^* \to \mathbf{CohFrm}_{\#}$ è un funtore denso; inoltre è facile vedere che la biiezione sui morfismi data dal teorema 2.2.4 induce una biiezione tra $\mathbf{SFTop}^*(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\mathbf{CohFrm}_{\#}(Sat(\mathcal{A}), Sat(\mathcal{B}))$. Abbiamo quindi:

Teorema 2.2.16 *La categoria* $\mathbf{CohFrm}_{\#}$ *dei frames coerenti con apartness è equivalente alla categoria* $\mathbf{SFTop}^*$ *delle topologie formali di Stone con i morfismi coerenti.*

Il risultato visto sopra, assieme al teorema 2.1.10 ed al teorema 2.2.3, ci dà:

Corollario 2.2.17 *La categoria* $\mathbf{CohFrm}_{\#}$ *dei frames coerenti con apartness è equivalente alla categoria* $\mathbf{SB}$ *delle basi di Stone ed alla categoria* $\mathbf{DLat}_{\#}$ *dei reticoli distributivi con apartness da* 0.

Infine, osserviamo che in tutte le categorie introdotte fino ad ora, i morfismi tra due dati oggetti possono essere ordinati puntualmente e che inoltre i funtori che danno le equivalenze preservano tale ordine. Questo significa che tutte le equivalenze sono in realtà equivalenze di **2**-categorie.

2.3 Spazi formali di Stone e rappresentazione topologica

Al fine di connettere la nostra rappresentazione *pointfree* con quella tradizionale, è necessario recuperare la nozione di punto di una topologia formale di Stone.

Sia $\mathcal{A}$ una topologia formale di Stone. Allora, per definizione, $a \lhd U$ vale se e solo se esiste un sottoinsieme finito K di U tale che $a \lhd K$. Allora la condizione *3* della definizione di punto (formale) di una topologia formale (cf. 1.2) può essere indebolita nella seguente condizione :

$$3'.\quad \frac{\alpha \Vdash a \quad a \lhd K}{(\exists b \in K)(\alpha \Vdash b)} \quad \text{per ogni } a \in S,\ K \subseteq_{\omega} S.$$

e così i punti possono essere definiti direttamente in termini della base di Stone $\mathbf{S}(\mathcal{A})$.

La definizione di punto formale di una topologia formale di Stone può essere riformulata in modo da diventare la nozione più familiare di filtro primo di un opportuno reticolo.

La nozione di filtro in un reticolo è definita nel modo usuale. In un reticolo L dotato di un predicato di apartness da 0, la proprietà di un filtro F di essere proprio è espressa in una forma più forte da

$$a \in F \to a \# 0.$$

Come al solito, un filtro F è detto essere *primo* se per ogni $a, b_i \in L$

$$a \in F, a \leq b_1 \vee \ldots \vee b_n \rightarrow (\exists i \leq n)(b_i \in F).$$

Come preannunciato abbiamo:

Proposizione 2.3.1 *Esiste una biiezione che conserva l'ordine tra i punti formali di una topologia formale di Stone $\mathcal{A}$ e i filtri primi su $Sat_\omega(\mathcal{A})$.*

Dimostrazione: Sia α un punto formale su $\mathcal{A}$ e definiamo

$$\hat{\alpha} \equiv \{\mathcal{A}\{a\} : a \in \alpha\} .$$

Allora $\hat{\alpha}$ è un filtro primo su $Sat_\omega(\mathcal{A})$. Infatti $\mathcal{A}\{1\} \in \hat{\alpha}$ poiché $1 \in \alpha$. L'insieme è chiuso per inf dato che $\mathcal{A}\{a\} \wedge \mathcal{A}\{b\} = \mathcal{A}\{a \cdot b\}$ ed α è chiuso per prodotto. Supponiamo quindi $\mathcal{A}\{a\} \in \hat{\alpha}$ e $\mathcal{A}\{a\} \leq \mathcal{A}\{b_1\} \vee \ldots \vee \mathcal{A}\{b_n\}$, cioè $a \in \alpha$ e $a \lhd \{b_1, \ldots, b_n\}$. Dato che α è un punto formale, esiste $i \leq n$ tale che $b_i \in \alpha$, cioè tale che $\mathcal{A}\{b_i\} \in \hat{\alpha}$. Infine, se $\mathcal{A}\{a\} \in \hat{\alpha}$, allora $a \in \alpha$, quindi vale $Pos(\{a\})$ e dunque $\mathcal{A}\{a\} \#_{Sat} 0$.

Analogamente si dimostra che se F è un filtro primo su $Sat_\omega(\mathcal{A})$, allora

$$F^\circ \equiv \{a \in S : \mathcal{A}\{a\} \in F\}$$

è un punto formale su $\mathcal{A}$. La corrispondenza chiaramente conserva l'ordine ed è biiettiva poiché, per ogni punto formale α di $\mathcal{A}$ e per ogni filtro F di $Sat_\omega(\mathcal{A})$, le uguaglianze $(\hat{\alpha})^\circ = \alpha$ e $\hat{F^\circ} = F$ valgono per definizione. □

Sappiamo che, per ogni topologia formale $\mathcal{A}$, lo spazio formale $Pt(\mathcal{A})$ dei punti formali di $\mathcal{A}$ può essere dotato di una topologia, detta topologia estensionale, avente base costituita dagli

$$ext(a) \equiv \{\alpha \in Pt(\mathcal{A}) : a \in \alpha\}$$

al variare di a in S (cf. capitolo 1).

Abbiamo già accennato nel capitolo 1 al problema dell'estensionalità per una topologia formale. Se $\mathcal{A}$ è una topologia formale di Stone, l'estensionalità può essere dimostrata avvalendosi della logica classica e del teorema del filtro primo. Infatti, per il corollario 2.2.14 e la proposizione 2.3.1, che caratterizzano rispettivamente i sottoinsiemi saturi di $\mathcal{A}$ come ideali di $Sat_\omega(\mathcal{A})$ e i punti di $\mathcal{A}$ come filtri primi su $Sat_\omega(\mathcal{A})$, la condizione sopra enunciata vale se e solo se per ogni ideale I di $Sat_\omega(\mathcal{A})$ e per ogni $a \in Sat_\omega(\mathcal{A})$, $a \notin I$, esiste un filtro primo F tale che $a \in F$ e $F \cap I = \emptyset$. Il lettore può qui riconoscere un ben noto principio non costruttivo (cf. e.g. [Gr]):

Teorema 2.3.2 Teorema del Filtro Primo. *Sia I un ideale di un reticolo distributivo L e sia a un elemento di L tale che $a \notin I$. Allora esiste un filtro primo F di L tale che $I \subseteq L$ e $F \cap I = \emptyset$*

Con la discussione fatta sopra abbiamo dimostrato:

Teorema 2.3.3 *L'estensionalità per le topologie formali di Stone equivale al Teorema del Filtro Primo.*

Diciamo che uno spazio topologico $(X, \Omega X)$ è *sobrio* se è omeomorfo allo spazio dei punti formali sul suo frame degli aperti, cioè se $X \cong Pt(\Omega X)$ dove lo spazio a destra è dotato della topologia estensionale. Uno spazio sobrio X è detto *coerente* (cf. [J]) se la collezione $K(\Omega X)$ dei suoi compatti aperti è chiusa per intersezione e forma una base per ΩX. Allora, semplicemente "aggiungendo i punti" al nostro risultato pointfree della sezione 2.2, otteniamo:

Teorema 2.3.4 Teorema di rappresentazione di Stone per i reticoli distributivi. *Ogni reticolo distributivo con apartness è isomorfo al reticolo dei compatti aperti di uno spazio topologico coerente.*

Dimostrazione: Per il corollario 2.2.12 ogni reticolo distributivo con apartness L è isomorfo al reticolo degli elementi compatti di un frame coerente con apartness, quindi, per la proposizione 2.2.10, ai sottoinsiemi saturi compatti di una topologia formale di Stone $\mathcal{A}$, cioè

$$L \cong K(Sat(\mathcal{A})).$$

Per il teorema 2.3.3 una tale $\mathcal{A}$ è estensionale e quindi esiste un isomofismo di frame tra $Sat(\mathcal{A})$ e $\Omega Pt(\mathcal{A})$. Poiché la compattezza è conservata dall'isomorfismo di frame (e gli aperti compatti di uno spazio X sono esattamente gli elementi compatti del frame ΩX) la tesi è dimostrata. □

Il risultato visto sopra può essere riformulato in un linguaggio categoriale. Dati due spazi coerenti $(X, \Omega X)$ e $(Y, \Omega Y)$, un'applicazione $f : X \to Y$ è detta *coerente* se f^{-1} è un morfismo coerente di frame tra ΩY e ΩX. Gli spazi coerenti con i morfismi coerenti formano una categoria che denoteremo con **CohSpa**. Per un risultato di base in topologia pointfree (cf. teorema 1.2.3), la categoria degli spazi sobri è duale della categoria dei frames *spaziali*, cioè dei frames che hanno origine da topologie formali estensionali. Quindi, per restrizione dell'equivalenza, la categoria degli spazi coerenti con le mappe coerenti è duale della categoria dei frames coerenti con i morfismi coerenti, che è spaziale per 2.3.3. Quindi, componendo la dualità con l'equivalenza data dal teorema 2.2.17, otteniamo:

Teorema 2.3.5 *La categoria* $\mathbf{DLat}_{\#}$ *dei reticoli distributivi con apartness è duale della categoria* **CohSpa** *degli spazi coerenti con i morfismi coerenti.*

Capitolo 3

Prodotto di spazi formali e teorema di Tychonoff costruttivo

In questo capitolo viene data una semplice definizione induttiva (cf. [A]) del prodotto di topologie formali che consente di affrontare e risolvere il problema di una dimostrazione costruttiva della versione pointfree del teorema di Tychonoff. Il nostro punto di partenza è la dimostrazione di Coquand in [C], che utilizza i coverages di Johnstone. La nostra prova utilizza invece le topologie formali e ciò ci consente di trasformare la prova di Coquand in una prova per induzione sull'ultima regola usata in una derivazione di una copertura. Difatti, la possibilità di generare una copertura induttivamente, assieme ad una modifica di una proprietà proposta da Coquand, ci permette di presentare l'intera prova del teorema di Tychonoff entro la teoria dei tipi. C'è quindi un netto vantaggio rispetto a precedenti prove pointfree del teorema di Tychonoff note nella letteratura (cf. [J], [J1], [JV], [Kr]). Qui non ci limitiamo ad evitare l'assioma di scelta, ma otteniamo una prova costruttiva in un senso molto forte: infatti la nostra prova è un algoritmo che, data una copertura per lo spazio prodotto, fornisce un sottoricoprimento finito, ammesso che esistano simili algoritmi per ogni spazio componente. Poiché la teoria dei tipi è stata implementata su computer (cf. [Ma]), una formalizzazione completa della nostra prova sarebbe al tempo stesso un programma che esegue il compito di estrarre un ricoprimento finito da un dato ricoprimento dello spazio prodotto.

Il capitolo è organizzato come segue: dopo aver dato la definizione di spazio prodotto, dimostriamo il teorema di Tychonoff sia per il prodotto topologico binario, sia per quello infinito. La prova è quindi confrontata con quella di Johnstone e Vickers in [JV]. Nell'appendice si fornisce la dimostrazione dettagliata che il prodotto definito è un coprodotto, in senso categoriale, nella categoria **FTop** e fornisce il prodotto degli spazi formali corrispondenti.

3.1 Topologia prodotto

La nozione di topologia formale induttivamente generata introdotta in 1.1.3 è particolarmente utile nel definire la topologia (co)prodotto:

Definizione 3.1.1 (Topologia (Co)prodotto) *Date le topologie formali*

$$\mathcal{A} \equiv \langle S, \cdot, 1_S, \lhd_{\mathcal{A}}, Pos_{\mathcal{A}} \rangle$$
$$\mathcal{B} \equiv \langle T, \cdot, 1_T, \lhd_{\mathcal{B}}, Pos_{\mathcal{B}} \rangle \ ,$$

la topologia formale (co)prodotto *è definita da*

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \equiv \langle S \times T, \cdot, (1_S, 1_T), \lhd_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}, Pos_{\mathcal{A}+\mathcal{B}} \rangle,$$

ove $\langle S \times T, \cdot, (1_S, 1_T) \rangle$ *è il monoide sul prodotto cartesiano* $S \times T$ *con il prodotto definito per componenti,* $\lhd_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}$ *è la copertura generata dalla relazione infinitaria* R *definita da*

$$\begin{array}{rcll} R((a,b), U \times \{b\}) & \equiv & a \lhd_{\mathcal{A}} U & \textit{per ogni } b \in T \\ R((a,b), \{a\} \times V) & \equiv & b \lhd_{\mathcal{B}} V & \textit{per ogni } a \in S \end{array}$$

e il predicato di positività è definito da

$$Pos_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}(a,b) \equiv Pos_{\mathcal{A}}(a) \ \& \ Pos_{\mathcal{B}}(b).$$

La definizione ha senso dato che è facile vedere che le condizioni su R e Pos per generare una topologia formale (cf. proposizione 1.1.3) sono soddisfatte. Inoltre seguirà dalla dimostrazione in 3.4 che $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ è il coprodotto categoriale delle topologie formali $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ e fornisce quindi il prodotto categoriale degli spazi formali corrispondenti.

Osserviamo infine che abbiamo preferito la presentazione data sopra per la topologia (co)prodotto invece della più simmetrica ed equivalente

$$R((a,b), W) \equiv \ (W = U \times V) \ \& \ a \lhd_{\mathcal{A}} U \ \& \ b \lhd_{\mathcal{B}} V$$

perché la prima permette un'estensione uniforme al (co)prodotto infinito.

3.2 Il teorema di Tychonoff

Data una topologia formale $\mathcal{A} \equiv \langle S, \cdot, 1_S, \lhd_{\mathcal{A}}, Pos_{\mathcal{A}} \rangle$, seguendo la definizione standard, diremo che un aperto di base $a \in S$ è *compatto* in $\mathcal{A}$ se, da $a \lhd_{\mathcal{A}} U$ segue l'esistenza di un sottoinsieme finito U_0 di U, tale che $a \lhd_{\mathcal{A}} U_0$.

Il seguente lemma sarà utile.

Lemma 3.2.1 *Sia $\mathcal{A} \equiv \langle S, \cdot_S, 1_S, \lhd_{\mathcal{A}}, Pos_{\mathcal{A}} \rangle$ una topologia formale e supponiamo $U_1, \ldots, U_n, M \subseteq S$. Allora*

$$(U_1 \cup M) \cdot \ldots \cdot (U_n \cup M) \lhd_{\mathcal{A}} (\bullet_{i \leq n} U_i) \cup M$$

ove $\bullet_{i \leq n} U_i \equiv U_1 \cdot \ldots \cdot U_n$.

Dimostrazione: Sia $x \in (U_1 \cup M) \cdot \ldots \cdot (U_n \cup M)$, i.e. $x = y_1 \cdot \ldots \cdot y_n$ con $y_i \in U_i \cup M$ per ciascun $i \leq n$.

Se $y_i \in M$ per qualche $i \leq n$, allora per *reflexivity* e $\cdot$ *-left*, $x \lhd_{\mathcal{A}} M$ e quindi *a fortiori* $x \lhd_{\mathcal{A}} (\bullet_{i \leq n} U_i) \cup M$. Altrimenti, per ogni $i \leq n$, $y_i \in U_i$, allora $y_i \lhd_{\mathcal{A}} U_i$. Per $\cdot$ *-left* e $\cdot$ *-right*, $x \lhd_{\mathcal{A}} \bullet_{i \leq n} U_i$ e quindi $x \lhd_{\mathcal{A}} (\bullet_{i \leq n} U_i) \cup M$.

Si osservi che la prova non fa uso della decidibilità della relazione $\in$, dato che è ottenuta attraverso una $\vee$*-elimination*. □

Per dimostrare il teorema di Tychonoff definiamo un predicato P:

Definizione 3.2.2 *Siano $x \in S$, $y \in T$, $Z \subseteq S \times T$. Poniamo*

$$\begin{aligned} P(x, y, Z) \equiv \quad & (\forall M \in \mathcal{P}_\omega(S))(\forall N \in \mathcal{P}_\omega(T)) \\ & ((a \lhd \{x\} \cup M \ \& \ b \lhd \{y\} \cup N) \rightarrow \\ & (\exists U \in \mathcal{P}_\omega(S))(\exists V \in \mathcal{P}_\omega(T)) \\ & \quad (a \lhd U \cup M \ \& \ b \lhd V \cup N \ \& \ U \times V \subseteq (S \times T) \cdot Z)). \end{aligned}$$

Questa è una variante del predicato proposto da Coquand in [C] per due aspetti. In primo luogo, seguendo un suggerimento dovuto a Coquand stesso, restringiamo la quantificazione a sottoinsiemi *finiti* di S e T, che sono elementi degli insiemi $\mathcal{P}_\omega(S)$ e $\mathcal{P}_\omega(T)$, invece di quantificare sulla collezione di tutti i sottoinsiemi di S e T, che non avrebbe alcun significato costruttivo. In questo modo evitiamo l'impredicatività e possiamo sviluppare la prova in un ambito completamente costruttivo. In secondo luogo richiediamo $U \times V \subseteq (S \times T) \cdot Z$, invece di $U \times V \subseteq Z$, al fine di evitare la restrizione ai ricoprimenti chiusi in giù, che è essenziale nella prova di Coquand. Siamo ora in grado di dimostrare:

Proposizione 3.2.3 (Teorema di Tychonoff binario) *Se a e b sono compatti nelle topologie formali $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ rispettivamente, allora (a,b) è compatto in $\mathcal{A}+\mathcal{B}$.*

Dimostrazione: La tesi equivale dimostrare che, ogniqualvolta $(a,b) \lhd W$ in $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, esiste $W_0 \subseteq_\omega W$ tale che $(a,b) \lhd W_0$. Per ottenere questo risultato, basta provare che il predicato sopra definito soddisfa:

1. Se vale $P(a,b,W)$ allora esiste $W_0 \subseteq_\omega W$ tale che $(a,b) \lhd W_0$;

2. Se $(x,y) \lhd Z$ allora vale $P(x,y,Z)$.

Mostreremo ora che P soddisfa le condizioni 1 e 2.

1. Se vale $P(a,b,W)$, allora in particolare, con $M = N = \emptyset$, otteniamo che esistono $U \subseteq_\omega S$ e $V \subseteq_\omega T$ tali che $a \lhd U$, $b \lhd V$ e $U \times V \subseteq (S \times T) \cdot W$. Quindi, per gli assiomi del prodotto e qualche calcolo, si ottiene che $(a,b) \lhd U \times V$. Supponiamo ora che $(u,v) \in U \times V$. Allora esistono $(s,t) \in S \times T$ e $w \in W$ tali che $(u,v) = (s,t) \cdot w$ e quindi, per $\cdot$ *-left*, $(u,v) \lhd w$. Dato che $U \times V$ è finito, w varia in un sottoinsieme finito W_0 di W, e quindi, per ogni $(u,v) \in U \times V$, $(u,v) \lhd W_0$. Infine, per *transitivity*, segue che $(a,b) \lhd W_0$.

2. Dimostreremo questo punto per induzione sulla derivazione di

$$(x,y) \lhd Z$$

analizzando l'ultima regola applicata.

Supponiamo che l'ultima regola applicata sia un assioma, ad esempio

$$\frac{x \lhd U}{(x,y) \lhd U \times \{y\}}$$

per cui $Z \equiv U \times \{y\}$, e supponiamo che, per un arbitrario $M \subseteq_\omega S$,

$$a \lhd \{x\} \cup M.$$

Allora, poiché $x \lhd U$, otteniamo $a \lhd U \cup M$. Per l'assunzione sulla compattezza di a, esiste $U_0 \subseteq_\omega U$ tale che $a \lhd U_0 \cup M$. Supponiamo inoltre che per un arbitrario $N \subseteq_\omega T$, $b \lhd \{y\} \cup N$. Poiché valgono

$$U_0 \times \{y\} \subseteq_\omega U \times \{y\} \equiv Z \quad \text{e} \quad Z \subseteq (S \times T) \cdot Z,$$

dato che $(1_S, 1_T) \in S \times T$, abbiamo provato che vale $P(x,y,Z)$.

Reflexivity:

$$\frac{(x,y) \in Z}{(x,y) \lhd Z}$$

la tesi è evidente ponendo $U \equiv \{x\}$ e $V \equiv \{y\}$ dato che, per la premessa, $\{x\} \times \{y\} \subseteq Z$ ed abbiamo già dimostrato che

$$Z \subseteq (S \times T) \cdot Z \ .$$

$\cdot$ *-left*:

$$\frac{(x_1, y_1) \lhd Z}{(x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2) \lhd Z} \qquad \text{dove } (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2) = (x, y)$$

Supponiamo $a \lhd \{x\} \cup M$; allora siccome $x = x_1 \cdot x_2 \lhd x_1$ abbiamo $a \lhd \{x_1\} \cup M$. Nello stesso modo otteniamo $b \lhd \{y_1\} \cup N$ dalla premessa $b \lhd \{y\} \cup N$. Allora, per ipotesi induttiva applicata a $(x_1, y_1) \lhd Z$, esistono dei sottoinsiemi finiti U, V di S e T rispettivamente tali che $a \lhd U \cup M$ e $b \lhd V \cup N$, con $U \times V \subseteq (S \times T) \cdot Z$.

$\cdot$ *-right*:

$$\frac{(x,y) \lhd Z_1 \qquad (x,y) \lhd Z_2}{(x,y) \lhd Z_1 \cdot Z_2}$$

Supponimo $a \lhd \{x\} \cup M$ e $b \lhd \{y\} \cup N$. Allora per ipotesi induttiva applicata a $(x,y) \lhd Z_1$, esistono $U_1 \subseteq_\omega S$ e $V_1 \subseteq_\omega T$ tali che $a \lhd U_1 \cup M$, $b \lhd V_1 \cup N$ e $U_1 \times V_1 \subseteq (S \times T) \cdot Z_1$. Inoltre, per ipotesi induttiva applicata a $(x,y) \lhd Z_2$, esistono $U_2 \subseteq_\omega S$ e $V_2 \subseteq_\omega T$ tali che $a \lhd U_2 \cup M$, $b \lhd V_2 \cup N$ e $U_2 \times V_2 \subseteq (S \times T) \cdot Z_2$. Allora, per $\cdot$*-right* ed il lemma 3.2.1, $a \lhd (U_1 \cdot U_2) \cup M$ ed analogamente $b \lhd (V_1 \cdot V_2) \cup N$, ove

$$(U_1 \cdot U_2) \times (V_1 \cdot V_2) = (U_1 \times V_1) \cdot (U_2 \times V_2) \subseteq_\omega ((S \times T) \cdot Z_1) \cdot ((S \times T) \cdot Z_2);$$

poiché $((S \times T) \cdot Z_1) \cdot ((S \times T) \cdot Z_2) = (S \times T) \cdot (Z_1 \cdot Z_2)$ la tesi ne segue.

Transitivity:

$$\frac{(x,y) \lhd W \quad W \lhd Z}{(x,y) \lhd Z}$$

Supponiamo $a \lhd \{x\} \cup M$ e $b \lhd \{y\} \cup N$. Allora, per ipotesi induttiva applicata a $(x,y) \lhd W$, esistono $U \subseteq_\omega S$, $V \subseteq_\omega T$ tali che $a \lhd U \cup M$, $b \lhd V \cup N$ e $U \times V \subseteq (S \times T) \cdot W$. Sia $U \equiv \{u_1, \ldots, u_h\}$ e $V \equiv$

$\{v_1, \ldots, v_k\}$. Allora per ogni $i \leq h$, $j \leq k$, esistono $(s,t) \in S \times T$ e $(w^1_{i,j}, w^2_{i,j}) \in W$ tali che $(u_i, v_j) = (s,t) \cdot (w^1_{i,j}, w^2_{i,j})$. Per la definizione per componenti del prodotto e $\cdot$ *-left*, $u_i \lhd w^1_{i,j}$ e $v_j \lhd w^2_{i,j}$, quindi per *transitivity* otteniamo

$$\begin{array}{l} a \lhd w^1_{i,j} \cup \{u_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, u_h\} \cup M \\ b \lhd w^2_{i,j} \cup \{v_1, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_k\} \cup N \ , \end{array}$$

ove $\{u_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, u_h\}$ è un'abbreviazione di $\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_h\}$. Siccome $(w^1_{i,j}, w^2_{i,j}) \in W$, allora, per la premessa minore della regola, $(w^1_{i,j}, w^2_{i,j}) \lhd Z$. Per ipotesi induttiva nuovamente, esistono $W^1_{i,j} \subseteq_\omega S$ e $W^2_{i,j} \subseteq_\omega T$ tali che

$$\begin{array}{l} a \lhd W^1_{i,j} \cup \{u_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, u_h\} \cup M, \\ b \lhd W^2_{i,j} \cup \{v_1, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_k\} \cup N, \\ W^1_{i,j} \times W^2_{i,j} \subseteq (S \times T) \cdot Z. \end{array}$$

Facendo variare j in $\{1, \ldots, k\}$ ed applicando ripetutamente $\cdot$ *-right* ed il lemma 3.2.1, abbiamo $a \lhd \bullet_{j \leq k} W^1_{i,j} \cup \{u_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, u_n\} \cup M$ e quindi, ripetendo lo stesso argomento per ogni $i \leq h$,

$$a \lhd \bullet_{j \leq k} W^1_{1,j} \cup \ldots \cup \bullet_{j \leq k} W^1_{h,j} \cup M \ .$$

Analogamente otteniamo

$$b \lhd \bullet_{i \leq h} W^2_{i,1} \cup \ldots \cup \bullet_{i \leq h} W^2_{i,k} \cup N \ .$$

Per ottenere la conclusione dobbiamo dimostrare che

$$(\bullet_{j \leq k} W^1_{1,j} \cup \ldots \cup \bullet_{j \leq k} W^1_{h,j}) \times (\bullet_{i \leq h} W^2_{i,1} \cup \ldots \cup \bullet_{i \leq h} W^2_{i,k}) \subseteq (S \times T) \cdot Z.$$

Sia $(u,v) \in (\bullet_{j \leq k} W^1_{1,j} \cup \ldots \cup \bullet_{j \leq k} W^1_{h,j}) \times (\bullet_{i \leq h} W^2_{i,1} \cup \ldots \cup \bullet_{i \leq h} W^2_{i,k})$. Allora esistono i^* e j^* tali che $u \in \bullet_{j \leq k} W^1_{i^*,j}$ e $v \in \bullet_{i \leq h} W^2_{i,j^*}$. Allora $u \in S \cdot W^1_{i^*,j^*}$ e $v \in T \cdot W^2_{i^*,j^*}$ e quindi $(u,v) \in (S \times T) \cdot (W^1_{i^*,j^*} \times W^2_{i^*,j^*})$. Poichè per ipotesi $W^1_{i^*,j^*} \times W^2_{i^*,j^*} \subseteq (S \times T) \cdot Z$, abbiamo anche $(S \times T) \cdot (W^1_{i^*,j^*} \times W^2_{i^*,j^*}) \subseteq (S \times T) \cdot Z$ e quindi $(u,v) \in (S \times T) \cdot Z$, dimostrando così la tesi. □

Il teorema di Tychonoff per il prodotto topologico di due spazi segue allora come corollario, considerando nella proposizione sopra dimostrata 1_S e 1_T al posto di a e b.

Vale la pena di notare che la prova continua a valere anche se si elimina il predicato *Pos* nella definizione di spazio formale.

Il caso di un prodotto arbitrario di spazi può essere trattato in modo del tutto simile attraverso una definizione induttiva della topologia coprodotto. Data una famiglia di topologie formali indiciata da un insieme, $\mathcal{A}_i \equiv \langle S_i, \cdot_i, 1_i, \lhd_i, Pos_i \rangle$, $i \in I$, sia

$$\coprod_{i \in I} \mathcal{A}_i \equiv \langle \Pi_\omega(I, S), \diamond, \lambda x.1_x, \lhd, Pos \rangle$$

la topologia formale così definita: il monoide di base consiste dell'insieme $\Pi_\omega(I, S)$ delle funzioni a supporto finito dall'insieme degli indici I alla famiglia indiciata S_i, dove $i \in I$, $\diamond$ è il prodotto per componenti tra funzioni a supporto finito e $\lambda x.1_x$ è l'elemento neutro di tale operazione.

Generalizzando gli assiomi per il prodotto binario, la copertura $\lhd$ viene generata induttivamente dalla relazione infinitaria R definita da

$$R(f, \{\lambda_\omega(i, u, f) : u \in U\}) \equiv f(i) \lhd_i U$$

dove $\lambda_\omega(i, u, f)$ è la funzione a supporto finito il cui valore su j è u se $j = i$ ed $f(j)$ altrimenti.

Infine, il predicato di positività è definito da

$$Pos(f) \equiv (\forall i \in I)\ Pos_i(f(i)).$$

Si rinvia all'appendice 3.4 per la dimostrazione che $\coprod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ è il coprodotto categoriale delle topologie formali $\mathcal{A}_i$.

Proposizione 3.2.4 (Teorema di Tychonoff) *Sia*

$$\coprod_{i \in I} \mathcal{A}_i \equiv \langle \Pi_\omega(I, S), \diamond, \lambda x.1_x, \lhd, Pos \rangle$$

la topologia formale definita come sopra, e sia $a \in \Pi_\omega(I, S)$. Supponiamo che per ogni $i \in I$, $a(i)$ sia compatto in $\mathcal{A}_i$. Allora a è compatto in $\coprod_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

Dimostrazione: Si consideri, per $f \in \Pi_\omega(I, S)$ e $Z \subseteq \Pi_\omega(I, S)$ la seguente proprietà:

$$\begin{aligned} P(f, Z) \equiv \quad & (\forall M \in (\Pi i \in I)(\mathcal{P}_\omega(S_i))) \\ & \quad (a(i) \lhd M(i) \cup \{f(i)\} \rightarrow \\ & \quad (\exists T \in (\Pi i \in I)(\mathcal{P}_\omega(S_i))) \\ & \qquad (\exists K \in \mathcal{P}_\omega(I))(\forall i \in I - K)\ T(i) =_{\mathcal{P}_\omega(S_i)} \{1_i\} \\ & \qquad \&\ (\forall i \in I)\ a(i) \lhd T(i) \cup M(i) \\ & \qquad \&\ \oplus_{i \in I} T(i) \subseteq \Pi_\omega(I, S) \diamond Z)) \end{aligned}$$

ove $\oplus_{i\in I}T(i)$ è il sottoinsieme di $\Pi_\omega(I,S)$ tale che $f \in \oplus_{i\in I}T(i)$ se e solo se, per ogni $i \in I$, $f(i)\varepsilon T(i)$ e $(\Pi i \in I)(\mathcal{P}_\omega(S_i))$ è il tipo prodotto della famiglia di insiemi $\mathcal{P}_\omega(S_i)$, definito come in [ML2].

Si osservi che nella proprietà sopra menzionata la teoria intuizionistica dei tipi ci permette di esprimere una famiglia di sottoinsiemi come un elemento di un tipo di funzioni, evitando così quantificazioni al secondo ordine.

Se l'insieme degli indici I è costituito da due elementi, questa proprietà si riduce a quella data per il caso binario; la richiesta ulteriore qui fatta è che i sottoinsiemi finiti $T(i)$ siano diversi da $\{1_i\}$ solo su un insieme finito di indici, che è garantito a priori per il prodotto binario. Questo ci assicura che $\oplus_{i\in I}T(i)$ è un insieme finito, che è essenziale al fine di dimostrare che la proprietà fornisce il teorema di Tychonoff.

Per quanto riguarda la parte tecnica della dimostrazione, osserviamo soltanto che procede come nel caso binario, in quanto dapprima si mostra che se vale $P(a,W)$ allora esiste $W_0 \subseteq_\omega W$ tale che $a \lhd W_0$ e poi che se $f \lhd Z$ allora vale $P(f,Z)$. L'unico passo non banale in quest'ultimo punto si incontra quando l'ultima regola applicata è *transitivity*. Per completezza diamo un cenno della dimostrazione. Si supponga che $f \lhd Z$ sia stato ottenuto per *transitivity* da $f \lhd V$ e $V \lhd Z$. Sia $M \in (\Pi i \in I)\ \mathcal{P}_\omega(S_i)$ e si supponga che per ogni $i \in I$, $a(i) \lhd M(i) \cup \{f(i)\}$. Per $P(f,V)$, che vale per ipotesi induttiva, esiste $T \in (\Pi i \in I)\ \mathcal{P}_\omega(S_i)$ tale che per ogni $i \in I$, $a(i) \lhd M(i) \cup T(i)$, $T(i) = \{1_i\}$ per tutti gli $i \in I$ tranne un insieme finito, e $\oplus_{i\in I}T(i) \subseteq \Pi_\omega(I,S) \diamond V$. Si consideri quindi, per ogni $t \in \oplus_{i\in I}T(i)$, la decomposizione $t = s_t \diamond v_t$, ove $s_t \in \Pi_\omega(I,S)$ e $v_t \in V$. Ora, supponendo $T(i) = \{t_1^i, \ldots, t_{h_i}^i\}$, abbiamo, per ogni $i \in I$,

$$a(i) \lhd M(i) \cup \{v_t(i)\} \cup \{t_1^i, \ldots, \widehat{t(i)}, \ldots, t_{h_i}^i\}.$$

Applicando l'ipotesi induttiva a $v_t \lhd Z$, otteniamo che esiste

$$Z_{v_t} \in (\Pi i \in I)\ \mathcal{P}_\omega(S_i)$$

tale che per ogni $i \in I$,

$$a(i) \lhd M(i) \cup Z_{v_t}(i) \cup \{t_1^i, \ldots, \widehat{t(i)}, \ldots, t_{h_i}^i\},$$

$$\oplus_{i\in I} Z_{v_t}(i) \subseteq \Pi_\omega(I,S) \diamond Z.$$

Procedendo come nel caso binario otteniamo, per ogni $i \in I$,

$$a(i) \lhd M(i) \cup \bullet_{\substack{t \in \oplus_{i\in I}T(i) \\ t(i) = t_1^i}} Z_{v_t}(i) \cup \ldots \cup \bullet_{\substack{t \in \oplus_{i\in I}T(i) \\ t(i) = t_{h_i}^i}} Z_{v_t}(i).$$

Introducendo l'abbreviazione

$$Z(i) \equiv \bullet_{\substack{t \in \oplus_{i\in I} T(i) \\ t(i) = t^i_1}} Z_{v_t}(i) \cup \ldots \cup \bullet_{\substack{t \in \oplus_{i\in I} T(i) \\ t(i) = t^i_{h_i}}} Z_{v_t}(i),$$

per raggiungere la conclusione dobbiamo dimostrare che $Z(i) = \{1_i\}$ per ogni indice i tranne un insieme finito e che $\oplus_{i\in I} Z(i) \subseteq \Pi_\omega(I,S) \diamond Z$. Il primo fatto si ha poiché $\oplus_{i\in I} T(i)$ è finito e $Z_{v_t}(i) = \{1_i\}$ vale per ogni indice i tranne un insieme finito. Per dimostrare il secondo fatto, sia $x \in \oplus_{i\in I} Z(i)$. Allora per ogni $i \in I$, esiste j_i tale che

$$x(i) \in \bullet_{\substack{t \in \oplus_{i\in I} T(i) \\ t(i) = t^i_{j_i}}} Z_{v_t}(i)$$

Sia t^* definito da $t^*(i) \equiv t^i_{j_i}$. Allora $x(i) \in Z_{v_{t^*}}(i) \cdot S_i$ e quindi

$$x \in (\oplus_{i\in I} Z_{v_{t^*}}(i)) \diamond \Pi_\omega(I,S) \ .$$

Allora

$$\oplus_{i\in I} Z(i) \subseteq (\cup_{t \in \oplus_{i\in I} T(i)} \oplus_{i\in I} Z_{v_t}(i)) \diamond \Pi_\omega(I,S) \ .$$

Siccome per ogni $t \in \oplus_{i\in I} T(i)$, vale $\oplus_{i\in I} Z_{v_t}(i) \subseteq \Pi_\omega(I,S) \diamond Z$, la conclusione ne segue. $\square$

3.3 Osservazioni conclusive

Il carattere algoritmico della nostra dimostrazione diventa più evidente quando essa è confrontata con altre dimostrazioni del teorema di Tychonoff pointfree.

Ci concentreremo qui sul confronto con la prova di Johnstone e Vickers [JV], che è una delle più recenti nella letteratura. Mentre la nostra prova è basata sulla struttura di *sup-lattice*, che è rappresentabile costruttivamente mediante la struttura di topologia formale (cf. [BatS]), la prova di Johnstone e Vickers è basata sull'uso della struttura di *preframe*. Un preframe è un insieme parzialmente ordinato avente tutti gli inf finiti ed i sup diretti ed in cui vale la proprietà distributiva degli inf binari rispetto ai sup diretti. Un omomorfismo di preframe è un'applicazione che rispetta gli inf finiti ed i sup diretti. Il risultato fondamentale usato nella prova è il fatto che il coprodotto di frames è il prodotto tensoriale dei soggiacenti preframes. Un frame A è compatto se la funzione caratteristica dell'elemento massimo di A, da A a $\mathbb{2}$ (frame banale costituito da due elementi), è un omomorfismo di preframe. Allora è immediato passare dalla compattezza di due frames

A e B alla compattezza di $A \coprod B$, poiché $A \coprod B \cong A \otimes B$ e $\mathbb{2} \otimes \mathbb{2} \cong \mathbb{2}$. Tecnicamente, la prova usa l'induzione transfinita per la costruzione di nuclei a partire da prenuclei, mentre la nostra dimostrazione non usa mai metodi transfiniti. Inoltre la nostra dimostrazione, essendo sviluppata all'interno della topologia formale, può essere completamente formalizzata nella teoria dei tipi e quindi oltre ad essere costruttiva ha una chiara valenza computazionale.

3.4 Appendice: Coprodotto di topologie formali e prodotto topologico

In questa sezione dimostreremo che il coprodotto di topologie formali, come definito nelle sezioni 3.1 e 3.2, è invero il loro prodotto categoriale e fornisce il prodotto dei corrispondenti spazi topologici. Rinviamo a 1.3 per la definizione della categoria **FTop** delle topologie formali.

Abbiamo:

Proposizione 3.4.1 *La topologia formale*

$$\coprod_{i \in I} \mathcal{A}_i \equiv \langle \Pi_\omega(I, S), \diamond, \lambda x.1_x, \lhd, Pos \rangle$$

è il coprodotto in **FTop** *delle topologie formali $\mathcal{A}_i$.*

Dimostrazione: Le iniezioni canoniche sono date dalle applicazioni:

$$e_i : \mathcal{A}_i \longrightarrow \coprod_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

tali che

$$e_i(a) \equiv \{\lambda_\omega(i, a, \lambda x.1_x)\}$$

Le applicazioni e_i soddisfano le condizioni che definiscono i morfismi in **FTop**; infatti, siano a, $b \in S_i$ e $U \subseteq S_i$, allora:

1. $e_i(1_i) \equiv \{\lambda_\omega(i, 1_i, \lambda x.1_x)\} = \{\lambda x.1_x\}$.
2. $e_i(a \cdot b) \equiv \{\lambda_\omega(i, a \cdot b, \lambda x.1_x)\} = \{\lambda_\omega(i, a, \lambda x.1_x)\} \diamond \{\lambda_\omega(i, b, \lambda x.1_x)\} \equiv e_i(a) \diamond e_i(b)$.
3. Se $a \lhd_i U$, allora, per l'assioma, abbiamo

$$\lambda_\omega(i, a, \lambda x.1_x) \lhd \{\lambda_\omega(i, u, \lambda x.1_x) : u \in U\} ,$$

e quindi $e_i(a) \lhd e_i(U)$ per definizione.

4. Se vale $Pos(e_i(a))$, allora in particolare la i-esima componente di $e_i(a)$ è abitata, cioè vale $Pos(a)$.

Veniamo ora alla proprietà universale. Supponiamo che $\mathcal{C}$ sia una topologia formale e che per ogni $i \in I$ sia dato un morfismo $\phi_i : \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{C}$. Proviamo che esiste un unico morfismo $\oplus_{i \in I}\phi_i : \coprod_{i \in I}\mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{C}$ tale che $(\oplus_{i \in I}\phi_i) \circ e_i = \phi_i$ per ogni $i \in I$.

Proviamo dapprima l'unicità. Se $f \in \Pi_\omega(I, S)$, allora f può essere decomposto come $f = \diamond_{i \in supp(f)} e_i(f(i))$ (se $supp(f)$ è vuoto estendiamo coerentemente la definizione del prodotto sopra dato ponendolo uguale a $\lambda x.1_x$). Allora, se $\oplus_{i \in I}\phi_i$ deve rispettare il prodotto e far commutare il diagramma, si deve necessariamente avere la seguente definizione:

$$(\oplus_{i \in I}\phi_i)(f) \equiv \bullet_{i \in supp(f)}\phi_i(f(i))$$

Allora, per dimostrare l'esistenza, è sufficiente dimostrare che l'applicazione sopra definita è un morfismo in **FTop**. Abbiamo:

1. $(\oplus_{i \in I}\phi_i)(\lambda x.1_x) \equiv \bullet_{i \in supp(\lambda x.1_x)}\phi_i(\lambda x.1_x(i)) \equiv \bullet_{i \in \emptyset}\phi_i(1_i) =_{\mathcal{C}} \{1_{\mathcal{C}}\}$.

2. $(\oplus_{i \in I}\phi_i)(f \diamond g) \equiv \bullet_{i \in supp(f \diamond g)}\phi_i(f(i) \cdot g(i))$; allora utilizzando il fatto che le applicazioni ϕ_i sono morfismi, e quindi rispettano il prodotto, e che il prodotto è associativo e commutativo, otteniamo

   $\bullet_{i \in supp(f \diamond g)}\phi_i(f(i) \cdot g(i)) \equiv \bullet_{i \in supp(f) \cup supp(g)}\phi_i(f(i)) \cdot \phi_i(g(i)) =$
   $\bullet_{i \in supp(f)}\phi_i(f(i)) \cdot \bullet_{i \in supp(g)}\phi_i(g(i)) \equiv (\oplus_{i \in I}\phi_i)(f) \cdot (\oplus_{i \in I}\phi_i)(g)$.

3. Supponiamo $f \lhd W$. Dimostriamo allora che

   $$(\oplus_{i \in I}\phi_i)(f) \lhd_{\mathcal{C}} (\oplus_{i \in I}\phi_i)(W)$$

   per induzione sulla derivazione di $f \lhd W$. Se deriva da un assioma,

   $$\frac{f(i) \lhd_i U}{f \lhd \{\lambda_\omega(i, u, f) : u \in U\}}$$

   cioè $W \equiv \{\lambda_\omega(i, u, f) : u \in U\}$, allora dalla premessa otteniamo, dato che tutti gli ϕ_i sono morfismi, $\phi_i(f(i)) \lhd_{\mathcal{C}} \phi_i(U)$. Tramite (ripetute applicazioni di) $\cdot$ *-left* abbiamo $\bullet_{i \in supp(f)}\phi_i(f(i)) \lhd_{\mathcal{C}} \phi_i(U)$. Poiché per ogni $i \in I$, $\phi_i(1_i) =_{\mathcal{C}} \{1_{\mathcal{C}}\}$ otteniamo

   $$\phi_i(U) =_{\mathcal{C}} \{(\oplus_{i \in I}\phi_i)(\lambda_\omega(i, u, f)) : u \in U\}$$

   e quindi $(\oplus_{i \in I}\phi_i)(f) \lhd_{\mathcal{C}} (\oplus_{i \in I}\phi_i)(W)$.

Se $f \lhd W$ è ottenuta per *reflexivity*, allora dalla premessa $f \in W$ otteniamo $\{f\} \subseteq W$ e quindi $(\oplus_{i \in I} \phi_i)(\{f\}) \subseteq (\oplus_{i \in I} \phi_i)(W)$, che dà la tesi applicando nuovamente *reflexivity*.

Se l'ultima regola applicata è $\cdot$ *-left* (rispettivamente $\cdot$ *-right* o *transitivity*), allora per l'ipotesi induttiva applicata alle premesse e di nuovo $\cdot$ *-left* (rispettivamente $\cdot$ *-right* o *transitivity*), concludiamo.

4. Supponiamo $Pos((\oplus_{i \in I} \phi_i)(f))$, cioè $Pos(\bullet_{i \in supp(f)} \phi_i(f(i)))$, allora, per *monotonicity* e $\cdot$ *-left*, vale $(\forall i \in supp(f))\ Pos(\phi_i(f(i)))$ e quindi, poiché tutti i ϕ_i sono morfismo, abbiamo che $(\forall i \in supp(f))\ Pos(f(i))$, cioè che vale $Pos(f)$. $\square$

Proveremo ora che il coprodotto di topologie formali dà il prodotto di spazi formali.

Mediante l'identificazione dei punti $\mathcal{A}$ con i morfismi verso l'oggetto iniziale (cf. 1.3), cioè

$$Pt(\mathcal{A}) \equiv \mathbf{FTop}(\mathcal{A}, \mathcal{P}(1))$$

otteniamo una semplice caratterizzazione dei punti del coprodotto di topologie formali. Infatti, per la proprietà universale del coprodotto abbiamo

$$Pt(\coprod_{i \in I} \mathcal{A}_i) \equiv \mathbf{FTop}(\coprod_{i \in I} \mathcal{A}_i, \mathcal{P}(1)) \cong \prod_{i \in I} \mathbf{FTop}(\mathcal{A}_i, \mathcal{P}(1))$$

ovvero, i punti formali del coprodotto delle topologie formali $\mathcal{A}_i$, $i \in I$ sono il prodotto cartesiano dei punti formali di ciascuna topologia formale.

Capitolo 4

Il continuo come spazio formale

L'idea di base della topologia pointfree, cioè il rovesciamento del tradizionale ordine concettuale tra punti e aperti, si applica in questo capitolo per ottenere una definizione costruttiva del continuo basata sulle approssimazioni razionali, in cui i numeri reali sono insiemi particolari di approssimazioni. Ciò non segue da una costruzione *ad hoc* ma emerge come un'istanza concreta dei metodi generali già esposti nel capitolo 1. Infatti definiamo una topologia formale basata sugli intervalli ad estremi razionali, i cui punti formali danno luogo alla nostra nozione di reale formale (cf. sezione 4.1).

Dal punto di vista tecnico questo approccio si rivela particolarmente utile in quanto permette definizioni e prove induttive e quindi adatte ad essere completamente formalizzate in teoria dei tipi e quindi rese algoritmiche e implementate su calcolatore (cf. [NPS], [JC]).

Dopo aver definito le operazioni aritmetiche in 4.2, studieremo in dettaglio l'ordine e la relazione di apartness che ne deriva (4.3).

Dal punto costruttivo, i reali formali non sono completi rispetto all'ordine. Infatti, assumere che ogni famiglia superiormente limitata di numeri reali abbia estremo superiore implica la validità del principio di *testability*, cioè che per ogni proposizione A valga $\neg A \vee \neg\neg A$, già refutato da Brouwer in [Bw]. Per ottenere la completezza rispetto all'ordine siamo quindi indotti, in 4.4, ad ampliare la collezione dei reali formali, come alternativa all'uso di una logica non costruttiva, secondo una procedura tipica della matematica intuizionistica (cf. [T]).

Come ulteriore conferma della correttezza della nostra costruzione, in

4.5 dimostriamo, con un ragionamento classico, l'estensionalità della topologia dei reali formali ovvero l'equivalenza tra il nuovo spazio pointfree e lo spazio classico con punti.

Per sviluppare l'analisi costruttiva, definiamo nel modo naturale la nozione di successione di Cauchy e dimostriamo la completezza secondo Cauchy dei reali formali (4.6.1). Otteniamo inoltre prove molto elementari e costruttive di alcuni teoremi classici, come il teorema del valor medio in 4.6.2 ed il teorema di Baire in 4.6.3.

Infine, la nostra nozione di numero reale è confrontata nella sezione 4.7 con altre assiomatizzazioni costruttive, specificatamente quella di sezione di Dedekind, di successione di Cauchy à la Bishop, e di *maximal approximation* di Martin-Löf.

4.1 Definizioni di base

I numeri reali possono essere ottenuti in un contesto pointfree a partire dagli intervalli ad estremi razionali (cf. [J]).

Nel seguito mostreremo come ottenere i numeri reali come punti di una topologia formale, sviluppando un'idea che risale a [S].

Assumeremo qui la costruzione classica dell'insieme dei numeri razionali a partire da quello degli interi, dato che è completamente non problematica dal punto di vista costruttivo. Inoltre l'ordine usuale dei razionali è decidibile, e questo ci permetterà di dimostrare alcuni risultati per casi.

Assumendo dato l'insieme Q dei numeri razionali, sia Q^+ l'insieme totalmente ordinato ottenuto aggiungendo un elemento massimo $+\infty$ a Q e sia analogamente Q^- l'insieme $Q \cup \{-\infty\}$. L'insieme $S = Q^- \times Q^+$ risulta parzialmente ordinato dalla seguente relazione, il cui senso intuitivo è l'inclusione tra intervalli:

$$(p, q) \leq (r, s) \equiv r \leq p \;\&\; q \leq s.$$

La relazione di inclusione stretta, che sarà pure utile, è definita da:

$$(p, q) < (r, s) \equiv r < p \;\&\; q < s.$$

L'operazione di inf (correspondente all'intersezione) è data da

$$(p, q) \cdot (r, s) = (max(p, r), min(q, s))$$

e rende S un semireticolo con elemento massimo $1 \equiv (-\infty, +\infty)$.

Definizione 4.1.1 *Sia $\mathcal{R} \equiv \langle S, \cdot, 1, \lhd, Pos\rangle$ la topologia formale così ottenuta:*

- *S è il prodotto cartesiano $Q^- \times Q^+$ che con l'operazione*

$$(p,q)\cdot(r,s) \equiv (max(p,r), min(q,s))$$

  risulta un monoide comutativo con unità 1.

- *$\lhd$ è la copertura induttivamente generata dalla seguente relazione:*
  $R((p,q),\{(p,s),(r,q)\})$, ogniqualvolta $r < s$;
  $R((p,q),\{(p',q') : p < p' < q' < q\})$.

- *Pos è il sottoinsieme di S definito da $Pos((p,q)) \equiv p < q$.*

Vediamo che la definizione data sopra definisce effettivamente una topologia formale, cioè che le condizioni della proposizione 1.1.3 sono soddisfatte. Si osservi dapprima che si possono equivalentemente usare assiomi chiusi per localizzazione, dati da

$$R((p,q)\cdot(u,v),\{(p,s),(r,q)\}\cdot(u,v)), \text{ ogniqualvolta } r < s$$

$$R((p,q)\cdot(u,v),\{(p',q') : p < p' < q' < q\}\cdot(u,v))\ .$$

Positivity in questo caso è equivalente ad *ex falso quodlibet* poiché il predicato Pos è decidibile dato che lo è l'ordine in Q, e vale

$$\frac{\neg Pos((p,q))}{(p,q) \lhd \emptyset}$$

per il secondo assioma.

Risulta poi immediato dalle definizioni che Pos è monotono rispetto a *weakening* e *contraction*, cioè che valgono $Pos((p,q)\cdot(r,s)) \rightarrow Pos((p,q))$ e $Pos((p,q)) \rightarrow Pos((p,q)\cdot(p,q))$.

Monotonicity di Pos rispetto agli assiomi, cioè

$$\frac{Pos((p,q)) \qquad R((p,q),U)}{\exists(a,b)\in U)(Pos((a,b))}$$

si dimostra facilmente per casi.

Il lemma seguente sará utile:

Lemma 4.1.2 *Se $r \le a < b \le s$, allora $(a,b) \lhd (r,s)$.*

Dimostrazione: Per *reflexivity* vale $(r,s) \lhd (r,s)$, quindi, per $\cdot$ *-left*, $(a,b) = (r,s)\cdot(a,b) \lhd (r,s)$. □

Un *reale formale* è definito come un punto formale della topologia formale sopra data. Per la proposizione 1.2.2 possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 4.1.3 *Un reale formale è un sottoinsieme* α *di* $Q^- \times Q^+$ *tale che:*

1. $\alpha \Vdash 1$;
2. $\alpha \Vdash (p,q)\cdot(r,s) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \Vdash (p,q)\ \&\ \alpha \Vdash (r,s)$;
3. $\dfrac{\alpha \Vdash (p,q) \qquad r<s}{\alpha \Vdash (p,s) \vee \alpha \Vdash (r,q)}$;
4. $\dfrac{\alpha \Vdash (p,q)}{(\exists (p',q'))(p<p'<q'<q\ \&\ \alpha \Vdash (p',q'))}$;
5. $\dfrac{\alpha \Vdash (p,q)}{Pos((p,q))}$.

Si osservi che l'implicazione da sinistra a destra della condizione *2* equivale alla monotonia dei punti rispetto a $\leq$:

$$\frac{\alpha \Vdash (p,q) \quad (p,q)\leq (t,v)}{\alpha \Vdash (t,v)}.$$

Nel seguito denoteremo con $Pt(\mathcal{R})$ la collezione dei punti formali su $\mathcal{R}$.

Il seguente lemma ed il seguente corollario, che affermano che i reali formali possono essere approssimati da razionali in modo arbitrariamente accurato, saranno utili. La scrittura $Q^>$ denota l'insieme dei razionali positivi:

Lemma 4.1.4 *Sia* $\alpha \in Pt(\mathcal{R})$. *Allora per ogni* $k \in Q^>$ *esiste* $(a,b)\in\alpha$ *tale che* $b-a<k$.

Dimostrazione: Poiché α è un reale formale, esiste un intorno di base $(r,s) < (-\infty,+\infty)$ tale che $\alpha \Vdash (r,s)$. Trisecando l'intervallo (r,s), abbiamo $\alpha \Vdash (r,\frac{r+2s}{3}) \vee \alpha \Vdash (\frac{2r+s}{3},s)$, dove gli intervalli sono di lunghezza $\frac{2}{3}\cdot(s-r)$. Poiché esiste n tale che $(\frac{2}{3})^n\cdot(s-r)<k$, applicando ripetutamente questa procedura, troviamo l'intervallo (p,q) richiesto. $\Box$

Corollario 4.1.5 *Sia* $\alpha \in Pt(\mathcal{R})$. *Allora per ogni* $k \in Q^>$ *esiste* $(a,b)\in\alpha$ *tale che* $b-a=k$.

Dimostrazione: Immediata per il lemma 4.1.4 e *monotonicity*. $\Box$

4.2 Aritmetica di $Pt(\mathcal{R})$

Ricordiamo che, da un punto di vista costruttivo, una funzione continua f tra i sistemi topologici[1] $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ è data dalla coppia (f^{pt}, f^{Ω}), dove f^{pt} manda punti di X in punti di Y e f^{Ω} è un morfismo di topologie formali da $\mathcal{B}$ ad $\mathcal{A}$. Le due applicazioni sono in relazione di aggiunzione, cioè, per ogni $\alpha \in X$ e per ogni b della base di $\mathcal{B}$, abbiamo

$$\alpha \Vdash f^{\Omega}(b) \Leftrightarrow f^{pt}(\alpha) \Vdash b.$$

Lo stesso vale per le funzioni continue $h : R \times R \rightarrow R$, che sono legate ai morfismi di *frame* da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R} + \mathcal{R}$. Ricordiamo che, in generale, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono topologie formali, allora $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ denota il loro coprodotto e che $Pt(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = Pt(\mathcal{A}) \times Pt(\mathcal{B})$. In questo modo si ottiene il prodotto dei corrispondenti spazi formali (si veda 3.4 per la dimostrazione).

Possiamo così definire le seguenti operazioni:

- *Successore:* Il successore di un punto è ottenuto traslando i suoi intorni. Così si definisce $f^{\Omega}((p,q)) = \{(r,s) : r+1 > p, s+1 < q\}$ e $f^{Pt}(\alpha) = \{(r+1, s+1) : \alpha \Vdash (r,s)\}$. Segue allora immediatamente dalla definizione che vale l'aggiunzione tra f^{Ω} e f^{Pt}.

- *Addizione:* Dopo aver definito la somma per componenti su S,

  $$(p,q) + (r,s) \equiv (p+r, q+s),$$

  poniamo

  $$f^{\Omega}((u,v)) = \{((p,q),(r,s)) \in S \times S : (u,v) = (p,q) + (r,s)\},$$

  $$f^{Pt}(\alpha, \beta) = \{(p,q) + (r,s) : (p,q) \in \alpha, (r,s) \in \beta\} \equiv \alpha + \beta.$$

  È routine verificare che $\alpha + \beta$ è un punto formale.

- *Prodotto:* Definiamo l'operazione binaria tra intorni di base

  $$(p,q) * (r,s) \equiv (min(pr, ps, qr, qs), max(pr, ps, qr, qs)).$$

  Quindi poniamo

  $$f^{\Omega}((u,v)) = \{((p,q) \times (r,s)) : (u,v) = (p,q) * (r,s)\},$$

  $$f^{Pt}(\alpha, \beta) = \{(p,q) * (r,s) : \alpha \Vdash (p,q), \beta \Vdash (r,s)\} \equiv \alpha\ \beta.$$

[1] Per la definizione di sistema topologico si veda ad esempio [PV]. Osserviamo qui che tale nozione non è altro che l'adattamento al nostro contesto della nozione di *topological system* data in [V], mediante la sostituzione della nozione di frame con quella di topologia formale.

- *Opposto:*
$$-\alpha \equiv \{(-q, -p) : (p, q) \in \alpha\}$$

- *Sottrazione:*
$$\alpha - \beta \equiv \alpha + (-\beta)$$

4.3 Ordine su $Pt(\mathcal{R})$

Definiamo l'ordine tra reali formali nel modo seguente:

$$\alpha > \beta \equiv \alpha - \beta > 0 \equiv (\exists (p, q) \in \alpha - \beta)(p > 0).$$

Per definizione di sottrazione tra reali formali abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha > \beta &\equiv (\exists (a, b) \in \alpha)(\exists (c, d) \in \beta)(a - d > 0) \\ &\equiv (\exists (a, b) \in \alpha)(\exists (c, d) \in \beta)(d < a); \end{aligned}$$

Inoltre definiamo:

$$\alpha \leq \beta \equiv \alpha - \beta \leq 0 \equiv \neg(\alpha - \beta > 0) \equiv \neg(\alpha > \beta).$$

Osserviamo che $\leq$ è un ordine parziale non decidibile su $Pt(\mathcal{R})$. Infatti, se assumiamo che per ogni $\alpha \in Pt(\mathcal{R})$ valga $\alpha \leq 0 \vee 0 \leq \alpha$ allora possiamo dimostrare il seguente principio combinatorio non valido costruttivamente (cf. [BR]).

Proposizione 4.3.1 *Se per ogni $\alpha \in Pt(\mathcal{R})$ vale $\alpha \leq 0 \vee 0 \leq \alpha$, allora per ogni successione binaria $(a_n)_n$ tale che al più un elemento è 1, allora si ha o $(\forall n)(a_{2n} = 0)$ o $(\forall n)(a_{2n+1} = 0)$.*

Dimostrazione: (cf. [So]) Dato che, fissato m, possiamo decidere se esiste oppure no un indice $j \leq m$ tale che $a_j = 1$, definiamo una successione $\{(p_n, q_n)\}_n$ di intervalli nel modo seguente:

- se $(\forall j \leq n)(a_j = 0)$ poniamo $(p_n, q_n) = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$,
- se invece $(\exists j \leq n)(a_j = 1)$, nel caso che j sia dispari poniamo $(p_n, q_n) = (-\frac{1}{j} - \frac{1}{n}, -\frac{1}{j} + \frac{1}{n})$ mentre nel caso che j sia pari poniamo $(p_n, q_n) = (\frac{1}{j} - \frac{1}{n}, \frac{1}{j} + \frac{1}{n})$.

Si noti che, per ogni n, $q_n - p_n = \frac{2}{n}$.

Mostriamo ora che

$$\alpha = \{(p, q) : (\exists m)(\exists n)(p < p_m < q_n < q)\}$$

è un reale formale. Sono conseguenza immediata della definizione di α le prime due proprietà di reale formale ed il fatto che se $\alpha \Vdash (p,q)$ allora vale $Pos((p,q))$. Supponiamo allora che $\alpha \Vdash (p,q)$ e siano dati due razionali r,s tali che $r < s$. Se $r \leq p$ oppure $q \leq s$ allora (p,q) è contenuto in (r,q) oppure in (p,s), e quindi $\alpha \Vdash (r,q)$ oppure $\alpha \Vdash (p,s)$. Supponiamo allora $p < r < s < q$ e sia n tale che $q_n - p_n = \frac{2}{n} < s - r$; sfruttando la decidibilità dell'ordine sui razionali, se $q_n < s$ allora, per definizione di α, $\alpha \Vdash (p,s)$, mentre se $s \leq q_n$ allora, per definizione di n, $r < p_n$ da cui $\alpha \Vdash (r,q)$. Se infine $\alpha \Vdash (p,q)$, cioè esistono dei naturali m,n tali che $p < p_m < q_n < q$, allora $(\frac{p+p_m}{2}, \frac{q_n+q}{2})$ sta in α ed è strettamente più piccolo di (p,q).

Per concludere basta osservare che l'ipotesi $\alpha \leq 0 \vee 0 \leq \alpha$ ci permette di dire, per come è stato costruito α, che ogni elemento pari oppure ogni elemento dispari della sequenza binaria iniziale è uguale a zero. $\square$

Questa relazione induce sui razionali l'ordine usuale, infatti abbiamo:

Proposizione 4.3.2 *L'applicazione $r \mapsto \bar{r} \equiv \{(a,b) : a < r < b\}$ è un omomorfismo d'ordine iniettivo di Q in $Pt(\mathcal{R})$.*

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che $\bar{r} < \bar{s}$ vale se e solo se $r < s$.

$\Rightarrow$: Per definizione di ordine in $Pt(\mathcal{R})$, $(\exists(a,b) \in \bar{r})(\exists(c,d) \in \bar{s})(b < c)$ e quindi $a < r < b < c < s < d$, da cui $r < s$.

$\Leftarrow$: Si supponga $r < s$ e si consideri $(-\infty, r + \frac{s-r}{3}) \in \bar{r}$ e $(s - \frac{s-r}{3}, +\infty)$; allora abbiamo $r + \frac{s-r}{3} = \frac{2r+s}{3} < \frac{2s+r}{3} = s - \frac{s-r}{3}$ e quindi $\bar{r} < \bar{s}$. $\square$

Per $r \in Q$ scriveremo talvolta semplicemente r al posto di $\bar{r}$ pur intendendo un reale formale quando sarà chiaro dal contesto.

Per definizione abbiamo $\neg(\alpha > \beta) \rightarrow \alpha \leq \beta$, ma non possiamo ottenere $\alpha > \beta$ da $\neg(\alpha \leq \beta)$. Ciò segue dal significato più forte dei connettivi costruttivi $\exists$ e $\vee$ rispetto ai corrispondenti connettivi classici. Dobbiamo quindi essere cauti nell'uso della relazione $\leq$ e non leggere $\alpha \leq \beta$ come $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta$ secondo quanto suggerito dalla notazione (si veda anche la discussione in [H] dove ciò ha indotto ad una notazione alternativa al fine di evitare ambiguità).

Possiamo ora dimostrare alcuni semplici fatti riguardanti le relazioni introdotte fino a questo punto.

La relazione $\leq$ è riflessiva per il seguente:

Lemma 4.3.3 $\neg(\alpha > \alpha)$.

Dimostrazione: Se $\alpha > \alpha$ allora esistono a e b in α tali che $\neg Pos(a \cdot b)$, che è assurdo poiché α è un punto formale. $\square$

Poi abbiamo:

Lemma 4.3.4 *Siano* $\alpha, \beta, \gamma \in Pt(\mathcal{R})$. *Allora*

$$\alpha < \beta \ \& \ \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma.$$

Dimostrazione: Per ipotesi

$$(\exists(p,q))(\exists(r,s))(\alpha \ \Vdash (p,q) \ \& \ \beta \ \Vdash (r,s) \ \& \ q < r).$$

Poiché $\gamma \ \Vdash (-\infty,+\infty)$ e $q < r$, allora $\gamma \ \Vdash (-\infty, r) \vee \gamma \ \Vdash (q,+\infty)$. Supponiamo $\gamma \ \Vdash (-\infty, r)$; poiché $\gamma \ \Vdash (-\infty, r)$, per definizione di reale formale, $(\exists(r',s'))(\beta \ \Vdash (r',s') \ \& \ r < r' < s' < s)$ e quindi $\gamma < \beta$ contro l'ipotesi. Allora $\gamma \ \Vdash (q,+\infty)$. Poiché $\alpha \ \Vdash (p,q)$, ancora per definizione di reale formale, $(\exists(p',q'))(\alpha \ \Vdash (p',q') \ \& \ p < p' < q' < q)$ e quindi $\alpha < \gamma$. $\square$

Lemma 4.3.5 *Siano* $\alpha, \beta, \gamma \in Pt(\mathcal{R})$. *Allora*

$$\alpha \leq \beta \ \& \ \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma.$$

Dimostrazione: Se $\gamma < \alpha$, dato che per ipotesi vale $\alpha \leq \beta$, per il lemma precedente abbiamo $\gamma < \beta$. Dato che $\beta \leq \gamma$, si ottiene una contraddizione, e dunque vale $\alpha \leq \gamma$. $\square$

Il seguente lemma sarà utile:

Lemma 4.3.6 *Siano* $p \in Q$ *e* $\alpha \in Pt(\mathcal{R})$. *Allora*

$$\bar{p} < \alpha \Leftrightarrow \alpha \ \Vdash (p,+\infty).$$

Dimostrazione: Per definizione di ordine, $\bar{p} < \alpha$ significa che esistono (q,r) in α e (s,t) in $\bar{p}$ tali che $t < q$. Poiché $s < p < t$, abbiamo $p < q$ e quindi $(q,r) \lhd (p,+\infty)$. Allora per *monotonicity*, $\alpha \ \Vdash (p,+\infty)$.

Viceversa, se $\alpha \ \Vdash (p,+\infty)$ allora, per definizione di reale formale, $(\exists(q,r))(\alpha \ \Vdash (q,r) \ \& \ (q,r) < (p,+\infty))$ e, dato che $p < q$, prendendo ad esempio $s = p - 1$ e $t = \frac{p+q}{2}$, abbiamo

$$(\exists(q,r))(\exists(s,t))(\alpha \ \Vdash (q,r) \ \& \ \bar{p} \ \Vdash (s,t) \ \& \ t < q),$$

cioè $\bar{p} < \alpha$. $\square$

Simmetricamente, nelle stesse ipotesi di 4.3.6, si ottiene:

Lemma 4.3.7 $\alpha < \bar{p} \Leftrightarrow \alpha \ \Vdash (-\infty, p)$.

Il seguente corollario sarà utile:

Corollario 4.3.8 *Sia* $\alpha \in Pt(\mathcal{R})$ *e siano* $r, s \in Q$ *tali che* $r < s$. *Allora*

$$\alpha > \bar{r} \ \vee \ \alpha < \bar{s}.$$

Dimostrazione: Poiché $r < s$ e $\alpha \Vdash (-\infty, +\infty)$, per definizione di reale formale abbiamo $\alpha \Vdash (r, +\infty) \vee \alpha \Vdash (-\infty, s)$, e quindi, per i lemmi precedenti $\alpha > \bar{r} \ \vee \ \alpha < \bar{s}$. $\square$

Il seguente lemma sarà utile nel confronto dei reali formali con le *maximal approximations* di Martin-Löf (cf. [ML]) nella sezione 4.7.3 ed anche per dimostrare che la relazione $\leq$ è davvero un ordine parziale.

Proposizione 4.3.9 *Siano $(p, q), (r, s)$ due intorni di base tali che $(p, q) < (r, s)$ e sia $\alpha \in Pt(\mathcal{R})$. Allora*

$$\alpha \Vdash (r, s) \ \vee \ (\exists (t, u))(\alpha \Vdash (t, u) \ \& \ \neg Pos((p, q) \cdot (t, u))).$$

Dimostrazione: Per qualunque (t, u) tale che $\alpha \Vdash (t, u)$, poiché $r < p < q < s$, abbiamo $(t, u) \lhd \{(t, p), (r, u)\}$ ed $(r, u) \lhd \{(r, s), (q, u)\}$. Allora, per *transitivity*, $(t, u) \lhd \{(t, p), (r, s), (q, u)\}$ e quindi, per definizione di reale formale, $\alpha \Vdash (t, p)$ o $\alpha \Vdash (q, u)$ (ed in ognuno dei due casi abbiamo trovato un elemento di α disgiunto da (p, q)), oppure $\alpha \Vdash (r, s)$. $\square$

Proveremo ora che la relazione $\leq$ è antisimmetrica.

Proposizione 4.3.10 *Siano $\alpha, \beta \in Pt(\mathcal{R})$. Allora $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$ se e solo se α e β coincidono estensionalmente, ovvero coincidono come sottoinsiemi di S ($\alpha =_S \beta$).*

Dimostrazione: Sia $(a, b) \in \alpha$. Allora, per definizione di reale formale, $(\exists (a', b') \in \alpha)(a < a' < b' < b)$. Per la proposizione vista sopra, sappiamo che $(a, b) \in \beta$ oppure esiste $(e, f) \in \beta$ tale che $\neg Pos((a', b') \cdot (e, f)$. Se vale l'ultima alternativa allora abbiamo $f < a' \vee b' < e$ e quindi $\alpha < \beta \vee \beta < \alpha$, contro l'ipotesi. Allora $(a, b) \in \beta$. Nello stesso modo si dimostra che ogni elemento di β appartiene ad α.

Viceversa, poiché $\alpha =_S \beta$ e un punto non può contenere due intorni disgiunti, sia $\beta < \alpha$ sia $\alpha < \beta$ sono impossibili e quindi $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$.

Per 4.3.3, 4.3.5 e 4.3.10 abbiamo:

Corollario 4.3.11 *La relazione $\leq$ è un ordine parziale tra reali formali.*

4.3.1 Apartness

Possiamo ora introdurre un predicato di *apartness* (cf. [TvD], [H]) tra reali formali, cioè una relazione $\#$ che soddisfa le seguenti condizioni per ogni α, β, $\gamma \in Pt(\mathcal{R})$:

1. $\neg(\alpha \# \beta) \Leftrightarrow (\alpha =_S \beta)$;

2. $\alpha \# \beta \Leftrightarrow \beta \# \alpha$;

3. $\alpha \# \beta \Rightarrow \alpha \# \gamma \vee \gamma \# \beta$.

A questo scopo definiamo, per $\alpha, \beta \in Pt(\mathcal{R})$:

Definizione 4.3.12 (apartness)

$$\alpha \# \beta \equiv \alpha < \beta \vee \beta < \alpha$$

Per definizione di ordine su $Pt(\mathcal{R})$, è anche

$$\alpha \# \beta \equiv (\exists (p,q))(\exists (r,s))(\alpha \Vdash (p,q) \ \& \ \beta \Vdash (r,s) \ \& \ ((q < r) \vee (s < p))).$$

Si osservi che la definizione data sopra riflette la richiesta intuitiva del fatto che due punti siano *apart* se esistono due aperti disgiunti della base che li contengono, che è il modo positivo di dire che due punti sono distinti.

Come annunciato abbiamo:

Proposizione 4.3.13 *La relazione # è un predicato di apartness tra reali formali.*

Dimostrazione:

1. $\neg(\alpha \# \beta)$ vale se e solo se $\neg(\alpha < \beta) \ \& \ \neg(\beta < \alpha)$ che a sua volta è equivalente a $\alpha \leq \beta \ \& \ \beta \leq \alpha$ e quindi fornisce, per il lemma 4.3.10, $\alpha = \beta$.

2. $\alpha \# \beta \Leftrightarrow \beta \# \alpha$ vale dato che la relazione # è simmetrica nei due argomenti.

3. Supponiamo che $\alpha \# \beta$ e sia $\gamma \in Pt(\mathcal{R})$ con $(a,b) \in \gamma$. Se $\alpha < \beta$, allora $(\exists (p,q) \in \alpha)(\exists (r,s) \in \beta)(q < r)$. Se $q \leq a$ allora $\alpha < \gamma$, e così $\alpha \# \gamma$; se $b \leq r$ allora $\gamma < \beta$, e quindi $\gamma \# \beta$; se invece $a < q < r < b$, poiché $(a,b) \lhd \{(a,r),(q,b)\}$, abbiamo $(a,r) \in \gamma \vee (q,b) \in \gamma$. La conclusione allora segue dal fatto che $(a,r) \in \gamma$ implica $\beta \# \gamma$, mentre $(q,b) \in \gamma$ implica $\alpha \# \gamma$. $\Box$

Per dimostrare che due reali formali coincidono estensionalmente basta dimostrare una delle due inclusioni, infatti abbiamo:

Corollario 4.3.14 *Siano $\alpha, \beta \in Pt(\mathcal{R})$. Se $\alpha \subseteq \beta$ allora $\alpha = \beta$.*

Dimostrazione: Se $\alpha \# \beta$ allora esistono (p,q) in α e (r,s) in β tali che $\neg Pos((p,q) \cdot (r,s))$, che è assurdo dato che $\alpha \subseteq \beta$ e che un punto non può contenere due intervalli disgiunti. Allora $\neg(\alpha \# \beta)$ e quindi $\alpha = \beta$. $\Box$

4.3.2 Massimo e minimo

Per ogni $\alpha, \beta \in Pt(\mathcal{R})$ definiamo $M(\alpha, \beta)$ come l'insieme delle coppie (p, q) tale che

$$(\alpha \Vdash (p, +\infty) \ \vee \ \beta \Vdash (p, +\infty))\&(\alpha \Vdash (-\infty, q) \ \& \ \beta \Vdash (-\infty, q)).$$

Vediamo che $M(\alpha, \beta) \equiv \gamma$ è un reale formale:

1. Da $\alpha \Vdash 1$ e $\beta \Vdash 1$ segue $\gamma \Vdash 1$.

2. Se $\gamma \Vdash (p, q)$ e $\gamma \Vdash (r, s)$, allora, dato che $max(p, r)$ è p o r, $(max(p, r), +\infty)$ sta in α oppure in β. Inoltre $(-\infty, min(q, s))$ sta sia in α sia in β, visto che $min(q, s)$ è q oppure s, e perciò $\gamma \Vdash (p, q) \cdot (r, s)$. Viceversa, se $\gamma \Vdash (p, q)$ e $(p, q) \leq (r, s)$ allora, dato che, essendo $r \leq p$ e $q \leq s$, per la condizione di monotonia, se $(p, +\infty)$ sta in un punto, anche $(r, +\infty)$ vi sta e, allo stesso modo, se $(-\infty, q)$ sta in un punto, anche $(-\infty, s)$ vi sta. Dunque $\gamma \Vdash (r, s)$.

3. Siano $(p, q) \in S$ e $r, s \in Q$ tali che $\gamma \Vdash (p, q)$ e $r < s$. Se $r \leq p$ oppure $q \leq s$ allora (p, s) oppure (r, q) contiene (p, q) e dunque sta in γ, per quanto visto in precedenza (γ è monotono rispetto a $\leq$). Supponiamo allora $p < r < s < q$ e $\alpha \Vdash (p, +\infty)$ (il discorso è analogo se invece $\beta \Vdash (p, +\infty)$, per cui $(\alpha \Vdash (p, s)) \vee (\alpha \Vdash (r, +\infty))$. Dato che $\beta \Vdash (-\infty, q)$ è anche $(\beta \Vdash (-\infty, s)) \vee (\beta \Vdash (r, q))$. Esaminando i vari casi possibili abbiamo:

   se $\alpha \Vdash (r, +\infty)$ allora $\gamma \Vdash (r, q)$;
   se $\beta \Vdash (r, q)$ allora $\beta \Vdash (r, +\infty)$ e dunque $\gamma \Vdash (r, q)$;
   se infine $\alpha \Vdash (p, s)$ & $\beta \Vdash (-\infty, s)$ allora $\gamma \Vdash (p, s)$.

   In ogni caso quindi vale $\gamma \Vdash (r, q) \vee \gamma \Vdash (p, s)$.

4. Sia $\gamma \Vdash (p, q)$. Dato che $\alpha \Vdash (p, +\infty) \vee \beta \Vdash (p, +\infty)$, per la *4* della definizione 4.1.3, esiste $p' > p$ tale che $\alpha \Vdash (p', +\infty) \vee \beta \Vdash (p', +\infty)$. Inoltre $\alpha \Vdash (-\infty, q) \wedge \beta \Vdash (-\infty, q)$ e quindi esiste $q' < q$ tale che $\alpha \Vdash (-\infty, q') \wedge \beta \Vdash (-\infty, q')$. Dunque $\gamma \Vdash (p', q')$ con $p < p' < q' < q$.

5. Se $\gamma \Vdash (p, q)$, per definizione si ha $\alpha \Vdash (p, +\infty) \vee \beta \Vdash (p, +\infty)$; nel primo caso, valendo anche $\alpha \Vdash (-\infty, q)$, si ha $\alpha \Vdash (p, q)$ mentre nel secondo caso, visto che $\beta \Vdash (-\infty, q)$, si ottiene $\beta \Vdash (p, q)$ e dunque in entrambi i casi vale $Pos((p, q))$.

Inoltre abbiamo che $M(\alpha,\beta)$ è il massimo tra α e β, cioè:

$$\alpha \leq M(\alpha,\beta),\ \beta \leq M(\alpha,\beta);$$

$$\text{se } \alpha \leq \gamma \text{ e } \beta \leq \gamma \text{ allora } M(\alpha,\beta) \leq \gamma.$$

Infatti, se $M(\alpha,\beta) < \alpha$ allora, per definizione di ordine, esistono (p,q) in $M(\alpha,\beta)$ ed (r,s) in α tali che $q < r$; questo però non è possibile dal momento che, per definizione, $M(\alpha,\beta) \Vdash (r,+\infty)$ e un punto non può contenere due coppie disgiunte. Si ha perciò $\alpha \leq M(\alpha,\beta)$ e, ragionando in maniera analoga, $\beta \leq M(\alpha,\beta)$, quindi la prima proprietà é dimostrata.

Se $M(\alpha,\beta) > \gamma$ allora, per definizione di ordine, esistono (p,q) in $M(\alpha,\beta)$ e (r,s) in γ tali che $s < p$; dato che, per definizione di $M(\alpha,\beta)$, $\alpha \Vdash (p,+\infty) \ \vee\ \beta \Vdash (p,+\infty)$, si ottiene $\alpha > \gamma$ oppure $\beta > \gamma$, contro le ipotesi, dunque anche la seconda proprietà è dimostrata.

Invece, dato che l'ordine di $Pt(\mathcal{R})$ non è decidibile, non possiamo dimostrare che $(M(\alpha,\beta) = \alpha) \vee (M(\alpha,\beta) = \beta)$.

Nello stesso modo possiamo definire $m(\alpha,\beta)$ come l'insieme delle coppie (p,q) tali che

$$(\alpha \Vdash (p,+\infty)\ \&\ \beta \Vdash (p,+\infty))\&(\alpha \Vdash (-\infty,q)\ \vee\ \beta \Vdash (-\infty,q))$$

e verificare che si tratta effettivamente del minimo dei due reali formali α e β.

Possiamo ora definire la distanza tra due punti formali α e β ed il modulo di α nel modo seguente:

$$|\alpha - \beta| = M(\alpha-\beta, \beta-\alpha);$$

$$|\alpha| = M(\alpha, -\alpha).$$

4.3.3 Il teorema di Cantor

Il teorema seguente prova che i reali formali non costituiscono un insieme numerabile.

Teorema 4.3.15 (Cantor) *Sia $(\alpha_n)_n$ una successione di reali formali e siano p_0, q_0 numeri razionali con $p_0 < q_0$. Allora esiste un reale formale α tale che*

$$\bar{p}_0 \leq \alpha \leq \bar{q}_0$$

e

$$(\forall n \in N)(\alpha \# \alpha_n).$$

Dimostrazione: Definiamo per induzione due successioni di razionali $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ tali che:

i. $p_0 \leq p_n < p_m < q_m < q_n \leq q_0 \quad (1 \leq n \leq m)$;

ii. $p_n > \alpha_n$ oppure $q_n < \alpha_n \quad (1 \leq n)$;

iii. $q_n - p_n < \frac{1}{n} \quad (1 \leq n)$.

Sia $1 \leq n$ e supponiamo che $p_0, ..., p_{n-1}, q_0, ..., q_{n-1}$ siano stati costruiti. Poiché $p_{n-1} < q_{n-1}$, per il corollario 4.3.8, $(\alpha_n > \bar{p}_{n-1}) \vee (\alpha_n < \bar{q}_{n-1})$. Se vale il primo dei due disgiunti, siano p_n e q_n dei razionali tali che

$$\begin{array}{l} \bar{p}_{n-1} < \bar{p}_n < m(\alpha_n, \bar{q}_{n-1}), \\ \bar{p}_n < \bar{q}_n < m(\alpha_n, \bar{q}_{n-1}, \bar{p}_n + \bar{\frac{1}{n}}). \end{array}$$

Se invece vale il secondo dei due disgiunti, siano q_n e p_n dei razionali tali che

$$\begin{array}{l} M(\alpha_n, \bar{p}_{n-1}) < \bar{q}_n < \bar{q}_{n-1}, \\ M(\alpha_n, \bar{p}_{n-1}, \bar{q}_n - \bar{\frac{1}{n}}) < \bar{p}_n < \bar{q}_n. \end{array}$$

In entrambi i casi le condizioni i-iii sono soddisfatte. Non è difficile dimostrare che $\alpha = \{(p,q) : (\exists n)(\exists m)((p \leq p_n)\&(q_m \leq q))\}$ è un reale formale (cf. [So]).

Infine, per ogni n, abbiamo per costruzione $(\bar{p}_n > \alpha_n) \vee (\bar{q}_n < \alpha_n)$ e inoltre $\alpha \Vdash (p_n, q_n)$ cosicché $\bar{p}_n < \alpha < \bar{q}_n$. Per transitività dell'ordine abbiamo $(\alpha_n < \alpha) \vee (\alpha_n > \alpha)$ e possiamo quindi concludere che $(\forall n)(\alpha \# \alpha_n)$. $\square$

Vale inoltre la seguente:

Proposizione 4.3.16 *Siano $\alpha, \beta \in Pt(\mathcal{R})$ con $\alpha < \beta$. Allora esiste un numero razionale t tale che $\alpha < \bar{t} < \beta$.*

Dimostrazione: Poiché $\alpha < \beta$, per definizione di ordine esistono (p,q) ed (r,s) tali che $\alpha \Vdash (p,q)$ & $\beta \Vdash (r,s)$ & $q < r$. Prendendo $t \equiv \frac{q+r}{2}$ abbiamo $\alpha < \bar{t} < \beta$. $\square$

4.4 Completezza rispetto all'ordine

L'ordine che abbiamo introdotto su $Pt(\mathcal{R})$ non è completo, cioè non è possibile dimostrare costruttivamente che un insieme limitato non vuoto ha estremo superiore ed estremo inferiore.

Infatti, si dimostra che la completezza rispetto all'ordine di $Pt(\mathcal{R})$ implica un principio logico che non è costruttivamente valido.

Proposizione 4.4.1 *Se la collezione $Pt(\mathcal{R})$ dei reali formali è completa rispetto all'ordine allora, per ogni proposizione P, vale $\neg P \vee \neg\neg P$.*

Dimostrazione: Data una proposizione P, consideriamo l'insieme

$$A = \{\alpha \in Pt(\mathcal{R}) \mid (\alpha = 0 \wedge P) \vee (\alpha = 1 \wedge \neg P)\}.$$

Se $A = \emptyset$, allora in particolare $0 \notin A$, $1 \notin A$, e quindi $\neg P \wedge \neg\neg P$. Dunque $A \neq \emptyset$. Inoltre A è limitato perché $\alpha \in A$ implica $\alpha = 0 \vee \alpha = 1$. Allora per l'ipotesi che la collezione $Pt(\mathcal{R})$ sia completa rispetto all'ordine, esiste $\gamma = sup(A)$ in $Pt(\mathcal{R})$. Osserviamo che

$$\begin{array}{rcl} P & \Rightarrow & \gamma = 0 \\ \neg P & \Rightarrow & \gamma = 1 \end{array}$$

e quindi per contrapposizione

$$\begin{array}{rcl} \gamma \# 0 & \Rightarrow & \neg P \\ \gamma \# 1 & \Rightarrow & \neg\neg P. \end{array}$$

Poichè vale $0\#1$, allora per la proprietà 3 di apartness vale $\gamma\#0 \vee \gamma\#1$ e quindi $\neg P \vee \neg\neg P$. $\Box$

Per ottenere la completezza rispetto all'ordine siamo quindi indotti, in alternativa all'uso di una logica non costruttiva, ad ampliare la collezione dei reali formali. Definiamo quindi:

Definizione 4.4.2 *Un* reale formale debole *è un sottoinsieme di S che soddisfa le condizioni 1, 2, 4, 5 della definizione 4.1.3 e la seguente forma debole della condizione 3:*

$$3' \quad \frac{\alpha \Vdash (p,q) \qquad r < s}{\neg\neg(\alpha \Vdash (p,s) \vee \alpha \Vdash (r,q))}.$$

Denoteremo con $Pt(\mathcal{R})^e$ la collezione dei reali formali deboli.

Allora abbiamo:

Proposizione 4.4.3 *Sia $F = \{\alpha_i : i \in I\}$ una collezione non vuota superiormente limitata di punti in $Pt(\mathcal{R})^e$. Allora F ha estremo superiore.*

Dimostrazione: Innanzitutto osserviamo che non è restrittivo supporre che la famiglia F sia limitata da un numero razionale, dato che, se

$$(\forall i \in I)(\alpha_i < \beta)$$

per qualche $\beta \in Pt(\mathcal{R})^e$, allora esiste $k \in Q$ tale che $\beta < \bar{k}$, semplicemente prendendo un intorno $(-\infty, k) \in \beta$ con $k < +\infty$.

Dimostreremo ora che

$$\alpha \equiv \{(p,q) : (\exists i \in I)(\alpha_i \Vdash (p,+\infty)) \ \&\ (\exists q' < q)(\forall i \in I)(\alpha_i \Vdash (-\infty,q'))\}$$

è l'estremo superiore di F.

Verifichiamo in primo luogo che α è un reale formale debole:

1. $\alpha \Vdash (-\infty,+\infty)$ poiché $(\forall i \in I)(\alpha_i \Vdash (-\infty,+\infty))$ e pertanto

$$(\exists i \in I)(\alpha_i \Vdash (-\infty,+\infty)).$$

Inoltre $(\forall i \in I)(\alpha_i < \bar{k})$ implica, per il lemma 4.3.6,

$$(\forall i \in I)(\alpha_i \Vdash (-\infty,k))$$

e quindi, poiché $k < +\infty$,

$$(\exists q' < +\infty)(\forall i \in I)(\alpha_i \Vdash (-\infty,q')).$$

2. Supponiamo $\alpha \Vdash (p,q)$ e $\alpha \Vdash (r,s)$. Allora, per definizione,

$$(\exists i \in I)(\alpha_i \Vdash (p,+\infty)) \ \&\ (\exists q' < q)(\forall i \in I)(\alpha_i \Vdash (-\infty,q')),$$
$$(\exists i \in I)(\alpha_i \Vdash (r,+\infty)) \ \&\ (\exists s' < s)(\forall i \in I)(\alpha_i \Vdash (-\infty,s')).$$

Poiché $p \vee r$ è p oppure r e $q \wedge s$ è q oppure s, allora $(p,q)\cdot(r,s) = (p \vee r, q \wedge s) \in \alpha$. D'altra parte, supponiamo che $\alpha \Vdash (p,q)$ e sia $(p,q) \leq (r,s)$. Allora per *monotonicity* dei reali formali deboli α_i otteniamo che $(\exists i \in I)(\alpha_i \Vdash (r,+\infty))$, e poiché $q \leq s$ abbiamo anche che $(\exists s' < s)(\forall i \in I)(\alpha_i \Vdash (-\infty,s'))$.

3'. Sia $\alpha \Vdash (p,q)$ e $r < s$. Vogliamo ottenere una contraddizione dall'assunzione $\neg(\alpha \Vdash (p,s) \vee \alpha \Vdash (r,q))$. Allora supponiamo $\alpha \nVdash (p,s)$ e $\alpha \nVdash (r,q)$, cioè

$$\neg((\exists i \in I)(\alpha_i \Vdash (p,+\infty)) \ \&\ (\exists s' < s)(\forall i \in I)(\alpha_i \Vdash (-\infty,s'))),$$
$$\neg((\exists i \in I)(\alpha_i \Vdash (r,+\infty)) \ \&\ (\exists q' < q)(\forall i \in I)(\alpha_i \Vdash (-\infty,q'))).$$

Poiché $\alpha \Vdash (p,q)$, otteniamo

1. $\neg((\exists s' < s)(\forall i \in I)(\alpha_i \Vdash (-\infty,s'))),$
2. $\neg((\exists i \in I)(\alpha_i \Vdash (r,+\infty))).$

Quest'ultima ci dà $(\forall i \in I)(\alpha_i \nVdash (r,+\infty))$ e quindi, dato che $r < \frac{r+s}{2}$ e che, per ogni $i \in I$, α_i è un reale formale debole,

$$(\forall i \in I)(\neg\neg\alpha_i \Vdash (-\infty,\frac{r+s}{2})).$$

Otteniamo
$$(\exists s' < s)(\forall i \in I)(\neg\neg\alpha_i \Vdash (-\infty, s'))$$
e quindi
$$\neg\neg(\exists s' < s)(\forall i \in I)(\alpha_i \Vdash (-\infty, s'))$$
che, insieme con 1. produce una contraddizione. Dunque
$$\neg\neg(\alpha \Vdash (p,s) \vee \alpha \Vdash (r,q)) \ .$$

4. Sia $\alpha \Vdash (p,q)$. Allora $(\exists i \in I)(\alpha_i \Vdash (p,+\infty))$ e quindi, dato che gli α_i sono reali formali deboli, $(\exists p' > p)(\exists i \in I)(\alpha_i \Vdash (p',+\infty))$. Inoltre, da $(\exists q'' < q)(\forall i \in I)(\alpha_i \Vdash (-\infty, q''))$, ponendo $q' \equiv \frac{q+q''}{2}$, otteniamo che esiste $(p',q') \in \alpha$ tale che $p < p' < q' < q$.

5. Sia $(p,q) \in \alpha$. Allora, per definizione, $(\exists i \in I)(\alpha_i \Vdash (p,+\infty))$ e $(\exists q' < q)(\forall i \in I)(\alpha_i \Vdash (-\infty, q'))$. Sia $j \in I$ tale che $\alpha_j \Vdash (p,+\infty)$. Poiché ogni reale formale (debole) è chiuso per prodotto, abbiamo $\alpha_j \Vdash (p,q')$, cosicché $p < q'$ ed *a fortiori* $p < q$, cioè vale $Pos((p,q))$.

Per dimostrare che $(\forall i \in I)(\alpha_i \leq \alpha)$, basta provare che supporre
$$(\exists i \in I)(\alpha < \alpha_i)$$
porta ad una contraddizione. Così, sia $i \in I$ tale che $\alpha < \alpha_i$. Allora esistono $(p,q) \in \alpha$ ed $(r,s) \in \alpha_i$ con $q \leq r$. Per definizione di α, $(\exists q' < q)(\alpha_i \Vdash (-\infty, q'))$ ed allora α_i conterrebbe due intervalli disgiunti, $(-\infty, q')$ ed (r,s), una contraddizione. Infine, proviamo che se $\bar{\alpha}$ è un reale formale debole tale che $(\forall i \in I)(\alpha_i \leq \bar{\alpha})$, allora $\alpha \leq \bar{\alpha}$. Supponiamo allora che $\bar{\alpha} < \alpha$. Dal lemma 4.3.4 segue allora che $(\forall i \in I)(\alpha_i < \alpha)$, cioè $(\forall i \in I)(\exists (p_i, q_i) \in \alpha_i)(\exists ((p,q) \in \alpha)(q_i \leq p)$. Si osservi che $\alpha \Vdash (p,q)$ implica che per qualche $i \in I$, $\alpha_i \Vdash (p,+\infty)$ così, se $(p_i,q_i) \in \alpha_i$, allora $(p_i \vee p, q_i) \in \alpha_i$ e quindi $p < q_i$, contraddicendo $\alpha_i < \alpha$. Questo prova che $\neg(\bar{\alpha} < \alpha)$, cioè che $\alpha \leq \bar{\alpha}$. □

In modo simmetrico si dimostra che ogni famiglia non vuota inferiormente limitata $F = \{\alpha_i : i \in I\}$ di $Pt(\mathcal{R})^e$ ha un estremo inferiore, che è dato da
$$\alpha \equiv \{(p,q) : (\exists i \in I)(\alpha_i \Vdash (-\infty, q)) \ \& \ (\exists p' > p)(\forall i \in I)(\alpha_i \Vdash (p',+\infty))\}$$

4.5 Estensionalità di $Pt(\mathcal{R})^e$

In questa sezione forniremo una dimostrazione *classica* dell'estensionalità per i reali formali deboli, o, in altre parole dell'iniettività dell'applicazione
$$ext : Sat(\mathcal{R}) \to \Omega Pt(\mathcal{R})^e$$

definita nella sezione 1.2 del capitolo 1. Questo risultato ci garantisce che, almeno dal punto di vista classico, i reali formali estesi corrispondono a quelli usuali.

Iniziamo con una definizione:

Definizione 4.5.1 *Siano $p, q \in Q$, con $p < q$. Allora una* catena *da p a q è un sottoinsieme $\{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)\}$ di $Q^- \times Q^+$ tale che:*

- $a_i < b_i \qquad i = 1, ..., n;$
- $a_1 < p < b_1$, $a_n < q < b_n;$
- $a_{i+1} < b_i \qquad i = 1, ..., n-1.$

Diremo che una catena C contiene un numero razionale r ($C \sim r$), se

$$(\exists(a, b) \in C)(a < r < b).$$

Diremo che (a, b) è connesso per catena *con r in T se esiste una catena C in T tale che $(a, b) \in C$ e $C \sim r$.*

Applicando il primo assioma della copertura per $\mathcal{R}$ otteniamo:

Lemma 4.5.2 *Siano $p, q \in Q$ e sia C una catena da p a q. Allora*

$$(p, q) \lhd C.$$

Quindi abbiamo:

Proposizione 4.5.3 *Assumendo la logica classica vale*

$$ext((p, q)) \subseteq ext(V) \Rightarrow (p, q) \lhd V.$$

Dimostrazione: Sia $Z = ((p, q) \cdot V)^+$ cioè

$$Z = \{(a, b) : Pos((a, b)) \ \& \ (\exists(v, w) \in V)((a, b) = (v, w) \cdot (p, q))\} .$$

Iniziamo col dimostrare che

$$(\forall r)(p < r < q \rightarrow (\exists(a_r, b_r) \in Z)(a_r < r < b_r)). \tag{4.1}$$

Sia r tale che $p < r < q$ e sia $\bar{r} = \{(c, d) : c < r < d\}$ il reale formale determinato da r. Poiché $\bar{r} \Vdash (p, q)$ allora, per ipotesi, $\bar{r} \in ext(V)$, cioè $\exists(v, w) \in V$ tale che $\bar{r} \Vdash (v, w)$. Allora $\bar{r} \Vdash (v, w) \cdot (p, q) \in Z$ e quindi, ponendo $a_r \equiv max(v, p)$ e $b_r \equiv min(w, q)$, abbiamo $a_r < r < b_r$.

Supponiamo ora $\neg((p, q) \lhd V)$. Allora abbiamo

$$\neg(\forall p', q' \in Q)(p < p' < q' < q \rightarrow (\exists C_{(p', q')} \subseteq Z))$$

ove $C_{(p',q')} \subseteq Z$ è una catena in Z da p' a q' (altrimenti, per il lemma precedente, il secondo assioma per la copertura e *transitivity*, avremmo che $(p,q) \lhd \bigcup_{p<p'<q'<q} C_{(p',q')}$ e quindi $(p,q) \lhd V$.)

Ragionando classicamente, abbiamo:

$$(\exists p', q' \in Q)(p < p' < q' < q \ \& \ \neg\exists C_{(p',q')} \subseteq Z).$$

Scegliendo p' e q' come sopra, sia M l'insieme delle coppie (a,b) in Z che sono connesse per catena con p' ma non con q'. Si osservi che M è non vuoto, dato che $(\exists(a_{p'}, b_{p'}) \in Z)(a_{p'} < p' < b_{p'})$ e che per ipotesi non c'è una catena da p' a q', cosicché $\{(a_{p'}, b_{p'})\}$ è connesso per catena con p' ma non con q'. Sia ora $\alpha \equiv sup_{(a,b)\in M}\bar{b}$ cioè

$$\alpha = \{(u,v) : (\exists(a,b) \in M)((u,+\infty) \in \bar{b}) \ \& \ (\exists r < v)(\forall(a,b) \in M)((-\infty, r) \in \bar{b})\}.$$

Mostreremo ora che $\alpha \in ext((p,q))$ ed $\alpha \notin ext(V)$, contro l'ipotesi.

1. $\alpha \Vdash (p,q)$ poiché abbiamo:

   Se $(a,b) \in M$, allora $p \leq a < b$ e quindi $(p,+\infty) \in \bar{b}$;

   Per 4.1 $(\exists(a_{q'}, b_{q'}) \in Z)(a_{q'} < q' < b_{q'})$, così per ogni $(a,b) \in M$, abbiamo $b < a_{q'}$ (altrimenti, se per qualche $(a,b) \in M$ fosse $a_{q'} \leq b$, aggiungendo alla catena C tale che $(a,b) \in C$ e $C \sim p'$ la coppia $(a_{q'}, b_{q'})$, (a,b) sarebbe connesso per catena con q'). Inoltre $a_{q'} < b_{q'} < q$ e quindi $(a_{q'} < q) \ \& \ (\forall(a,b) \in M)((-\infty, a_{q'}) \in \bar{b})$.

2. $\alpha \notin ext(V)$ per l'argomento seguente:

   Se $\alpha \in ext(V)$, allora $(\exists(r,s) \in Z)(\alpha \Vdash (r,s))$, cioè, per il lemma 4.3.6, $(\exists(r,s) \in Z)(\bar{r} < \alpha < \bar{s})$.

   Siccome α è l'estremo superiore dei punti $\bar{b}$ tali che $(a,b) \in M$ e $\bar{r} < \alpha$, abbiamo $\neg(\forall(a,b) \in M)(b \leq r)$ e quindi $\neg\neg(\exists(a,b) \in M)(r < b)$.

   Infine, osserviamo che abbiamo anche $\neg(\exists(a,b) \in M)(r < b)$:

   infatti, se $(a,b) \in M$ e $r < b$ allora $(r,s) \in M$ (poiché aggiungendo (r,s) ad una catena in Z che connette per catena (a,b) a p', otteniamo una catena in Z che connette per catena (r,s) a p'). Così per definizione di α abbiamo $\bar{s} \leq \alpha$, che contraddice $\alpha < \bar{s}$.

Per *reductio ad absurdum* concludiamo che $(p,q) \lhd V$. $\square$

4.6 Analisi costruttiva

4.6.1 Convergenza in $Pt(\mathcal{R})$

La nozione di convergenza e la nozione di successione di Cauchy si possono formulare in modo naturale nei termini dei reali formali. Proveremo che i reali formali soddisfano alla completezza secondo Cauchy, cioè che una successione di reali formali converge (ad un reale formale) se e solo se è una successione di Cauchy.

Come al solito, diremo che una successione di reali converge ad un dato reale se, per ogni intorno di tale reale, la successione vi si trova da un certo indice in poi, ovvero:

Definizione 4.6.1 *Una successione $(\alpha_n)_n$ di reali formali* converge *ad α in $Pt(\mathcal{R})$ ($\alpha_n \to \alpha$) se per ogni $(p,q) \in \alpha$ esiste $\bar{n}$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$, $\alpha_n \Vdash (p,q)$.*

Proviamo che se una successione converge, allora converge ad un unico reale formale, che può quindi essere chiamato il *limite* della successione.

Proposizione 4.6.2 *Supponiamo $\alpha_n \to \alpha$ ed $\alpha_n \to \beta$. Allora $\alpha = \beta$.*

Dimostrazione: Se $\alpha \# \beta$, allora

$$(\exists (p,q) \in \alpha)(\exists (r,s) \in \beta)(\neg Pos((p,q) \cdot (r,s)).$$

Così, per definizione di convergenza, esiste $\bar{n}$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$, $\alpha_n \Vdash (p,q)$ ed esiste $\bar{m}$ tale che, per ogni $n > \bar{m}$, $\alpha_n \Vdash (r,s)$. Allora esiste $\bar{k}$ tale che, per ogni $n > \bar{k}$, $\alpha_n \Vdash (p,q) \cdot (r,s)$, che è impossibile poiché per ipotesi $\neg Pos((p,q) \cdot (r,s))$. Così $\neg(\alpha \# \beta)$ e quindi, per 4.3.13, $\alpha = \beta$. □

Proposizione 4.6.3 *Sia $\alpha_n \to \alpha$. Allora ogni sottosuccessione $(\beta_m)_m$ di $(\alpha_n)_n$ converge allo stesso limite.*

Dimostrazione: Supponiamo $\alpha \Vdash (p,q)$. Allora per ipotesi esiste $\bar{n}$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$, $\alpha_n \Vdash (p,q)$. Poiché $(\beta_m)_m$ è una sottosuccessione di $(\alpha_n)_n$, esiste $\bar{m}$ tale che per ogni $m > \bar{m}$, $\beta_m \Vdash (p,q)$, cioè $\beta_m \to \alpha$. □

Come nel caso classico possiamo dimostrare:

Proposizione 4.6.4 *Ogni successione convergente $(\alpha_n)_n$ è limitata.*

Dimostrazione: Sia $\alpha_n \to \alpha$ e sia $(p,q) < (-\infty, +\infty)$ tale che $\alpha \Vdash (p,q)$. Allora esiste $\bar{n}$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$, $\alpha_n \Vdash (p,q)$.

Si prenda, per ogni $n \leq \bar{n}$, un intorno $(p_n, q_n) < (-\infty, +\infty)$ tale che $\alpha_n \Vdash (p_n, q_n)$. Allora per ogni n abbiamo

$$min(\bar{p}, \bar{p}_1, ..., \bar{p}_{\bar{n}}) < \alpha_n < max(\bar{q}, \bar{q}_1, ..., \bar{q}_{\bar{n}})$$

e quindi la successione è limitata. □

Definizione 4.6.5 *Una successione di reali formali* $(\alpha_n)_n$ *è detta una* successione di Cauchy *se per ogni* $k \in Q^{>}$ *esistono* (a, b) *e* $\bar{n} \in N$ *tali che*

$$(b - a = k) \ \& \ ((\forall n > \bar{n})(\alpha_n \Vdash (a, b))).$$

Come annunciato, abbiamo:

Teorema 4.6.6 (Completezza secondo Cauchy di $Pt(\mathcal{R})$) *Una successione di reali formali* $(\alpha_n)_n$ *converge se e solo se è una successione di Cauchy.*

Dimostrazione: Supponiamo che $\alpha_n \to \alpha$. Per il lemma 4.1.4 sappiamo che $(\forall k \in Q^{>})(\exists (a, b) \in \alpha)(b - a = k)$. Così abbiamo

$$(\forall k \in Q)(\exists (a, b))(\exists \bar{n} \in N)((b - a = k) \ \& \ ((\forall n > \bar{n})(\alpha_n \Vdash (a, b))).$$

D'altra parte, se $(\alpha_n)_n$ è una successione di Cauchy, allora possiamo dimostrare che

$$\alpha = \{(a, b) \in S : (\exists (a', b') < (a, b))(\exists \bar{n} \in N)((\forall n > \bar{n})(\alpha_n \Vdash (a', b')))\}$$

è il limite della data successione.

Infatti, α è un reale formale dato che:

1. Per ogni $k \in Q$, per la condizione di Cauchy, esistono (a, b) e $\bar{n} \in N$ tali che $(b - a = k) \ \& \ ((\forall n > \bar{n})(\alpha_n \Vdash (a, b)))$. Siccome $-\infty < a < b < +\infty$, per definizione di α abbiamo $\alpha \Vdash (-\infty, +\infty)$.

2. Siano $(a, b), (c, d) \in \alpha$. Allora per definizione

   $(\exists (a', b') < (a, b))(\exists \bar{n} \in N)((\forall n > \bar{n})(\alpha_n \Vdash (a', b')))$,

   $(\exists (c', d') < (c, d))(\exists \bar{m} \in N)((\forall n > \bar{m})(\alpha_n \Vdash (c', d')))$.

   Quindi $(\forall n > max(\bar{n}, \bar{m}))(\alpha_n \Vdash (a', b') \cdot (c', d'))$ e poiché $(a', b') \cdot (c', d') < (a, b) \cdot (c, d)$, abbiamo $\alpha \Vdash (a, b) \cdot (c, d)$.

   Viceversa, sia $\alpha \Vdash (a, b)$ e supponiamo $(a, b) \leq (c, d)$. Per definizione, $(\exists (a', b') < (a, b))(\exists \bar{n} \in N)((\forall n > \bar{n})(\alpha_n \Vdash (a', b')))$ e, poiché $(a', b') < (c, d)$, abbiamo anche $\alpha \Vdash (c, d)$.

3. Sia $(a, b) \in \alpha$, e siano $c, d \in Q$, con $c < d$. Per dimostrare che $(a, d) \in \alpha \vee (c, b) \in \alpha$ ragioniamo per casi. Innanzitutto, sia (a', b') un elemento di S tale che $(a', b') < (a, b)$ e sia $\bar{n} \in N$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$, $\alpha_n \Vdash (a', b')$. Se $c < a'$ o $b' < d$, allora

$$\alpha \Vdash (c, b) \ \vee \ \alpha \Vdash (a, d) \ ,$$

per definizione di α. Altrimenti abbiamo $a < a' \leq c < d \leq b' < b$. Per la condizione di Cauchy applicata ad un razionale $k < d - c$, esistono (e, f) e $\bar{m} \in N$ tali che $f - e < d - c$ e $(\forall n > \bar{m})(\alpha_n \Vdash (e, f))$. Se $f < d$, abbiamo $\alpha \Vdash (a, d)$ poiché $(e, f) \cdot (a', b') < (a, d)$ e $(\forall n > max(\bar{n}, \bar{m}))(\alpha_n \Vdash (e, f) \cdot (a', b'))$. Se $d \leq f$ allora, poiché $f - e < d - c$, abbiamo $c < e$. Quindi $\alpha \Vdash (c, b)$ poiché $(e, f) \cdot (a', b') < (c, b)$.

4. Sia $(a, b) \in \alpha$, sia (a', b') tale che $(a', b') < (a, b)$ e sia $\bar{n} \in N$ tale che

$$(\forall n > \bar{n})(\alpha_n \Vdash (a', b')) \; .$$

   Allora $(\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2}) < (a, b)$ e quindi, per *monotonicity*, $\alpha \Vdash (\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2})$.

5. Se $(a, b) \in \alpha$, consideriamo $(a', b') < (a, b)$ e $\bar{n} \in N$ tale che $(\forall n > \bar{n})(\alpha_n \Vdash (a', b'))$. Poiché per ogni n, α_n è un punto formale, vale $Pos((a', b'))$, quindi *a fortiori* vale $Pos((a, b))$.

Il punto α è il limite della successione $(\alpha_n)_n$. Infatti, se $(a, b) \in \alpha$, allora per definizione $(\exists (a', b') < (a, b))(\exists \bar{n} \in N)(\forall n > \bar{n})(\alpha_n \Vdash (a', b'))$ e quindi, poiché $(a', b') \lhd (a, b)$, per *monotonicity* abbiamo $(\forall n > \bar{n})(\alpha_n \Vdash (a, b))$.
□

Definizione 4.6.7 (totale limitatezza) *Una famiglia F di punti di $Pt(\mathcal{R})$ è* totalmente limitata *se per ogni $k \in Q$ esiste una sequenza finita*

$$(p_1, q_1), ..., (p_{\bar{n}}, q_{\bar{n}})$$

di intervalli di ampiezza k (ovvero, per ogni $i \leq \bar{n}$, $(q_i - p_i = k)$) tali che ogni punto di F stia in $ext(\{(p_1, q_1), ..., (p_{\bar{n}}, q_{\bar{n}})\})$.

Proposizione 4.6.8 *L'intervallo chiuso $[0, 1]$ è completo (ovvero ogni successione di Cauchy a valori in esso vi converge) e totalmente limitato.*

Dimostrazione: ([So]) *Completezza.* Sia $(\alpha_n)_n$ una successione di Cauchy in $[0, 1]$ e sia α il suo limite. Se $\alpha > \bar{1}$ abbiamo $\alpha \Vdash (1, +\infty)$ e quindi, per definizione di convergenza $(\exists \bar{n})(\forall n > \bar{n})(\alpha_n \Vdash (1, +\infty))$ cioè

$$(\forall n > \bar{n})(\alpha_n > \bar{1}) \; .$$

Per ipotesi abbiamo invece $\alpha_n \leq \bar{1}$ e quindi otteniamo $\alpha \leq \bar{1}$. Nello stesso modo otteniamo $\bar{0} \leq \alpha$.

Totale limitatezza. Sia $k \in Q$. Definiamo induttivamente una successione di intervalli. Poniamo $(p_1, q_1) \equiv (-\frac{k}{2}, \frac{k}{2})$; supponiamo quindi che $(p_1, q_1), ..., (p_n, q_n)$ siano stati definiti. Se $1 < q_n$ siamo a posto, altrimenti poniamo $(p_{n+1}, q_{n+1}) = (q_n - \frac{k}{2}, q_n + \frac{k}{2})$. La successione conterrà allora un numero di elementi pari al più alla parte intera di $\frac{2}{k} + 1$ e quindi in questo modo si definisce una catena da $\bar{0}$ a $\bar{1}$.

Osserviamo inoltre che se $\alpha \in [\bar{0}, \bar{1}]$ allora $\alpha \Vdash (p_1, q_{\bar{n}})$. Invero, dato che l'ordine è transitivo, abbiamo la seguente deduzione

$$\cfrac{\cfrac{\alpha \leq \bar{1} < \bar{q}_{\bar{n}}}{\alpha < \bar{q}_{\bar{n}}} \qquad \cfrac{\bar{p}_1 < \bar{0} \leq \alpha}{\bar{p}_1 < \alpha}}{\alpha \Vdash (p_1, q_{\bar{n}})}\quad .$$

Per il lemma 4.5.2 sappiamo che $(p_1, q_{\bar{n}}) \lhd \{(p_1, q_1), ..., (p_{\bar{n}}, q_{\bar{n}})\}$ e quindi, per definizione di reale formale abbiamo $(\exists i)(\alpha \Vdash (p_i, q_i))$. $\Box$

Osserviamo che classicamente la completezza e totale limitatezza di un sottoinsieme dei reali equivale alla compattezza ovvero al fatto che ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

Costruttivamente questo non è più vero (cf. [Bee]) e la compattezza risulta essere una nozione più forte.

Vedremo nel capitolo successivo come una definizione pointfree degli intervalli chiusi della retta reale permetterà di dimostrare in modo completamente costruttivo la compattezza nel senso più forte, ovvero il teorema di Heine-Borel.

Possiamo dimostrare come nel modo usuale che una funzione continua conserva la convergenza delle successioni.

Proposizione 4.6.9 *Sia f una funzione continua da $Pt(\mathcal{R})$ a $Pt(\mathcal{R})$ (siano f^{pt} e f^{Ω} l'applicazione sui punti ed il morfismo sugli aperti rispettivamente) e sia $(\alpha_n)_n$ una successione di punti. Se $\alpha_n \to \alpha$ allora $f^{pt}(\alpha_n) \to f^{pt}(\alpha)$.*

Dimostrazione: Supponiamo che $f^{pt}(\alpha) \Vdash (p, q)$. Allora per la relazione tra f^{pt} e f^{Ω} abbiamo $\alpha \Vdash f^{\Omega}((p, q))$ e quindi, per definizione di convergenza, $(\exists \bar{n})(\forall n > \bar{n})(\alpha_n \Vdash f^{\Omega}((p, q)))$.

Di nuovo per la relazione che sussiste tra f^{pt} ed f^{Ω} otteniamo

$$(\exists \bar{n})(\forall n > \bar{n})(f^{pt}(\alpha_n) \Vdash (p, q))$$

cioè $f^{pt}(\alpha_n) \to f^{pt}(\alpha)$. $\Box$

4.6.2 Il teorema del valor medio

Il teorema del valor medio - che afferma che se f è una funzione reale continua definita su un intervallo $[a, b]$, e se $f^{pt}(a) < \beta < f^{pt}(b)$ allora esiste $\alpha \in [a, b]$ tale che $f^{pt}(\alpha) = \beta$ - non vale costruttivamente.

Infatti, assumere che valga il teorema del valor medio implica la decidibilità dell'ordine tra i numeri reali (cf. [TvD1]).

Un controesempio è infatti dato dalla funzione

$$\begin{array}{rccl} f^{pt}: & [-\bar{1},\bar{1}] & \rightarrow & [-\bar{\frac{1}{2}},\bar{\frac{1}{2}}] \\ & \alpha & \mapsto & m(\alpha+\bar{\frac{1}{2}},\bar{0})+M(\alpha-\bar{\frac{1}{2}},\bar{0}) \end{array}$$

Se $-\frac{1}{2}\leq\alpha\leq\frac{1}{2}$ si ha $f^{pt}(\alpha)=0$, se $\alpha<-\frac{1}{2}$ allora $f^{pt}(\alpha)=\alpha+\frac{1}{2}<0$ e infine se $\alpha>\frac{1}{2}$ si trova $f^{pt}(\alpha)=\alpha-\frac{1}{2}>0$. Si osservi che$f^{pt}$ è una funzione continua e il morfismo f^{Ω} corrispondente manda il generico intervallo (p,q), con $p<q$, in $(p+\frac{1}{2},q+\frac{1}{2})$ se $p>0$, in $(p-\frac{1}{2},q-\frac{1}{2})$ se $q<0$ e infine in $(p-\frac{1}{2},q+\frac{1}{2})$ se $p\leq 0\leq q$.

Comunque fissato β compreso tra $f^{pt}(-\bar{1})$ e $f^{pt}(\bar{1})$, per il teorema del valore medio troveremmo $\alpha\in[-\bar{1},\bar{1}]$ tale che $f^{pt}(\alpha)=\beta$ e quindi, per come è definita f^{pt}, dato che $(\alpha<\bar{\frac{1}{2}})\vee(\alpha>-\bar{\frac{1}{2}})$, si avrebbe che $(\beta\leq\bar{0})\vee(\bar{0}\leq\beta)$, ovvero che l'ordine è decidibile.

Un modo possibile per rendere costruttivo il risultato classico consiste nel richiedere che esso valga per tutti i numeri reali compresi tra $f^{pt}(\bar{0})$ e $f^{pt}(\bar{1})$ tranne un'opportuna famiglia numerabile. In [Brg], viene dimostrato quello che nel nostro approccio si esprime come segue:

Teorema 4.6.10 *Sia f^{pt} una funzione continua da $[0,1]$ a $Pt(\mathcal{R})$ tale che $f^{pt}(\bar{0})<f^{pt}(\bar{1})$. Allora esiste una successione $(\beta_n)_n$ in $[f^{pt}(\bar{0}),f^{pt}(\bar{1})]$ tale che se $\beta\in[f^{pt}(\bar{0}),f^{pt}(\bar{1})]$ e $(\forall n)(\beta\#\beta_n)$, esiste $\alpha\in[0,1]$ tale che $f^{pt}(\alpha)=\beta$.*

Dimostrazione: Si veda [Brg] per la dimostrazione originale. Riportiamo qui la dimostrazione di [So] che ne è l'adattamento al nostro contesto. Mettiamo in forma di successione $(\beta_n)_n$ i punti $f^{pt}(\bar{r})$, al variare di r in $Q\cap[0,1]$ e consideriamo β come nelle ipotesi.

Costruiamo per induzione due successioni di razionali $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ tali che, per ogni n,

1. $0=a_0\leq...\leq a_n<b_n\leq...\leq b_0=1$;
2. $b_n-a_n=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}$ (e allora $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}$);
3. $f^{pt}(\bar{a}_n)\leq\beta\leq f^{pt}(\bar{b}_n)$.

Avendo definito $a_0,...,a_n$ e $b_0,...,b_n$, dato che per ipotesi $\beta\#f^{pt}(\bar{\frac{a_n+b_n}{2}})$, se $\beta>f^{pt}(\bar{\frac{a_n+b_n}{2}})$ poniamo $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ e $b_{n+1}=b_n$, mentre se $\beta<f^{pt}(\bar{\frac{a_n+b_n}{2}})$ poniamo $a_{n+1}=a_n$ e $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$.

La successione $(a_n)_n$ è di Cauchy, infatti, dato $k\in Q$, se prendiamo $\bar{n}$ tale che $\frac{1}{2^{\bar{n}}}<k$ si ha, visto che per costruzione $b_{\bar{n}}-a_{\bar{n}}\leq\frac{1}{2^{\bar{n}}}$, per ogni $n>\bar{n}$

$$b_{\bar{n}}-k<a_{\bar{n}}\leq a_n<b_n\leq b_{\bar{n}}$$

e allora $\bar{a}_n \Vdash (b_{\bar{n}} - k, b_{\bar{n}})$.

Analogamente si trova che $(b_n)_n$ è di Cauchy. Per la completezza di $[0,1]$, le due successioni convergono: chiamiamo α_1 il limite di $(a_n)_n$ e α_2 quello di $(b_n)_n$.

Osserviamo ora che:

* non può essere $\alpha_2 < \alpha_1$, ovvero

$$(\exists(p_1,q_1))(\exists(p_2,q_2))(\alpha_1 \Vdash (p_1,q_1) \;\&\; \alpha_2 \Vdash (p_2,q_2) \;\&\; q_2 < p_1),$$

poiché, per la convergenza delle due successioni,

$$(\exists n')(\forall n > n')(\bar{a}_n \Vdash (p_1,q_1)),$$

$$(\exists n'')(\forall n > n'')(\bar{b}_n \Vdash (p_2,q_2))$$

e dunque

$$(\forall n > max(n',n''))(\bar{a}_n \Vdash (p_1,q_1) \;\&\; \bar{b}_n \Vdash (p_2,q_2)),$$

contro il fatto che $a_n < b_n$;

* non può essere $\alpha_1 < \alpha_2$, ovvero

$$(\exists(p_1,q_1))(\exists(p_2,q_2))(\alpha_1 \Vdash (p_1,q_1) \;\&\; \alpha_2 \Vdash (p_2,q_2) \;\&\; q_1 < p_2),$$

altrimenti troveremmo, per la convergenza di $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$,

$$(\exists n')(\exists n'')(\forall n > max(n',n''))((\bar{a}_n \Vdash (p_1,q_1))\&(\bar{b}_n) \Vdash (p_2,q_2)),$$

e da ciò $b_n - a_n > p_2 - q_1$. Per la proprietà 2. delle successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$, fissato $\bar{m}$ tale che $\frac{1}{2^{\bar{m}}} < p_2 - q_1$, per ogni $n > \bar{m}$ si ha $b_n - a_n \leq \frac{1}{2^{\bar{m}}} < p_2 - q_1$, contro quanto visto. Allora $\alpha_1 \leq \alpha_2$ e $\alpha_2 \leq \alpha_1$, cioè $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$.

Per la proposizione 4.6.9 sappiamo che

$$f^{pt}(\bar{a}_n) \to f^{pt}(\alpha) \text{ e } f^{pt}(\bar{b}_n) \to f^{pt}(\alpha)\ .$$

Si ha inoltre che $f^{pt}(\alpha) \subseteq \beta$: infatti vale

$$f^{pt}(\alpha) \Vdash (p,q) \;\Rightarrow \alpha \Vdash f^{\Omega}((p,q))$$

da cui, per definizione di convergenza,

$$(\exists \bar{n})(\forall n > \bar{n})(\bar{a}_n \Vdash f^{\Omega}((p,q))),$$
$$(\exists \bar{m})(\forall m > \bar{m})(\bar{b}_m \Vdash f^{\Omega}((p,q)))\ ;$$

per la relazione di aggiunzione tra f^{pt} e f^{Ω}

$$(\exists \bar{n})(\forall n > \bar{n})(f^{pt}(\bar{a}_n) \Vdash (p,q)),$$

$$(\exists \bar{m})(\forall m > \bar{m})(f^{pt}(\bar{b}_m) \ \Vdash (p, q))$$

ovvero

$$(\exists \bar{n})(\exists \bar{m})(\forall n > max(\bar{n}, \bar{m}))((\bar{p} < f^{pt}(\bar{a}_n) < \bar{q}) \& (\bar{p} < f^{pt}(\bar{b}_m) < \bar{q})),$$

per cui sfruttando 3.,

$$(\forall n > max(\bar{n}, \bar{m}))(\bar{p} < f^{pt}(\bar{a}_n) \leq \beta \leq f^{pt}(\bar{b}_m) < \bar{q})$$

perciò $\beta \ \Vdash (p, q)$.

Per il corollario 4.3.14, allora, $f^{pt}(\alpha) = \beta$. $\Box$

Un'altra versione costruttiva del teorema del valor medio si può ottenere rafforzando l'ipotesi su f:

Teorema 4.6.11 *Sia f^{pt} una funzione continua da $[0, 1]$ a $Pt(\mathcal{R})$ tale che $(\forall \alpha, \beta)(\alpha < \beta \rightarrow f^{pt}(\alpha) < f^{pt}(\beta))$. Allora per ogni γ con $f^{pt}(\bar{0}) < \gamma < f^{pt}(\bar{1})$ esiste α in $[\bar{0}, \bar{1}]$ tale che $f^{pt}(\alpha) = \gamma$.*

Dimostrazione: ([So]) Costruiamo due successioni di razionali $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ in $[0, 1]$ convergenti allo stesso limite, una crescente e l'altra decrescente e tali che $b_n - a_n = (\frac{2}{3})^n$ cosicché, al crescere di n, $b_n - a_n$ tende a 0. Iniziamo ponendo $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$. Una volta definiti $a_0, ..., a_n$ e $b_0, ..., b_n$, per la proprietà d1) dei punti, dato che per ipotesi $f(a_n + \frac{b_n - a_n}{3}) < f(a_n + \frac{2(b_n - a_n)}{3})$, si ha $\gamma < f(a_n + \frac{2(b_n - a_n)}{3})$ oppure $\gamma > f(a_n + \frac{b_n - a_n}{3})$. Nel primo caso definiamo $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = a_n + \frac{2(b_n - a_n)}{3} = b_n - \frac{b_n - a_n}{3}$ mentre nel secondo definiamo $a_{n+1} = a_n + \frac{b_n - a_n}{3}$ e $b_{n+1} = b_n$.

Osserviamo che $(a_n)_n$ è di Cauchy: dato $k \in Q$, sia $\bar{n}$ tale che $b_{\bar{n}} - a_{\bar{n}} < k$; definito $(a, b) = (a_{\bar{n}} - \frac{k - (b_{\bar{n}} - a_{\bar{n}})}{2}, b_{\bar{n}} + \frac{k - (b_{\bar{n}} - a_{\bar{n}})}{2})$, si ha che $b - a = k$ e che $(\forall n > \bar{n})(\bar{a}_n \ \Vdash (a, b))$ (dato che $a_{\bar{n}} - \frac{k - (b_{\bar{n}} - a_{\bar{n}})}{2} < a_{\bar{n}}$ e che $b_{\bar{n}} + \frac{k - (b_{\bar{n}} - a_{\bar{n}})}{2} > b_{\bar{n}}$).

Per il teorema 4.6.6 e la proposizione 4.6.1 sappiamo allora che $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ convergono rispettivamente a dei punti formali α_1 e α_2 in $[0, 1]$.

Proviamo ora che $\alpha_1 = \alpha_2$. Se $\alpha_1 \# \alpha_2$ allora esistono $(p_1, q_1) \in \alpha_1$ e $(p_2, q_2) \in \alpha_2$ tali che $q_2 < p_1$ o $q_1 < p_2$. Per definizione di convergenza abbiamo

$$(\exists \bar{n})(\forall n > \bar{n})(p_1 < a_n < q_1)$$
$$(\exists \bar{m})(\forall n > \bar{m})(p_2 < b_n < q_2)$$

quindi la prima alternativa va contro il fatto che, per ogni n, $a_n < b_n$, mentre la seconda va contro il fatto che $b_n - a_n$ tende a 0 al crescere di n. Poniamo quindi $\alpha \equiv \alpha_1 (= \alpha_2)$.

Sappiamo ora che sia $(f^{pt}(a_n))_n$ sia $(f^{pt}(b_n))_n$ convergono a $f^{pt}(\alpha)$. Non si può avere $f^{pt}(\alpha) > \gamma$, altrimenti, per definizione di ordine, troveremmo (p, q) in $f^{pt}(\alpha)$ tale che $\bar{p} > \gamma$ e per definizione di convergenza, allora, $(\exists \bar{n})(\forall n > \bar{n})(f^{pt}(\bar{a}_n) \Vdash (p, q))$, contro il fatto che, per costruzione, $(\forall n)(f^{pt}(\bar{a}_n) < \gamma)$.

Allo stesso modo, non può neppure essere $f^{pt}(\alpha) < \gamma$, altrimenti si avrebbe

$$(\exists (p, q))(f^{pt}(\alpha) \Vdash (p, q) \ \& \ (\exists \bar{n})(\forall n > \bar{n})((\bar{q} < \gamma) \& (f^{pt}(\bar{b}_n) \Vdash (p, q)))$$

mentre, per costruzione, $(\forall n)(f^{pt}(\bar{b}_n) > \gamma)$.

Allora $\neg(\gamma \# f^{pt}(\alpha))$ e quindi $\gamma = f^{pt}(\alpha)$. □

4.6.3 Il teorema di Baire

In questa sezione dimostreremo che il teorema di Baire continua a valere per i reali formali. Come corollario otterremo un'altra prova del teorema di Cantor sulla non-enumerabilità del continuo.

Definizione 4.6.12 *Un sottoinsieme U di S è detto* denso *in $Pt(\mathcal{R})$ se*

$$(\forall (p, q))(p < q \to (\exists \alpha \in ext(U))(\alpha \Vdash (p, q))).$$

Abbiamo il seguente:

Teorema 4.6.13 (Baire) *Sia $(U_n)_{n \in N}$ una famiglia numerabile di sottoinsiemi di S densi in $Pt(\mathcal{R})$. Allora anche $U = \cap_{n \in N} U_n$ è denso in $Pt(\mathcal{R})$.*

Dimostrazione: ([So]) Sia fissato (p, q) con $p < q$. Dobbiamo trovare un punto α di $ext(U)$ tale che $\alpha \Vdash (p, q)$.

Nel seguito porremo $l(p, q) \equiv q - p$ ed $l_i \equiv l(p_i, q_i)$.

Consideriamo $(p_1, q_1) < (p, q)$ (questo ci garantisce che l_1 è finito); per la densità di U_1, $(\exists \alpha_1 \in ext(U_1))(\alpha_1 \Vdash (p_1, q_1))$; dato che $\alpha_1 \in ext(U_1)$, $(\exists (a_1, b_1) \in U_1)(\alpha_1 \Vdash (a_1, b_1))$ e quindi si ha anche $\alpha_1 \Vdash (p_1, q_1) \cdot (a_1, b_1)$.

Consideriamo ora (p_2, q_2) tale che $(p_2, q_2) < (p_1, q_1) \cdot (a_1, b_1) \leq (p_1, q_1)$ e tale che l_2 sia minore di $l(\frac{(p_1, q_1) \cdot (a_1, b_1)}{2})$ (che a sua volta è minore o uguale a $\frac{l_1}{2}$); per la densità di U_2, $(\exists \alpha_2 \in ext(U_2))(\alpha_2 \Vdash (p_2, q_2))$; visto che allora $(\exists (a_2, b_2) \in U_2)(\alpha_2 \Vdash (a_2, b_2))$, otteniamo $\alpha_2 \Vdash (p_2, q_2) \cdot (a_2, b_2)$.

Proseguendo in questo modo otteniamo:

- una famiglia di intervalli $((p_n, q_n))_n$ tale che per ogni $n > 1$
  - * $l_n < \frac{l_{n-1}}{2} < \ldots < \frac{l_1}{2^{n-1}}$,

* $(p_n, q_n) < (p_{n-1}, q_{n-1}) < ... < (p_1, q_1) < (p, q)$,

* $(ext((p_n, q_n)) \subseteq ext(U_{n-1}))$ (dato che $(p_n, q_n) < (a_{n-1}, b_{n-1}) \in U_{n-1}$), da cui $(\forall n < \bar{n})(ext((p_{\bar{n}}, q_{\bar{n}})) \subseteq ext(U_n))$;

- una successione di punti $(\alpha_n)_n$ che risulta di Cauchy, infatti, dato $k \in Q$,

  *se $l_1 \leq k$ allora $(p_1, p_1 + k)$ è tale che $(\forall n > 0)(\alpha_n \Vdash (p_1, p_1 + k))$, dato che $(\forall n > 0)(\alpha_n \Vdash (p_1, q_1))$ e che $(p_1, q_1) \leq (p_1, p_1 + k)$;

  *se $k < l_1$, prendiamo $\bar{n}$ tale che $l_{\bar{n}} < \frac{l_1}{2^{\bar{n}-1}} \leq k$; allora $(p_{\bar{n}}, q_{\bar{n}}) < (p_{\bar{n}}, p_{\bar{n}} + k)$ e dunque $(\forall n > \bar{n} - 1)(\alpha_n \Vdash (p_{\bar{n}}, p_{\bar{n}} + k))$ (dato che $(\forall n > \bar{n} - 1)(\alpha_n \Vdash (p_n, q_n))$ e che $(p_n, q_n) < (p_{\bar{n}}, q_{\bar{n}}) < (p_{\bar{n}}, p_{\bar{n}} + k))$.

Per la completezza secondo Cauchy di $Pt(\mathcal{R})$ (cf. teorema 4.6.6) $(\alpha_n)_n$ converge ed il suo limite è

$$\alpha = \{(a, b) : (\exists (a', b') < (a, b))(\exists \bar{n})(\forall n > \bar{n})(\alpha_n \Vdash (a', b'))\}.$$

Se ora fissiamo $\bar{n} > 0$, $(p_{\bar{n}+1}, q_{\bar{n}+1}) < (p_{\bar{n}}, q_{\bar{n}}) \cdot (a_{\bar{n}}, b_{\bar{n}})$ e inoltre $(\forall n > \bar{n})(\alpha_n \Vdash (p_{\bar{n}+1}, q_{\bar{n}+1}))$; allora, per definizione di α, $\alpha \Vdash (p_{\bar{n}}, q_{\bar{n}}) \cdot (a_{\bar{n}}, b_{\bar{n}})$ da cui, $\forall \bar{n} > 0$, $\alpha \Vdash (a_{\bar{n}}, b_{\bar{n}})$, (cioè $\alpha \in ext(U_{\bar{n}})$) e $\alpha \Vdash (p_{\bar{n}}, q_{\bar{n}})$. Allora $\alpha \Vdash (p, q)$, dato che $(p_{\bar{n}}, q_{\bar{n}}) < (p, q)$. $\square$

Corollario 4.6.14 *Sia $(\alpha_n)_n$ una successione in $Pt(\mathcal{R})$. Allora la collezione dei punti α tali che $(\forall n)(\alpha \# \alpha_n)$ è densa in $Pt(\mathcal{R})$.*

Dimostrazione:([So]) Per ogni $n \in N$ sia

$$U_n \equiv \{(p, q) : (\bar{q} \leq \alpha_n) \vee (\alpha_n \leq \bar{p})\}.$$

Vediamo che U_n è denso in $Pt(\mathcal{R})$. Dato (p, q) con $p < q$, si ha

$$\alpha_n \Vdash (-\infty, q) \text{ oppure } \alpha_n \Vdash (p, +\infty)\ .$$

Nel primo caso $(\exists (p', q') < (-\infty, q))(\alpha_n \Vdash (p', q'))$, da cui, per il lemma 4.3.6, $\bar{p}' < \alpha_n$ e dunque, per definizione, $(p, min(p', q)) \in U_n$. Allora il reale formale associato a $\frac{p+min(p',q)}{2}$, che sta in (p, q), è un elemento di $ext(U_n)$. Nel secondo caso si procede in maniera simmetrica. La conclusione segue dal fatto che $ext(U_n) = \{\alpha : \alpha \# \alpha_n\}$ e quindi $\{\alpha : (\forall n)(\alpha \# \alpha_n)\} = ext(\cap_{n \in N} U_n)$ è denso in $Pt(\mathcal{R})$ per il teorema di Baire.

4.7 Altre assiomatizzazioni

Vedremo in questa sezione il confronto tra i reali formali ed altre presentazioni dei reali in ambito costruttivo, in particolare le sezioni di Dedekind, le *maximal approximations* di Martin-Löf e le successioni di Cauchy à la Bishop.

Nei due capitoli che seguono utilizzeremo una presentazione alternativa dei reali dovuta a T. Coquand (cf. 5.1). Tale presentazione è simile a quella da noi fin qui usata dato che si definisce una topologia formale basata sugli intervalli ad estremi razionali, i cui punti formali sono ciò che noi chiamiamo reali formali. La novità di tale approccio consiste nel fatto che la topologia formale $\mathcal{R}$ si ottiene in maniera induttiva a partire da certe regole, senza la necessità di "chiudere" per le regole di copertura, che risultano dimostrabili. Questo semplifica le prove per induzione sulla copertura che saranno alla base delle dimostrazioni nei capitoli 5 e 6. Ciò è particolarmente rilevante in vista di una formalizzazione completa di questi risultati nei termini della teoria dei tipi.

4.7.1 Sezioni di Dedekind

Ricordiamo qui la definizione di sezione di Dedekind sui razionali data in [FH] per provare che esiste una corrispondenza biunivoca tra reali formali e sezioni di Dedekind.

Definizione 4.7.1 *Una sezione di Dedekind sui razionali è una coppia (L, U), ove L e U sono sottoinsiemi propri non vuoti di Q^- e di Q^+ rispettivamente, tali che:*

- $(\forall p)(\quad \neg(p \in U \ \&\ p \in L))$ *(*disjointness*);*
- $(\forall p)(p \in L \rightarrow (\exists q)(q \in L \ \&\ p < q))$*,*
  $(\forall p)(p \in U \rightarrow (\exists q)(q \in U \ \&\ q < p))$ *(*openness*);*
- $(\forall p)((\exists q)(q \in L \ \&\ p < q) \rightarrow p \in L)$*,*
  $(\forall p)((\exists q)(q \in U \ \&\ q < p) \rightarrow p \in U)$ *(*monotonicity*);*
- $(\forall p)(\forall q)(p < q \rightarrow p \in L \vee q \in U)$ *(*locatedness*).*

Allora abbiamo:

Proposizione 4.7.2 *Esiste una corrispondenza biunivoca ϕ tra la collezione $Pt(\mathcal{R})$ dei punti formali su $\mathcal{R}$ e la collezione R delle sezioni di Dedekind sui razionali, data da*

$$\phi(\alpha) \equiv (\{p \in Q^- : (p, +\infty) \in \alpha\}, \{q \in Q^+ : (-\infty, q) \in \alpha\})$$

la cui inversa è data da $\psi(L,U) \equiv \{(p,q) \in Q^- \times Q^+ : p \in L \ \& \ q \in U\}$.

Dimostrazione: Per ogni punto formale α, $(L_\alpha, U_\alpha) \equiv \phi(\alpha)$ è una sezione di Dedekind, infatti L_α e U_α sono non vuoti dato che $(-\infty, +\infty) \in \alpha$ e quindi $-\infty \in L$ e $+\infty \in U$. La proprietà di *disjointness* pure vale, dato che se $p \in L_\alpha$ e $p \in U_\alpha$ allora, per chiusura per intersezione, avremmo $(p,p) \in \alpha$ e quindi $Pos((p,p))$ che è impossibile. Le proprietà di *openness* e *monotonicity* seguono rispettivamente dalla quarta e dalla seconda condizione della definizione di reale formale. La proprietà di *locatedness* si dimostra semplicemente osservando che se $p < q$ allora $(-\infty, q) \in \alpha$ o $(p, +\infty) \in \alpha$.

Proveremo ora che $\alpha_{(L,U)} \equiv \psi((L,U)) \equiv \{(p,q) : p \in L, q \in U\}$ è un reale formale. Ovviamente $(-\infty, +\infty) \in \alpha$ dato che L e U sono entrambi non vuoti e monotoni. La chiusura per prodotto di $\alpha_{(L,U)}$ è ovvia, mentre la proprietà inversa segue dalla *monotonicity*. Se $(p,q) \in \alpha_{(L,U)}$ e $r < s$, allora per *locatedness* $(p,s) \in \alpha_{(L,U)}$ o $(r,q) \in \alpha_{(L,U)}$. Inoltre, se $(p,q) \in \alpha_{(L,U)}$, allora per *openness* esiste (p',q') tale che $p < p' < q' < q$ e $(p',q') \in \alpha_{(L,U)}$. Per *disjointness* e *monotonicity*, ogni $(p,q) \in \alpha_{(L,U)}$ soddisfa $Pos((p,q))$.

Infine è immediato dimostrare che l'applicazione ψ è l'inversa di ϕ. □

Per ogni $p \in Q$, sia (L_p, U_p) la sezione di Dedekind definita da $L_p \equiv \{x \in Q^- : x < p\}$ e $U_p \equiv \{x \in Q^+ : x > p\}$. Allora si può definire un intervallo di sezioni di Dedekind mediante

$$]p,q[\equiv \{(L,U) : L_p \subset L \subset L_q \ \& \ U = \{r \in Q^+ : L < r\}\ \}$$

dove $L < r \equiv (\forall x \in L)(x < r)$. Abbiamo allora:

1. $\psi(]p,q[) = ext((p,q))$,
2. $\phi(ext((p,q))) =]p,q[$.

1. Se $\alpha \in \psi(]p,q[)$ allora esiste (L,U) tale che

$$L_p \subset L \subset L_q \ \& \ U = \{r \in Q^+ : L < r\} \text{ e } \alpha = \alpha_{(L,U)} \ .$$

   Quindi $p \in L$ e $q \in U$, cioè $(p,q) \in \alpha_{(L,U)}$ che significa $\alpha \in ext((p,q))$. Viceversa, se $\alpha \in ext((p,q))$, allora, poiché $\alpha_{(L,U)_\alpha} \equiv \psi((L,U)_\alpha)$, $L_p \subset L \subset L_q$ e $q \in U$, cosicché (per *disjointness* e *monotonicity*) $U = \{r : r > L\}$.

2. Basta osservare che $\phi(ext((p,q))) = \phi\psi(]p,q[) =]p,q[$ per la dimostrazione fatta sopra e la biettività

Allora abbiamo:

Proposizione 4.7.3 *I reali di Dedekind con la topologia usuale sono omeomorfi ai reali formali con la topologia estensionale.*

4.7.2 Successioni di Cauchy à la Bishop

Ricordiamo la definizione di numero reale à la Bishop:

Definizione 4.7.4 *([Bi]) Un numero reale è una successione $(x_n)_n$ di numeri razionali tale che*

$$|x_m - x_n| \leq m^{-1} + n^{-1} \qquad (m, n \in N^+)$$

Due numeri reali $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ sono uguali se

$$|x_n - y_n| \leq 2n^{-1} \qquad (n \in N^+)$$

Possiamo ora dimostrare:

Proposizione 4.7.5 *Esiste una corrispondenza biunivoca tra reali formali e reali à la Bishop.*

Dimostrazione: Sia α un reale formale. Per il lemma 4.1.4, esiste $(p, q) \in \alpha$ tale che $q - p \leq 2/3$. Possiamo quindi definire induttivamente una successione di intervalli $((x_n, y_n))_n$ ponendo $(x_1, y_1) = (p, q)$ e

$$(x_{i+1}, y_{i+1}) \equiv \begin{cases} (x_i, \frac{x_i+2y_i}{3}) & \text{se } \alpha \Vdash (x_i, \frac{x_i+2y_i}{3}) \\ (\frac{2x_i+y_i}{3}, y_i) & \text{se } \alpha \Vdash (\frac{2x_i+y_i}{3}, y_i) \end{cases}$$

Si osservi che la definizione è lecita dato che $\alpha \Vdash (x_i, y_i)$ e $\frac{2x_i+y_i}{3} < \frac{x_i+2y_i}{3}$ implicano $\alpha \Vdash (x_i, \frac{x_i+2y_i}{3}) \ \vee \ \alpha \Vdash (\frac{2x_i+y_i}{3}, y_i)$.

Si verifica allora che le successioni $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ sono numeri reali uguali secondo la definizione 4.7.4.

Viceversa, se $(x_n)_n$ è un reale à la Bishop, l'insieme definito da

$$\alpha \equiv \bigcup_{n \in N^+} \{(p, q) : p < x_n - 2/n < x_n + 2/n < q\}$$

è un reale formale.

Inoltre si verifica che tale corrispondenza è biunivoca. □

4.7.3 Le maximal approximations di Martin-Löf

In [ML], due intorni di base positivi $a \equiv (p, q)$ e $b \equiv (r, s)$ sono detti *to lie apart* se $q < r \vee s < p$, cioè, nella nostra terminologia, se $\neg Pos(a \cdot b)$. La definizione di *maximal approximation* data in [ML] può quindi essere espressa nella forma seguente:

Definizione 4.7.6 *Una* approximation *A è un sottoinsieme ricorsivamente enumerabile di $Q^- \times Q^+$ tale che:*

1. $\dfrac{a \in A \ \& \ a < b}{b \in A}$;

2. $\dfrac{a \in A \ \& \ b \in A}{\exists c(c \in A \ \& \ c < a \ \& \ c < b)}$;

una approximation A *è* maximal *se inoltre*

3. $\dfrac{a < b}{\exists c(c \in A \ \& \ \neg Pos(a \cdot c)) \vee b \in A}$.

Allora abbiamo:

Proposizione 4.7.7 *Ogni reale formale ricorsivamente enumerabile è una maximal approximation.*

Dimostrazione: Sia α un reale formale dato da un sottoinsieme ricorsivamente enumerabile di $Q^- \times Q^+$. Per definizione, per ogni $a \in \alpha$, vale $Pos(a)$, quindi α è costituito di intorni positivi. Le condizioni che definiscono una *maximal approximation* sono soddisfatte:

1. Se $a \in \alpha$ ed $a < b$ allora, per il lemma 4.1.2, $a \lhd b$, e quindi, per *monotonicity*, $b \in \alpha$.

2. Supponiamo $a \in \alpha$ e $b \in \alpha$. Allora $a \cdot b \in \alpha$ e quindi, per il secondo assioma per la copertura di $\mathcal{R}$, $\exists c(c \in \alpha \ \& \ c < a \cdot b)$, cosicché $\exists c(c \in \alpha \ \& \ c < a \ \& \ c < b)$.

3. Cf. la proposizione 4.3.9. □

Viceversa abbiamo:

Proposizione 4.7.8 *Ogni* maximal approximation *è un reale formale ricorsivamente enumerabile.*

Dimostrazione: Si osservi dapprima che una *maximal approximation* A soddisfa la regola di *monotonicity*

$$\frac{a \in A \quad a \leq b}{b \in A}$$

poiché $a \leq b \equiv a < b \vee a = b$ ed un sottoinsieme è chiuso per sostituzione.

1. Per la condizione 3 della definizione 4.7.6, ogni *maximal approximation* è non vuota. Così, se $a \in A$ allora $a \leq 1$ e quindi, per l'osservazione fatta sopra, $1 \in A$.

2. Supponiamo $a \in A$ e $b \in A$. Allora, per la condizione 2 della definizione 4.7.6, $\exists c(c \in A \;\&\; c < a \cdot b)$, e quindi per *monotonicity* $a \cdot b \in A$. Il viceversa vale semplicemente per *monotonicity*.

3. Sia $(p, q) \in A$ e sia $r < s$. Se $r \leq p$ allora $(p, q) \leq (r, q)$, quindi per *monotonicity* $(r, q) \in A$. Analogamente, se $q \leq s$, allora $(p, s) \in A$. Altrimenti abbiamo $p < r < s < q$ e quindi $(r, \frac{r+s}{2}) < (p, s)$. Così, per definizione di *maximal approximation*, $(p, s) \in A$ o esiste $c \in A$ tale che $\neg Pos(c \cdot (r, \frac{r+s}{2})$. In questo ultimo caso, sia $c \equiv (u, v)$. Allora $v \leq r$ o $\frac{r+s}{2} \leq u$. Così otteniamo $(u, v) \cdot (p, q) \leq (p, s)$ o $(u, v) \cdot (p, q) \leq (r, q)$ e la conclusione segue per *monotonicity* poiché $(u, v) \cdot (p, q) \in A$.

4. Se $(p, q) \in A$, allora per la condizione 2 della definizione 4.7.6 esiste (p', q') tale che $p < p' < q' < q$ e $(p', q') \in A$.

5. Per definizione, per ogni $(p, q) \in A$, vale $Pos((p, q))$. $\square$

Capitolo 5

Una dimostrazione costruttiva del teorema di Heine-Borel per i reali formali

È ben noto che le usuali prove classiche del teorema di Heine-Borel non sono accettabili dal punto di vista costruttivo (cf. [vS], [F]). Una dimostrazione intuizionistica alternativa che utilizza il *fan theorem* è stata data da Brouwer (cf. [Bw1], [H]).

In vista della rilevanza della matematica costruttiva per l'informatica, che poggia sulla connessione tra prove costruttive e programmi, è naturale cercare una dimostrazione completamente costruttiva del teorema nella sua forma più generale, cioè per gli intervalli ad estremi reali.

Utilizzando le topologie formali diamo una definizione alternativa del continuo, così come degli intervalli chiusi della retta reale, mediante una definizione induttiva finitaria (cf. [A]). Questo approccio permette una dimostrazione del teorema di Heine-Borel che, oltre ad essere costruttiva, può anche essere implementata su calcolatore.

Inoltre, qui come altrove (si veda ad esempio [C, C2, N, NV]), l'utilizzo di un approccio pointfree permette di sostituire ragionamenti non costruttivi con prove costruttive.

Osserviamo anche che una prova simile in spirito alla nostra è stata data da Martin-Löf in [ML].

Il capitolo è organizzato nel modo che segue. Nella sezione 5.1 il continuo è definito come spazio formale mediante una definizione induttiva, equivalente a quella data nel capitolo 4 ma più adatta al nostro scopo (tra l'altro, tale definizione fornisce una presentazione esplicita della sua compattificazione di Stone, definita nel capitolo 2); nella sezione successiva, viene definito lo spazio formale degli intervalli chiusi con estremi razionali. Si dimostra che gli intervalli formali coincidono, quando dotati dei punti, agli intervalli usuali della retta reale. Nelle sezioni 5.3 e 5.5 il teorema di Heine-Borel è dimostrato per gli intervalli ad estremi razionali e, senza sostanziale differenza, generalizzato per gli intervalli ad estremi reali.

5.1 Un'altra presentazione del continuo

Ricordiamo che i reali possono essere ottenuti come punti formali di un'opportuna topologia formale basata sugli intervalli ad estremi razionali (cf. capitolo 4). In questo capitolo adotteremo un approccio ai reali formali lievemente diverso da quello utilizzato nel capitolo 4. Nella nuova definizione si ha la stessa operazione di monoide, lo stesso predicato di positività ed una equivalente relazione di copertura, ma si fa a meno dell'unità. In questo modo si evita di aggiungere un massimo ed un minimo elemento ai numeri razionali. La seguente definizione è stata proposta da Thierry Coquand al fine di rendere più semplici i ragionamenti induttivi. Tecnicamente, questa è una *finitary inductive definition*, dato che ogni regola coinvolta ha solo un numero finito di premesse (cf. [A]). Inoltre, non dobbiamo chiudere per le regole di copertura. Infine, come vedremo, questa definizione di copertura fornisce una semplice definizione della sua compattificazione di Stone (cf. capitolo 2).

Definizione 5.1.1 *La* topologia formale dei reali formali *è la struttura*

$$\mathcal{R} \equiv \langle Q \times Q, \cdot, \lhd_{\mathcal{R}}, Pos \rangle,$$

ove Q è l'insieme dei numeri razionali, $S \equiv Q \times Q$ è il prodotto cartesiano. L'operazione di monoide è definita da $(p,q) \cdot (r,s) \equiv (max(p,r), min(q,s))$; la copertura $\lhd_{\mathcal{R}}$ è definita da

$$(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U \equiv (\forall p', q')(p < p' < q' < q \rightarrow (p', q') \lhd_{\mathcal{R}_f} U),$$

dove la relazione $\lhd_{\mathcal{R}_f}$ è induttivamente definita da

1. $\dfrac{q \leq p}{(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U}$;
2. $\dfrac{(p,q) \in U}{(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U}$;

3. $\dfrac{p \leq r < s \leq q \quad (p,s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U \quad (r,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U}{(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U}$;

4. $\dfrac{p' \leq p < q \leq q' \quad (p',q') \lhd_{\mathcal{R}_f} U}{(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U}$.

Il predicato di positività è definito da

$$Pos(p,q) \equiv p < q.$$

La definizione usuale di punto formale di una topologia formale data nella sezione 1 si specializza alla seguente quando si considera la topologia formale dei reali formali $\mathcal{R}$.

Definizione 5.1.2 *Un sottoinsieme α di S è un* punto formale *di $\mathcal{R}$ se soddisfa:*

1. $(\exists p,q)(\alpha \Vdash (p,q))$;

2. $\dfrac{\alpha \Vdash (p,q) \quad \alpha \Vdash (p',q')}{\alpha \Vdash (p,q)\cdot(p',q')}$;

3. $\dfrac{\alpha \Vdash (p,q) \quad (p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U}{(\exists (p',q') \in U)(\alpha \Vdash (p',q'))}$;

4. $\dfrac{\alpha \Vdash (p,q)}{Pos(p,q)}$.

Denoteremo con $Pt(\mathcal{R})$ la collezione dei punti formali di $\mathcal{R}$, che saranno detti *reali formali.*

La rimanente parte di questa sezione è dedicata alla dimostrazione che sia $\lhd_{\mathcal{R}}$ sia $\lhd_{\mathcal{R}_f}$ sono coperture, la seconda essendo la compattificazione di Stone della prima.

Proposizione 5.1.3 *La relazione $\lhd_{\mathcal{R}_f}$ è una copertura.*

Dimostrazione: Innanzitutto proviamo le regole di copertura per $\lhd_{\mathcal{R}_f}$, ma prima di iniziare osserviamo che la regola di $\cdot$ -right segue dalla regola di *localization*

$$\frac{a \lhd_{\mathcal{R}} U}{a \cdot b \lhd_{\mathcal{R}} U \cdot b}$$

dato che la base è un semireticolo.

Reflexivity: Vale per definizione.

Transitivity: Supponiamo $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ e $U \lhd_{\mathcal{R}_f} V$. Allora è immediato per induzione sulla derivazione di $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ che $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} V$.

$\cdot$ *-Left*: Per il quarto assioma dato che $p \leq max(p,r)$ e $min(q,s) \leq q$.

Localization: Supponiamo $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$. Allora proviamo, per induzione sulla derivazione di $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$, che $(p,q)\cdot(r,s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U\cdot(r,s)$. Osserviamo dapprima che possiamo assumere $r < s$, perché se $s \leq r$ la tesi segue banalmente per la prima regola. Se $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ è derivato dal primo o dal secondo assioma la tesi è banale. Se proviene da $(p',q') \lhd_{\mathcal{R}_f} U$, con $p' \leq p < q \leq q'$, allora per ipotesi induttiva abbiamo $(p',q')\cdot(r,s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U\cdot(r,s)$ e poiché $max(p',r) \leq max(p,r)$ e $min(q,s) \leq min(q',s)$ otteniamo per la stessa regola $(p,q)\cdot(r,s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U\cdot(r,s)$. Se è derivato dal terzo assioma con le assunzioni $p \leq t < v \leq q$, $(p,v) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ e $(t,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ allora, per ipotesi induttiva, abbiamo $(p,v)\cdot(r,s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U\cdot(r,s)$ e $(t,q)\cdot(r,s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U\cdot(r,s)$. Se $max(t,r) < min(v,s)$ abbiamo, per la stessa regola, $(p,q)\cdot(r,s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U\cdot(r,s)$. Altrimenti, se $max(t,r) \geq min(v,s)$ due casi sono possibili: nel primo caso abbiamo $max(t,r) = r$, $min(v,s) = v$ e $v \leq r$, nel secondo $max(t,r) = t$, $min(v,s) = s$ e $s \leq t$. La prima possibilità dà $max(p,r) \leq max(t,r)$, e la conclusione è raggiunta applicando l'ipotesi induttiva alla premessa $(t,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$. La seconda dà $min(v,s) \leq min(q,s)$ e la tesi segue simmetricamente dalla premessa $(p,v) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$. $\square$

Abbiamo anche:

Proposizione 5.1.4 *La relazione $\lhd_{\mathcal{R}_f}$ è una copertura di Stone, cioè una copertura con la proprietà che, per arbitrari $(p,q) \in S$ e $U \subseteq S$, se vale $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ allora esiste $U_0 \subseteq_\omega U$ tale che $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_0$.*

Dimostrazione: Supponiamo $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$; per induzione sulla derivazione di $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ possiamo trovare un sottoinsieme finito U_0 di U tale che $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_0$. $\square$

Il seguente lemma è utile per dimostrare che $\lhd_{\mathcal{R}}$ è una copertura.

Lemma 5.1.5 *Supponiamo $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$, $U \lhd_{\mathcal{R}} V$ e sia $p < p' < q' < q$. Allora $(p',q') \lhd_{\mathcal{R}_f} V$.*

Dimostrazione: Per induzione sulla derivazione di $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$. Se $p \geq q$ e $p < p' < q' < q$ abbiamo $(p',q') \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ per *ex falso quodlibet*. Se $(p,q) \in U$ allora per l'assunzione $U \lhd_{\mathcal{R}} V$ abbiamo $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} V$ e quindi se $p < p' < q' < q$, $(p',q') \lhd_{\mathcal{R}_f} V$. Se $p \leq r < s \leq q$, $(p,s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ e $(r,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ distinguiamo due casi, a seconda della posizione di r,s rispetto a p',q'. Nel primo caso $r < p'$ o $q' < s$, nel secondo $p' \leq r < s \leq q'$. Supponiamo $r < p'$, allora $r < p' < q' < q$ così dalle assunzioni $(r,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ e $U \lhd_{\mathcal{R}} V$ otteniamo, per ipotesi induttiva, $(p',q') \lhd_{\mathcal{R}_f} V$. Se $q' < s$ concludiamo in modo simmetrico. Se $p' \leq r < s \leq q'$ possiamo trovare r',s' tali che $r < r' < s' < s$. Quindi abbiamo $p < p' < s' < s$ e

$r < r' < q' < q$. Per ipotesi induttiva la prima, assieme a $(p,s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ ed $U \lhd_{\mathcal{R}} V$, dà $(p',s') \lhd_{\mathcal{R}_f} V$ e la seconda assieme a $(r,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ e $U \lhd_{\mathcal{R}} V$ dà $(r',q') \lhd_{\mathcal{R}_f} V$. Siccome $p' \leq r' < s \leq q'$ otteniamo la conclusione $(p',q') \lhd_{\mathcal{R}_f} V$. Se $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ è derivato usando la quarta regola applichiamo semplicemente l'ipotesi induttiva alla premessa e poi nuovamente la quarta regola. □

Proposizione 5.1.6 *La relazione $\lhd_{\mathcal{R}}$ è una copertura.*

Dimostrazione:

Reflexivity: Sia $(p,q) \in U$, allora $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ e quindi se $p < p' < q' < q$ abbiamo $(p',q') \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ cosicché $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U$.

Transitivity: Sia $p < p' < q' < q$. Allora esistono p'', q'' tali che $p < p'' < p' < q' < q'' < q$ e $(p'',q'') \lhd_{\mathcal{R}_f} U$. Per il lemma sopra dimostrato abbiamo $(p',q') \lhd_{\mathcal{R}_f} V$ e quindi $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} V$.

$\cdot$ *-Left*: Supponiamo $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U$, allora $(p,q) \cdot (r,s) \lhd_{\mathcal{R}} U$ segue direttamente dalle definizioni dato che $max(p,r) < p' < q' < min(q,s)$ implica $p < p' < q' < q$.

$\cdot$ *-Right*: Immediata dalla validità di $\cdot$ *-right* per $\lhd_{\mathcal{R}_f}$. □

È infine immediato dimostrare che *Pos* soddisfa *monotonicity* e *positivity*, completando così la dimostrazione che $\mathcal{R}$ è una topologia formale.

La copertura $\lhd_{\mathcal{R}}$ è equivalente alla copertura $\lhd$ usata nel capitolo 4, cioè si ha:

Proposizione 5.1.7 *Per ogni $(p,q) \in Q \times Q$ e per ogni $U \subseteq Q \times Q$, $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U$ se e solo se $(p,q) \lhd U$.*

Dimostrazione: Supponiamo $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U$. Allora se $p < p' < q' < q$, si ha $(p',q') \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ e per induzione sulla derivazione di $\lhd_{\mathcal{R}_f}$ si dimostra $(p',q') \lhd U$. La conclusione segue allora per transitivity e per il secondo assioma per $\lhd$.

Supponiamo ora $(p,q) \lhd U$ e procediamo per induzione sulla derivazione di $\lhd$. Se $r < s$, per *2.* e *3.* della definizione di $\lhd_{\mathcal{R}_f}$ si ha $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} \{(p,s),(r,q)\}$ e dunque $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} \{(p,s),(r,q)\}$. Se è stato applicato il secondo assioma, la conclusione è immediata per definizione di $\lhd_{\mathcal{R}}$ e la regola *2.* per $\lhd_{\mathcal{R}_f}$. Se invece è stata applicata una regola di copertura, si usa l'ipotesi induttiva ed il fatto che $\lhd_{\mathcal{R}}$ è pure una copertura, per cui tali regole valgono. □

La seguente proposizione mostra che la copertura $\lhd_{\mathcal{R}_f}$ è la compattificazione di Stone della copertura $\lhd_{\mathcal{R}}$. Tuttavia quanto segue di questa sezione non è necessario al resto del capitolo, per il quale si usa soltanto la proprietà di $\lhd_{\mathcal{R}_f}$ di essere di Stone.

Proposizione 5.1.8 *Se* $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U$ *e* U *è finito, allora* $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$.

Prima di dimostrare la proposizione 5.1.8, osserviamo che possiamo assumere che, per ogni $(r,s) \in U$, valga $Pos((p,q)\cdot(r,s))$. Infatti, se questo non è il caso, da $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U$ abbiamo $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} ((p,q)\cdot U)^+$, e da $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} ((p,q)\cdot U)^+$, per $\cdot$ *-left* e *transitivity*, $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$.

I seguenti lemmi permetteranno una dimostrazione della proposizione 5.1.8 per induzione sul numero di elementi di U.

Lemma 5.1.9 *Sia* (p,q) *positivo. Allora*

$$(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} (r,s) \ \Rightarrow r \leq p < q \leq s \ .$$

Dimostrazione: Per induzione sulla derivazione di $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} (r,s)$. Se $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} (r,s)$ è derivato usando il primo o il secondo assioma, la tesi vale banalmente. Se è derivato dal terzo assioma, dalle premesse $p \leq u < v \leq q$, $(p,v) \lhd_{\mathcal{R}_f} (r,s)$, $(u,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} (r,s)$, allora per ipotesi induttiva abbiamo $r \leq p < v \leq s$, $r \leq u < q \leq s$ e quindi $r \leq p < q \leq s$. Se segue da $p' \leq p < q \leq q'$ e $(p',q') \lhd_{\mathcal{R}_f} (r,s)$ per il quarto assioma, allora per ipotesi induttiva $r \leq p' < q' \leq s$ e quindi $r \leq p < q \leq s$. □

Corollario 5.1.10 $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} (r,s)$ *implica* $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} (r,s)$.

Dimostrazione: Se $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} (r,s)$ allora per arbitrari p',q' tali che $p < p' < q' < q$ abbiamo $r \leq p' < q' \leq s$, e quindi $r \leq p < q \leq s$, da cui $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} (r,s)$. □

Lemma 5.1.11 *Supponiamo che* $p < q$ *e* $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U$, *dove* U *è finito e per ogni* $(r,s) \in U$, *vale* $Pos((p,q),(r,s))$. *Allora esiste* $(p_1,q_1) \in U$ *tale che* $p_1 \leq p < q_1$.

Dimostrazione: Sia (p_1,q_1) un elemento di U tale che p_1 è il minimo (rispetto all'ordine usuale dei razionali) tra tutte le prime proiezioni degli elementi di U. Allora $p_1 \leq p$. Infatti, per ogni $(p',q') \in U$, $p_1 \leq max(p',p) < min(q',q) \leq q$, che implica $U\cdot(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} (p_1,q)$. Poiché $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U\cdot(p,q)$, abbiamo per *transitivity* $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} (p_1,q)$, e quindi, per il corollario 5.1.10 ed il lemma 5.1.9, otteniamo $p_1 \leq p < q$. Allora, per l'assunzione che per ogni $(r,s) \in U$ valga $Pos((p,q)\cdot(r,s))$, abbiamo $p_1 \leq p < q_1$. □

Lemma 5.1.12 *Supponiamo che* $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$, *e sia* $p < u < q$. *Allora esiste* $(r,s) \in U$ *tale che* $r < u < s$.

Dimostrazione: Immediata per induzione sulla derivazione di $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U$. □

Corollario 5.1.13 *Supponiamo che $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U$, e sia $p < u < q$. Allora esiste $(r,s) \in U$ tale che $r < u < s$.*

Dimostrazione: Se $p < u < q$, esistono p', q' tali che $p < p' < u < q' < q$ e quindi $(p', q') \lhd_{\mathcal{R}_f} U$. Allora la conclusione segue per il lemma 5.1.12. $\square$

Lemma 5.1.14 *Supponiamo che $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U$, e sia $(r,s) \in U$ tale che $\neg Pos((p,q) \cdot (r,s))$. Allora $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U \setminus \{(r,s)\}$.*

Dimostrazione: Da $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U$ abbiamo, per *positivity* e $\cdot$*-right*, $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} (U \cdot (p,q))^+$. Poiché vale $\neg Pos((p,q) \cdot (r,s))$, abbiamo

$$(U \cdot (p,q))^+ \subseteq (U \setminus \{(r,s)\}) \cdot (p,q)$$

e quindi $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} (U \setminus \{(r,s)\}) \cdot (p,q)$, così *a fortiori* $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U \setminus \{(r,s)\}$. $\square$

Siamo ora in grado di dimostrare la proposizione 5.1.8. La prova è per induzione dul numero di elementi di U. Se $U = \{(r,s)\}$ la tesi segue dal corollario 5.1.10. Supponiamo che il risultato valga per $|U| = n$ e supponiamo che $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U_{n+1}$, dove $|U_{n+1}| = n+1$. Per il lemma 5.1.11 esiste $(p_1, q_1) \in U_{n+1}$ tale che $p_1 \leq p < q_1$. Se $q \leq q_1$ allora $p_1 \leq p < q \leq q_1$ e quindi $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} (p_1, q_1)$, cosicché per *reflexivity* e *transitivity* $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{n+1}$. Altrimenti $q_1 < q$, e quindi per il corollario 5.1.13 esiste $(p_2, q_2) \in U_{n+1}$ tale che $p_2 < q_1 < q_2$. In questo modo possiamo trovare r, s tali che $q_1 < r < s < q_2$. Poiché $p \leq r$ e $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U_{n+1}$, $(r,q) \lhd_{\mathcal{R}} U_{n+1}$. Da $q_1 < r$, abbiamo $\neg Pos((r,q) \cdot (p_1, q_1))$ e quindi, per il lemma 5.1.14,

$$(r,q) \lhd_{\mathcal{R}} U_{n+1} \setminus \{(p_1, q_1)\} \ .$$

L'ipotesi induttiva allora dà $(r,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{n+1} \setminus \{(p_1, q_1)\}$ e quindi $(r,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{n+1}$. Siccome $(p,s) \lhd_{\mathcal{R}_f} \{(p_1, q_1), (p_2, q_2)\}$, abbiamo anche $(p,s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{n+1}$ e dunque $(p,q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{n+1}$. $\square$

5.2 Lo spazio formale $[a, b]$

Dati due numeri razionali a, b tali che $a < b$, definiremo uno spazio formale i cui punti formali sono i punti formali di $\mathcal{R}$ compresi tra a e b. Seguiremo il modo standard per costruire, da un aperto U di uno spazio X, uno spazio che corrisponde classicamente al sottospazio chiuso $X \backslash U$. Infatti, definiremo una relazione di copertura $\lhd_{[a,b]}$ ed il significato inteso di $(p,q) \lhd_{[a,b]} U$ sarà che la parte di (p,q) all'interno dell'intervallo chiuso $[a,b]$ è coperta da U. Ragionando classicamente abbiamo $(p,q) \cap [a,b] \subseteq \cup U$, che è lo stesso di $(p,q) \subseteq (\cup U) \cup (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ e $(p,q) \subseteq (\cup U) \cup (p,a) \cup (b,q)$. Un intervallo (p,q) è poi detto positivo nello spazio $[a,b]$ se e solo se la parte di (a,b) all'interno di $[a,b]$ è positiva. Questo giustifica la seguente:

Definizione 5.2.1 *Sia $\mathcal{R} \equiv \langle Q \times Q, \cdot, \lhd_{\mathcal{R}}, Pos \rangle$ la topologia formale dei reali formali e sia $[a,b]$ definito da*

$$[a,b] \equiv \langle Q \times Q, \cdot, \lhd_{[a,b]}, Pos_{[a,b]} \rangle$$

dove la relazione $\lhd_{[a,b]}$ è definita da

$$(p,q) \lhd_{[a,b]} U \equiv (p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U \cup \{(p,a),(b,q)\},$$

ed il predicato $Pos_{[a,b]}$ è definito da

$$Pos_{[a,b]}(p,q) \equiv Pos((p,q) \cdot (a,b)).$$

Nel seguito useremo la notazione $U_{[a,b]}$ per $U \cup \{(p,a),(b,q)\}$.

Per la seguente proposizione e per la verifica immediata che $Pos_{[a,b]}$ è un predicato di positività, la definizione data sopra definisce una topologia formale.

Proposizione 5.2.2 *La relazione $\lhd_{[a,b]}$ è una copertura.*

La proposizione segue dai seguenti lemmi:

Lemma 5.2.3 *Sia $\lhd$ una copertura sulla base S e sia $V \subseteq S$. Allora la relazione $\lhd_V$ definita da*

$$a \lhd_V U \equiv a \lhd U \cup V$$

è una copertura.

Dimostrazione: *Reflexivity*, *transitivity*, $\cdot$ *-left* sono immediate, e $\cdot$ *-right* segue dal fatto che in generale $(U \cup V) \cdot (W \cup V) \lhd (U \cdot W) \cup V$. □

Lemma 5.2.4 *Nella stessa notazione di 5.2.1 abbiamo*

$$(p,q) \lhd_{[a,b]} U \text{ se e solo se } (p,q) \lhd_{\mathcal{R}} U \cup \{(r,a) : r < a\} \cup \{(b,s) : b < s\}.$$

Dimostrazione: Da sinistra a destra la tesi è banale. Il viceversa segue applicando la regola di *localization* con l'elemento (p,q). □

Come nella sezione 5.1, la definizione generale di punto formale di una topologia formale può essere specializzata alla topologia formale $[a,b]$:

Definizione 5.2.5 *Un sottoinsieme* α *di* S *è un* punto formale di $[a, b]$ *se soddisfa*

1. $(\exists p, q)(\alpha \Vdash (p, q))$;
2. $\dfrac{\alpha \Vdash (p, q) \quad \alpha \Vdash (p', q')}{\alpha \Vdash (p, q) \cdot (p', q')}$;
3. $\dfrac{\alpha \Vdash (p, q) \quad (p, q) \lhd_{[a,b]} U}{(\exists (p', q') \in U)(\alpha \Vdash (p', q'))}$;
4. $\dfrac{\alpha \Vdash (p, q)}{Pos_{[a,b]}(p, q)}$.

Denoteremo con $Pt([a, b])$ la collezione dei punti formali di $[a, b]$, che saranno detti *reali formali dell'intervallo* $[a, b]$.

Ricordiamo qui la definizione di ordine in $Pt(\mathcal{R})$ (cf. capitolo 4):

$$\alpha > \beta \equiv (\exists (a, b) \in S)(\exists (c, d) \in S)(\alpha \Vdash (a, b) \ \& \ \beta \Vdash (c, d) \ \& \ d < a);$$

$$\alpha \leq \beta \equiv \neg \alpha > \beta.$$

Denoteremo con $\bar{a}$ il reale formale $\{(p, q) : p < a < q\}$ corrispondente al razionale a. Abbiamo $\alpha < \bar{a} \Leftrightarrow (\exists (p, q) \in S)(\alpha \Vdash (p, q) \ \& \ q < a)$.

La seguente proposizione dice che lo spazio formale $[a, b]$ corrisponde realmente all'intervallo chiuso $[a, b]$, e quindi la definizione dello spazio formale $[a, b]$ è corretta:

Proposizione 5.2.6 $\alpha \in Pt([a, b]) \Leftrightarrow \alpha \in Pt(R) \ \& \ \bar{a} \leq \alpha \leq \bar{b}$.

Dimostrazione $\Rightarrow$: Sia $\alpha \in Pt([a, b])$. È immediato che $\alpha \in Pt(R)$ poiché $(p, q) \lhd_{\mathcal{R}} U$ implica $(p, q) \lhd_{[a,b]} U$ e $Pos_{[a,b]}(p, q)$ implica $Pos(p, q)$. Per dimostrare che $\bar{a} \leq \alpha$, supponiamo $\alpha < \bar{a}$. Allora per definizione $(\exists (p, q) \in S)(\alpha \Vdash (p, q) \ \& \ q < a)$ e quindi $\neg Pos_{[a,b]}(p, q)$, contro l'assunzione. Quindi $\bar{a} \leq \alpha$. La disuguaglianza $\alpha \leq b$ è dimostrata simmetricamente.

$\Leftarrow$: Sia $\alpha \in Pt(R) \ \& \ a \leq \alpha \leq b$. Le clausole 1 e 2 sono ovvie.

3. Sia $\alpha \Vdash (p, q)$ e $(p, q) \lhd_{[a,b]} U$. Allora esiste $(r, s) \in U_{[a,b]}$ tale che $\alpha \Vdash (r, s)$. Poiché vale $Pos_{[a,b]}(r, s)$, non può essere $(r, s) = (r, a)$ o $(r, s) = (b, s)$ e quindi $(r, s) \in U$.

4. Poiché l'ordine tra numeri razionali è decidibile, possiamo ragionare per assurdo. Così supponiamo $\neg Pos_{[a,b]}(p, q)$. Allora abbiamo $q \leq a$ o $b \leq p$ poiché vale $Pos(p, q)$. La prima alternativa implica $\alpha \leq \bar{a}$, mentre la seconda implica $\bar{p} \leq \alpha$, contro l'ipotesi. Concludiamo quindi $Pos_{[a,b]}(p, q)$. $\square$

5.3 Il teorema di Heine-Borel per $[a, b]$

Proveremo in questa sezione il teorema di Heine-Borel che afferma che ogni ricoprimento aperto di un intervallo chiuso e limitato (della retta reale) ha un sottoricoprimento finito.

Teorema 5.3.1 *Lo spazio formale* $[a, b]$ *è o, cioè*

$$(\forall p, q)((p, q) \lhd_{[a,b]} U) \Rightarrow (\exists U_0 \subseteq_\omega U)(\forall p, q)((p, q) \lhd_{[a,b]} U_0).$$

La dimostrazione fa uso del seguente lemma:

Lemma 5.3.2

$$(\forall p, q)((p, q) \lhd_{[a,b]} U) \Leftrightarrow (\exists r, s)(r < a < b < s \;\&\; (r, s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{[a,b]}) \ .$$

Dimostrazione $\Rightarrow$: Se $(\forall p, q)((p, q) \lhd_{[a,b]} U$, allora in particolare esistono p, q tali che $p < a < b < q$ e $(p, q) \lhd_{[a,b]} U$. Allora per definizione $(\forall p', q')(p < p' < q' < q \rightarrow (p', q') \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{[a,b]}$. Scegliendo r, s tali che $p < r < a < b < s < q$, abbiamo $(\exists r, s)(r < a < b < s \;\&\; (r, s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{[a,b]})$.

$\Leftarrow$: Si osservi che $(r, s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{[a,b]}$ implica $(r, s) \lhd_{\mathcal{R}} U_{[a,b]}$, cioè

$$(r, s) \lhd_{[a,b]} U \ .$$

Inoltre, se $r < a < b < s$, per ogni (p, q) abbiamo $(p, q) \lhd_{\mathcal{R}} \{(p, a), (r, s), (b, q)\}$, cioè $(p, q) \lhd_{[a,b]} \{r, s\}$. La tesi segue allora per *transitivity* di $\lhd_{[a,b]}$. $\Box$

Dimostrazione del teorema 5.3.1: Supponiamo $(\forall p, q)((p, q) \lhd_{[a,b]} U)$. Allora per il lemma 5.3.2 $(\exists r, s)(r < a < b < s \;\&\; (r, s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{[a,b]})$. Per la proposizione 5.1.3 esiste un sottoinsieme finito W_0 di $U_{[a,b]}$ tale che $(\exists r, s)(r < a < b < s \;\&\; (r, s) \lhd_{\mathcal{R}_f} W_0)$, ed *a fortiori*

$$(\exists r, s)(r < a < b < s \;\&\; (r, s) \lhd_{\mathcal{R}_f} W_{0_{[a,b]}}) \ .$$

Quindi, ancora per il lemma 5.3.2, esiste un sottoinsieme finito U_0 di U tale che $(\forall p, q)((p, q) \lhd_{[a,b]} U_0)$. $\Box$

5.4 Lo spazio formale $[\alpha, \beta]$

Generalizzando lo spazio formale $[a, b]$, che corrisponde ad un intervallo con estremi razionali, definiremo lo spazio formale $[\alpha, \beta]$, dove α e β sono reali formali con $\alpha < \beta$, che corrisponde ad un intervallo con estremi reali. La copertura per lo spazio formale $[\alpha, \beta]$ è definita a partire da $\lhd_{\mathcal{R}}$, analogamente alla copertura per $[a, b]$:

Definizione 5.4.1 *Sia* $\lhd_{[\alpha,\beta]}$ *la relazione definita da*

$$(p, q) \lhd_{[\alpha,\beta]} U \equiv (p, q) \lhd_{\mathcal{R}} U_{[\alpha,\beta]},$$

dove $U_{[\alpha,\beta]} \equiv U \cup \{(r, a) : r < a < \alpha\} \cup \{(b, s) : \beta < b < s\}$.

Proposizione 5.4.2 *La relazione* $\lhd_{[\alpha,\beta]}$ *è una copertura.*

La dimostrazione è immediata per il lemma 5.2.3.

Definizione 5.4.3 *Un sottoinsieme* γ *di* S *è un punto formale di* $[\alpha, \beta]$ *se soddisfa*

1. $(\exists p, q)(\gamma \Vdash (p, q))$;
2. $\dfrac{\gamma \Vdash (p, q) \quad \gamma \Vdash (p', q')}{\gamma \Vdash (p, q) \cdot (p', q')}$;
3. $\dfrac{\gamma \Vdash (p, q) \quad (p, q) \lhd_{[\alpha,\beta]} U}{(\exists (p', q') \in U)(\gamma \Vdash (p', q'))}$;
4. $\dfrac{\gamma \Vdash (p, q)}{p < q \ \& \ \alpha < \bar{q} \ \& \ \bar{p} < \beta}$

Si osservi che l'ultima regola significa che tutti i membri di un punto formale di $[\alpha, \beta]$ hanno intersezione positiva con $[\alpha, \beta]$. La collezione dei punti formali di $[\alpha, \beta]$ sarà denotata $Pt([\alpha, \beta])$.

Come nel caso dello spazio formale $[a, b]$ abbiamo:

Proposizione 5.4.4 $\gamma \in Pt([\alpha, \beta]) \Leftrightarrow \gamma \in Pt(R) \ \& \ \alpha \leq \gamma \leq \beta$

Dimostrazione $\Rightarrow$: Se $\gamma \in Pt([\alpha, \beta])$ è immediato mostrare che $\gamma \in Pt(R)$ dato che $(p, q) \lhd_{\mathcal{R}} U$ implica $(p, q) \lhd_{[\alpha,\beta]} U$.

Supponiamo ora $\gamma < \alpha$. Allora per definizione

$$(\exists (p_\gamma, q_\gamma) \in S)(\exists (p_\alpha, q_\alpha) \in S)(\gamma \Vdash (p_\gamma, q_\gamma) \ \& \ \alpha \Vdash (p_\alpha, q_\alpha) \ \& \ q_\gamma < p_\alpha) \ .$$

Da $\gamma \Vdash (p_\gamma, q_\gamma)$, per la quarta regola, abbiamo $\alpha < \bar{q}_\gamma$ che contraddice $\bar{q}_\gamma < \bar{p}_\alpha < \alpha$. Quindi $\alpha \leq \gamma$. Simmetricamente otteniamo $\gamma \leq \beta$.

$\Leftarrow$: 1 e 2 sono dirette.

3. Supponiamo $\gamma \Vdash (p, q)$ e $(p, q) \lhd_{[\alpha,\beta]} U$. Per definizione abbiamo $(p, q) \lhd_{\mathcal{R}} U_{[\alpha,\beta]}$ e per la terza regola per $Pt(\mathcal{R})$ otteniamo

$$(\exists (p', q') \in U_{[\alpha,\beta]})(\gamma \Vdash (p', q')) \ .$$

Se $\gamma \Vdash (p', q')$, per la quarta regola per $Pt([\alpha, \beta])$ (che è sotto dimostrata), $\alpha < \bar{q'}$ e $\bar{p'} < \beta$ e quindi $(p', q') \in U$. Quindi $(\exists (p', q') \in U)(\gamma \Vdash (p', q'))$.

4. Sia $\gamma \Vdash (p, q)$. Allora per la quarta regola per $Pt(\mathcal{R})$ abbiamo $p < q$. Se $\gamma \Vdash (p, q)$ abbiamo anche $\gamma < \bar{q}$ e poiché $\alpha < \gamma$ otteniamo $\alpha < \bar{q}$. La disuguaglianza $\bar{p} < \beta$ si dimostra in modo simmetrico. □

5.5 Il teorema di Heine-Borel per $[\alpha, \beta]$

Proveremo in questa sezione il teorema di Heine-Borel per gli intervalli chiusi e limitati ad estremi reali.

Teorema 5.5.1 *Lo spazio formale $[\alpha, \beta]$ è compatto, cioè*

$$(\forall p, q)((p, q) \lhd_{[\alpha,\beta]} U) \Rightarrow (\exists U_0 \subseteq_\omega U)(\forall p, q)((p, q) \lhd_{[\alpha,\beta]} U_0),$$

La dimostrazione si basa sul seguente lemma:

Lemma 5.5.2

$$(\forall p, q)((p, q) \lhd_{[\alpha,\beta]} U) \Leftrightarrow (\exists r, s)(\bar{r} < \alpha < \beta < \bar{s} \;\&\; (r, s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{[\alpha,\beta]}) \; .$$

Dimostrazione $\Rightarrow$: Se $(\forall p, q)((p, q) \lhd_{[\alpha,\beta]} U)$, in particolare esistono p, q tali che $\bar{p} < \alpha < \beta < \bar{q}$ e $(p, q) \lhd_{[\alpha,\beta]} U$. Per definizione abbiamo

$$(\forall p', q')(p < p' < q' < q \rightarrow (p', q') \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{[\alpha,\beta]} \; .$$

Si scelgano ora r, s tali che $\bar{p} < \bar{r} < \alpha < \beta < \bar{s} < \bar{q}$. Allora

$$(\exists r, s)(\bar{r} < \alpha < \beta < \bar{s} \;\&\; (r, s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{[\alpha,\beta]}) \; .$$

$\Leftarrow$: Si scelgano r, s tali che $\bar{r} < \alpha < \beta < \bar{s}$ e $(r, s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{[\alpha,\beta]})$. Allora per a, b tali che $\bar{r} < \bar{a} < \alpha < \beta < \bar{b} < \bar{s}$ abbiamo, per un'arbitraria coppia (p, q), $(p, q) \lhd_{\mathcal{R}_f} \{(p, a), (r, s), (b, q)\}$. Inoltre $(p, a) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{[\alpha,\beta]}$ perché se $p < a$ allora $(p, a) \in U_{[\alpha,\beta]}$ altrimenti $(p, a) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{[\alpha,\beta]}$ per assioma. Simmetricamente abbiamo $(b, q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{[\alpha,\beta]}$, e quindi, per *transitivity*, $(p, q) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{[\alpha,\beta]}$. Questo significa anche che $(p, q) \lhd_{[\alpha,\beta]} U$ e, dato che (p, q) è arbitrario, $(\forall p, q)((p, q) \lhd_{[\alpha,\beta]} U)$. □

Dimostrazione del teorema 5.5.1: Supponiamo $(\forall p, q)((p, q) \lhd_{[\alpha,\beta]} U)$. Allora, per il lemma 5.5.2, $(\exists r, s)(\bar{r} < \alpha < \beta < \bar{s} \;\&\; (r, s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{[\alpha,\beta]})$. Per la proposizione 5.1.3 $(\exists U_0 \subseteq_\omega U_{[\alpha,\beta]})(\exists r, s)(r < \alpha < \beta < s \;\&\; (r, s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_0)$, che implica $(\exists U_0 \subseteq_\omega U_{[\alpha,\beta]})(\exists r, s)(\bar{r} < \alpha < \beta < \bar{s} \;\&\; (r, s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{0_{[\alpha,\beta]}})$, che è equivalente a $(\exists U_0 \subseteq_\omega U)(\exists r, s)(\bar{r} < \alpha < \beta < \bar{s} \;\&\; (r, s) \lhd_{\mathcal{R}_f} U_{0_{[\alpha,\beta]}})$. Usando nuovamente il lemma 5.5.2, otteniamo

$$(\exists U_0 \subseteq_\omega U)(\forall p, q)((p, q) \lhd_{[\alpha,\beta]} U_0) \; .\square$$

5.6 Conclusioni

In [G] viene fornita una procedura algoritmica per estrarre da un dato ricoprimento dell'intervallo chiuso $[0, 1]$ un sottoricoprimento finito, tuttavia la dimostrazione di terminazione di tale procedura richiede la logica classica ed il lemma di König.

Dato che la nostra prova del teorema di Heine-Borel non richiede alcun principio infinitario, crediamo che una sua formalizzazione completa possa fornire un analogo algoritmo la cui terminazione si dimostra costruttivamente. Ciò costituirebbe un'interessante applicazione dei nostri risultati.

Capitolo 6

Un approccio all'analisi funzionale

6.1 Sommario

In questo capitolo proporremo un approccio all'analisi funzionale basato sulle topologie formali e daremo dimostrazioni costruttive di alcuni risultati di base opportunamente riformulati, in particolare del teorema di Alaoglu e del teorema di Helly–Banach.

Definiremo i funzionali lineari di norma ≤ 1 da uno spazio vettoriale normato A ai reali come punti formali di una opportuna topologia formale (cf. capitolo 1), che è ottenuta dallo spazio formale delle applicazioni da A ad R aggiungendo le condizioni di linearità e la condizione sulla norma sotto forma di assiomi per la copertura. Dato un sottospazio M di A, il teorema di Hahn-Banach classico dice che l'applicazione di restrizione dai funzionali lineari su A di norma ≤ 1 a quelli su M è suriettiva. In termini di coperture questo enunciato diventa un teorema di conservatività: ogniqualvolta a è un elemento e U un sottoinsieme della base dello spazio formale $L(M)$ e si ha una derivazione in $L(A)$ di $a \lhd U$, allora possiamo trovare una derivazione in $L(M)$ con la stessa conclusione.

Data questa formulazione è piuttosto naturale cercare una prova per induzione sulle coperture. Inoltre, come già osservato da Mulvey e Pelletier in [MP1], è possibile semplificare drasticamente il problema dato che è sufficiente dimostrare l'asserto per gli spazi coerenti di cui $L(A)$ ed $L(M)$ sono retratti. Allora, in una derivazione di una copertura, possiamo assumere che compaiano solo sottoinsiemi finiti a destra della relazione di copertura, e ciò permette, attraverso una analisi globale della prova, di trasformare una prova in $L(A)$ in una prova in $L(M)$. La procedura è effettiva dato che è sufficiente considerare soltanto una estensione di dimensione finita dello spazio M. In questo modo, come per la dimostrazione classica per l'estensione unidimensionale, non è necessario alcun uso del lemma di Zorn. Inoltre, una presentazione formale permette un argomento costruttivo e diretto, mentre, anche nel caso finito-dimensionale è necessario un argomento non effettivo nella formulazione con i punti. Infine, questa dimostrazione è più vicina all'argomento usuale rispetto alle dimostrazioni fatte nel contesto della teoria dei topos.

La dimostrazione in [MP1] usa il teorema di Barr (cf. [MCM]) e quindi indirettamente il terzo escluso e l'assioma di scelta. La dimostrazione di Vermeulen [Ve] è fatta nel contesto della teoria dei topos. La prova che daremo qui è invece fatta nell'ambito della teoria dei tipi e segue la stessa idea chiave dell'usuale argomento classico [Ho], utilizzando soltanto definizioni induttive finitarie [A].

6.2 Preliminari

Useremo la notazione $I, J, \ldots$ per intervalli ad estremi razionali (p, q). Scriveremo $I < J$ ($I \leq J$) per esprimere che, se $I = (p, q)$, $J = (r, s)$, $r < p < q < s$ ($r \leq p < q \leq s$). Quindi $I \lhd_{\mathcal{R}} U$ significa $J \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ per ogni $J < I$ (cf. capitolo 5). Infine, useremo la notazione $I + J$ per $(p + r, q + s)$, tI per (tp, tq) se $t > 0$ e tI per (tq, tp) se $t < 0$.

Il seguente lemma sarà utilizzato nella sezione 6.3.

Lemma 6.2.1 *Se $J < I$ e $I \lhd_{\mathcal{R}_f} U$ allora esiste un sottoinsieme V tale che $J \lhd_{\mathcal{R}_f} V$ e $(\forall K \in V)(\exists L \in U)(K < L)$.*

Dimostrazione: La dimostrazione è immediata per induzione sulla derivazione di $I \lhd_{\mathcal{R}_f} U$. □

6.3 Il duale di uno spazio seminormato: la palla unitaria come spazio formale

In questa sezione definiremo lo spazio dei funzionali lineari di norma ≤ 1 da uno spazio seminormato ai reali. Questo spazio è ottenuto per mezzo di una definizione induttiva che dà luogo ad una topologia formale: gli intorni di base corrispondono agli aperti di base nella topologia debole e i punti formali corrispondono ai funzionali lineari di norma ≤ 1 dal dato spazio seminormato allo spazio dei reali formali.

Inoltre, la copertura formale è definita come un quoziente di una copertura di Stone permettendo così una semplice dimostrazione del teorema di Alaoglu.

Iniziamo definendo uno spazio seminormato come in [MP1]:

Definizione 6.3.1 *Uno* spazio semiormato A *sui razionali* Q *è uno spazio vettoriale* A *su* Q *dotato di una applicazione*

$$N : Q^+ \longrightarrow \mathcal{P}(A)$$

dai razionali positivi ai sottoinsiemi di A *che soddisfa le seguenti condizioni per* $x, x' \in A,\ q, q' \in Q^+$:

N1. $x \in N(q) \to (\exists q' < q)(x \in N(q'))$;

N2. $(\exists q)(x \in N(q))$;

N3. $x \in N(q)\ \&\ x' \in N(q') \to x + x' \in N(q + q')$;

N4. $x \in N(q') \to qx \in N(qq')$;

N5. $x \in N(q) \to -x \in N(q)$;

N6. $0 \in N(q)$.

Ci limiteremo qui alla presentazione dello spazio formale $L(A)$ dei funzionali lineari di norma ≤ 1. Gli aperti di base sono insiemi finiti della forma

$$w \equiv \{\langle x_1 \in I_1\rangle, \ldots, \langle x_n \in I_n\rangle\}$$

L'interpretazione intuitiva di un aperto di base come di un intorno di funzionali nella *topologia debole* (cf. [Br]), sarà giustificata formalmente dalla proposizione 6.3.12. Nel seguito useremo la notazione $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n\rangle$ per $\{\langle x_1 \in I_1\rangle, \ldots, \langle x_n \in I_n\rangle\}$.

Gli aperti di base formano un monoide commutativo ed idempotente con l'operazione

$$w_1 w_2 \equiv w_1 \cup w_2$$

e l'unità è data dall'insieme vuoto. Denoteremo con $S_{L(A)}$ tale monoide di base di $L(A)$.

Sia $w \equiv \langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n\rangle$, allora definiamo

$$\begin{array}{rcl} w \leq \langle x \in I\rangle & \equiv & (\exists \langle x_{i1} \in I_{i1}\rangle, \ldots, \langle x_{ip} \in I_{ip}\rangle \in w) \\ & & (x_{i1} = \ldots = x_{ip} = x\ \&\ I_{i1} \cdot \ldots \cdot I_{ip} \leq I) \end{array}$$

e

$$w \leq w' \equiv (\forall \langle x \in I\rangle \in w')(w \leq \langle x \in I\rangle).$$

Si verifica immediatamente che $\leq$ è una relazione riflessiva e transitiva.

La relazione $\lhd_f$ è induttivamente definita da:

C1 $\dfrac{w \in U}{w \lhd_f U}$;

C2 $\dfrac{w \leq w' \quad w' \lhd_f U}{w \lhd_f U}$;

C3 $\dfrac{V \textit{ finito} \quad I \lhd_{\mathcal{R}_f} V \quad (\forall J \in V)(\langle x \in J \rangle w' \lhd_f U)}{\langle x \in I \rangle w' \lhd_f U}$;

C4 $\dfrac{\langle x + y \in I + J \rangle w' \lhd_f U}{\langle x \in I, y \in J \rangle w' \lhd_f U}$;

C5 $\dfrac{r \neq 0 \quad \langle rx \in rI \rangle w' \lhd_f U}{\langle x \in I \rangle w' \lhd_f U}$;

C6 $\dfrac{x \in N(1) \quad \langle x \in (-1,1) \rangle w \lhd_f U}{w \lhd_f U}$.

La relazione $\lhd$ è definita da

$$\begin{aligned}&\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n \rangle \lhd U \\ &\equiv (\forall J_1 < I_1, \ldots, J_n < I_n)(\langle x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n \rangle \lhd_f U) \ .\end{aligned}$$

Abbiamo:

Proposizione 6.3.2 *$\lhd_f$ è una copertura.*

Dimostrazione: *Reflexivity* vale per definizione. $\cdot$*-left*, *transitivity* e *localization* sono immediate per induzione sulla derivazione di $w \lhd_f U$. $\square$

Per dimostrare che anche $\lhd$ è una copertura sono necessari alcuni lemmi.

Lemma 6.3.3 *Se $w \lhd_f U$ allora $w \lhd U$.*

Dimostrazione: Supponiamo $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n \rangle \lhd_f U$ e siano

$$J_1 < I_1, \ldots, J_n < I_n \ .$$

Allora $\langle x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n \rangle \leq \langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n \rangle$ quindi, per *C2*, $\langle x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n \rangle \lhd_f U$. Dunque $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n \rangle \lhd U$. $\square$

Lemma 6.3.4 *Se $\langle x_1 \in K_1, \ldots, x_n \in K_n \rangle \leq \langle y_1 \in L_1, \ldots, y_m \in L_m \rangle$ e $J_1 < K_1, \ldots, J_n < K_n$ allora*

$$(\exists L'_1 < L_1, \ldots, L'_m < L_m)(\langle x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n \rangle \leq \langle y_1 \in L'_1, \ldots, y_m \in L'_m \rangle) \ .$$

Dimostrazione: A partire dalle ipotesi

$$\begin{array}{l} \langle x_1 \in K_1, \ldots, x_n \in K_n \rangle \leq \langle y_1 \in L_1, \ldots, y_m \in L_m \rangle \\ J_1 < K_1, \ldots, J_n < K_n \ , \end{array}$$

gli intervalli L'_i $(1 \leq i \leq m)$ sono costruiti nel modo seguente. Per definizione, per ogni $i \leq m$ esistono $p_1, \ldots, p_k$ tali che $x_{p_1} = \ldots = x_{p_k} = y_i$ e $K_{p_1} \cdot \ldots \cdot K_{p_k} \leq L_i$. Dato che $J_1 < K_1, \ldots, J_n < K_n$ abbiamo $J_{p_1} \cdot \ldots \cdot J_{p_k} \leq L_i$. Poniamo allora $L'_i = J_{p_1} \cdot \ldots \cdot J_{p_k}$. □

Il seguente lemma giustifica la definizione di $\lhd$.

Lemma 6.3.5 *La relazione $\lhd$ rispetta l'uguaglianza (di sottoinsiemi) tra gli intorni di base.*

Dimostrazione: Mostreremo che *C2* vale anche per $\lhd$. La conclusione allora ne segue dato che $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n \rangle = \langle y_1 \in J_1, \ldots, y_m \in J_m \rangle$ implica $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n \rangle \leq \langle y_1 \in J_1, \ldots, y_m \in J_m \rangle$.

Supponiamo $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n \rangle \leq \langle y_1 \in J_1, \ldots, y_m \in J_m \rangle$ e $\langle y_1 \in J_1, \ldots, y_m \in J_m \rangle \lhd U$. Siano $I'_1 < I_1, \ldots, I'_n < I_n$. Allora, per il lemma 6.3.4 esistono $J'_1 < J_1, \ldots, J'_m < J_m$ tali che

$$\langle x_1 \in I'_1, \ldots, x_n \in I'_n \rangle \leq \langle y_1 \in J'_1, \ldots, y_m \in J'_m \rangle \ .$$

Per tali $J'_1, \ldots, J'_m$ abbiamo $\langle y_1 \in J'_1, \ldots, y_m \in J'_m \rangle \lhd_f U$ e, per *C2*,

$$\langle x_1 \in I'_1, \ldots, x_n \in I'_n \rangle \lhd_f U \ .$$

Quindi $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n \rangle \lhd U$. □

Il seguente lemma si utilizza nella dimostrazione della validità di *transitivity* per $\lhd$.

Lemma 6.3.6 *Se $\langle x_1 \in K_1, \ldots, x_n \in K_n \rangle \lhd_f U$, $J_1 < K_1, \ldots, J_n < K_n$ e $U \lhd V$ allora $\langle x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n \rangle \lhd_f V$.*

Dimostrazione: La dimostrazione è per induzione sulla derivazione di $\langle x_1 \in K_1, \ldots, x_n \in K_n \rangle \lhd_f U$.

1. Se $\langle x_1 \in K_1, \ldots, x_n \in K_n \rangle \in U$ allora $\langle x_1 \in K_1, \ldots, x_n \in K_n \rangle \lhd V$, quindi per definizione, $\langle x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n \rangle \lhd_f V$.

2. Se $\langle x_1 \in K_1, \ldots, x_n \in K_n \rangle \lhd_f U$ è ottenuto per *C2* da

$$\begin{array}{l} \langle x_1 \in K_1, \ldots, x_n \in K_n \rangle \leq \langle y_1 \in L_1, \ldots, y_n \in L_m \rangle \\ \langle y_1 \in L_1, \ldots, y_n \in L_m \rangle \lhd_f U \ , \end{array}$$

allora per il lemma 6.3.4 esistono $L'_1 < L_1, \ldots, L'_m < L_m$ tali che

$$\langle x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n \rangle \leq \langle y_1 \in L'_1, \ldots, y_n \in L'_m \rangle \ .$$

Per tali $L'_1, \ldots, L'_m$, per ipotesi induttiva, $\langle y_1 \in L'_1, \ldots, y_n \in L'_m \rangle \lhd_f V$. Allora, per *C2*, $\langle x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n \rangle \lhd_f V$.

3. Supponiamo che $\langle x_1 \in K_1, \ldots, x_n \in K_n \rangle \lhd_f U$ sia stato ottenuto mediante *C3* da

$$\begin{array}{l} K_1 \lhd_{\mathcal{R}_f} V' \\ (\forall J' \in V')(\langle x_1 \in J', x_2 \in K_2, \ldots, x_n \in K_n \rangle \lhd_f U) , \end{array}$$

dove V' è finito. Poiché $J_1 < K_1$ e $K_1 \lhd_{\mathcal{R}_f} V'$, per il lemma 6.2.1, possiamo costruire un sottoinsieme finito V'' tale che $J_1 \lhd_{\mathcal{R}_f} V''$ e $(\forall J'' \in V'')(\exists J' \in V')(J'' < J')$. Allora, per ipotesi induttiva, $(\forall J'' \in V'')(\langle x_1 \in J'', x_2 \in J_2, \ldots, x_n \in J_n \rangle \lhd_f V)$ e, per *C3*, $\langle x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n \rangle \lhd_f V$.

4. Sia $\langle x_1 \in K_1, \ldots, x_n \in K_n \rangle \lhd_f U$ derivato per *C4* da $\langle x_1 + x_2 \in K_1 + K_2, x_3 \in K_3 \ldots, x_n \in K_n \rangle \lhd_f U$. Allora $J_1 + J_2 < K_1 + K_2$ quindi, per ipotesi induttiva, $\langle x_1 + x_2 \in J_1 + J_2, x_3 \in J_3 \ldots, x_n \in J_n \rangle \lhd_f V$ e, per *C4*, $\langle x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n \rangle \lhd_f V$.

5. Analogo a 4.

6. Sia $\langle x_1 \in K_1, \ldots, x_n \in K_n \rangle \lhd_f U$ derivato per *C6* da

$$\begin{array}{l} \langle x \in (-1, 1), x_1 \in K_1 \ldots, x_n \in K_n \rangle \lhd_f U \\ x \in N(1) . \end{array}$$

Per *N1* esiste un razionale $r < 1$ tale che $x \in N(r)$. Per un tale r, per ipotesi induttiva, $\langle x \in (-r, r), x_1 \in J_1 \ldots, x_n \in J_n \rangle \lhd_f V$. La tesi segue allora per *C6*. $\square$

Siamo ora in grado di dimostrare:

Proposizione 6.3.7 $\lhd$ *è una copertura.*

Dimostrazione: Reflexivity: Immediata per *reflexivity* di $\lhd_f$ ed il lemma 6.3.3.

$\cdot$*-Left*,$\cdot$*-right*: Immediate dalla definizione di $\lhd$ e le proprietà corrispondenti di $\lhd_f$.

Transitivity: Supponiamo $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n \rangle \lhd U$ e $U \lhd V$. Se $J_1 < I_1, \ldots, J_n < I_n$, possiamo trovare $K_1, \ldots, K_n$ tale che $J_1 < K_1 < I_1, \ldots, J_n < K_n < I_n$ e, per definizione di $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n \rangle \lhd U$, otteniamo $\langle x_1 \in K_1, \ldots, x_n \in K_n \rangle \lhd_f U$. Il lemma 6.3.6 ci dà quindi $\langle x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n \rangle \lhd_f V$. Allora $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n \rangle \lhd V$. $\square$

Infine, il seguente lemma sarà utile nella sezione 6.4.

Lemma 6.3.8 *Gli assiomi per* $\lhd_f$ *sono regole valide per* $\lhd$.

Dimostrazione: 1: Dato $w \in U$, $w \lhd U$ è immediato per *C1* ed il lemma 6.3.3.

2: Supponiamo $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n\rangle \leq \langle y_1 \in J_1, \ldots, y_m \in J_m\rangle$ e $\langle y_1 \in J_1, \ldots, y_m \in J_m\rangle \lhd U$. Siano $I'_1 < I_1, \ldots, I'_n < I_n$. Allora, per il lemma 6.3.4 esistono $J'_1 < J_1, \ldots, J'_m < J_m$ tali che

$$\langle x_1 \in I'_1, \ldots, x_n \in I'_n\rangle \leq \langle y_1 \in J'_1, \ldots, y_m \in J'_m\rangle \ .$$

Per tali $J'_1, \ldots, J'_m$ abbiamo $\langle y_1 \in J'_1, \ldots, y_m \in J'_m\rangle \lhd_f U$ e, per *C2*, $\langle x_1 \in I'_1, \ldots, x_n \in I'_n\rangle \lhd_f U$. Allora $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n\rangle \lhd U$.

3: Supponiamo $I_1 \lhd_R V$ e

$$(\forall J \in V)(\langle x_1 \in J\rangle\langle x_2 \in I_2, \ldots, x_n \in I_n\rangle \lhd U) \ .$$

Siano $I'_1 < I_1, \ldots, I'_n < I_n$. Allora esiste I'' tale che $I'_1 < I'' < I_1$. Per un tale I'', $I'' \lhd_{\mathcal{R}_f} V$ quindi per il lemma 6.2.1 esiste un sottoinsieme V' tale che $I'_1 \lhd_{\mathcal{R}_f} V'$ e $(\forall L' \in V')(\exists L \in V)(L' < L)$. Ma allora, dato che $\lhd_{\mathcal{R}_f}$ è una copertura di Stone, esiste un sottoinsieme finito $V'_0 \subseteq V'$ tale che $I'_1 \lhd_{\mathcal{R}_f} V'_0$ e $(\forall L' \in V'_0)(\exists L \in V)(L' < L)$. Ora, per definizione di $\lhd$, $(\forall J' \in V'_0)(\langle x_1 \in J'\rangle\langle x_2 \in I'_2, \ldots, x_n \in I'_n\rangle \lhd_f U)$ e, per *C3*,

$$\langle x_1 \in I'_1, \ldots, x_n \in I'_n\rangle \lhd_f U \ .$$

Allora $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n\rangle \lhd_f U$.

4 e 5 seguono facilmente dalla definizione di $\lhd_f$, *C4* e *C5*, rispettivamente.

6: Supponiamo $x \in N(1)$ e $\langle x \in (-1,1), x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n\rangle \lhd U$. Siano $J_1 < I_1, \ldots, J_n < I_n$. Per *N1*, esiste un razionale $r < 1$ tale che $x \in N(r)$. Per un tale r, $\frac{1}{r}x \in N(1)$. Ora, per *C5* e la definizione di $\lhd$,

$$\langle \frac{1}{r}x \in (-1,1), x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n\rangle \lhd_f U$$

e, per *C6*,

$$\langle x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n\rangle \lhd_f U \ .$$

Allora $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n\rangle \lhd U$. □

6.3.1 Funzionali lineari come punti formali

Sia $Pt(L(A))$ la collezione dei punti formali di $L(A)$ (cf. 1). Specializzando la definizione di punto formale di una topologia formale otteniamo:

Definizione 6.3.9 *Un sottoinsieme F di $S_{L(A)}$ è un punto formale di $L(A)$ se soddisfa:*

F1. $F \Vdash \langle\ \rangle$;

F2. $\dfrac{F \Vdash w_1 \quad F \Vdash w_2}{F \Vdash w_1 \cdot w_2}$;

F3. $\dfrac{F \Vdash w \quad w \lhd U}{(\exists w' \in U)(F \Vdash w')}$;

F4. $\dfrac{F \Vdash \langle x \in (p,q)\rangle}{p < q}$,

dove al solito $F \Vdash w$ *denota* $w \in F$.

Dato $F \in Pt(L(A))$ ed $x \in A$ sia

$$\hat{F}(x) \equiv \{(p,q) \in Q \times Q : F \Vdash \langle x \in (p,q)\rangle\}.$$

Allora abbiamo (cf. anche [MP]):

Proposizione 6.3.10 *$\hat{F}$ è un funzionale lineare da A a $Pt(\mathcal{R})$ di norma ≤ 1, cioè:*

1. *per ogni $x \in A$, $\hat{F}(x) \in Pt(\mathcal{R})$;*
2. *$\hat{F}(x+y) = \hat{F}(x) + \hat{F}(y)$;*
3. *$\hat{F}(tx) = t\hat{F}(x)$;*
4. *$x \in N(1) \Rightarrow -1 < \hat{F}(x) < 1$.*

Dimostrazione:

1. (a) Per *N2*, $(\exists q)(x \in N(q))$ e quindi, per *N4*, $(\exists q)(x/q \in N(1))$ cosicché $\langle\ \rangle \lhd \langle x \in (-q,q)\rangle$. Poiché $F \Vdash \langle\ \rangle$, per *monotonicity*, $F \Vdash \langle x \in (-q,q)\rangle$ e concludiamo $(\exists (r,s))(\hat{F}(x) \Vdash (r,s))$.

   (b) Supponiamo $\hat{F}(x) \Vdash (p,q)$ e $\hat{F}(x) \Vdash (p',q')$, cioè

   $$F \Vdash \langle x \in (p,q)\rangle \text{ e } F \Vdash \langle x \in (p',q')\rangle\ .$$

   Allora per *F2*,

   $$F \Vdash \langle x \in (p,q)\rangle\langle x \in \cdot(p',q')\rangle$$

   e poiché $\langle x \in (p,q)\rangle\langle x \in \cdot(p',q')\rangle \lhd \langle x \in (p,q)\cdot(p',q')\rangle$, per *monotonicity*, abbiamo $F \Vdash \langle x \in (p,q)\cdot(p',q')\rangle$, cioè

   $$\hat{F}(x) \Vdash (p,q)\cdot(p',q')\ .$$

(c) Supponiamo $\hat{F}(x) \Vdash (p,q)$ e $(p,q) \lhd U$. Allora, per definizione di $\hat{F}$, $F \Vdash \langle x \in (p,q) \rangle$ e, per 6.3.8(3),

$$\langle x \in (p,q) \rangle \lhd \{ \langle x \in J \rangle : J \in U \} \ .$$

Così per *F3* esiste $J \in U$ tale che $F \Vdash \langle x \in J \rangle$. Allora per definizione, $(\exists J \in U)(\hat{F}(x) \Vdash J)$.

(d) Supponiamo $\hat{F}(x) \Vdash (p,q)$, cioè $F \Vdash \langle x \in (p,q) \rangle$. Allora per *F4*, $p < q$.

2. Poiché sia $\hat{F}(x+y)$ sia $\hat{F}(x) + \hat{F}(y)$ sono reali formali è sufficiente dimostrare una delle due inclusioni e l'uguaglianza ne segue (cf. corollario 4.3.14). Sia $(r,s) \in \hat{F}(x) + \hat{F}(y)$. Allora esistono $(p,q) \in \hat{F}(x)$ e $(p',q') \in \hat{F}(y)$ tali che $(r,s) = (p,q) + (p',q')$. Abbiamo

$$F \Vdash \langle x \in (p,q) \rangle \text{ e } F \Vdash \langle y \in (p',q') \rangle \ .$$

Allora per *F2*,

$$F \Vdash \langle x \in (p,q), y \in (p',q') \rangle$$

e siccome $\langle x \in (p,q), y \in (p',q') \rangle \lhd \langle x + y \in (p,q) + (p',q') \rangle$, per *monotonicity* di F, abbiamo $F \Vdash \langle x + y \in (p,q) + (p',q') \rangle$.

3. Si dimostra analogamentee utilizzando la condizione di linearità

$$t \neq 0 \Rightarrow \langle x \in I \rangle \lhd \langle tx \in tI \rangle \ .$$

4. Se $x \in N(1)$ allora $\langle \ \rangle \lhd \langle x \in (-1,1) \rangle$ e poiché $F \Vdash \langle \ \rangle$, per *monotonicity*, abbiamo $F \Vdash \langle x \in (-1,1) \rangle$, cioè $\hat{F}(x) \Vdash (-1,1)$ e quindi $-1 < F(x) < 1$. □

Viceversa, dato un funzionale lineare f da A a $Pt(\mathcal{R})$, cioè un'applicazione che soddisfa le condizioni 1-4 come nella proposizione 6.3.10, sia f° il sottoinsieme di $S_{L(A)}$ definito da

$$f^\circ \equiv \{ \langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n \rangle : f(x_1) \Vdash I_1, \ldots, f(x_n) \Vdash I_n \}.$$

Allora abbiamo:

Proposizione 6.3.11 $f^\circ \in Pt(L(A))$.

Dimostrazione: *F1* vale banalmente.

F2 è immediata.

F3: Supponiamo $f^\circ \Vdash w$ e $w \lhd U$, dove $w \equiv \langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n \rangle$. Allora per definizione di f° e $Pt(\mathcal{R})$ esiste $w' \equiv \langle x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n \rangle$

tale che $J_1 < I_1, \ldots, J_n < I_n$ e $f^\circ \;||\!-\, w'$. Da $w \lhd U$ otteniamo $w' \lhd_f U$ e un ragionamento per induzione sulla derivazione di $w' \lhd_f U$ permette di concludere. Se l'ultima regola applicata è *reflexivity*, la tesi è ovvia. Se è

$$\frac{w' \leq w'' \quad w'' \lhd_f U}{w' \lhd_f U},$$

basta osservare che $f^\circ \;||\!-\, w'$ e $w' \leq w''$ implicano $f^\circ \;||\!-\, w''$ e quindi applicare l'ipotesi induttiva. Se è

$$\frac{V \textit{ finito} \quad I \lhd_{\mathcal{R}_f} V \quad (\forall J \in V)(\langle x \in J\rangle w'' \lhd_f U)}{\langle x \in I\rangle w'' \lhd_f U},$$

dall'assunzione $f^\circ \;||\!-\, \langle x \in I\rangle w''$ abbiamo $f(x) \;||\!-\, I$ e poiché $I \lhd_{\mathcal{R}_f} V$, $(\exists J \in V)(f(x) \;||\!-\, J)$, quindi $(\exists J \in V)(f^\circ \;||\!-\, \langle x \in J\rangle w'')$. Allora per ipotesi induttiva $(\exists w \in U)(f^\circ \;||\!-\, w)$. Se è derivata mediante *C4*, supponiamo $w' = \langle x \in I, y \in J\rangle w''$ e $\langle x + y \in I + J\rangle w'' \lhd_f U$. Poiché $f^\circ \;||\!-\, \langle x \in I, y \in J\rangle w''$, per linearità di f, abbiamo $f^\circ \;||\!-\, \langle x+y \in I+J\rangle w''$ e possiamo concludere per ipotesi induttiva. Il caso di *C5* è trattato analogamente. Se l'ultima regola è

$$\frac{x \in N(1) \quad \langle x \in (-1,1)\rangle w' \lhd_f U}{w' \lhd_f U}$$

e $f^\circ \;||\!-\, w'$, allora siccome $x \in N(1)$, $-1 < f(x) < 1$, cioè $f^\circ \;||\!-\, \langle x \in (-1,1)\rangle$ per *F2* $f^\circ \;||\!-\, \langle x \in (-1,1)\rangle \cdot w'$ e possiamo concludere per ipotesi induttiva. □

La corrispondenza stabilita dalle proposizioni 6.3.10 e 6.3.11 è biunivoca poiché abbiamo, con la notazione usata sopra, $\hat{f}^\circ = f$ e $\hat{F}^\circ = F$.

Ricordiamo che un intorno di base nella topologia estensionale (cf. capitolo 1, sezione 1.2) su $Pt(L(A))$, $ext(\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n\rangle)$, è dato dai punti formali F tali che $F \;||\!-\, \langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n\rangle$, cioè tali che $\hat{F}(x_1) \;||\!-\, I_1, \ldots \hat{F}(x_n) \;||\!-\, I_n$. Quindi la corrispondenza tra punti formali di $L(A)$ e funzionali lineari si estende ad una corrispondenza tra intorni di base della topologia estensionale su $Pt(L(A))$ ed intorni di base della topologia debole sulla palla unitaria del duale di A. Possiamo dunque concludere (cf. anche [MP]):

Proposizione 6.3.12 *Lo spazio formale $Pt(L(A))$ con la topologia estensionale è omeomorfo allo spazio dei funzionali di norma ≤ 1 da A a $Pt(\mathcal{R})$ con la topologia debole.*

6.3.2 Il teorema di Alaoglu

La copertura $\lhd_f$ è una copertura di Stone, poiché abbiamo:

Proposizione 6.3.13 *Se $w \lhd_f U$ allora esiste un sottoinsieme finito U_0 di U tale che $w \lhd_f U_0$.*

Dimostrazione: La dimostrazione è immediata per induzione sulla derivazione di $w \lhd U$. Considereremo solo il caso in cui $w \lhd U$ è ottenuto mediante *C3* da $w = \langle x \in I\rangle w'$, $I \lhd_{\mathcal{R}_f} V$ e da $(\forall J \in V)(\langle x \in J\rangle w' \lhd_f U)$. Per la proposizione 5.1.4 abbiamo $I \lhd_{\mathcal{R}_f} V_0$ per un sottoinsieme finito V_0 di V. Allora per ipotesi induttiva, dato un elemento $J \in V_0$, esiste un sottoinsieme finito U_J di U tale che $\langle x \in J\rangle w' \lhd_f U_J$. Sia U_0 l'unione di tali U_J. Allora per *C3*, $w \lhd U_0$. $\Box$

Come conseguenza immediata della definizione della copertura per $L(A)$, otteniamo il teorema di Alaoglu, che afferma che la palla unitaria dello spazio dei funzionali lineari e continui è compatta nella topologia debole.

Corollario 6.3.14 *Lo spazio formale $L(A)$ è compatto.*

Dimostrazione: Vale la seguente catena di implicazioni:

$$\langle\ \rangle \lhd U \Rightarrow \langle\ \rangle \lhd_f U \Rightarrow (\exists U_0 \subseteq U)(\langle\ \rangle \lhd_f U_0) \Rightarrow (\exists U_0 \subseteq U)(\langle\ \rangle \lhd U_0). \ \Box$$

6.4 Il teorema di Helly-Hahn-Banach

Premettiamo un'osservazione sull'attribuzione del teorema: come spiegato in [Ho], la principale idea nella prova usuale di quello che è usualmente chiamato il teorema di Hahn-Banach è dovuta ad Helly. Poiché questa è anche l'idea chiave della nostra dimostrazione, abbiamo ritenuto opportuno ribattezzare il teorema in questo modo.

La definizione di $\lhd$ in termini di $\lhd_f$ ci permette di rimpiazzare $\lhd$ con $\lhd_f$ per dimostrare la conservatività. Se M è un sottospazio vettoriale di A, diremo che $\lhd_f$ per $L(A)$ è *conservativa* su $\lhd_f$ per $L(M)$ se ogniqualvolta w è un elemento e U è un sottoinsieme della base di $L(M)$ e $w \lhd_f U$ in $L(A)$ allora $w \lhd_f U$ in $L(M)$. La conservatività di $\lhd$ per $L(A)$ su $\lhd$ per $L(M)$ è definita nello stesso modo. Allora abbiamo:

Proposizione 6.4.1 *Se $\lhd_f$ per $L(A)$ è conservativa su $\lhd_f$ per $L(M)$ allora $\lhd$ per $L(A)$ è conservativa su $\lhd$ per $L(M)$.*

Dimostrazione: Se $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n\rangle \lhd U$ in $L(A)$, allora, per tutti i $J_1 \ldots, J_n$ tali che $J_1 < I_1, \ldots, J_n < I_n$, vale

$$\langle x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n\rangle \lhd_f U \ ,$$

quindi per la conservatività di $\lhd_f$, per tutti i $J_1 \ldots, J_n$ tali che $J_1 < I_1, \ldots, J_n < I_n$, vale $\langle x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_n \rangle \lhd_f U$ in $L(M)$ ed allora $\langle x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n \rangle \lhd U$ in $L(M)$. $\Box$

L'enunciato "localico" del teorema di Helly-Hahn-Banach nel contesto delle topologie formali è dato da "$\lhd$ *per* $L(A)$ *è conservativa su* $\lhd$ *per* $L(M)$". Per la proposizione vista sopra si riduce quindi al seguente:

Teorema 6.4.2 $\lhd_f$ *per* $L(A)$ *è conservativa su* $\lhd_f$ *per* $L(M)$.

Poiché $\lhd_f$ è una copertura di Stone, possiamo trasformare ogni derivazione di $a \lhd_f U$ in $L(A)$ in una in cui compaiono solo sottoinsiemi finiti a destra della relazione di copertura. Quindi possiamo assumere che solo un insieme finito di elementi che non appartengono alla base di $L(M)$ siano coinvolti. Allora, ragionando per induzione, il problema è ridotto a dimostrare che se $a \lhd_f U$ è derivata in $L(M')$, dove $M' \equiv [M + x]$ e x è un elemento della base di $L(A)$, allora esiste anche una derivazione di $a \lhd_f U$ in $L(M)$ (si veda la proposizione 6.4.4).

La seguente conseguenza degli assiomi per la copertura sarà utilizzata nella trasformazione della prova (un risultato analogo compare anche in [Ve], pag. 81, ma dato che la prova contiene un errore abbiamo ritenuto opportuno dare qui una dimostrazione per esteso nel nostro contesto).

Lemma 6.4.3 *Vale*

$$\langle x + y \in (p, q) \rangle \lhd \{\langle x \in (r, s), y \in (r', s') \rangle : p \leq r + r' < s + s' \leq q\}.$$

Dimostrazione: Per definizione di $\lhd$, dato che

$$\langle x + y \in (p'', q'') \rangle \in \{\langle x + y \in (p', q') \rangle : p < p' < q' < q\}$$

quando $(p'', q'') < (p, q)$, abbiamo

$$\langle x + y \in (p, q) \rangle \lhd \{\langle x + y \in (p', q') \rangle : p < p' < q' < q\}.$$

Per *N2* e 6.3.8(6) abbiamo

$$\langle\ \rangle \lhd \{\langle x \in (r, s) \rangle : r < s\} \text{ ed analogamente } \langle\ \rangle \lhd \{\langle y \in (r', s') \rangle : r' < s'\},$$

così per *stability*

$$\begin{aligned}\langle x + y \in (p, q) \rangle \lhd \{&\langle x + y \in (p', q'), x \in (r, s), y \in (r', s') \rangle : \\ &p < p' < q' < q, r < s, r' < s'\}.\end{aligned}$$

Poiché ogni intervallo può essere coperto da intervalli arbitrariamente piccoli, usando 6.3.8(3), otteniamo

$$\begin{aligned}\langle x+y \in (p,q)\rangle \lhd \{\langle x+y \in (p',q'), x \in (r,s), y \in (r',s')\rangle :\ & \\ p < p' < q' < q, r < s, r' < s', & \\ s-r \leq min(p'-p, q-q')/2, & \\ s'-r' \leq min(p'-p, q-q')/2\} & \end{aligned}$$

e per 6.3.8(4)

$$\begin{aligned}\langle x+y \in (p,q)\rangle \lhd \{\langle x+y \in (p',q'), x \in (r,s), y \in (r',s'), & \\ x+y \in (r+r', s+s')\rangle : & \\ p < p' < q' < q, r < s, r' < s', & \\ s-r \leq min(p'-p, q-q')/2, & \\ s'-r' \leq min(p'-p, q-q')/2\}. & \end{aligned}$$

Ora, se $r+r' < p$ allora $s+s' < p'$ e, per 6.3.8(2),

$$\langle x+y \in (p',q'), x+y \in (r+r', s+s')\rangle \lhd \langle x+y \in (p', s+s')\rangle.$$

Allora, poiché $s+s' < p'$, il membro di destra è coperto da qualunque cosa, in particolare dall'insieme vuoto. Se $q < s+s'$ otteniamo simmetricamente

$$\langle x+y \in (p',q'), x+y \in (r+r', s+s')\rangle \lhd \langle x+y \in (r+r', q')\rangle,$$

dove $q' < r+r'$. Abbiamo quindi

$$\langle x+y \in (p,q)\rangle \lhd \{\langle x \in (r,s), y \in (r',s')\rangle : p \leq r+r' < s+s' \leq q\}. \ \square$$

Proposizione 6.4.4 *Sia $M' \equiv [M+x]$. Allora $\lhd_f$ per $L(M')$ è conservativa su $\lhd_f$ per $L(M)$.*

Dimostrazione: Useremo la notazione $w \lhd_{M_f} U$ e $w \lhd_{M'_f} U$ per $w \lhd_f U$ in $L(M)$ ed in $L(M')$ rispettivamente.

La dimostrazione è per induzione sulla derivazione di $w \lhd_{M'_f} U$, in cui trasformiamo tutti gli aperti di base della forma $\langle a+tx \in (r,s)\rangle$ in aperti di base della forma $\langle a \in (r+tq, s+tq)\rangle$, dove q è ottenuto considerando tutti gli assiomi del tipo *C6*. Data una derivazione di $w \lhd_{M'_f} U$ dimostreremo $\bar{w} \lhd_{M'_f} \bar{U}$, dove $\bar{w}$ e $\bar{U}$ sono i trasformati di w e di U, rispettivamente. Anche se non richiediamo che $x \in L(M)$ sia decidibile, è comunque decidibile se x compare in $w \lhd_{M'_f} U$ dato che $\lhd_{M'_f}$ è una copertura di Stone e per un numero razionale t è decidibile se $t = 0$. Se x compare in $w \lhd_{M'_f} U$ allora $x \in M$ e non dobbiamo fare nulla. Allora possiamo assumere che x non compaia in $w \lhd_{M'_f} U$ e quindi w ed U non saranno trasformati.

La dimostrazione è immediata per tutti i casi tranne che per *C6*, nelle istanze in cui compare x.

Innanzitutto, dimostreremo che esiste un numero razionale q tale che per ogni espressione della forma $a_i + t_i x \in N(1)$, dove $t_i \neq 0$,

$$\langle\ \rangle \lhd_{M_f} \langle a_i \in (-1 + t_i q, 1 + t_i q)\rangle\ .$$

Sia I l'insieme (finito) di tutti gli indici i tali che $a_i + t_i x \in N(1)$ e $t_i \neq 0$. Per ogni $i, j \in I$, per le regole di N abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i + t_i x \in N(1) \\ a_j + t_j x \in N(1) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_i/t_i + x \in N(1/|t_i|) \\ -a_j/t_j - x \in N(1/|t_j|) \end{array} \right.$$

e quindi $a_i/t_i - a_j/t_j \in N(1/|t_i| + 1/|t_j|)$. Per le regole di $\lhd_{M_f}$ otteniamo

$$\langle\ \rangle \lhd_{M_f} \langle a_i/t_i - a_j/t_j \in (-1/|t_i| - 1/|t_j|, 1/|t_i| + 1/|t_j|)\rangle,$$

e per i lemmi 6.3.3 e 6.4.3

$$\begin{array}{l} \langle\ \rangle \lhd_M \{\langle a_i/t_i \in (r_i, s_i), a_j/t_j \in (r_j, s_j)\rangle : \\ \qquad -1/|t_i| - 1/|t_j| \leq r_i - s_j < s_i - r_j \leq 1/|t_i| + 1/|t_j|\} \end{array}$$

Dalla definizione di $\lhd$ otteniamo la stessa cosa per $\lhd_f$ e mediante $\cdot$ *-right*

$$\begin{array}{l} \langle\ \rangle \lhd_{M_f} \{\langle \ldots, a_i/t_i \in (r_i, s_i), \ldots\rangle : \\ \qquad (\forall i, j \in I) \\ \qquad (-1/|t_i| - 1/|t_j| \leq r_i - s_j < s_i - r_j \leq 1/|t_i| + 1/|t_j|)\} \end{array}$$

$$\Rightarrow$$

$$\langle\ \rangle \lhd_{M_f} \{\langle \ldots, a_i/t_i \in (r_i, s_i), \ldots\rangle : (\forall i, j \in I)(s_i - 1/|t_i| \leq r_j + 1/|t_j|)\}$$

$$\Rightarrow$$

$$\langle\ \rangle \lhd_{M_f} \{\langle \ldots, a_i/t_i \in (r_i, s_i), \ldots\rangle : \bigvee_{i \in I}(s_i - 1/|t_i|) \leq \bigwedge_{i \in I}(r_i + 1/|t_i|)\}.$$

Ci sono ora due casi da considerare, a seconda che t_i sia positivo e negativo; considereremo solo il caso in cui t_i è positivo, in cui otteniamo

$$\langle\ \rangle \lhd_{M_f} \{\langle \ldots, a_i \in (t_i r_i, t_i s_i), \ldots\rangle : \bigvee_{i \in I}(s_i - 1/|t_i|) \leq \bigwedge_{i \in I}(r_i + 1/|t_i|)\}.$$

Sia $q \equiv \bigvee_{i \in I}(s_i - 1/|t_i|)$, allora $-1 + qt_i \leq t_i r_i < t_i s_i \leq 1 + qt_i$, perché $s_i - 1/|t_i| \leq q \leq r_i + 1/|t_i|$, così otteniamo

$$\langle\ \rangle \lhd_{M_f} \{\langle \ldots, a_i \in (-1 + qt_i, 1 + qt_i), \ldots\rangle : q \leq \bigwedge_{i \in I}(r_i + 1/|t_i|)\}$$

$$\Rightarrow$$

$$(\exists q)(\langle\ \rangle \lhd_{M_f} \{\langle \ldots, a_i \in (-1+qt_i, 1+qt_i), \ldots \rangle\}$$

$$\Rightarrow$$

$$(\exists q)(\forall i \in I)(\langle\ \rangle \lhd_{M_f} \langle a_i \in (-1+qt_i, 1+qt_i)\rangle.$$

Ora, supponiamo che $w \lhd_{M'_f} U$ sia stato ottenuto, mediante *C6*, da $a+tx \in (1)$ e $\langle a+tx \in (-1,1)\rangle w \lhd_{M'_f} U$. Allora per quanto visto sopra

$$\langle\ \rangle \lhd_{M_f} \langle a \in (-1+qt, 1+qt)\rangle,$$

e per *localization*

$$\bar{w} \lhd_{M_f} \langle a \in (-1+qt, 1+qt)\rangle \bar{w}.$$

Da $\langle a+tx \in (-1,1)\rangle w \lhd_{M_f} U$, per ipotesi induttiva, otteniamo

$$\langle a \in (-1+tq, 1+tq)\rangle \bar{w} \lhd_{M_f} \bar{U},$$

così per *transitivity*

$$\bar{w} \lhd_{M_f} \bar{U}.\square$$

Includiamo una dimostrazione in questo contesto della seguente applicazione del teorema di Helly-Hahn-Banach.

Proposizione 6.4.5 *Se* $\langle\ \rangle \lhd \langle x \in (-1,1)\rangle$, *allora* $x \in N(1)$.

La proposizione 6.4.5 si dimostra interpretando gli intorni di $L(A)$ come sottoinsiemi in R. Definiamo dapprima, per $r \in Q$, $r \in I \equiv \pi_1(I) < r < \pi_2(I)$, dove π_1 e π_2 sono la prima e la seconda proiezione di I rispettivamente. Quindi poniamo:

$$\langle t_1 x \in I_1, \ldots, t_n x \in I_n\rangle' \equiv \begin{cases} \emptyset & \text{se } (\exists i)(t_i = 0\ \&\ 0 \notin I_i) \\ Q \times Q & \text{se } (\forall i)(t_i = 0\ \&\ 0 \in I_i) \\ \{\bigwedge_{1 \le i \le n, t_i \neq 0} \frac{1}{t_i} I_i\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e sia U' l'unione di tutti i w' tali che $w \in U$.

Allora abbiamo:

Lemma 6.4.6 *Se* $w \lhd_f U$ *in* $L([x])$ *allora*

$$(\exists r \in Q)(x \in N(r)\ \&\ (-r,r) \cdot w' \lhd_{\mathcal{R}_f} U').$$

Dimostrazione: Per induzione sulla derivazione di $w \lhd_f U$.

1. Se $w \lhd_f U$ è stato ottenuto mediante *C1* da $w \in U$, per definizione di $'$, $w' \subseteq U'$ cosicché $w' \lhd_{\mathcal{R}_f} U'$. Per *N2*, $(\exists r)(x \in N(r))$ e per un tale r, $(-r,r)w' \lhd_{\mathcal{R}_f} U'$ per $\cdot$ -left. Quindi $(\exists r)(x \in N(r)\ \&\ (-r,r)w' \lhd_{\mathcal{R}_f} U')$.

Per 2-6 ragioniamo per casi sul modo in cui $\langle t_1 x \in I_1, \ldots, t_n x \in I_n\rangle'$ è stato ottenuto. Se $w' = \emptyset$, allora per *reflexivity* $w' \lhd_{\mathcal{R}_f} U'$ e la tesi segue per $N2$ e $\cdot$ -left. Nel secondo caso è necessario esaminare ogni regola:

2. Sia $w_1 \equiv \langle t_1 x \in I_1, \ldots, t_n x \in I_n\rangle$ e $w_2 \equiv \langle s_1 x \in J_1, \ldots, s_m x \in J_m\rangle$; da $w_1 \leq w_2$ e $(\forall i)(t_i = 0\ \&\ 0 \in I_i)$ abbiamo $(\forall j)(s_j = 0\ \&\ 0 \in J_j)$ e quindi per ipotesi induttiva $Q \times Q \lhd_{\mathcal{R}_f} U'$.

3. Se $t = 0$ e $0 \in I$ allora $(\exists J \in V)(0 \in J)$ e per un tale J,

$$(\langle tx \in J\rangle w)' = Q \times Q\ ,$$

così per ipotesi induttiva $Q \times Q \lhd_{\mathcal{R}_f} U'$.

Gli altri casi sono trattati in modo simile.

Infine consideriamo il caso in cui $w' = \{\bigwedge_{1 \leq i \leq n, t_i \neq 0} \frac{1}{t_i} I_i\}$.

2. Supponiamo che $w_1 \lhd_f U$ sia stato ottenuto per *C2* da $w_1 \leq w_2$ e $w_2 \lhd_f U$. Per definizione di $\leq$ e $'$, $w_1' = \{I\}$ e $w_2' = \{J\}$, per qualche $I \leq J$, quindi $w_1' \lhd_{\mathcal{R}_f} w_2'$. Per ipotesi induttiva

$$(\exists r)(x \in N(r)\ \&\ (-r,r)w_2' \lhd_{\mathcal{R}_f} U')\ .$$

Per un tale r, $(-r,r)w_1' \lhd_{\mathcal{R}_f} (-r,r)w_2'$ quindi, per *transitivity*,

$$(-r,r)w_1' \lhd_{\mathcal{R}_f} U'\ ,$$

da cui la tesi.

3. Se $\langle tx \in I\rangle w \lhd_f U$ è ottenuto per *C3* da

$$\begin{array}{l} V\ finito \\ I \lhd_f V \\ (\forall J \in V)(\langle tx \in J\rangle w \lhd_f U)\ , \end{array}$$

(anche qui considereremo solo il caso in cui w' è il singoletto costituito da un intervallo, dato che gli altri casi sono facili), per ipotesi induttiva

$$(\forall J \in V)(\exists r)(x \in N(r)\ \&\ (-r,r)(\langle tx \in J\rangle w)' \lhd_{\mathcal{R}_f} U')$$

e poiché V è finito possiamo considerare il minimo di tali r ed otteniamo $x \in N(r)\ \&\ (\forall J \in V)((-r,r)(\langle tx \in J\rangle w)' \lhd_{\mathcal{R}_f} U')$ (qui stiamo anche assumendo che V sia non vuoto, dato che se V è vuoto, I è non positivo e la tesi si ottiene facilmente). Siccome $(\langle tx \in J\rangle w)' = \frac{1}{t} I w'$, $(\forall K \in$

$(-r,r)\frac{1}{t}w'V)(K \lhd_{\mathcal{R}_f} U')$. Inoltre $(-r,r)\frac{1}{t}w'I \lhd_{\mathcal{R}_f} (-r,r)\frac{1}{t}w'V$ quindi, per *transitivity*, $(-r,r)\frac{1}{t}w'I \lhd_{\mathcal{R}_f} U'$.

4. Supponiamo che $\langle t_1x \in I_1, t_2x \in I_2\rangle w \lhd_f U$ sia stato ottenuto per *C4* da $\langle t_1x + t_2x \in I_1 + I_2\rangle w \lhd_f U$. Per ipotesi induttiva

$$(\exists r)(x \in N(r) \ \& \ (-r,r)(\langle t_1x + t_2x \in I_1 + I_2\rangle w)' \lhd_{\mathcal{R}_f} U') \ .$$

Per concludere basta osservare che

$$\langle t_1x \in I_1, t_2x \in I_2\rangle' \leq \langle t_1x + t_2x \in I_1 + I_2\rangle' \ .$$

5. Analogo a 4.

6. Supponiamo $w \lhd_f U$ derivato per *C6* da

$$\begin{array}{l} tx \in N(1) \\ \langle tx \in (-1,1)\rangle w \lhd_f U \ . \end{array}$$

Per *N4* e *N5*, $x \in N(\frac{1}{|t|})$ e quindi, per ipotesi induttiva,

$$(\exists r)(x \in N(r) \ \& \ (-r,r)(\langle tx \in (-1,1)\rangle w)' \lhd_{\mathcal{R}_f} U') \ .$$

Per un tale r, dato che $(\langle tx \in (-1,1)\rangle w)' = \frac{1}{t}(-1,1)w'$ (di nuovo, consideriamo solo il caso in cui w' è il singoletto costituito da un intervallo), se $r \leq \frac{1}{|t|}$, abbiamo $(-r,r) \leq (-r,r)\frac{1}{t}(-1,1)$ e quindi $(-r,r)\cdot w' \lhd_{\mathcal{R}_f} U')$ e se $r > \frac{1}{|t|}$ abbiamo $\frac{1}{t}(-1,1)w' \lhd_{\mathcal{R}_f} U')$ e la tesi segue poiché $x \in N(\frac{1}{|t|})$. □

Dimostrazione della proposizione 6.4.5: Si supponga che

$$\langle\ \rangle \lhd_{L(A)} \langle x \in (-1,1)\rangle \ .$$

Allora, per il teorema di Helly-Hahn-Banach (localico), abbiamo

$$\langle\ \rangle \lhd_{L([x])} \langle x \in (-1,1)\rangle$$

e, per definizione di $\lhd$,

$$\langle\ \rangle \lhd_{L([x])_f} \langle x \in (-1,1)\rangle \ .$$

Allora per il lemma 6.4.6 esiste $r \in Q^+$ tale che

$$x \in N(r) \text{ e } (-r,r) \lhd_{\mathcal{R}_f} (-1,1) \ .$$

Allora (cf. lemma 5.1.9) $(-r,r) \leq (-1,1)$ cioè $r \leq 1$, cosicché $x \in N(1)$. □

6.5 Conclusioni

Come abbiamo già detto, la nostra dimostrazione è stata fatta in modo da essere formalizzata in teoria dei tipi, ed invero, dal punto di vista di teoria della dimostrazione, usa solo la nozione di definizione induttiva finitaria. Sarebbe interessante a questo punto precisare le connessioni di questo lavoro con quello di [BS]. Ad esempio, i nostri spazi sono *absolute* (vedi [FG]), solo per spazi vettoriali separabili, il che spiega perché la restrizione sulla separabilità in [BS] non appare qui.

Un'altra interessante questione consiste nel trovare delle istanze concrete sull'uso del teorema di Helly-Hahn-Banach, per le quali la nostra dimostrazione consentirebbe di estrarre il suo contenuto computazionale. Purtroppo non sembrano esserci semplici istanze di questo tipo; le applicazioni usuali di questo teorema(cf. [Br]) coinvolgono passaggi classici non banali.

Bibliografia

[A] P. Aczel. *An Introduction to Inductive Definitions*, in "Handbook of Mathematical Logic", J. Barwise ed., North Holland, 1977, pp. 739-782.

[BatS] G. Battilotti, G. Sambin. *Pretopologies and a uniform presentation of sup-lattices, quantales and frames*, manuscript.

[Bee] M. J. Beeson. "Foundations of Constructive Mathematics", Springer-Verlag, 1980.

[Be] J. Bell. "Toposes and local set theory", Oxford University Press, 1988.

[Bi] E. Bishop. "Foundations of Constructive Analysis", McGraw Hill, 1967.

[Br] H. Brezis. "Analyse fonctionelle - Théorie et applications", Masson Editeur, Paris, 1983.

[Brg] D. Bridges, "Constructive Functional Analysis", Pitman Publishing, 1979.

[BR] D. Bridges, F. Richman, "Varieties of Constructive Mathematics", Cambridge University Press, 1987

[BS] D.K. Brown and S.G. Simpson. *Which set existence axioms are needed to prove the separable Hahn-Banach Theorem*, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 31, pp. 123-144, 1986.

[Bw] L.E.J. Brouwer. *Consciousness, Philosophy and Mathematics*, in "Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy, Amsterdam 1948 III", pp. 1235-1249; also in "Brouwer, Collected Works I", ed. A. Heyting, North Holland, 1975, pp. 480-494.

[Bw1] L. E. J. Brouwer. *Die intuitionistische Form des Heine Borelschen Theorems*, in "Brouwer, Collected Works", A. Heyting ed., North Holland, Amsterdam, 1975, vol. 1, pp. 350-351, 1926C.

[JC] J. Cederquist. *A machine assisted formalization of pointfree topology in type theory*, Chalmers University of Technology and University of Göteborg, Sweden, Licentiate Thesis, 1994.

[CCN] J. Cederquist, T. Coquand, S. Negri.*Helly-Hahn-Banach in Formal Topology*, forthcoming.

[CN] J. Cederquist, S. Negri. *A constructive proof of the Heine-Borel covering theorem for formal reals*, Lecture Notes in Computer Science, Proceedings of the Turin BRA-TYPES meeting (in press).

[C] T. Coquand. *An intuitionistic proof of Tychonoff's theorem*, The Journal of Symbolic Logic vol. 57, n. 1, pp. 28-32, 1992.

[C2] T. Coquand. *Constructive Topology and Combinatorics*, Lecture Notes in Computer Science 613, pp. 159-163, 1992.

[D] E. W. Dijkstra. *On a cultural gap*, The Mathematical Intelligencer, Springer-Verlag, vol. 8, n. 1, 48-52, 1986.

[FG] M. P. Fourman, R.J. Grayson. *Formal Spaces*, in "The L. E. J. Brouwer Centenary Symposium", A. S. Troelstra and D. van Dalen (eds), pp. 107-122, North Holland, Amsterdam, 1982.

[F] M. Franchella. "L. E. J. Brouwer pensatore eterodosso. L'intuizionismo tra matematica e filosofia", Guerini Studio, 1994.

[FH] M. P. Fourman, J.M.E. Hyland. *Sheaf models for analysis*, in C. Mulvey, D. S. Scott (eds.), "Applications of Sheaves", Lecture Notes in Mathematics 453.

[G] R. Gray. *Computer programs and mathematical proofs*, The Mathematical Intelligencer, Springer-Verlag, vol. 13, n. 4, 45-47, 1991.

[Gr] G. Grätzer. "Lattice theory", Birkhauser, Basel, 1978.

[H] A. Heyting. "Intuitionism, an introduction", North Holland, 1971.

[Ho] H. Hochstadt. *Eduard Helly, Father of the Hahn-Banach theorem*, The Mathematical Intelligencer, vol. 2, n. 3, pp. 123-125, 1980.

[J] P. T. Johnstone. "Stone Spaces", Cambridge University Press, 1982.

[J1] P. T. Johnstone. *Tychonoff's theorem without the axiom of choice*, Fundamenta Mathematicae, vol. 113, pp. 21-35, 1981.

[J2] P. T. Johnstone. *The point of pointless topology*, Bulletin of the American Mathematical Society n.8, pp. 41-43, 1983.

[JV] P. T. Johnstone, S. Vickers. *Preframe presentations present*, in "Category Theory" (Proceedings, Como 1990), Carboni, Pedicchio, Rosolini (eds), 193-212, Lecture Notes in Mathematics vol. 1488, 1991.

[K] J. L. Kelley. *The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice*, Fundamenta Mathematicae, vol. 37, pp. 75-76, 1950.

[Kr] I. Kriz. *A constructive proof of Tychonoff's theorem for locales*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, vol. 26, n. 3, pp. 619-630, 1985.

[MCL] S. Mac Lane. "Categories for the Working Mathematician", Springer Verlag, 1971.

[MCM] S. Mac Lane, I. Moerdijk. "Sheaves in Geometry and Logic", Springer Verlag, 1992.

[Ma] L. Magnusson, "The Implementation of ALF - a Proof Editor based on Martin-Löf's Monomorphic Type Theory with Explicit Substitution", Chalmers University of Technology and University of Göteborg, PhD thesis, January 1995.

[ML] P. Martin-Löf. "Notes on Constructive Mathematics", Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1970.

[ML1] P. Martin-Löf. *Constructive mathematics and computer programming*, in L.Cohen et al., eds., Logic, Methodology and Philosophy of Science VI, North-Holland, pp. 153-175, 1982.

[ML2] P. Martin-Löf. "Intuitionistic Type Theory", notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980, Bibliopolis, Napoli, 1984.

[M] I. Moerdijk. *Continuous fibrations and inverse limits of toposes*, Compositio Mathematica, vol. 58, pp. 45-72, 1986.

[MP] C.J. Mulvey, J.W. Pelletier. *The dual locale of a seminormed space*, Cahiers de topologie et geometrie differentielle, vol. 23, n. 1, pp. 73-92, 1987.

[MP1] C.J. Mulvey, J.W. Pelletier. *A globalization of the Hahn Banach theorem*, Advances in Mathematics, vol. 89, pp. 1-60, 1991.

[MP2] C.J. Mulvey, J.W. Pelletier. *Locales in functional analysis*, Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 70, pp. 133-145, 1991.

[N] S. Negri. *Stone bases, alias the constructive content of Stone representation*, in "Logic and Algebra", Dekker ed., New York, (Proceedings of the International Conference on Logic and Algebra in memory of Roberto Magari, Pontignano 26-30 April, 1994).

[NS] S. Negri, D. Soravia. *The continuum as a formal space*, Rapporto Interno n. 4, 17-7-95, Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova.

[NV] S. Negri, S. Valentini. *Tychonoff's theorem in the framework of formal topologies*, in The Journal of Symbolic Logic (in press).

[NPS] B. Nordstrom, K. Petersson, J. Smith, "Programming in Martin-Löf Type Theory", Oxford University Press, 1990.

[PV] Paulus Venetus *Propositum Cameriniense sive etiam itinera certaminis inter rationem insiemes aedificandi analisym situs intuitionisticamque et mathematicae artium reliquas res*, in "Atti degli incontri di Logica Matematica", vol. 8, Gerla, Toffalori, Tulipani (eds), pp. 115-143, 1993.

[S] G. Sambin. *Intuitionistic formal spaces – a first communication*, in Mathematical logic and its applications, D. Skordev ed., Plenum, pp. 187-204, 1987.

[S1] G. Sambin. *Intuitionistic formal spaces and their neighbourhood*, in "Logic Colloquium 88", Ferro, Bonotto, Valentini, Zanardo (eds), pp. 261-285, North Holland, Amsterdam, 1989.

[S3] G. Sambin. *The semantics of pretopologies*, in "Substructural Logics", P. Schroeder-Heister, K. Došen (eds), Clarendon Press, pp. 293-307, 1993.

[SV] G. Sambin, S. Valentini. *Building up a toolbox for Martin-Löf intuitionistic type theory*, in preparation.

[SVV] G. Sambin, S. Valentini, P. Virgili. *Constructive Domain Theory as a branch of Intuitionistic Pointfree Topology*, to appear in Theoretical Computer Science.

[Si] I. Sigstam. "On formal spaces and their effective presentation", Ph. D. Thesis, Uppsala University, Department of Mathematics, Report 1990:7.

[So] D. Soravia. "Numeri reali e analisi costruttiva nel contesto delle topologie formali", Tesi di Laurea, Università di Padova, 1995.

[St] M. H. Stone. *Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics*, Casopis pro pěstování matematiky a fysiky **67**, 1-25, 1937.

[vS] W. P. van Stigt. "Brouwer's Intuitionism", North Holland, 1990.

[T] A. S. Troelstra. *Intuitionistic Extensions of the Reals, part I*, Nieuw Archief voor Wiskunde, vol. 28, pp. 69-113, 1980.

[T1] A. S. Troelstra. *Intuitionistic Extensions of the Reals, part II*, in "Logic Colloquium '80", North Holland.

[TvD1] A. S. Troelstra, D. van Dalen. "Constructivism in mathematics, an introduction", vol. I, Studies in logic and the foundations of mathematics, North-Holland, 1988.

[TvD] A. S. Troelstra, D. van Dalen. "Constructivism in mathematics, an introduction", vol. II, Studies in logic and the foundations of mathematics, North-Holland, 1988.

[Ve] J. J. C. Vermeulen. "Constructive methods in functional analysis", Ph.D. Thesis, University of Sussex, November 1986.

[V] S. Vickers. "Topology via logic", Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, vol. 5, Cambridge University Press, 1989.