

# Le direzioni della ricerca logica in Italia: Teoria strutturale della dimostrazione

Sara Negri  
Department of Philosophy  
University of Helsinki  
sara.negri@helsinki.fi

## 1 Introduzione

La teoria strutturale della dimostrazione, disciplina che consiste nello studio delle dimostrazioni analitiche come strutture combinatorie, è fatta comunemente risalire alla creazione dei sistemi inferenziali di deduzione naturale e calcolo dei sequenti e alla determinazione delle loro proprietà fondamentali nel lavoro di Gentzen (1934-35). Le motivazioni alla nascita della teoria strutturale della dimostrazione sono state di carattere fondazionale e legate al problema della consistenza dell'aritmetica e dell'analisi sollevato dal programma di Hilbert; gli sviluppi, a loro volta, si sono ramificati in varie direzioni, con nuove motivazioni emergenti dall'uso della logica nella deduzione automatica, nella formalizzazione del ragionamento in domini diversi da quello matematico, e in campi come lo studio delle logiche modali, non classiche, sottostrutturali, dinamiche, condizionali, non-monotone, epistemiche.

La ricerca sulla teoria della dimostrazione in Italia, che ha avuto origine col lavoro di pionieri come Ettore Casari, con i primi contributi in italiano sulla teoria strutturale della dimostrazione a partire dagli anni 1960 (Casari 1963), Gabriele Lolli, nella cui produzione il ruolo della dimostrazione in matematica appare come parte integrante di studi storico-fondazionali (come nella recente monografia Lolli 2005), Carlo Cellucci, autore della prima monografia in italiano sull'argomento (Cellucci 1978), Pierangelo Miglioli, fondatore negli anni 1980 del gruppo di ricerca milanese,<sup>1</sup> riflette questo

---

<sup>1</sup>Si veda per una breve rassegna sulla sua eredità intellettuale la prefazione a cura di Mario Ornaghi (2003) della raccolta *in memoriam* basata sulla conferenza tenutasi a Mantova nel 2000.

sviluppo del campo e trova esponenti attivi in dipartimenti di matematica, filosofia, e informatica. Il carattere fortemente internazionale della ricerca in logica in generale, e in teoria strutturale della dimostrazione in particolare, accompagna la numerosa presenza di giovani (e “giovani”) logici di formazione italiana come attivi ricercatori in istituzioni accademiche estere. Tale caratteristica ci ha spinti ad estendere per questa rassegna la caratterizzazione di questa serie di interventi: la ricerca in logica in Italia è qui intesa non solo in senso geografico ma anche culturale, includendo la ricerca di logici di formazione italiana che pur afferenti ad istituzioni straniere mantengono contatto con l’ambiente italiano tramite le associazioni di logica e le collaborazioni scientifiche. Particolare attenzione verrà data agli sviluppi nell’arco temporale degli ultimi vent’anni.

Iniziamo questa rassegna con una sezione di carattere fondazionale che serve anche a introdurre le idee generali della teoria strutturale della dimostrazione. Proseguiamo quindi nella Sezione 3 con una discussione sui principali formalismi introdotti da Gentzen, i loro rapporti, le questioni relative al loro uso nella ricerca delle prove, le regole strutturali e l’estensione della loro ammissibilità oltre la logica pura. Nella Sezione 4 consideriamo l’emergenza di nuovi formalismi che ha accompagnato lo studio della teoria strutturale della dimostrazione per le logiche modali, non classiche, sotto-strutturali, e condizionali, e le relazioni tra questi. Accenniamo infine a nuove direzioni di ricerca in cui la teoria strutturale della dimostrazione assume un ruolo di ponte interdisciplinare, e, nella conclusione, a contributi in ambiti trattati nella rassegna su logica e informatica.

## 2 Inferenzialismo

La teoria strutturale della dimostrazione trova le sue radici filosofiche nella *proof-theoretic semantics*,<sup>2</sup> la “semantica dimostrazionistica”, la cui idea fondamentale, in opposizione alla semantica *truth-theoretic* o “vero-condizionale”, è quella che il significato delle espressioni del linguaggio logico è definita in termini di dimostrazioni anzichè di verità. La semantica vero-condizionale e quella dimostrazionistica corrispondono ai due modi principali di definire la correttezza di un argomento, modi afferenti a due diverse tradizioni, basate rispettivamente sulla teoria dei modelli e sulla teoria della

---

<sup>2</sup>Sebbene tragga le sue origini nel lavoro di Gentzen degli anni 1930, il termine “proof-theoretic semantics” è stato originalmente proposto da Schroeder-Heister alla fine degli anni 1980. Per un quadro completo dell’area si veda la voce omonima della Stanford Encyclopedia of Philosophy, <http://plato.stanford.edu/entries/proof-theoretic-semantics/>.

dimostrazione. Nella prima viene stabilita una corrispondenza tra espressioni sintattiche ed elementi di strutture formali mediante funzioni di interpretazione. A seconda delle strutture usate (algebriche, categoriali, relazionali) si ottengono tipi diversi di semantiche. Al di là delle loro specificità, il comune denominatore di questo tipo di semantica è dato dall'ordine concettuale in cui prima, in base all'interpretazione scelta viene definita (alla Tarski) la verità di un'espressione per induzione sulla sua struttura, quindi la conseguenza logica come mantenimento della verità sotto tutte le possibili interpretazioni, e infine la nozione di prova come serie di passi che mantengono la conseguenza logica a partire da verità assiomatiche. Questo è l'approccio tradizionale comune a tanti libri di testo di logica matematica, come Mendelson (1964, trad. it. 1972). La nozione di derivabilità formale risulta quindi secondaria a quella di conseguenza logica. Al contrario, nella semantica dimostrazionistica la nozione di prova è primaria e la verità definita in funzione di essa.<sup>3</sup> Questo approccio risale all'interpretazione di Brouwer-Heyting-Kolmogorov delle costanti logiche, una spiegazione che dà condizioni sufficienti per stabilire la dimostrabilità di una proposizione in termini della dimostrabilità delle sue componenti (cf. Negri e von Plato 2001, p. 5). Tali condizioni sono alla base della determinazione delle regole di introduzione nella deduzione naturale, introdotta da Gentzen nel 1933. Le regole di eliminazione, almeno nell'intenzione di Gentzen,<sup>4</sup> dovevano risultare determinate dalle regole di introduzione, e a questo scopo è stato proposto il principio di inversione di Gentzen-Prawitz, che stabilisce che le conseguenze delle regole di eliminazione debbano essere contenute nelle condizioni sufficienti per introdurre una costante logica date delle regole di introduzione. Questo principio dà comunque solo una giustificazione anziché una determinazione univoca delle regole, e per questo motivo in Negri e von Plato (2001) si è proposto un principio di inversione<sup>5</sup> che richiede che “whatever follows from the direct grounds for deriving a proposition, must follow from that proposition” (*ibidem*, p. 6).<sup>6</sup> Le regole di eliminazione ottenute tramite

<sup>3</sup>Una discussione critica sul recupero dell'interpretazione vero-funzionale nella semantica dimostrazionistica viene presentata da Tranchini (2012).

<sup>4</sup>Si veda Negri e von Plato (2015), dove le origini storiche della semantica dimostrazionistica sono fatte risalire ad alcuni passaggi inediti di Gentzen e Gödel.

<sup>5</sup>Si veda Moriconi e Tesconi (2008) per una discussione storica sui principi di inversione.

<sup>6</sup>In particolare, le conseguenze delle condizioni sufficienti per introdurre una proposizione sono contenute nelle conseguenze della proposizione. La rilettura del principio di inversione di Prawitz data da Moriconi (2012, p. 69), viene formulata invece richiedendo che le conseguenze di una proposizione secondo le rilevanti regole di eliminazione siano contenute nelle conseguenze delle condizioni sufficienti per introdurre la proposizione date dalle rilevanti regole di introduzione, una formulazione vicina al *principio duale di*

questo principio, introdotte precedentemente con altre motivazioni da vari autori nella letteratura inferenzialista,<sup>7</sup> si discostano dalle consuete regole di eliminazione e danno luogo a quella che è nota come deduzione naturale con regole *generali* di eliminazione. In particolare, le regole di eliminazione di  $\&$  e di  $\supset$  assumono la forma seguente:

$$\frac{A\&B \quad \begin{array}{c} [A, B] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \&E \qquad \frac{A \supset B \quad A \quad \begin{array}{c} [B] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \supset E$$

Notiamo che la spiegazione della regola di introduzione dell'implicazione fa riferimento alla totalità delle derivazioni. Come osservato da Dummett (1973, p. 240), per evitare una circolarità è necessario dimostrare che tutte le prove si possono ridurre ad una forma ben definita. Questo è lo scopo delle prove di *normalizzazione*. Una recente scoperta di von Plato (2008) ha evidenziato come una prima dimostrazione di normalizzazione per la deduzione naturale standard, attribuita a Dag Prawitz (1965), fosse già stata presentata in un manoscritto inedito di Gentzen. Per quanto riguarda la deduzione naturale con regole generali di eliminazione, la prima prova di normalizzazione è stata data da von Plato (2001), e una dimostrazione diretta presentata nel capitolo 8 di Negri e von Plato (2001). Il problema della normalizzazione forte, cioè la terminazione delle conversioni in qualunque ordine siano effettuate, e dell'unicità della forma normale, è stato affrontato e risolto tramite l'utilizzo di una assegnazione di lambda termini nel lavoro di Joachimski e Matthes (2003). A sua volta, Tesconi (2013) ha ottenuto una dimostrazione della normalizzazione forte in modo puramente interno alla teoria strutturale della dimostrazione, cioè senza l'utilizzo della codifica delle prove tramite lambda-termini, nel contesto di un quadro organico sui rapporti tra deduzione naturale e calcolo dei sequenti.

L'estensione della normalizzazione dalla logica intuizionistica alla logica classica è stato un problema affrontato a varie riprese sin da Prawitz (1965) mediante la restrizione al linguaggio senza disgiunzione e quantificatore esistenziale. Nel lavoro di Cellucci (1992) viene considerato il linguaggio intero in un calcolo a conclusione multipla per cui vale la normalizzazione (e in cui le derivazioni normali soddisfano la proprietà della sottoformula), una versione del teorema del *midsequent* e del teorema di Herbrand. Il calcolo originale di Gentzen per il linguaggio intero con la regola usuale di inferenza indiretta viene considerato da von Plato e Siders (2012) che dimostrano

---

*inversione*, vedi sotto.

<sup>7</sup>Si veda Dyckhoff (1987), Tennant (1998), Lopez-Escobar (1999) e von Plato (2001).

la normalizzazione tramite conversioni standard, incluse permutazioni della regola di inferenza indiretta.

Le definizioni dei calcoli formali seguono principi generali che sono condizioni necessarie perché valgano proprietà come la normalizzazione, o la non degenerazione. Il principio di inversione è stato utilizzato anche nel campo delle *logiche sottostrutturali* per ottenere un sistema di deduzione naturale per la logica lineare intuizionistica, con prove normali direttamente corrispondenti alle prove senza taglio nel calcolo dei sequenti (Negri 2002), risolvendo un problema complicato dalla compresenza, nella logica lineare, di connettivi *additivi* e *moltiplicativi*, con regole che agiscono in modo diverso sui contesti. È possibile formulare un *principio duale di inversione* richiedendo che le conseguenze di una proposizione siano contenute nelle conseguenze delle condizioni sufficienti per derivare quella proposizione (cf. Negri 2002a, p. 575). Tale principio è stato utilizzato nella conclusione di Negri e von Plato (2001) e da Negri (2002a) per generare un *calcolo uniforme* con proprietà di normalizzazione (risp. per la logica proposizionale classica e lineare) con regole generalizzate, sia di eliminazione che di introduzione, che dà come casi particolari le versioni intuizionistiche dei calcoli, la deduzione naturale, il calcolo dei sequenti, e le sue inversioni.

Un altro principio inferenzialista è quello di *riflessione definizionale*,<sup>8</sup> introdotto da Hallnäs e Schroeder-Heister negli anni 1990 nel contesto della programmazione logica, ma applicabile a tutte le espressioni per cui è possibile dare una definizione in termini di clausole definizionali, interpretate come regole di introduzione. La regola di eliminazione corrispondente è poi determinata tramite il principio di riflessione. Un’accezione diversa (ma collegabile alla precedente<sup>9</sup>) del principio di riflessione viene utilizzata nel lavoro di Sambin, Battilotti e Faggian (2000) assieme ai principi di *simmetria* e *visibilità*<sup>10</sup> per ottenere, a partire da una logica di base (da non confondere con altre “basic logic” della letteratura) muovendosi lungo tre dimensioni definite in accordo con i suddetti tre principi, logica classica, intuizionistica, quantistica, e lineare, con una dimostrazione uniforme dell’eliminazione del taglio per i calcoli così ottenuti.

La simmetria viene sfruttata anche nel lavoro di Restall e Paoli (2005) per ottenere un teorema di dualità mediante un nuovo sistema deduttivo

---

<sup>8</sup>I.e., “definitional reflection.”

<sup>9</sup>Cf. Schroeder-Heister 2013

<sup>10</sup>Detti principi si collocano nello spirito della tradizione inferenzialista volta alla determinazione di metaregole che i calcoli logici devono soddisfare. Si veda ad esempio la discussione presentata da Wansing (2002) nel contesto della teoria della dimostrazione per la logica modale.

per la *lattice logic*, ovvero il frammento con congiunzione e disgiunzione della logica classica senza distributività, e varie estensioni con negazione, in termini di *proof graphs*. Il criterio di correttezza delle prove viene qui definito in due modi equivalenti, uno induttivo, affine al metodo di costruzione delle prove in deduzione naturale, e uno globale, analogo al criterio di correttezza delle *proof nets* per la logica lineare.<sup>11</sup> In particolare, viene ottenuto un nuovo sistema di inferenza per l'*orthologic*,<sup>12</sup> nota anche come *minimal quantum logic*.

### 3 Analisi strutturale delle dimostrazioni

#### 3.1 Logica pura

Il calcolo dei sequenti, come la deduzione naturale introdotto da Gentzen, internalizza nel suo linguaggio la nozione di derivazione. Pur essendo legato da una stretta corrispondenza con la deduzione naturale,<sup>13</sup> risulta molto più adatto di quest'ultima allo studio della *prova analitica*. È da notare che la nozione di prova analitica va distinta dalla nozione classica di metodo analitico o più specificatamente di metodo analitico-sintetico, in cui per trovare una deduzione di una certa proposizione da determinate premesse si cercano premesse da cui la proposizione segue finché si arriva alle premesse date.<sup>14</sup> Secondo la nozione di prova analitica nel senso della teoria strutturale della dimostrazione, gli elementi utilizzati in una prova sono quelli già contenuti in ciò che si intende dimostrare, e uno degli obiettivi fondamentali della teoria è dimostrare che, in ciascun dominio d'indagine, le prove si possono ridurre a forma analitica. È quindi fondamentale poter eliminare le regole

---

<sup>11</sup>Si veda la rassegna di Felice Cardone in questo volume per i contributi italiani allo studio delle proof nets.

<sup>12</sup>Per un calcolo dei sequenti per l'*orthologic* si veda Battilotti (1998) e per un sistema di deduzione naturale e una soluzione del word problem uniforme per gli *ortholattices* che sfrutta il metodo di Negri e von Plato (2002) si veda Meinander (2010).

<sup>13</sup>La corrispondenza non perfetta tra il calcolo dei sequenti e la deduzione naturale, investigata nei lavori di Zucker (1974) e Pottinger (1977), diventa una corrispondenza esatta tra derivazioni normali e derivazioni senza taglio quando si adotta la derivazione naturale con regole generali di eliminazione. La traduzione isomorfa tra la deduzione naturale con regole generali di eliminazione e il calcolo dei sequenti **G0i** viene presentata nel capitolo 8 di Negri e von Plato (2001) dove si dimostra che la traduzione dà una corrispondenza tra derivazioni normali e derivazioni cut-free.

<sup>14</sup>Sul metodo analitico classico come base epistemologica della teoria della dimostrazione si veda Cellucci (2008).

del calcolo, come il *taglio*,

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C} \textit{Cut}$$

che portano ad una violazione dell’analiticità. Dalla prima formulazione dell’*Hauptsatz*, nel lavoro di Gentzen (cf. von Plato 2012), gran parte della teoria strutturale della dimostrazione è stata perciò rivolta a prove di eliminazione del taglio, con studio della procedura nei calcoli per vari sistemi formali e le conseguenze del risultato nelle applicazioni.

L’eliminazione del taglio può tuttavia avere effetti indesiderabili. Le prove senza taglio danno una rappresentazione non fedele del tipico ragionamento matematico, in cui una dimostrazione non sempre procede analiticamente ma è invece costituita da passi intermedi (lemmi ausiliari) che vengono composti tra di loro. Inoltre, come osservato da Boolos (1984), la procedura di eliminazione del taglio (in un sistema in cui il taglio è eliminabile) può notevolmente aumentare la complessità delle derivazioni; come dimostrato da Statman (1978) il calcolo proposizionale senza taglio non permette di trovare in generale prove “brevi”, ovvero la cui lunghezza è una funzione polinomiale della conclusione, ma è possibile dare soltanto un limite inferiore esponenziale. In questa ottica si colloca il filone di indagine rivolto non tanto all’eliminazione del taglio, ma alla sostituzione del taglio con una sua versione analitica, un versione del taglio ristretta alle sottoformule della conclusione per ovviare alle anomalie delle prove senza taglio (cf. D’Agostino e Mondadori 1994, D’Agostino 1999, Cellucci 2000).

A partire dagli anni 1990, in connessione con applicazioni alla deduzione automatica,<sup>15</sup> particolare attenzione è stata rivolta ai calcoli “contraction free”,<sup>16</sup> in cui non solo il taglio ma anche la *contrazione*

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow C}{A, \Gamma \Rightarrow C} \textit{Ctr}$$

è una regola ammissibile. Così, invece di partire dal calcolo originale di Gentzen LK per la logica predicativa classica si parte dal calcolo G3c, introdotto da Ketonen e successivamente sviluppato da Kleene, Curry, Dragalin, e Troelstra.<sup>17</sup>

<sup>15</sup>Uno dei primi contributi in questa direzione è Beeson (1991).

<sup>16</sup>Da non confondere con calcoli per logiche sottostrutturali, in cui la regola di contrazione non è in generale ammissibile.

<sup>17</sup>Cf. Negri e von Plato 2001 per una presentazione sistematica e una discussione storica.

L'estensione dell'approccio "contraction-free" alla logica intuizionistica ha avuto un forte sviluppo a partire dagli anni 1990. Il punto di partenza è costituito dal calcolo intuizionistico di Dragalin (1988), che, benchè contraction-free, non è immediatamente utilizzabile per una procedura di decisione per la logica intuizionistica proposizionale a causa della regola sinistra per l'implicazione. Questa, grazie alla scoperta di Hudelmaier (1992) e Dyckhoff (1992),<sup>18</sup> si puo' dividere in quattro regole distinte, a seconda della forma dell'antecedente della formula principale, dando luogo al calcolo noto come G4ip. Una dimostrazione diretta di ammissibilità delle regole strutturali per G4 è stata presentata da Dyckhoff e Negri (2000); a differenza della prova indiretta precedente la prova diretta si estende facilmente in presenza dei quantificatori e di estensioni con regole del calcolo (cf. Dyckhoff e Negri 2001). Rimandiamo per approfondimenti sulle procedure di decisione per la logica intuizionistica alla rassegna di Dyckhoff (2015) e segnaliamo i contributi a questo campo di indagine da parte di studiosi italiani: Abate e Goré (2003), Avellone, Fiorino e Moscato (2002), Corsi e Tassi (2007), Ferrari, Fiorentini, e Fiorino (2012, 2013), Sieg e Cittadini (2005).

In Corsi e Tassi (2007) viene introdotto un calcolo, IG, in cui vale la proprietà della sottoformula, la ricerca della dimostrazione termina, e tale che quando la ricerca fallisce viene prodotto un contromodello. La chiave di volta nell'impedimento della formazione di circolarità nelle derivazioni e nella permutabilità di applicazioni distinte della regola di  $R\supset$  è data dall'introduzione della regola *a fortiori*<sup>19</sup>

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow A \supset B, \Delta}$$

In una variante di IG, il calcolo SIC (per *stack-based intuitionistic calculus*), viene anche evitato il backtracking e quindi non si richiedono meta-regole per la gestione della ricerca delle dimostrazioni.

Nella teoria strutturale della dimostrazione il calcolo dei sequenti viene utilizzato non solo come strumento deduttivo, ma anche, e soprattutto, come strumento atto a stabilire proprietà di una determinata logica o nei rapporti tra calcoli o logiche. Nell'ambito della logica lineare completa con esponenziali (*full linear logic with exponentials*), il calcolo dei sequenti è stato utilizzato per dimostrare con un argomento puramente dimostrazionistico che l'insieme di formule per cui vale l'indebolimento e la contrazione

<sup>18</sup>Per una discussione sulle anticipazioni di queste idee in altri contesti (tra cui la regola di *bounded restart* di Gabbay 1991), si veda l'introduzione e la conclusione di Dyckhoff (1992).

<sup>19</sup>La regola è discussa in dettaglio in Corsi (2006).



non coincide, nemmeno a livello di equivalenza, con l'insieme delle formule esponenziali (Castellan e Piazza 1998), mentre nella logica lineare non-commutativa le uniche formule per cui valgono lo scambio, l'indebolimento, e la contrazione sono quelle equivalenti a formule della forma  $?A$  (Piazza 2001). Una immersione del calcolo di Lambek nel frammento moltiplicativo della logica lineare intuizionistica stabilita da Moot e Piazza (2001) e resa possibile da formalizzazioni uniformi in calcoli dei sequenti, permette l'applicazione della logica lineare all'analisi di fenomeni linguistici per cui il calcolo di Lambek non garantisce un'analisi adeguata. Nella stessa direzione di ricerca, utilizzo della logica lineare, specificatamente il frammento moltiplicativo della logica lineare non commutativa, si colloca il contributo di Casadio (2001), con numerose costruzioni linguistiche analizzate tramite l'uso di *proof nets* e calcolo dei sequenti.

### 3.2 Estensioni con regole corrispondenti ad assiomi

Si è generalmente ritenuto che l'analisi della struttura delle derivazioni che si ottiene con i sistemi alla Gentzen non si possa estendere oltre la logica pura. In presenza di sequenti assiomatici con cui le derivazioni possono cominciare, i tagli non si eliminano completamente dalle derivazioni, ma si possono permutare alle foglie delle derivazioni riducendosi a tagli su assiomi, risultato noto come "Hauptsatz esteso." In generale l'eliminazione completa del taglio fallisce in presenza di assiomi propri.

È tuttavia possibile mantenere un buon controllo sulla struttura delle derivazioni mediante la *conversione di assiomi in regole*, ed in modo tale che il sistema così esteso abbia tutte le regole strutturali, indebolimento, contrazione e taglio, ammissibili. Nell'estensione di un calcolo dei sequenti con regole corrispondenti ad assiomi è importante utilizzare conversioni che mantengono l'equivalenza all'interno della logica considerata. Quindi, nello studio delle teorie intuizionistiche, si convertono gli assiomi in regole utilizzando soltanto le regole invertibili del calcolo intuizionistico G3im. A livello proposizionale ciò identifica la classe di *assiomi regolari* (Negri e von Plato 1998, 2001). In presenza di quantificatori, un'ampia classe di assiomi costruttivamente convertibili in regole è data dai cosiddetti *assiomi geometrici* (Negri 2003).

Tra le applicazioni di questa metodologia, estensivamente presentata nel libro di Negri e von Plato (2011), citiamo la conservatività della logica predicativa con uguaglianza sulla logica pura, i *word problems* per le teorie dell'ordine e dei reticoli, la linearizzazione di un ordine parziale (teorema di Szpilrajn), la trivializzazione della versione al primo ordine del teorema di

Barr (Negri 2003), e un metodo di decisione per le formule quantificate positivamente della teoria al primo ordine delle algebre di Heyting linearmente ordinate (Dyckhoff e Negri 2006).

Una delle applicazioni più notevoli è data dallo studio dimostrazionistico della geometria affine e proiettiva a partire da una assiomatizzazione basata su costruzioni (come quella della linea che connette due punti, o del punto ottenuto dall'intersezione di due linee) e predicati che esprimono le relazioni tra gli oggetti costruiti (incidenza, parallelismo, appartenenza, uguaglianza, disuguaglianza, etc.) e che giocano il ruolo di formule atomiche nella conversione di assiomi in regole di inferenza. Il problema di decisione della geometria affine e proiettiva viene affrontato mediante un sistema di deduzione naturale a conclusione multipla da von Plato (2010).<sup>20</sup> Il metodo di decisione trovato per formule universali è basato su un risultato centrale di analisi combinatoria delle derivazioni con regole geometriche, detto *proprietà del sottotermine*: gli oggetti che compaiono in una derivazione possono essere limitati ad oggetti noti dalle assunzioni e dai casi della conclusione<sup>21</sup>. Come applicazione del metodo di decisione viene data una dimostrazione di non derivabilità del quinto postulato di Euclide nel sistema senza la regola corrispondente all'unicità della costruzione di una parallela per un punto ad una retta data.

Basandosi su queste metodologie, ma anche su studi di ricerca filologica, Pierluigi Graziani ha sviluppato a partire dalla tesi di dottorato e in pubblicazioni successive (tra cui citiamo Graziani 2014), uno studio interpretativo della matematica antica e della geometria di Euclide in particolare.

Per quanto sia possibile utilizzare la deduzione naturale come base per le estensioni della logica al primo ordine, il calcolo dei sequenti è il formalismo deduttivo che offre il campo d'azione più vasto. È possibile andare oltre la classe delle estensioni geometriche ed ottenere calcoli con tutte le proprietà strutturali di G3c per tutte le teorie con assiomi che non contengono implicazioni, negazioni, o quantificatori universali nella parte negativa se si ammette una generalizzazione dello schema di regole da aggiungere al calcolo di base (Negri 2014). È anche possibile trattare assiomi arbitrari del primo ordine ottenendo sistemi classicamente (e talvolta intuizionisticamente) equivalenti di regole geometriche mediante la procedura di *estensione conservativa semidefinizionale* del linguaggio (Dyckhoff e Negri 2015).

---

<sup>20</sup>Si veda anche il capitolo 10 di Negri e von Plato (2011).

<sup>21</sup>La soluzione vale solamente per derivazioni nel frammento con le pure regole geometriche, mentre per quanto riguarda la parte che include anche le regole logiche il risultato è negativo, come noto già dal lavoro di Tarski (1949).

Calcoli di sequenti e ipersequenti estesi con assiomi convertibili in regole sono state considerate da Ciabattoni, Galatos, e Terui (2008) dove viene presentata una gerarchia di assiomi del primo ordine e identificato il punto in cui la procedura produce calcoli equivalenti in cui vale l'eliminazione del taglio, a sua volta stabilita semanticamente. Una analoga estensione per i calcoli a display, con casi di studio forniti da estensioni della logica bi-intuizionistica e della logica temporale, viene presentata da Ciabattoni e Ramanayake (2013). Ciabattoni e Spindler (2014) contiene una presentazione panoramica di un metodo diventato programmatico per una serie di lavori sullo sviluppo di metodi analitici per le logiche fuzzy, intermedie, sottostrutturali, e paraconsistenti; l'articolo presenta anche la descrizione di una implementazione per la generazione automatica di calcoli analitici per una vasta classe di logiche.

## 4 La logica modale e l'emergenza di nuovi formalismi deduttivi

La letteratura sulla logica modale è stata segnata fino ad anni recenti da un diffuso scetticismo sulla possibilità di sviluppare una sua adeguata teoria della dimostrazione. Tale attitudine, in parte giustificata dallo scarso sviluppo di calcoli tradizionali, è stata accompagnata da prese di posizione volte ad affermare la superiorità dei metodi modellistici su quelli dimostrazionistici. Addirittura per sistemi modali di base, le difficoltà nel formulare sistemi di deduzione naturale e di calcolo dei sequenti sono state risolte solo parzialmente disattendendo le consuete richieste di analiticità e normalizzabilità. Un ulteriore ostacolo nello sviluppo di una soddisfacente teoria della dimostrazione per la logica modale è stato la diffusa falsa credenza che il *teorema di deduzione*, un ponte essenziale nella traduzione tra sistemi assiomatici e sistemi inferenziali come la deduzione naturale e il calcolo dei sequenti, fallisca nella logica modale.<sup>22</sup>

Oltre a K, S4 e (parzialmente) S5<sup>23</sup>, una logica modale che ha ottenuto un trattamento analitico mediante calcoli tradizionali dei sequenti è la *logica deontica*: come estensione della logica normale di base viene presentata in un sistema con contrazione implicita nel trattamento dei contesti come insiemi

<sup>22</sup>Per una discussione storica sul teorema di deduzione in logica modale, sui motivi che hanno indotto a mettere in dubbio la sua validità, e per la dimostrazione che non solo vale, ma che neppure può fallire, si veda Hakli e Negri (2012).

<sup>23</sup>Cf. Negri 2005, 2011 per il problematico sviluppo di calcoli per S5 che ammettano l'eliminazione del taglio e la proprietà della sottoformula.

da Valentini (1993); come sistema normale o non normale viene formulata come varianti di calcoli di stile G3 da Orlandelli (2014). Un'altra ben nota logica modale che permette (non senza difficoltà) un trattamento in stile di calcolo dei sequenti e di deduzione naturale è la logica modale della dimostrabilità GL<sup>24</sup>. Una logica modale strettamente legata a GL, con un calcolo che permette una dimostrazione di completezza e quindi indirettamente di chiusura per il taglio, ma una problematica eliminazione sintattica del taglio, è la logica della dimostrabilità di Grzegorzcyk.<sup>25</sup>

L'inadeguatezza dei tradizionali sistemi alla Gentzen nel trattamento della logica modale e di altre logiche non classiche è stato uno dei principali stimoli allo sviluppo di calcoli alternativi, in particolare di sistemi inferenziali che internalizzano la semantica delle costanti logiche, in modo implicito, attraverso un linguaggio più strutturato, o esplicito, attraverso l'introduzione di nuovi elementi sintattici che rappresentano le strutture semantiche. I principali formalismi di questo tipo sono i calcoli a display, i calcoli di ipersequenti, e i calcoli etichettati, che procediamo ad illustrare.

#### 4.1 Calcoli a display e ipersequenti

I calcoli a display sono giustificati dalla corrispondenza di Galois insita nella spiegazione delle regole logiche. Per un esempio in un contesto di logica temporale, se  $\blacklozenge$  è la modalità aleatica di possibilità nel passato e  $\square$  è la modalità di necessità nel futuro,<sup>26</sup> si può osservare che questi formano una coppia residuale, ovvero  $\blacklozenge A \Rightarrow B$  è valido se e solo se  $A \Rightarrow \square B$  lo è. L'idea di base della *display logic*, introdotta da Belnap (1982), è lo sfruttamento di tale corrispondenza e l'estensione ad essa collegata di un insieme di “connettivi strutturali.” Così, mentre nei sistemi standard di calcolo dei sequenti abbiamo solo un connettivo strutturale, ovvero la virgola multivalente, nei calcoli

<sup>24</sup>Per la completezza semantica si veda Sambin e Valentini (1982) e Avron (1984), e per la normalizzazione del calcolo di deduzione naturale Bellin (1985); l'eliminazione sintattica del taglio è invece stata, dopo l'approccio di Valentini (1983), oggetto di rinnovata indagine in Goré e Ramanayake (2008). Una dimostrazione semplice e diretta di eliminazione sintattica del taglio per un calcolo etichettato per GL è stata presentata da Negri (2005), e ottenuta tramite completezza per una versione che dà automaticamente la decidibilità in Negri (2014a) mediante la terminazione di un calcolo che genera simultaneamente prove o contromodelli per logiche non classiche. Un calcolo di ipersequenti ad albero (*tree hypersequents*) per GL con eliminazione del taglio è stato formulato da Poggiolesi (2009).

<sup>25</sup>L'immersione fedele della logica intuizionistica nella logica di Grzegorzcyk, stabilita con metodi semantici dai risultati di Tarski e McKinsey, è stata dimostrata in modo puramente sintattico, con una dimostrazione per induzione sull'altezza delle derivazioni, da Dyckhoff e Negri (2013).

<sup>26</sup>Utilizziamo i simboli usati nei calcoli a display anzichè quelli di Prior  $P$  e  $G$  per le corrispondenti modalità temporali.

a display ve ne sono molti, sia unari che binari. Ne segue un insieme più ampio di regole rispetto a quelle consuete del calcolo dei sequenti, in particolare di regole che governano i connettivi strutturali e la loro interazione con quelli logici. Ad esempio, nel caso temporale sopra citato, una regola della forma  $\blacklozenge A \Rightarrow B \parallel A \Rightarrow \square B$ , sebbene valida, violerebbe la proprietà della sottoformula oltre ad essere troppo debole. Mediante il connettivo strutturale  $\bullet$  interpretato come  $\blacklozenge$  nell'antecedente e come  $\square$  nel succedente, si possono ottenere le seguenti regole consone ai requisiti del calcolo

$$\frac{\bullet A \Rightarrow X}{\blacklozenge A \Rightarrow X} L\blacklozenge \quad \frac{X \Rightarrow A}{\bullet X \Rightarrow \blacklozenge A} R\blacklozenge$$

$$\frac{A \Rightarrow X}{\square A \Rightarrow \bullet X} L\square \quad \frac{X \Rightarrow \bullet A}{X \Rightarrow \square A} R\square$$

Diversi sistemi a display sono ottenuti in modo modulare cambiando solo la parte strutturale e lasciando immutato il nucleo logico. Wansing (2002) dà un'introduzione ai calcoli a display per la logica modale e una sintesi critica di approcci alternativi<sup>27</sup> rapportata ai requisiti di potere espressivo, modularità, analiticità, etc. Il potere espressivo del formalismo a display è dimostrato dal calcolo a display per la logica epistemica dinamica di Frittella et al. (2014).

Tra gli approcci alternativi con una lunga tradizione vi sono gli ipersequenti.<sup>28</sup> In termini approssimativi, gli ipersequenti possono essere interpretati come disgiunzioni di sequenti; il potere espressivo aggiuntivo è dato da regole che permettono di combinare molteplici sequenti simultaneamente, che li rende particolarmente adatti ad esprimere proprietà disgiuntive. Ad esempio, la linearità viene espressa dalla *regola di comunicazione* (Avron 1996, p. 9)

$$\frac{G \mid \Delta_1, \Gamma_1 \Rightarrow \Pi_1 \quad G \mid \Delta_2, \Gamma_1 \Rightarrow \Pi_2}{G \mid \Delta_2, \Gamma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mid \Delta_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Pi_2}$$

che permette di catturare con gli ipersequenti la logica di Gödel-Dummett. Gli ipersequenti hanno grande flessibilità nel presentare ampie famiglie di logiche non classiche, come le logiche multi-valori (Baaz, Ciabattoni e Montagna 2004) e possono essere generati in modo automatico dalla semantica nel caso delle logiche caratterizzate da matrici non-deterministiche (Avron e Konikowska 2005). L'analiticità di questi calcoli non è in generale sufficiente per applicarli direttamente a procedure di decisione a causa della presenza di regole strutturali interne ed esterne, solitamente non eliminabili. Una

<sup>27</sup>Tra cui ricordiamo i 2-sequents di Martini e Masini (1996).

<sup>28</sup>Per un'introduzione generale al metodo si veda Avron (1996) e il capitolo 4 di Paoli (2002).

collocazione particolare in questo senso assume quindi lo studio di Bova e Montagna (2008) che sfrutta una formulazione ad ipersequenti con regole invertibili per ottenere una procedura di decisione per la *basic logic* di Hájek, un tipo di logica *fuzzy*, ovvero a valori di verità nell'intervallo  $[0, 1]$ . Nello sviluppo di calcoli analitici per le logiche fuzzy e le logiche a infiniti valori il punto di partenza è l'inquadratura di queste logiche nel panorama più generale delle logiche substrutturali caratterizzate dalla loro semantica algebrica, dove le strutture di base (più generali) sono reticoli residuati, a cui si aggiungono progressivamente varie proprietà, prima fra tutte quella di pre-linearità proprietà caratteristica delle logiche fuzzy. Lo sviluppo di calcoli analitici per la logica a infiniti valori di Lukasiewicz e per la logica Prodotto, due delle tre logiche fuzzy fondamentali,<sup>29</sup> viene presentato in Metcalfe, Olivetti, e Gabbay (2005, 2004). Ancora mediante ipersequenti vengono studiate da Metcalfe e Montagna (2007) logiche fuzzy *sottostrutturali*, in cui non valgono le regole strutturali di indebolimento e/o contrazione. In questo lavoro viene stabilito un teorema di completezza rispetto ad una semantica data da un'algebra di opportune funzioni binarie a valori nell'intervallo  $[0, 1]$  (risultato detto *standard completeness*). È da notare che l'analiticità del calcolo, ovvero l'eliminazione del taglio, viene stabilita seguendo un percorso analogo a quello dei calcoli G3, con riduzione degli ipersequenti iniziali a istanze atomiche, proprietà di inversione delle regole, e doppia induzione su complessità della formula di taglio e altezza delle derivazioni delle premesse del taglio. Meno diretta è la dimostrazione di completezza, che passa attraverso la prova di completezza delle estensioni dei calcoli con una regola di *densità* e quindi l'eliminazione della regola, un risultato a sua volta ottenuto come corollario dell'eliminazione del taglio. Un altro metodo di eliminazione della regola di *densità* viene presentato nel lavoro di Ciabattoni e Metcalfe (2008). Questo e altri risultati sono presentati in modo sintetico nella recente monografia sulla teoria della dimostrazione per le logiche fuzzy di Metcalfe, Olivetti, e Gabbay (2009).

Mentre gli ipersequenti sono adatti a rappresentare logiche non classiche con condizioni di linearità nella loro semantica, non si prestano invece direttamente allo studio delle logiche modali, e necessitano di un arricchimento della loro sintassi, come nei *tree-sequents* presentati da Kashima (1994) per la logica temporale e da Cerrato (1996) per vari sistemi di logica modale, i *tree hypersequents* sviluppati da Poggiolesi (2010) per varie logiche modali proposizionali, e i sistemi di “nested sequents” che impiegano il metodo di

---

<sup>29</sup>La terza è la logica di Gödel-Dummett, la cui teoria della dimostrazione era già piuttosto sviluppata.

deep inference (Stewart e Stouppa 2005, Stouppa 2007, Brünnler 2009, Guglielmi 2007). Torneremo a questi sistemi nella prossima sezione in merito alla discussione sui rapporti tra vari calcoli.

## 4.2 Calcoli etichettati

Contrariamente agli ipersequenti e ai calcoli a display, i sistemi “etichettati” (o *labelled*) hanno un nucleo comune di regole logiche e regole strutturali ammissibili.<sup>30</sup> I calcoli etichettati si avvalgono difatti della grande unificazione concettuale per lo studio delle logiche modali e non classiche resa possibile dall’introduzione della semantica di Kripke, detta anche semantica relazionale.<sup>31</sup> La modularità di questa semantica, basata su un insieme di mondi possibili collegati tra loro da una relazione di accessibilità, viene infatti sfruttata nei calcoli etichettati facendo corrispondere a ciascuna proprietà delle strutture semantiche particolari regole del calcolo. Sistemi diversi sono ottenuti variando la parte modulare di “regole matematiche”, cioè le regole che esprimono le proprietà delle strutture semantiche caratteristiche (come la proprietà riflessiva, transitiva, simmetrica, etc.). Una eccezione è data dalle logiche come GL e Grz, che sono caratterizzate da proprietà semantiche non esprimibili al primo ordine ma che tuttavia possono essere internalizzate tramite una modificazione delle regole standard per la modalità (Negri 2005, Dyckhoff e Negri 2013).

L’idea dell’internalizzazione della semantica nei calcoli inferenziali, che si può far risalire fino alla tesi di Kanger (1957), è stata sviluppata in varie forme: in sistemi di tableaux (Fitting 1983, Catach 1991, Nerode 1991, Goré 1998, Massacci 2000, Orłowska e Golińska Pilarek 2011), di deduzione naturale (Fitch 1966, Simpson 1994, Basin, Matthews, Viganó 1998), di sequenti (Mints 1997, Viganó 2000, Kushida e Okada 2003, Castellini e Smaill 2002, Castellini 2005), e nella *hybrid logic* (Blackburn 2000). I *Labelled Deductive Systems* (Gabbay 1996, Russo 1995) utilizzano invece principalmente l’internalizzazione di una semantica algebrica in una presentazione in stile di deduzione naturale. L’inferenza etichettata è anche alla base di sistemi di deduzione automatica per per logiche non classiche, come il sistema

---

<sup>30</sup>Qui “logico” e “strutturale” è inteso nel senso originale di Gentzen, con il primo aggettivo riferito alle regole per le costanti logiche, il secondo alle regole di indebolimento, contrazione, e taglio.

<sup>31</sup>Si veda Kripke (1963) per una prima presentazione sistematica e Copeland (2002) per una rassegna storica sui precursori della semantica dei mondi possibili.

LoTREC (Fariñas del Cerro et al. 2001).<sup>32</sup>

Il metodo dei calcoli dei sequenti etichettati, sviluppato a partire da Negri (2005) è il risultato della sintesi di due azioni: la prima consiste nel formulare le clausole di verità di un connettivo/modalità come regole di un calcolo in un linguaggio opportunamente esteso con variabili per mondi possibili e simboli relazionali. Questa formulazione in regole segue i principi dell'inferenzialismo discussi nella Sezione 2. Ad esempio da

$$x \Vdash \Box A \text{ se e solo se per ogni } y, \text{ da } xRy \text{ segue } y \Vdash A$$

si ottiene la regola

$$\frac{xRy, \Gamma \Rightarrow \Delta, y : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, x : \Box A} R\Box$$

con la condizione  $y \notin \Gamma, \Delta$ . Dalla regola destra e tramite il principio di inversione,<sup>33</sup> tenendo anche conto dei principi di disegno di un calcolo di stile G3, si ottiene la regola sinistra:

$$\frac{y : A, x : \Box A, xRy, \Gamma \Rightarrow \Delta}{x : \Box A, xRy, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\Box$$

Il secondo passo consiste nell'aggiungere al calcolo di base così ottenuto ed in modo modulare le regole che corrispondono alle proprietà caratterizzanti della relazione di accessibilità nella semantica di Kripke dei vari sistemi logici, una caratteristica comune agli approcci ibridi ed etichettati. Qui questa parte della procedura segue la metodologia generale della conversione di assiomi in regole di inferenza (sviluppata a partire da Negri 1999 e Negri e von Plato 1998) e copre, come dimostrato da Dyckhoff e Negri (2014) qualsiasi condizione esprimibile al primo ordine, ma non solo.<sup>34</sup> Ad esempio, le regole da aggiungere al sistema di base per ottenere un sistema per T, S4, S5 sono (opportune combinazioni) delle regole corrispondenti alle proprietà riflessiva e transitiva

$$\frac{xRx, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} Ref \quad \frac{xRz, xRy, yRz, \Gamma \Rightarrow \Delta}{xRy, yRz, \Gamma \Rightarrow \Delta} Trans$$

<sup>32</sup>Per una dettagliata presentazione comparativa di vari sistemi di deduzione modale si veda Indrzejczak (2010).

<sup>33</sup>Per una discussione su come i calcoli etichettati rispondano alla sfida inferenzialista di estendere la semantica dimostrazionistica alle logiche non classiche, si veda Read (2014).

<sup>34</sup>Condizioni come la Noetherianità, rilevanti al trattamento delle logiche della dimostrabilità, sono pure coperte da una opportuna implementazione del metodo, come dettagliato in Negri (2005) e Dyckhoff e Negri (2013).



e per la logica deontica D la regola corrispondente all’assioma di serialità  $\forall x\exists y.xRy$

$$\frac{xRy, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \text{Ser}$$

dove  $y \notin \Gamma, \Delta$ .

I calcoli risultanti godono, oltre all’eliminazione del taglio, di forti proprietà strutturali come l’invertibilità che mantiene l’altezza della derivazione per tutte le regole, e l’ammissibilità delle regole strutturali di indebolimento e contrazione.<sup>35</sup> Sebbene i calcoli etichettati non abbiano in generale una piena proprietà della sottoformula, l’analiticità è garantita dall’ammissibilità delle regole strutturali assieme ad una proprietà del sottotermino (“subterm property”): tutti i termini (etichette) nella derivazione sono o variabili proprie, introdotte da regole che analizzano, rimuovendola, una modalità, o termini presenti nella conclusione. L’analiticità combinata con l’uniformità dei calcoli ottenuti fornisce uno strumento di valore per tutti quei risultati che coinvolgono l’interazione di diverse logiche, come l’immersione della logica intuizionistica in S4 e delle *logiche intermedie* nelle corrispondenti *compagne modali* (cf. Dyckhoff e Negri 2012) o nell’identificazione del motivo preciso all’origine di alcuni paradossi di collasso modale (cf. Maffezioli, Naibo, e Negri 2013, Maffezioli e Naibo 2013).

Come nel *desideratum* espresso da Simpson (1994), questi calcoli possono essere direttamente applicati per stabilire risultati di decidibilità tramite terminazione per la ricerca di derivazioni di altezza minimale, come fatto in Negri (2005) per le logiche modali di base e con una opportuna procedura di saturazione per la logica intuizionistica (Negri 2014a) e per logiche modali intuizionistiche (Garg, Genovese e Negri 2012). La prova di decidibilità ottenuta con questo approccio è tale da fornire per qualunque sequente, e con un limite superiore che è funzione esponenziale della sua complessità, una derivazione nel calcolo, o un contromodello direttamente estratto da un ramo di una ricerca fallita di una derivazione. Questo segue da una dimostrazione di completezza più vicina alla completezza originale stabilita da Kripke (1963) che alla completezza alla Henkin successivamente divenuta dalla fine degli anni 1960 lo standard anche per la logica modale (cf. Negri 2009). Il metodo di ricerca delle dimostrazioni in un calcolo di base etichettato dà anche un’euristica per determinare le proprietà relazionali corrispondenti ad

---

<sup>35</sup>È da osservare che la premessa di  $L\Box$  non è meno complessa della conclusione, per cui è lecito chiedersi se la regola può essere formulata omettendo la formula  $x : \Box A$  senza infrangere la completezza del calcolo. Alla questione, affrontata da Minari (2013), viene data risposta negativa tranne per le logiche K e D e limitatamente a sequenti con parte relazionale con struttura ad albero.

assiomi modali, come esemplificato nel caso di logiche multimodali in Hakli e Negri (2011) e in Maffezioli, Naibo e Negri (2014). D'altra parte, risultati di non-corrispondenza (come la mancanza di un assioma modale corrispondente all'irriflessività) possono essere stabiliti come risultati di conservatività con una semplice analisi delle prove (Negri 2005).

I calcoli etichettati offrono, mediante un'estensione conservativa della sintassi delle logiche modali e non classiche, la possibilità di un'analisi delle prove metodologicamente uniforme per vaste classi di logiche. Il potere espressivo è finora il più comprensivo nel panorama degli approcci alternativi alle logiche filosofiche e non classiche e copre, oltre alle già citate logiche modali standard e alle logiche della dimostrabilità GL e Grz, le logiche intermedie<sup>36</sup> e le loro compagne modali (Dyckhoff e Negri 2012), le logiche modali classiche (Gilbert e Maffezioli 2015), logiche temporali (Borretti e Negri 2009, 2010), le logiche modali quantificate (Negri e von Plato 2011, Orlandelli 2014a), alcune logiche di interazione sociale (Hakli e Negri 2008, 2011), la combinazione della parte finitaria di PDL con una dimensione epistemica (Maffezioli e Naibo 2013), le logiche modali epistemiche come la *logica della conoscibilità* o "knowability logic" (Maffezioli, Naibo, e Negri 2013). I calcoli etichettati permettono anche, tramite la parametricità sulle condizioni sui domini delle variabili quantificate, di estendere in modo modulare un calcolo modale di base al primo ordine mediante regole che corrispondono alla formula di Barcan e alla sua inversa; il risultato è un calcolo completo (si veda il capitolo 11 di Negri e von Plato 2011 e Orlandelli 2014a) che quindi risolve il problema dell'incompletezza del corrispondente sistema assiomatico (Cresswell 1995).

### 4.3 Calcoli per logiche condizionali e non-monotone

I calcoli dei sequenti etichettati stile G3 si sono dimostrati particolarmente prolifici nello studio delle logiche condizionali e di sistemi affini, logiche che trovano applicazioni nell'ambito della rappresentazione della conoscenza e dell'intelligenza artificiale in quanto permettono una trattazione formale dei controfattuali, della revisione delle credenze, e del ragionamento non-monotono. Mediante l'utilizzo di una parte relazionale basata sulla semantica delle funzioni di selezione (introdotta da Stalnaker 1968), calcoli di sequenti etichettati per le logiche condizionali di base (CK e sue estensioni) con buone proprietà computazionali, e complessità ottimale, sono stati intro-

---

<sup>36</sup>Un calcolo *non* etichettato e una procedura di decisione per una logica intermedia, la logica di Jankov, detta anche logica del terzo escluso debole, viene presentato da Corsi (2008).

dotti da Olivetti et al. (2007) seguendo la metodologia generale introdotta da Negri (2005) per ottenere calcoli etichettati con forti proprietà strutturali. Calcoli annidati (nested) per queste stesse logiche sono presentati in Alenda et al. (2013). La prova di eliminazione del taglio in questi sistemi presenta la particolarità di richiedere la prova simultanea dell’ammissibilità di altre proprietà inferenziali. Calcoli etichettati di tableaux, anziché di sequenti, sono invece presentati da Giordano et al. (2009) per logiche condizionali basate sulla semantica preferenziale, con la specificità data dell’introduzione di modalità indicizzate per catturare la semantica dei mondi minimali. Nel caso delle logiche non-monotone di Kraus-Lehman-Magidor, trattandosi essenzialmente di logiche condizionali piatte, cioè senza condizionali annidati, sono possibili calcoli più tradizionali, che non richiedono l’uso di etichette o di altra struttura extra e con buone proprietà computazionali (cf. Giordano et al. 2009a). La maggior parte dei calcoli per le logiche condizionali sopra menzionati non è solo stato oggetto di studio teorico, ma anche la base di implementazioni che hanno dato origine ai primi sistemi di dimostrazione automatica per le logiche corrispondenti (cf. Olivetti e Pozzato 2008, 2014).

In una direzione di ricerca più applicativa, calcoli di sequenti per le principali logiche non-monotone sono stati sviluppati da Bonatti e Olivetti (2002). In particolare sono stati studiati calcoli analitici per *circumscription*, per la logica dei *default* e per la logica *autoepistemica*. I calcoli studiati per ciascuna logica hanno la specificità di combinare un calcolo principale dei sequenti per la validità e un calcolo ausiliario di “anti-sequenti” per la non-validità. Il secondo calcolo è utilizzato per provare o refutare assunzioni di provabilità utilizzate nel calcolo principale.

#### 4.4 Traduzioni tra calcoli

Data la moltitudine di formalismi deduttivi per le logiche non classiche, è stata sempre più sentita negli ultimi anni la necessità di stabilire risultati che permettano di paragonarne ad alto livello le proprietà e il potere espressivo e di trasferire risultati sulle proprietà strutturali da un formalismo ad un altro.

Una utile sintesi di rapporti tra vari calcoli per le logiche modali proposizionali normali viene presentata alle pagine 116 e 206 di Poggiolini (2010). I rapporti sono specificati da traduzioni che permettono di importare la derivabilità da un formalismo all’altro.<sup>37</sup> I calcoli etichettati sopra discussi

---

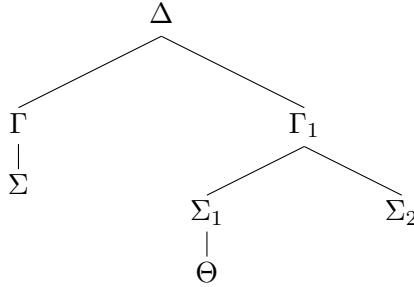
<sup>37</sup>Per riferimenti alla letteratura sulle traduzioni tra vari formalismi si veda anche la sezione 5.2 di Negri (2011) e l’introduzione di Ramanayake (2014).

sono chiamati da Poggiolesi “internalized forcing sequent calculi” e si pone la questione se questi ultimi possono essere interpretati in altri calcoli.

Il seguente esempio (tratto da Boretti 2009) è illustrativo dell’interpretazione degli ipersequenti ad albero e dei sequenti annidati in un calcolo etichettato e legittima la congettura di una interpretabilità valida in generale.

<i>Tree-hypersequents</i>	<i>Deep sequent systems</i>
$\Delta/(\Gamma/\Sigma); (\Gamma_1/(\Sigma_1/\Theta)); \Sigma_2$	$\Delta, [\Gamma, [\Sigma]], [\Gamma_1, [\Sigma_1, [\Theta]]], [\Sigma_2]$

Entrambi corrispondono alla struttura ad albero seguente in cui la radice è etichettata dal mondo attuale e le dipendenze rappresentano le relazioni di accessibilità tra mondi



La congettura è stata confermata da Goré e Ramanayake (2012) mediante una immersione del calcolo annidato e degli ipersequenti ad albero in una sottoclasse del calcolo etichettato in cui la struttura relazionale è limitata ad alberi (*labelled tree sequent calculi*). Un risultato simile è stato dimostrato per il calcolo dei sequenti annidato e i tableaux etichettati (Fitting 2012), giungendo alla conclusione che “modal nested sequents and prefixed modal tableaux are notational variants of each other” e che i calcoli dei sequenti etichettati di Negri (2005) “are able to handle modal logics for which no prefixed system exists”.

Ramanayake (2014) distingue una traduzione da una immersione (*embedding*), intesa in senso più forte di quello di una traduzione fedele: mentre una traduzione si definisce tra due calcoli esistenti, l’immersione crea un calcolo in un formalismo a partire da un altro; in questo senso Ramanayake presenta un’immersione degli ipersequenti nei calcoli a display.

## 5 Direzioni di ricerca interdisciplinari

La teoria strutturale della dimostrazione è stata negli ultimissimi anni protagonista di nuove direzioni di ricerca interdisciplinare in cui la logica gioca un ruolo fondamentale.

Abrusci et al. (2013) utilizzano la logica lineare, ed in particolare l'attenzione da essa rivolta alla polarità degli operatori logici, per l'analisi del sillogismo aristotelico e per lo studio dei processi cognitivi, affiancando lo studio teorico ad uno studio sperimentale che si avvale di tecniche di elettroencefalografia.

Il linguaggio formale *ZSyntax* sviluppato da Boniolo et al. (2010) nella direzione delle applicazioni alla biologia molecolare, è stato accompagnato da un calcolo rivolto, più in generale, allo studio di tutti quei processi che coinvolgono una interazione dipendente da contesto dapprima nel lavoro di D'Agostino et al. (2013) mediante un calcolo dei sequenti e di proof nets e in un lavoro successivo (D'Agostino, Piazza, e Pulcini 2014) tramite sequenti di livello multiplo, una variante del calcolo dei sequenti tradizionale che internalizza in ciascun sequente la struttura ad albero dei processi non monotoni.

Nel campo delle applicazioni della teoria della dimostrazione all'epistemologia formale, lo studio della *common knowledge*<sup>38</sup> costituisce uno dei problemi più stimolanti a causa del suo carattere intrinsecamente infinitario. Sono stati proposti vari sistemi che soddisfano una eliminazione del taglio sintattica, ma con regole infinitarie (Brünnler e Studer 2009) o con varie forme di finitizzazione basate su limitazioni al numero di premesse nella regola infinitaria (Jäger, Kretz e Studer 2007) o mediante l'utilizzo di una definizione dell'operatore di common knowledge tramite la nozione di punto fisso (*fixed point*), come in Alberucci e Jäger (2005), in questi ultimi due casi al prezzo di una mancata eliminazione sintattica del taglio. L'incompletezza dell'estensione modale del calcolo infinitario ha l'effetto di rendere non derivabile uno degli assiomi della common knowledge. Minari (2012) discute questo problema proponendo calcoli alternativi (tutti del formato dei calcoli dei sequenti alla Tait, ovvero *one sided*), due con eliminazione del taglio ma incompleti, e uno completo ma con taglio non eliminabile, e presentando una semantica di Kripke generalizzata che permette di recuperare la completezza.

---

<sup>38</sup>Una proposizione  $A$  è common knowledge tra un gruppo di agenti se ognuno conosce  $A$ , ognuno conosce che ognuno conosce  $A$ , e così via.

Tra teoria strutturale della dimostrazione e teoria astratta della complessità si collocano infine i lavori di D’Agostino et al. (2013) e di D’Agostino (2014) che affrontano la questione (“approximation problem”) di definire una gerarchia di sistemi logici rispondenti alle capacità inferenziali di agenti con risorse limitate e che approssimano indefinitamente una data logica. Il problema è affrontato e risolto in vari modi per la logica proposizionale classica mediante sistemi di deduzione naturale con formule etichettate dai valori booleani di verità, progressivamente estesi tramite applicazioni del taglio controllate dalla loro altezza.

## 6 Conclusioni

Seguendo la demarcazione fatta da Troelstra e Schwichtenberg (2000) sui due campi principali di teoria della dimostrazione, la teoria strutturale della dimostrazione si distingue per metodi e oggetti di indagine dalla *teoria della dimostrazione interpretazionale* (i.e. “interpretational proof theory”) che è rivolta allo studio di interpretazioni tra teorie utilizzando spesso mezzi semantici e che quindi non abbiamo discusso in questa rassegna.<sup>39</sup> Non abbiamo neppure discusso lavori che utilizzano metodi algebrici per ottenere calcoli logici e stabilirne proprietà strutturali.<sup>40</sup> Visto lo spazio limitato e la vastità del campo, si è anche tenuto conto della rassegna, che in parte si sovrappone a tematiche di teoria strutturale della dimostrazione, di Felice Cardone in questo stesso volume, in particolare per quanto riguarda la programmazione logica,<sup>41</sup> la teoria dei tipi, la logica lineare, e il lambda-calcolo. Come eccezione a quest’ultima omissione tematica, citiamo una

<sup>39</sup>Alla teoria della dimostrazione ma non propriamente alla teoria *strutturale* della dimostrazione appartengono ad esempio lavori come Cantini e Crosilla (2012), qui non discussi, sui fondamenti costruttivi della teoria degli insiemi.

<sup>40</sup>Cf. e.g. Ciabattoni, Galatos, e Terui (2012); Bezhanišvili e Ghilardi (2014)

<sup>41</sup>Qui accenniamo soltanto al tentativo di sviluppare dei metodi di prova analitica basata sul modello della programmazione logica e noto come “goal-directed proof-theory” (Gabbay e Olivetti 1998, 2000). I sistemi di prova proposti generalizzano il meccanismo operativo di ricerca di prove della programmazione logica basato sulla regola della risoluzione lineare (o “backward chaining”) per svariate famiglie di logiche (modali, sub-strutturali, intermedie), in un modo simile alla nozione delle *Prove Uniformi* proposta da Miller et al. (1991). A differenza di questi ultimi, i metodi proposti sono concepiti in modo autonomo e non sono ottenuti come raffinamenti di calcoli di sequenti preesistenti. Tutti i sistemi di prova studiati godono della proprietà di ammissibilità del taglio. I sistemi di prova proposti hanno la limitazione di poter trattare (almeno direttamente) solo un linguaggio limitato, quello delle formule ereditarie di Harrop. Inoltre la terminazione della ricerca di prove, anche se non è l’obiettivo principale dei metodi studiati, non è garantita e richiede dei meccanismi addizionali, non sempre ovvii.

serie di articoli (Minari 2004, 2005, 2007, 2009) in cui viene sviluppato un approccio analitico alla logica combinatoria e alla relazione di conversione del lambda-calcolo. In particolare, nell'ultimo lavoro viene risolto con metodi puri di teoria strutturale della dimostrazione un problema, posto da Curry e Hindley nel 1958, e rimasto aperto per 50 anni, sull'esistenza di una dimostrazione diretta di confluenza per la logica combinatoria.

## References

- Abate, P. e R. Gorè (2003) The Tableaux Work Bench. *Proceedings of IJCAR 2003*, LNCS 2796, pp 230–236, Springer.
- Abrusci, V.M., C. Casadio, M.T. Medaglia, e C. Porcaro (2013) Universal vs. particular reasoning: a study with neuroimaging techniques. *Logic Journal of the IGPL*, vol. 21 , pp. 1017–1027.
- Alberucci, L. e G. Jäger (2005) About cut elimination for logics of common knowledge. *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 133, pp. 73–99.
- Alenda, R., N. Olivetti, e G. Pozzato (2013) Nested sequent calculi for normal conditional logics. *Journal of Logic and Computation*, doi:10.1093/logcom/ext034.
- Avellone, A., G. Fiorino e U. Moscato (2002) An implementation of a  $O(n \log n)$ -SPACE decision procedure for propositional intuitionistic logic. *3rd International Workshop on the Implementation of Logics*, Tbilisi, Georgia.
- Avron, A. (1984) On modal systems having arithmetical interpretations. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 49, pp. 935–942.
- Avron, A. (1996) The method of hypersequents in the proof theory of propositional non-classical logics. In W. Hodges et al. (eds) *Logic: From Foundations to Applications*, pp. 1–32, Oxford Science Publications.
- Avron, A. e B. Konikowska (2005) Multi-valued calculi for logics based on non-determinism. *Logic Journal of the IGPL*, vol. 13, pp. 365–387.
- Baaz, M., A. Ciabattoni, e F. Montagna (2004) Analytic calculi for monoidal t-norm based logic. *Fundamenta Informaticae*, vol. 59, 315–332.
- Basin, D., S. Matthews, e L. Viganò (1998) Natural deduction for non-classical logics. *Studia Logica*, vol. 60, pp. 119–160.
- Battilotti, G. (1998) Embedding classical logic into basic orthologic with a primitive modality. *Logic Journal of the IGPL*, vol. 6, pp. 383–402.
- Beeson, M. (1991) Some applications of Gentzen's proof theory in automated deduction. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 475, pp. 101–156.
- Bellin, G. (1985) A system of natural deduction for GL, *Theoria*, vol. 51, pp. 89–114.
- Belnap, N. (1982) Display logic. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 11, pp. 375–417.

- Bezhanishvili, N. e S. Ghilardi (2014) Multiple-conclusion rules, hypersequents syntax and step frames. *Advances in Modal Logic*, pp. 54–73, College Publications.
- Blackburn, P. (2000) Internalizing labelled deduction. *Journal of Logic and Computation*, vol. 10, pp. 137–168.
- Boolos, G. (1984) Don't eliminate cut. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 7, pp. 373–378.
- Bonatti, P. e N. Olivetti (2002) Sequent calculi for propositional nonmonotonic logics. *ACM Transactions on Computational Logic*, vol. 3, no. 2, pp. 226–278.
- Boniolo G., M. D'Agostino, P.P. Di Fiore (2010) Zsyntax: A formal language for molecular biology with projected applications in text mining and biological prediction. *PLoS ONE*, vol. 5(3): e9511. doi:10.1371/journal.pone.0009511
- Boniolo, G., M. D'Agostino, M. Piazza, e G. Pulcini (2013) A logic of non-monotonic interactions. *Journal of Applied Logic*, vol. 11, pp. 52–62.
- Boretti, B. (2009) *Proof Analysis in Temporal Logic*. Ph.D. Thesis, Università degli Studi di Milano.
- Boretti, B. e S. Negri (2009) Decidability for Priorean linear time using a fixed-point labelled calculus. In M. Giese e A. Waaler (eds) *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 5607, Springer, pp. 108–122.
- Boretti, B. e S. Negri (2010) On the finitization of Priorean linear time. In M. D'Agostino et al. (eds) *New Essays in Logic and Philosophy of Science*, College Publications, London, pp. 67–79.
- Bova, S. e F. Montagna (2008) Proof search in Hájek's basic logic. *ACM Transactions on Computational Logic*, vol. 9, no. 3, 21/pp. 1–26 .
- Brünnler, K. (2009) Deep sequent systems for modal logic. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 48, pp. 551–577.
- Brünnler, K. e T. Studer (2009) Syntactic cut-elimination for common knowledge. *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 160, pp. 82–95.
- Cantini, A. e L. Crosilla (2012) Conservativity of transitive closure over weak constructive operational set theory. *Logic, Construction, Computation*, Ontos Mathematical Logic, vol. 3, Ontos Verlag, pp. 91–121.
- Casadio, C. (2001) Non-commutative linear logic in linguistics. *Grammars*, vol. 4, pp. 167–185.
- Casari, E. (1963) I calcoli N e L di Gentzen. In E. W. Beth (ed) *I Fondamenti Logici della Matematica*, Feltrinelli, Milano , pp. 287–294.
- Castellan, M. e M. Piazza (1998) Saturated formulas in full linear logic. *Journal of Logic and Computation*, vol. 8, pp. 665–668.
- Castellini, C. e A. Smaill (2002) A systematic presentation of quantified modal logics. *Logic Journal of the IGPL*, vol. 10, pp. 571–599.
- Castellini, C. (2005) *Automated Reasoning in Quantified Modal and Temporal Logic*. Ph.D. thesis, School of Informatics, University of Edinburgh.



- Catach, L. (1991) TABLEAUX: A general theorem prover for modal logic. *Journal of Automated Reasoning*, vol. 7, pp. 489–510.
- Cellucci, C. (1978) *Teoria della Dimostrazione. Normalizzazioni e Assegnazioni di Numeri Ordinali*. Testi e manuali della scienza contemporanea, serie di logica matematica. Boringhieri, Torino.
- Cellucci, C. (1992) Existential instantiation and normalization in sequent natural deduction. *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 58, pp. 111–148.
- Cellucci, C. (2000) Analytic cut trees. *Logic Journal of the IGPL*, vol. 8, pp. 733–750.
- Cellucci, C. (2008) Why proof? What is a proof? In R. Lupacchini e G. Corsi (2008), pp. 1–27.
- Cerrato, C. (1996) Modal sequents. In Wansing (1996), pp. 141–166.
- Ciabattoni, A, N. Galatos, e K. Terui (2008) From axioms to analytic rules in nonclassical logics. *23rd Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 229–240.
- Ciabattoni, A, N. Galatos, e K. Terui (2012) Algebraic proof theory for substructural logics: Cut-elimination and completions. *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 163, pp. 266–290.
- Ciabattoni, A. e G. Metcalfe (2008) Density elimination. *Theoretical Computer Science*, vol. 403, pp. 328–346.
- Ciabattoni, A. e R. Ramanayake (2013) Structural Extensions of Display Calculi: A General Recipe. *WoLLIC 2013*, pp. 81–95.
- Ciabattoni, A. e L. Spendier (2014) Tools for the investigation of substructural and paraconsistent logics. In E. Fermé e J. Leite (eds) *JELIA 2014*, LNAI 8761, pp. 18–32.
- Copeland, B.J. (2002) The genesis of possible worlds semantics. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 31, pp. 99–137.
- Corsi G. (2006) The a fortiori rule: the key to reach termination in intuitionistic logic. In M. Franchella ed E. Ballo (eds) *Logic and Philosophy in Italy. Some Trends and Perspectives*, Polimettrica, Milano, pp. 27–47.
- Corsi, G. e G. Tassi (2007) Intuitionistic logic freed of all metarules. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 72, pp. 1204–1218.
- Corsi, G. (2008) The logic of the weak excluded middle: A case study of proof-search. In R. Lupacchini e G. Corsi (2008), pp. 95–116.
- Cresswell, M. (1995) Incompleteness and the Barcan formula. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 24, pp. 379–403.
- D’Agostino, M. (1999) Tableau methods for classical propositional logic. In D’Agostino et al. (eds) *Handbook of Tableau Methods*, Springer, pp. 45–123.
- D’Agostino, M. (2014) Informational semantics, non-deterministic matrices and feasible deduction. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, vol. 305, pp. 35–52.

- D’Agostino, M., M. Finger, e D. Gabbay (2013) Semantics and proof-theory of depth bounded Boolean logics. *Theoretical Computer Science*, vol. 480, pp. 43–68.
- D’Agostino, M. e M. Mondadori (1994) The taming of the cut. Classical refutations with analytic cut. *Journal of Logic and Computation*, vol. 4, pp. 285–319.
- D’Agostino, M., M. Piazza, e G. Pulcini (2014) A logical calculus for controlled monotonicity. *Journal of Applied Logic*, vol. 12, pp. 558–569.
- Dragalin, A. (1988) *Mathematical Intuitionism: Introduction to Proof Theory*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- Dummett (1973) The philosophical basis of intuitionistic logic. As reprinted in Dummett’s *Truth and Other Enigmas*. Duckworth, London, 1978.
- Dyckhoff, R. (1987) Implementing a simple proof assistant. *Workshop on Programming for Logic Teaching*, pp. 49–59, University of Leeds, Centre for Theoretical Computer Science.
- Dyckhoff, R. (1992) Contraction-free sequent calculi for intuitionistic logic. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 57, pp. 795–807.
- Dyckhoff, R. (2015) Intuitionistic decision procedures since Gentzen. In R. Kahle, T. Strahm, T. Studer (eds) *Advances in Proof Theory*, Birkhäuser, Springer Basel, in print.
- Dyckhoff, R. e S. Negri (2000) Admissibility of structural rules for contraction-free systems of intuitionistic logic. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 65, pp. 1499–1518.
- Dyckhoff, R. e S. Negri (2001) Admissibility of structural rules for extensions of contraction-free sequent calculi. *Logic Journal of the IGPL*, vol. 9, pp. 541–548.
- Dyckhoff, R. e S. Negri (2006) Decision methods for linearly ordered Heyting algebras. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 45, pp. 411–422.
- Dyckhoff, R. e S. Negri (2012) Proof analysis in intermediate logics. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 51, pp. 71–92.
- Dyckhoff, R. e S. Negri (2013) A cut-free sequent system for Grzegorzcyk logic with an application to the Gödel-McKinsey-Tarski embedding. *Journal of Logic and Computation*, doi: 10.1093/logcom/ext036.
- Dyckhoff, R. e S. Negri (2015) Geometrization of first-order logic. *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 21, pp. 123–163.
- Fariñas del Cerro, L., D. Fauthoux, O. Gasquet, A. Herzig, D. Longin, F. Massacci (2001) Lotrec: The generic tableau prover for modal and description logics. Automated reasoning. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2083, pp. 453–458, Springer.
- Ferrari, M., C. Fiorentini, e G. Fiorino (2012) Simplification rules for intuitionistic propositional tableaux. *ACM Transactions on Computational Logic*, vol. 13, no. 2, 14/pp.1–23.
- Ferrari, M., C. Fiorentini, e G. Fiorino (2013) Contraction-free linear depth sequent calculi for intuitionistic propositional logic with the subformula property and

- minimal depth counter-models. *Journal of Automated Reasoning*, vol. 51, pp. 129–149.
- Fitch, F. B. (1966) Tree proofs in modal logic. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 31, p. 152.
- Fitting, M. (1983) *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*. Synthese Library, vol. 169, Kluwer.
- Fitting, M. (2012) Prefixed tableaux and nested sequents. *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 163, pp. 291–313.
- Frittella, S., G. Greco, A. Kurz, A. Palmigiano, e V. Sikimić (2014) Multi-type display calculus for dynamic epistemic logic. *Journal of Logic and Computation*, doi: 10.1093/logcom/exu068.
- Gabbay, D. (1991) Algorithmic proof with diminishing resources Part 1. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 533, pp. 156–173.
- Gabbay, D. (1996) *Labelled Deductive Systems*. Oxford University Press.
- Gabbay, D. e N. Olivetti (1998) Algorithmic proof methods and cut elimination for implicational logics - Part I, modal implication. *Studia Logica*, vol. 61, pp. 237–280.
- Gabbay, D. e N. Olivetti (2000) *Goal-Directed Proof-Theory*. Applied Logic Series. Kluwer.
- Garg, D., V. Genovese, e S. Negri (2012) Countermodels from sequent calculi in multi-modal logics. *LICS 2012*, IEEE Computer Society, pp. 315–324.
- Gentzen, G. (1934-35) Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39, pp. 176–210 e 405–431.
- Gilbert, D e P. Maffezioli (2015) Modular sequent calculi for classical modal logics. *Studia Logica*, vol. 103, pp 175–217.
- Giordano, L., V. Gliozzi, N. Olivetti, e C. Schwind (2009) Tableau calculi for preference-based conditional logics. *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*, Lecture Notes in Computer Science vol. 2796, pp. 81–101.
- Giordano, L., V. Gliozzi, N. Olivetti, e G. Pozzato (2009a) Analytic tableaux calculi for KLM logics of nonmonotonic reasoning. *ACM Transactions on Computational Logic*, vol. 10, no. 3, 18/pp. 1–54.
- Goré, R. (1998) Tableau methods for modal and temporal logis. In D’Agostino, M. et al. (eds) *Handbook of Tableau Methods*, Kluwer, pp. 297–396.
- Goré, R. e R. Ramanayake (2008) Valentini’s cut-elimination for provability logic resolved. In C. Areces e R. Goldblatt (eds) *Advances in Modal Logic*, vol. 7, College Publications, London, pp. 67–86.
- Goré, R. e R. Ramanayake (2012) Labelled tree sequents, tree hypersequents and nested (deep) sequents. In T. Bolander, T. Braüner, S. Ghilardi e L. Moss (eds) *Advances in Modal Logic*, vol. 9. pp. 279–299, College Publications.
- Graziani, P. (2014) A structural and foundational analysis of Euclid’s plane geometry: the case study of continuity. In V. Fano, F. Orilia e G. Macchia (eds) *Space and Time. A priori and A posteriori Studies*, De Gruyter- Ontos Verlag , pp. 63–106.

- Guglielmi, A. (2007) A system of interaction and structure. *ACM Transactions on Computational Logic*, vol. 8:1, pp. 1–64.
- Hakli, R. e S. Negri (2008) Proof theory for distributed knowledge. In F. Sadri e K. Satoh (eds) *Computational Logic in Multi-Agent Systems*, pp. 100–116, Lecture Notes in Artificial Intelligence 5056, Springer.
- Hakli, R. e S. Negri (2011) Reasoning about collectively accepted group beliefs. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 40, pp. 531–555.
- Hakli, R. e S. Negri (2012) Does the deduction theorem fail for modal logic? *Synthese*, vol. 187, pp. 849–867.
- Hudelmaier, J. (1992) Bounds for cut elimination in intuitionistic propositional logic. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 31, pp. 331–354.
- Indrzejczak, A. (2010) *Natural Deduction, Hybrid Systems and Modal Logics*. Springer.
- Jäger, G., M. Kretz, e T. Studer (2007) Cut-free common knowledge. *Journal of Applied Logic*, vol. 5, pp. 681–689.
- Joachimski, F. e R. Matthes (2003) Short proofs of normalization for the simply typed  $\lambda$ -calculus, permutative conversions, and Gödel’s T. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 42, pp. 59–87.
- Kanger, S. (1957) *Provability in Logic*. Almqvist & Wiksell, Stockholm.
- Kashima, R. (1994) Cut-free sequent calculi for some tense logics. *Studia Logica*, vol. 53, pp. 119–135.
- Kripke, S. (1963) Semantical analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Math.*, vol. 9, pp. 67–96.
- Kushida, H. e M. Okada (2003) A proof-theoretic study of the correspondence of classical logic and modal logic. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 68, pp. 1403–1414.
- Lopez-Escobar L. (1999) Standardizing the N-systems of Gentzen. In X. Caicedo e C. Montenegro (eds) *Models, Algebras and Proofs*, pp. 411–434, Dekker, New York.
- Lolli, G. (2005) *QED: Fenomenologia della Dimostrazione*. Bollati Boringhieri, Torino.
- Lupacchini R. e G. Corsi (2008) *Deduction, Computation, Experiment: Exploring the Effectiveness of Proof*, Springer.
- Maffezioli, P. e A. Naibo (2013) Proof theory of epistemic logic of programs. *Logic and Logical Philosophy*, vol. 23, doi: dx.doi.org/10.12775/LLP.2013.026.
- Maffezioli, P., A. Naibo, e S. Negri (2013) The Church-Fitch knowability paradox in the light of structural proof theory. *Synthese*, vol. 190, pp. 2677–2716.
- Massacci, F. (2000) Single step tableaux for modal logics: methodology, computations, algorithms. *J. of Automated Reasoning*, vol. 24, pp. 319–364.
- Martini, S. e A. Masini (1996) A computational interpretation of modal proofs. In Wansing (1996), pp. 213–241.

- Meinander, A. (2010) A solution of the uniform word problem for ortholattices. *Mathematical Structures in Computer Science*, vol. 20, pp. 625–638.
- Mendelson, E. (1964) *Introduction to Mathematical Logic*. Van Nostrand, New York, trad. it. *Introduzione alla Logica Matematica*, Bollati Boringhieri 1972.
- Metcalfe, G. e F. Montagna (2007) Substructural fuzzy logics. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 72, pp. 834–864.
- Metcalfe, G., N. Olivetti, e D. Gabbay (2004) Analytic calculi for product logics. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 43, pp. 859–889.
- Metcalfe, G., N. Olivetti, e D. Gabbay (2005) Sequent and hypersequent calculi for abelian and Łukasiewicz logics. *ACM Transactions on Computational Logic*, vol. 6, no. 3, pp. 578–613.
- Metcalfe, G., N. Olivetti, e D. Gabbay (2009) *Proof Theory for Fuzzy Logics*. Applied Logic Series, vol. 36, Springer.
- Miller, D., G. Nadathur, F. Pfenning, e A. Scedrov (1991) Uniform proofs as a foundation for logic programming. *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 51, pp. 125–157.
- Minari, P. (2004) Analytic combinatory calculi and the elimination of transitivity. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 43, pp. 159–191.
- Minari, P. (2005) Proof-theoretical methods in combinatory logic and  $\lambda$ -calculus. In B. Cooper, B. Löwe, L. Torenvliet (eds.) *CiE 2005: New Computational Paradigms*, ILLC X-2005-01, Amsterdam, pp. 148–157.
- Minari, P. (2007) Analytic proof systems for  $\lambda$ -calculus: the elimination of transitivity, and why it matters. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 46, pp. 385–424.
- Minari, P. (2009) A solution to Curry and Hindley’s problem on combinatory strong reduction. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 48, pp. 159–184.
- Minari, P. (2012) Infinitary modal logic and generalized Kripke semantics. *Annali del Dipartimento di Filosofia (Nuova Serie)*, vol. XVII, pp. 135–166.
- Minari, P. (2013) Labeled sequent calculi for modal logics and implicit contractions. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 52, pp. 881–907.
- Mints, G. (1997) Indexed systems of sequents and cut-elimination. *Journal of Philosophical Logic* vol. 26, pp. 671–696.
- Moot, R. e M. Piazza (2001) Linguistic applications of first order intuitionistic linear logic. *Journal of Logic, Language and Information*, vol. 10, pp. 211–232.
- Moriconi, E. (2012) Steps towards a proof-theoretical semantics. *Topoi*, vol. 31, pp. 67–75.
- Moriconi, E. e L. Tesconi (2008) On inversion principles. *History and Philosophy of Logic*, vol. 29, pp 103–113.
- Negri, S. (1999) Sequent calculus proof theory of intuitionistic apartness and order relations, *Archive for Mathematical Logic*, vol. 38, pp. 521–547.
- Negri, S. (2002) A normalizing system of natural deduction for intuitionistic linear logic. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 41, pp. 789–810.

- Negri, S. (2002a) Varieties of linear calculi. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 31, pp. 569–590.
- Negri, S. (2003) Contraction-free sequent calculi for geometric theories, with an application to Barr’s theorem. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 42, pp. 389–401.
- Negri, S. (2005) Proof analysis in modal logic. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 34, pp. 507–544.
- Negri, S. (2009) Kripke completeness revisited. In G. Primiero e S. Rahman (eds) *Acts of Knowledge - History, Philosophy and Logic*, pp. 247–282, College Publications.
- Negri, S. (2011) Proof theory for modal logic. *Philosophy Compass*, vol. 6, pp. 523–538.
- Negri, S. (2014) Proof analysis beyond geometric theories: from rule systems to systems of rules. *Journal of Logic and Computation*, doi: 10.1093/logcom/exu037.
- Negri, S. (2014a) Proofs and countermodels in non-classical logics. *Logica Universalis*, vol. 8, pp. 25–60.
- Negri, S. e J. von Plato (1998) Cut elimination in the presence of axioms. *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 4, pp. 418–435.
- Negri, S. e J. von Plato (2001) *Structural Proof Theory*. Cambridge University Press.
- Negri, S. e J. von Plato (2002) Permutability of rules in lattice theory. *Algebra Universalis*, vol. 48, pp. 473–477.
- Negri, S. e J. von Plato (2011) *Proof Analysis*. Cambridge University Press.
- Negri, S. e J. von Plato (2015) Meaning in use. In H. Wansing (ed) *Dag Prawitz on Proofs and Meaning*, Outstanding Contributions to Logic, vol. 7, Springer, pp. 239–258.
- Nerode, A. (1991) Some lectures on modal logic. in F. L. Bauer (ed) *Logic, Algebra, and Computation*, NATO ASI Series, vol. F79, Springer, pp. 281–334.
- Olivetti, N., G. L. Pozzato, e C. Schwind (2007) A sequent calculus and a theorem prover for standard conditional logics. *ACM Transactions on Computational Logic*, vol. 8, no. 4, 22/pp. 1–51.
- Olivetti, N. e G. L. Pozzato (2008) Theorem proving for conditional logics: CondLean and GoalDuck. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, vol. 18, pp. 427–473.
- Olivetti, N. e G. L. Pozzato (2014) NESCOND: An implementation of nested sequent calculi for conditional logics. In S. Demri, D. Kapur, e C. Weidenbach (eds) *Automated Reasoning*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 8562, pp. 511–518.
- Orlandelli (2014) Proof analysis in deontic logics. In F. Cariani et al. (eds) *Deontic Logic and Normative Systems*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 8554, pp. 139–148.
- Orlandelli, E. (2014a) *Proof Theory of Quantified Modal Logics*. PhD thesis, Università di Bologna.
- Orłowska, E. e J. Golińska Pilarek (2011) *Dual Tableaux: Foundations, Methodology, Case Studies*. Trends in Logic, vol. 33, Springer.

- Ornaghi, M. (2003) Preface. In memoriam Pierangelo Miglioli (1946–1999). *Studia Logica*, vol. 73, pp. 5–19.
- Paoli, F. (2002) *Substructural Logics: A Primer*. Kluwer.
- Piazza, M. (2001) Exchange rules. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 66, pp. 509–516.
- von Plato, J. (2000) A problem of normal form in natural deduction. *Mathematical Logic Quarterly*, vol. 46, pp. 121–124.
- von Plato, J. (2001) Natural deduction with general elimination rules, *Archive for Mathematical Logic*, vol. 40, pp. 541–567.
- von Plato, J. (2008) Gentzen’s proof of normalization for natural deduction. *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 14, pp. 240–244.
- von Plato, J. (2010) Combinatorial analysis of proofs in projective and affine geometry. *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 162, pp. 144–161.
- von Plato, J. (2012) Gentzen’s proof systems: byproducts in a work of genius. *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 18, pp. 313–367.
- von Plato, J. e A. Siders (2012) Normal derivability in classical natural deduction. *Review of Symbolic Logic*, vol. 5, pp. 205–211.
- Poggiolesi, F. (2009) A purely syntactic and cut-free sequent calculus for the modal logic of provability. *Review of Symbolic Logic*, vol. 2, pp. 593–611.
- Poggiolesi, F. (2010) *Gentzen Calculi for Modal Propositional Logic*. Springer.
- Pottinger, G. (1977) Normalization as a homomorphic image of cut-elimination. *Annals of Mathematical Logic*, vol. 12, pp. 323–357.
- Prawitz D. (1965) *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. Almqvist & Wicksell, Stockholm.
- Ramanayake, R. (2014) Embedding the hypersequent calculus in the display calculus. *Journal of Logic and Computation*, doi:10.1093/logcom/exu061.
- Read, S. (2014) Semantic pollution and syntactic purity. ms.
- Restall, G. e F. Paoli (2005) The geometry of non-distributive logics. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 70 , pp. 1108–1126.
- Russo, A. (1995) Modal labelled deductive systems. Dept. of Computing, Imperial College, London, Technical Report 95(7).
- Sambin, G., G. Battilotti, e C. Faggian (2000) Basic logic: reflection, symmetry, visibility. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 65, pp. 979–1013.
- Sambin, G. e S. Valentini (1982) The modal logic of provability. The sequential approach. *Journal of Philosophical Logic*, pp. 311–342.
- Schroeder-Heister, P. (2013) Definitional reflection and basic logic. *Annals of Pure and Applied Logic* vol. 164, pp. 491–501.
- Sieg, W. e S. Cittadini (2005) Normal natural deduction proofs (in non-classical logics). LNAI 2605, pp 169–191, Springer.
- Simpson, A. (1994) *Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*. Ph.D. thesis, School of Informatics, University of Edinburgh.

- Stalnaker, R. (1968) A theory of conditionals. In N. Rescher (ed.) *Studies in Logical Theory*, Oxford, pp. 98–112.
- Statman, R. (1978) Bounds for proof-search and speed-up in the predicate calculus. *Annals of Mathematical Logic*, vol. 15, pp. 225–287.
- Stewart, C. e P. Stouppa (2005) A systematic proof theory for several modal logics. *Advances in modal logic*, vol. 5, King’s College Publications, London, pp. 309–333.
- Stouppa, P. (2007) A deep inference system for the modal logic S5. *Studia Logica*, vol. 85, pp. 199–214.
- Tennant, N. (1992) *Autologic*. Edinburgh U.P.
- Tarski, A. (1949) On essential undecidability. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 14, pp. 75–76.
- Tesconi, L. (2013) *Essays in Structural Proof Theory*. Edizioni ETS, Pisa.
- Tranchini, L. (2012) Truth from a proof-theoretic perspective. *Topoi*, vol. 31, pp. 47–57.
- Troelstra, A. e H. Schwichtenberg (2000) *Basic Proof Theory*. Cambridge University Press, second edition.
- Viganò, L. (2000) *Labelled Non-Classical Logics*. Kluwer.
- Valentini, S. (1983) The modal logic of provability: cut-elimination. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 12, pp. 471–476.
- Valentini, S. (1993) The sequent calculus for the modal logic D. *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana*, vol. 7, pp. 455–460.
- Wansing, H. ed (1996) *Proof Theory of Modal Logic*. Applied Logic Series, 2. Kluwer Academic Publishers.
- Wansing, H. (2002) Sequent systems for modal logics. In D. Gabbay e F. Guenther (eds), *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 8, 2nd ed., Kluwer, pp. 61–145.
- Zucker, J. (1974) Cut-elimination and normalization. *Annals of Mathematical Logic*, vol. 7, pp. 1–112.