# Analyyttisten ja koanalyyttisten ekvivalenssirelaatioiden ekvivalenssiluokkien lukumääristä

Matti Pirinen

Helsingin yliopisto
Matematiikan laitos
Pro gradu -tutkielma

20.11.2003

# Sisältö


Johdanto . . . 2

**1 Merkintöjä ja määritelmiä** **3**
1.1 Jonot ja puut . . . 4
1.2 Topologiset peruskäsitteet . . . 10

**2 Deskriptiivistä joukko-oppia** **13**
2.1 Puolalaiset avaruudet . . . 13
2.2 Borelin joukot . . . 25
2.3 Analyyttiset joukot . . . 34
2.4 Universaalit joukot . . . 39
2.5 Laskettavuuden teoria . . . 40
2.6 Efektiivinen hierarkia . . . 43
2.7 $\Pi^1_1$-normi . . . 53
2.8 $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-rajoittuvuus . . . 60

**3 Topologiaa** **63**
3.1 Kategoriaehto . . . 63
3.2 Bairen ominaisuus . . . 67

**4 Ekvivalenssirelaatiot** **71**
4.1 Gandy-topologia . . . 72
4.2 Silverin lause . . . 76
4.3 Burgessin lause . . . 82

# Johdanto

Tyypillistä matematiikalle on pyrkimys yleisyyteen sekä käsitteissä että tuloksissa. Hyvä esimerkki saadaan abstraktista joukko-opista, jonka sisällä pääosa matematiikasta voidaan muotoilla. Joukkojen täsmällisen käsittelyn lähtökohdaksi valitaan yleensä ensimmäisen kertaluvun logiikan teoria ZFC [1].

Gödelin epätäydellisyystuloksista seuraa, ettei mikään ZFC:n kaltainen vahva teoria voi olla samanaikaisesti ristiriidaton ja täydellinen. Siis jos ZFC on ristiriidaton, niin on olemassa joukkoja koskevia väitteitä, jotka ovat todistumattomia ZFC:ssä ja joiden negaatiotkin ovat todistumattomia ZFC:ssä. Lisäksi on osoitettu monen matemaatikoitakin kiinnostavan kysymyksen ratkeamattomuus ZFC:n pohjalta [2]. Tunnetuin esimerkki lienee kontinuumihypoteesi.

Luonnollinen kysymys on, saadaanko yleisessä muodossa ratkeamatonta ongelmaa ratkaistua jossakin keskeisessä erikoistapauksessa tinkimällä hieman käsitteiden yleisyydestä. Vaikkei ZFC sanokaan mitään esimerkiksi kontinuumihypoteesin totuudesta mielivaltaiselle joukolle, ehkä se kuitenkin ratkaisee ongelman tietyt säännöllisyysvaatimukset toteuttaville joukoille. Deskriptiivisessä joukko-opissa keskitytään puolalaisten avaruuksien määriteltäviin osajoukkoihin. Alan pioneereja olivat Baire, Borel ja Lebesgue, jotka 1900-luvun alussa tutkivat analyysissä vastaan tulleiden reaalilukujoukkojen ominaisuuksia. 1930-luvulla matemaattiset loogikot loivat kokonaislukujoukkojen määriteltävyyttä käsittelevän laskettavuuden teorian. Laskettavuuden käsitteistöä klassiseen deskriptiiviseen joukko-oppiin soveltavaa teoriaa kutsutaan efektiiviseksi ja kuten tässä tutkielmassa nähdään, sen avulla voidaan todistaa tuloksia, joille ei tunneta klassista todistusta.

Reaalilukujen joukko standarditopologioineen ei ole ainoa kiinnostava puolalainen avaruus. Toinen esimerkki saadaan malliteoriasta [Sr:5.13], kun numeroituvan ensimmäisen kertaluvun kielen $L$ niiden mallien joukko, joiden universumi on $\mathbb{N}$, tulkitaan sopivasti topologisena avaruutena. Vuonna 1961 Vaught esitti kuuluisan konjektuurinsa, jonka mukaan $L$-teorian numeroituvien mallien isomorfiatyyppien lukumäärä on numeroituva tai $2^{\aleph_0}$. Koska isomorfiarelaatio kuuluu deskriptiivisen joukko-opin hierarkiassa luokkaan $\mathbf{\Sigma}^1_1$, Vaughtin konjektuuri on osaltaan motivoinut määriteltävien ekvivalenssirelaatioiden tutkimusta. Lisäksi on monia matemaattisia struktuureja, joita ei voida tulkita suoraan puolalaisina avaruuksina, vaan näiden avaruuksien määriteltävien ekvivalenssirelaatioiden tekijäavaruuksina. Ekvivalenssirelaatioihin liittyvän hierarkian selvittäminen onkin ajankohtainen ongelma deskriptiivisessä joukko-opissa [Ke2].

Tässä tutkielmassa esitellään deskriptiivisen joukko-opin peruskäsitteet: klassinen ja efektiivinen hierarkia sekä esitetään todistukset 1970-luvulta peräisin oleville Silverin ja Burgessin lauseille, jotka selvittävät $\mathbf{\Pi}^1_1$- ja $\mathbf{\Sigma}^1_1$- ekvivalenssirelaatioiden tekijäavaruuksien rakennetta.

[1] Zermelo-Frankel -aksioomajärjestelmä (ZF) ja valinta-aksiooma (C)

[2] Tässä ja jatkossa luonnollisesti oletetaan ZFC ristiriidattomaksi.

# Luku 1

# Merkintöjä ja määritelmiä

Joukolle käytetään nimitystä avaruus, kun tarkoitetaan lähtökohdaksi oletettua joukkoa, jonka osajoukkoihin tarkastelut kohdistuvat. Esimerkkejä avaruuksista ovat $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{N}$. Yleisesti avaruuksia merkitään kirjaimilla $X$ ja $Y$ ja niiden osajoukkoja kirjaimilla $A, B, C, \ldots$. Sanaa luokka käytetään, kun tarkastellaan kaikkien avaruuksien tietyt ehdot täyttävien osajoukkojen kokoelmaa. Esimerkkeinä luokista mainittakoon avointen joukkojen luokka $\mathbf{\Sigma}^0_1$ ja kaikkien tarkasteltavien puolalaisten avaruuksien luokka $\mathcal{X}$. Luokka voi olla joukko-opillisessa mielessä aito luokka. Jos $\Gamma$ on luokka ja $X$ avaruus, merkitään $\Gamma(X) = \Gamma \cap \mathcal{P}(X)$. Usein luokka $\Gamma$ määritellään antamalla sen rajoittumat $\Gamma(X)$ yksittäisiin avaruuksiin $X$.

Deskriptiivisessä joukko-opissa yhdistyy toisaalta perinteinen tapa käsitellä joukkoja ja toisaalta logiikan kieli konnektiiveineen ja relaatioineen. Tässäkin tutkielmassa käytetään molempia merkintätapoja. Kaikki merkinnät voitaisiin kuitenkin esittää pelkästään yhdellä tavalla. Esimerkiksi jos $A, B \subseteq X$, niin

$$A(x) \wedge \neg B(x) \iff x \in A \cap (X \setminus B) \text{ ja}$$

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \iff A \subseteq B.$$

Logiikan merkintätapaa käytetään efektiivisen teorian yhteydessä, kun taas topologisten käsitteiden kanssa noudatetaan perinteistä notaatiota. Joukkojen sisältyvyydelle käytetään merkintää $\subseteq$ ja aitoa sisältyvyyttä merkitään $\subset$ .

Olkoon $A \subseteq X \times Y$. Joukon *projektiota* ja *koprojektiota* merkitään kvantifiointina avaruuden suhteen:

$$\exists^Y A = \{x \in X : \exists y \in Y((x, y) \in A)\} \text{ ja } \forall^Y A = \{x \in X : \forall y \in Y((x, y) \in A)\}.$$

Kvantifiointi koskee viimeistä karteesisessa tulossa esiintyvää avaruutta. Jos $\Gamma$ on luokka avaruuksien osajoukkoja ja $Y$ avaruus, niin määritellään luokka

$$\exists^Y \Gamma = \{\exists^Y A : A \in \Gamma(X \times Y) \wedge X \in \mathcal{X}\}.$$

Jos $x \in X$, niin joukon $A$ *$x$-leikkaus* $A_x \subseteq Y$ määritellään joukkona

$$A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\}.$$

Leikkaus otetaan karteesisen tulon ensimmäisen avaruuden suhteen.

Symbolit $\xi$ ja $\delta$ on varattu ordinaaleille. Ordinaalien ja kardinaalien perusominaisuudet ja transfiniittinen rekursio sekä induktio oletetaan tunnetuiksi. Joukon $A$ mahtavuutta merkitään $|A|$ tai $\mathrm{Card}(A)$. Ordinaalien luokkaa merkitään $\mathbb{O}n$. Luonnollisten lukujen joukkona on $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ja positiivisten luonnollisten lukujen joukkoa merkitään $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

## 1.1 Jonot ja puut

Olkoon $A$ joukko ja $\xi$ ordinaali. Merkitään

$$^{\xi}A = \{\alpha \subseteq (\xi \times A) : \alpha \text{ on kuvaus}\}.$$

Kuvausta $\alpha \in {}^{\xi}A$ sanotaan joukon $A$ *jonoksi* ja sille käytetään merkintöjä

$$\alpha = (a_i)_{i<\xi} = (a_0, a_1, a_2, \ldots),$$

missä $a_i = \alpha(i)$ kaikilla $i < \xi$. ${}^0A = \{\emptyset\}$ kaikilla joukoilla $A$ ja tyhjästä kuvauksesta $\emptyset$ käytetään nimitystä *tyhjä jono.* Jonon $\alpha$ *pituus* on $|\alpha| = \mathrm{dom}(\alpha)$.

Olkoot $\alpha = (a_i)_{i<|\alpha|}$ ja $\beta = (b_i)_{i<|\beta|}$ joukon $A$ jonoja. Jonojen $\alpha$ ja $\beta$ *yhdistelmä* $\alpha\hat{}\beta \in {}^{|\alpha|+|\beta|}A$ on joukon $A$ jono, joka määräytyy ehdolla

$$\alpha\hat{}\beta(i) = \begin{cases} a_i, & \text{jos } i < |\alpha|. \\ b_i, & \text{jos } |\alpha| \leq i < |\alpha| + |\beta|. \end{cases}$$

Jos $a \in A$, merkitään $\alpha\hat{}a = \alpha\hat{}(a)$. Jos $\alpha \subseteq \beta$, niin $\alpha$ on jonon $\beta$ *alkusegmentti.* Tämä on yhtäpitävää sille, että $|\alpha| \leq |\beta|$ ja $\beta \restriction |\alpha| = \alpha$. Jos $\alpha \subset \beta$, niin $\alpha$ on jonon $\beta$ *aito alkusegmentti.* Jonot $\alpha$ ja $\beta$ ovat *yhteensopivia,* jos $\alpha \subseteq \beta$ tai $\beta \subseteq \alpha$. Muussa tapauksessa $\alpha$ ja $\beta$ ovat *yhteensopimattomia* ja merkitään $\alpha \perp \beta$.

Jatkossa pituutta $\omega$ oleville jonoille käytetään merkintöjä

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_0, a_1, a_2, \ldots), \\ \beta &= (b_0, b_1, b_2, \ldots) \text{ ja} \\ \gamma &= (c_0, c_1, c_2, \ldots). \end{aligned}$$

Äärellisiä jonoja kuvaavat pääasiassa $\sigma$ ja $\tau$. Joukon $A$ äärellisten jonojen joukkoa merkitään ${}^{<\omega}A = \bigcup_{n<\omega} {}^nA$.

Joukko $T$ on joukon $A$ *puu,* jos

(1) $T \subseteq {}^{<\omega}A$.

(2) $T \neq \emptyset$.

(3) $\sigma \in T \Longrightarrow \forall n \leq |\sigma|((\sigma \restriction n) \in T)$.

Tyhjä jono kuuluu jokaiseen puuhun ja sitä kutsutaan puun *juureksi.* Puun alkioita kutsutaan *solmuiksi.* Joukon $A$ puun $T$ *ääretön oksa* on jono $\alpha \in {}^{\omega}A$, jolla $\alpha \restriction n \in T$ kaikilla $n < \omega$. Äärettömät oksat muodostavat puun $T$ *rungon*

$$[T] = \{\alpha \in {}^{\omega}A : \forall n(\alpha \restriction n \in T)\}.$$

Puuta $T$ sanotaan *hyvinperustetuksi,* jos $[T] = \emptyset$. Jos $T$ on puu, merkitään

$$T' = \{\sigma \in T : \exists \tau \in T(\sigma \subset \tau)\}.$$

$T'$ on siis joukko, joka saadaan poistamalla puusta $T$ *lehtisolmut.* Selvästi $T'$ on puu, jos $T \neq \{\emptyset\}$ ja jos $T = \{\emptyset\}$, niin $T' = \emptyset$.

**Määritelmä 1.1.1.** *Olkoon $T$ puu. Määritellään kaikilla ordinaaleilla $\xi$ joukko $T^\xi$ seuraavasti:*

$$\begin{aligned} T^0 &= T \\ T^{\xi+1} &= (T^\xi)' \\ T^\xi &= \bigcap_{\delta<\xi} T^\delta, \text{ kun } \xi \text{ on rajaordinaali.} \end{aligned}$$

Tällöin $T^\xi \supseteq T^\delta$, kun $\xi < \delta$.

**Lemma 1.1.2.** *Olkoon $A$ joukko ja $T$ joukon $A$ puu. Tällöin on olemassa ordinaali $\xi < \max\{\omega_1, |A|^+\}$, jolla $T^\xi = T^\delta$ kaikilla $\delta > \xi$.*

*Todistus.* Voidaan olettaa, että $A$ on ääretön, jolloin $\max\{\omega_1, |A|^+\} = |A|^+$. Jos $T^\xi = T^{\xi+1}$ jollakin $\xi$, niin selvästi $T^\xi = T^\delta$ kaikilla $\delta > \xi$. Koska lisäksi $T^\xi \supseteq T^{\xi+1}$, niin vastaoletus väitteelle on $T^\xi \supset T^{\xi+1}$ kaikilla $\xi < |A|^+$. Tällöin jokaista ordinaalia $\xi < |A|^+$ kohden on olemassa $\sigma_\xi \in T^\xi \setminus T^{\xi+1}$. Jos $\xi < \delta < |A|^+$, niin $\sigma_\delta \in T^\delta$ ja koska $T^\delta \subseteq T^{\xi+1}$, niin $\sigma_\xi \notin T^\delta$; erityisesti $\sigma_\xi \neq \sigma_\delta$. Vastaoletuksesta siis seuraa, että joukon $\{\sigma_\xi : \xi < |A|^+\} \subseteq {}^{<\omega}A$ mahtavuus on $|A|^+$, mikä on mahdotonta, sillä joukon $A$ äärettömyyden perusteella $|{}^{<\omega}A| = |A| < |A|^+$. □

**Määritelmä 1.1.3.** *Olkoon $A$ joukko ja $T$ joukon $A$ puu. Merkitään $\infty(T) = \max\{\omega_1, |A|^+\}$. Määritellään astefunktio $\rho_T : T \to \infty(T) \cup \{\infty(T)\}$ ehdoilla*

$$\rho_T(\sigma) = \begin{cases} \xi, & \text{jos } \sigma \in T^\xi \setminus T^{\xi+1} \text{ jollakin } \xi < \infty(T). \\ \infty(T), & \text{jos } \sigma \in T^{\infty(T)}. \end{cases}$$

*Lisäksi määritellään puun $T$ korkeus $\rho(T) \in \infty(T) \cup \{\infty(T)\}$ ehdolla*

$$\rho(T) = \sup\{\rho_T(\sigma) : \sigma \in T\}.$$

Lemmasta 1.1.2 seuraa, että astefunktio on hyvin määritelty eli kaikilla $\sigma \in T$ joko $\sigma \in T^\xi \setminus T^{\xi+1}$ jollakin $\xi < \infty(T)$ tai $\sigma \in T^\xi$ kaikilla $\xi$, jolloin erityisesti $\sigma \in T^{\infty(T)}$. Kun asiayhteydestä käy ilmi, mitä puuta tarkoitetaan, merkitään lyhemmin $\infty = \infty(T)$. Seuraavaan lauseeseen on listattu korkeuden ja asteen perusominaisuuksia.

**Lause 1.1.4.** *Olkoon $A$ joukko ja $T$ joukon $A$ puu. Tällöin seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $\sigma, \tau \in T$ :*

(1) *Jos $\sigma \subset \tau$, niin*

$$\rho_T(\tau) = \infty \Longrightarrow \rho_T(\sigma) = \infty \text{ ja}$$

$$\rho_T(\tau) < \infty \Longrightarrow \rho_T(\sigma) > \rho_T(\tau).$$

(2) *Jos* $\rho_T(\sigma) > 0$ *ja* $\rho_T(\tau) < \infty$ *kaikilla* $\tau \in T$, *joilla* $\sigma \subset \tau$, *niin*

$$\rho_T(\sigma) = \sup\{\rho_T(\sigma\hat{\ }a) + 1 : a \in A \wedge \sigma\hat{\ }a \in T\}.$$

(3) $\rho(T) = \rho_T(\emptyset)$.

(4) $\rho_T(\sigma) = \infty$, *jos ja vain jos on olemassa* $\alpha \in [T]$, *jolla* $\sigma \subset \alpha$.

(5) $T$ *on hyvinperustettu, jos ja vain jos* $\rho(T) < \infty$.

*Todistus.* (1) Jos $\sigma \subset \tau$ ja $\tau \in T^\xi$ jollakin $\xi$, niin $\sigma \in T^{\xi+1}$. Jos $\rho_T(\tau) = \infty$, niin $\tau \in T^\infty$, joten $\sigma \in T^{\infty+1} = T^\infty$ eli $\rho_T(\sigma) = \infty$. Jos taas $\rho_T(\tau) = \xi < \infty$, niin $\tau \in T^\xi$ ja $\sigma \in T^{\xi+1}$. Koska $\xi + 1 \leq \infty$, niin $\rho_T(\sigma) \geq \xi + 1 > \xi = \rho_T(\tau)$.

(2) Olkoon $\xi = \sup\{\rho_T(\sigma\hat{\ }a) + 1 : a \in A \wedge \sigma\hat{\ }a \in T\}$. Kohdasta (1) seuraa $\rho_T(\sigma) > \rho_T(\sigma\hat{\ }a)$ eli $\rho_T(\sigma) \geq \rho_T(\sigma\hat{\ }a) + 1$ kaikilla $a \in A$, joilla $\sigma\hat{\ }a \in T$. Siis $\rho_T(\sigma) \geq \xi$. Toisaalta $\xi > \rho_T(\sigma\hat{\ }a)$ ja $\infty > \rho_T(\sigma\hat{\ }a)$ eli $\sigma\hat{\ }a \notin T^\xi$ kaikilla $a \in A$, joilla $\sigma\hat{\ }a \in T$. Tästä seuraa $\sigma \notin T^{\xi+1}$ eli $\rho_T(\sigma) \leq \xi$. Siis $\rho_T(\sigma) = \xi$.

(3) Kohdan (1) perusteella $\rho_T(\emptyset) \geq \rho_T(\sigma)$ kaikilla $\sigma \in T$. Siis

$$\rho_T(\emptyset) = \sup\{\rho_T(\sigma) : \sigma \in T\} = \rho(T).$$

(4) Oletetaan $\rho_T(\sigma) = \infty$. Olkoon $n = |\sigma|$ ja $(s_0, \ldots, s_{n-1}) = \sigma$. Konstruoidaan jono $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in {}^\omega A$, joka kuuluu puun $T$ runkoon ja jatkaa jonoa $\sigma$ niin, että

$$(a_0, \ldots, a_{i-1}) \in T^\infty \tag{1.1}$$

kaikilla $i < \omega$. Asetetaan $a_i = s_i$ kaikilla $i < n$. Kohdan (1) nojalla ehto 1.1 on voimassa kaikilla $i < n$. Oletetaan, että alkiot $a_0, \ldots, a_{k-1}$ on määritelty jollakin $k \geq n$ niin, että ehto 1.1 on voimassa kaikilla $i < k$. Koska $(a_0, \ldots, a_{k-1}) \in T^\infty = T^{\infty+1}$, niin on olemassa $\tau \in T^\infty$, joka jatkaa jonoa $(a_0, \ldots, a_{k-1})$. Olkoon $a_k = \tau(k)$. Tällöin $(a_0, \ldots, a_k) \in T$ ja koska $\rho_T(\tau) = \infty$, niin ehdosta (1) seuraa $\rho_T((a_0, \ldots, a_k)) = \infty$. Konstruktio on valmis ja alkioiden $a_i$ valintojen perusteella $\sigma \subset \alpha$ sekä $\alpha \in [T]$.

Oletetaan $\alpha \in [T]$ ja $\sigma \subset \alpha$. Osoitetaan $\alpha \in [T^\infty]$, jolloin $\rho_T(\sigma) = \infty$. Kaikilla $\xi$ ehdosta $\alpha \in [T^\xi]$ seuraa $\alpha \in [T^{\xi+1}]$. Lisäksi jos jollakin rajaordinaalilla $\xi$ pätee $\alpha \in [T^\delta]$ kaikilla $\delta < \xi$, niin $\alpha \in [T^\xi]$. Siis induktioperiaatteen mukaan $\alpha \in [T^\infty]$.

(5)

$$\begin{aligned}
\rho(T) < \infty &\iff \rho_T(\emptyset) < \infty \\
&\iff \forall \sigma \in T(\rho_T(\sigma) < \infty) \\
&\iff \forall \sigma \in T(\neg \exists \alpha \in [T](\sigma \subset \alpha)) \\
&\iff [T] = \emptyset,
\end{aligned}$$

missä ensimmäinen ekvivalenssi seuraa kohdasta (3), toinen kohdasta (1), kolmas kohdasta (4) ja neljäs on selvä. □

**Lause 1.1.5.** *Olkoon* $A$ *joukko. Jokaista ordinaalia* $\xi < |A|^+$ *kohden on olemassa joukon* $A$ *puu* $T_\xi$, *jonka korkeus on* $\xi$.

*Todistus.* Olkoon $T_0 = \{\emptyset\}$. Tällöin $T_0 \subseteq {}^{<\omega}A$ on puu ja $\rho(T_0) = \rho_{T_0}(\emptyset) = 0$.

Jos $0 < \xi < |A|^+$, tarkastellaan joukon $\xi$ puuta

$$T = \{(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{k-1}) : k < \omega \wedge \xi > \delta_0 > \delta_1 > \ldots > \delta_{k-1}\}.$$

Osoitetaan induktiolla ordinaalin $\delta < \xi$ suhteen: jos $k < \omega$ ja $(\delta_0, \ldots, \delta_{k-1}, \delta) \in T$, niin $\rho_T(\delta_0, \ldots, \delta_{k-1}, \delta) = \delta$. Oletetaan $k < \omega$ ja olkoot $\xi > \delta_0 > \ldots > \delta_{k-1} > 0$. Tällöin $(\delta_0, \ldots, \delta_{k-1}, 0) \in T^0 \setminus T^1$, joten $\rho_T(\delta_0, \ldots, \delta_{k-1}, 0) = 0$. Siis väite pätee, kun $\delta = 0$. Oletetaan, että jollakin $0 < \delta < \xi$ ja kaikilla $k < \omega$ $\rho_T(\delta_0, \ldots, \delta_{k-1}, \delta') = \delta'$, kun $\delta' < \delta$. Olkoon $k < \omega$ ja $\xi > \delta_0 > \ldots > \delta_{k-1} > \delta$. Lauseen 1.1.4 kohdan (2) perusteella

$$\begin{aligned}\rho_T(\delta_0, \ldots, \delta_{k-1}, \delta) &= \sup\{\rho_T((\delta_0, \ldots, \delta_{k-1}, \delta)\hat{}\delta') + 1 : \delta' < \delta\} \\ &= \sup\{\delta' + 1 : \delta' < \delta\} = \delta.\end{aligned}$$

Induktiotodistus on valmis ja

$$\begin{aligned}\rho(T) &= \rho_T(\emptyset) = \sup\{\rho_T((\delta)) + 1 : \delta < \xi\} \\ &= \sup\{\delta + 1 : \delta < \xi\} = \xi.\end{aligned}$$

Koska $\xi < |A|^+$, niin on olemassa $B \subseteq A$, joka on yhtä mahtava joukon $\xi$ kanssa. Olkoon $f : B \to \xi$ bijektio ja

$$T_\xi = \{(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}) \in {}^{<\omega}B : k < \omega \wedge (f(a_0), \ldots f(a_{k-1})) \in T\}.$$

Tällöin $T_\xi$ on joukon $A$ puu ja $\rho(T_\xi) = \rho(T) = \xi$. □

Puiden korkeuksien vertailu voidaan tehdä järjestyksen säilyttävän kuvauksen avulla. Sanotaan, että puiden $S$ ja $T$ välinen kuvaus $f : S \to T$ *säilyttää järjestyksen,* jos kaikilla $\sigma, \tau \in S$

$$\sigma \subset \tau \Longrightarrow f(\sigma) \subset f(\tau).$$

**Lemma 1.1.6.** *Olkoot $S$ ja $T$ joukon $A$ puita. Tällöin $\rho(S) \leq \rho(T)$, jos ja vain jos on olemassa järjestyksen säilyttävä kuvaus $f : S \to T$.*

*Todistus.* ($\Rightarrow$) Määritellään kuvaukset $(f_i)_{i<\omega}$ rekursiivisesti luvun $i$ suhteen niin, että seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$ ja $\sigma, \tau \in S$ :

(*i*) $f_i : \{\sigma \in S : |\sigma| \leq i\} \to T$.
(*ii*) $(\sigma, \tau \in \mathrm{dom}(f_i)) \wedge (\sigma \subset \tau) \Longrightarrow f_i(\sigma) \subset f_i(\tau)$.
(*iii*) $\sigma \in \mathrm{dom}(f_i) \Longrightarrow \rho_S(\sigma) \leq \rho_T(f_i(\sigma))$.
(*iv*) $i < j \Longrightarrow f_i \subseteq f_j$.

Asetetaan $f_0 = \{(\emptyset, \emptyset)\}$. Tällöin ehdot $(i), (ii)$ ja $(iv)$ ovat selvästi voimassa, kun $i = j = 0$ ja oletuksesta $\rho(S) \leq \rho(T)$ seuraa

$$\rho_S(\emptyset) = \rho(S) \leq \rho(T) = \rho_T(\emptyset) = \rho_T(f(\emptyset)).$$

Siis myös ehto $(iii)$ on voimassa, kun $i = 0$. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja oletetaan, että kuvaukset $f_i$ on määritelty kaikilla $i \leq n$ niin, että ehdot $(i)-(iv)$ ovat voimassa. Määritellään jokaista jonoa $\tau \in S, |\tau| = n+1$ kohden alkio $a_\tau \in A$, jolla

$$f_n(\tau \restriction n)\hat{\ } a_\tau \in T \text{ ja } \rho_T(f_n(\tau \restriction n)\hat{\ } a_\tau) \geq \rho_S(\tau). \tag{1.2}$$

Oletetaan $\tau \in S$ ja $|\tau| = n+1$. Merkitään $\sigma = \tau \restriction n$ ja $b = \tau(n) \in A$. Koska $S$ ja $T$ ovat saman joukon $A$ puita, $\infty = \infty(S) = \infty(T)$.
Jos $\rho_T(f_n(\sigma)) < \infty$, induktio-oletuksesta $(iii)$ seuraa $\rho_S(\sigma) \leq \rho_T(f_n(\sigma)) < \infty$ ja tällöin lauseen 1.1.4 kohtien (1) ja (2) nojalla

$$\begin{aligned}\rho_S(\tau) &= \rho_S(\sigma\hat{\ } b) < \rho_S(\sigma) \leq \rho_T(f_n(\sigma)) \\ &= \sup\{\rho_T(f_n(\sigma)\hat{\ } a) + 1 : a \in A \wedge f_n(\sigma)\hat{\ } a \in T\}.\end{aligned}$$

On siis olemassa $a_\tau \in A$, jolla $f_n(\sigma)\hat{\ } a_\tau \in T$ ja $\rho_T(f_n(\sigma)\hat{\ } a_\tau) \geq \rho_S(\tau)$.
Jos taas $\rho_T(f_n(\sigma)) = \infty$, lauseen 1.1.4 (4) nojalla on olemassa $\alpha \in [T]$, joka jatkaa jonoa $f_n(\sigma)$. Merkitään $a_\tau = \alpha(|f_n(\sigma)|)$, jolloin $f_n(\sigma)\hat{\ } a_\tau \in T$ ja $\rho_T(f_n(\sigma)\hat{\ } a_\tau) = \infty \geq \rho_S(\tau)$. Siis kaikille $\tau \in S$, $|\tau| = n+1$ on löydetty ehdot 1.2 täyttävä $a_\tau \in A$. Olkoon

$$f_{n+1} = f_n \cup \{(\tau, f_n(\tau \restriction n)\hat{\ } a_\tau) : \tau \in S \wedge |\tau| = n+1\}.$$

Kuvauksen $f_{n+1}$ määritelmän perusteella ehdot $(i)$ ja $(iv)$ ovat voimassa, kun $i, j \leq n+1$. Induktio-oletuksen nojalla riittää tarkastella ehtoa $(ii)$ vain tapauksessa $|\tau| = n+1$ ja $|\sigma| \leq n$. Jos tällöin $\sigma \subset \tau$, niin induktio-oletuksen ja ehdon $f_n(\tau \restriction n)\hat{\ } a_\tau \in T$ nojalla

$$f_{n+1}(\sigma) = f_n(\sigma) \subseteq f_n(\tau \restriction n) \subset f_n(\tau \restriction n)\hat{\ } a_\tau = f_{n+1}(\tau).$$

Siis ehto $(ii)$ on voimassa kun $i \leq n+1$. Edelleen induktio-oletuksen nojalla riittää tarkastella ehtoa $(iii)$ vain tapauksessa $|\sigma| = n+1$. Tällöin ehdon 1.2 nojalla

$$\rho_S(\sigma) \leq \rho_T(f_n(\sigma \restriction n)\hat{\ } a_\sigma) = \rho_T(f_{n+1}(\sigma)).$$

Siis ehto $(iii)$ on voimassa, kun $i \leq n+1$ ja konstruktio on valmis.

Olkoon $f = \bigcup_n f_n$. Koska $(f_i)_{i<\omega}$ on nouseva jono (ehto $(iv)$) kuvauksia, niin myös $f$ on kuvaus ja ehdon $(i)$ nojalla $\mathrm{dom}(f) = S$. Olkoon $\sigma, \tau \in S$ jonoja, joilla $\sigma \subset \tau$ ja olkoon $n = |\tau|$. Tällöin ehdon $(ii)$ nojalla

$$f(\sigma) = f_n(\sigma) \subset f_n(\tau) = f(\tau).$$

Siis $f$ säilyttää järjestyksen.

($\Leftarrow$) Oletetaan, että kuvaus $f : S \to T$ säilyttää järjestyksen. Voidaan olettaa, että $T$ on hyvinperustettu, sillä muutoin $\rho(T) = \infty \geq \rho(S)$. Tällöin myös $S$ on hyvinperustettu, sillä jos $\alpha \in [S]$, niin koska $f$ säilyttää järjestyksen $f(\alpha \restriction n) \subset f(\alpha \restriction m)$ kaikilla $n < m$ ja ehdolla $\beta \restriction n = f(\alpha \restriction n) \restriction n$ määräytyvä jono $\beta \in {}^\omega A$ kuuluisi puun $T$ runkoon vastoin oletusta $[T] = \emptyset$. Osoitetaan induktiolla ordinaalin $\rho_S(\sigma) \leq \rho(S)$ suhteen, että $\rho_S(\sigma) \leq \rho_T(f(\sigma))$ kaikilla

$\sigma \in S$. Väite on selvä kaikilla $\sigma \in S$, joilla $\rho_S(\sigma) = 0$. Olkoon $0 < \xi \leq \rho(S)$ ja oletetaan $\rho_S(\sigma) \leq \rho_T(f(\sigma))$ kaikilla $\sigma \in S$, joilla $\rho_S(\sigma) < \xi$. Olkoon $\tau \in S$ jono, jolla $\rho_S(\tau) = \xi$. Koska $\xi > 0$, niin on olemassa $a \in A$, jolla $\tau\hat{\ }a \in S$ ja koska $f$ säilyttää järjestyksen, niin $f(\tau\hat{\ }a) \supseteq f(\tau)\hat{\ }b$, jollakin $b \in A$. Koska $S$ on hyvinperustettu, niin $\rho_S(\tau\hat{\ }a) < \rho_S(\tau) = \xi$ ja induktio-oletuksen nojalla $\rho_T(f(\tau\hat{\ }a)) \geq \rho_S(\tau\hat{\ }a)$ kaikilla $a \in A$, joilla $\tau\hat{\ }a \in S$. Näillä huomioilla

$$\begin{aligned}
\rho_T(f(\tau)) &= \sup\{\rho_T(f(\tau)\hat{\ }b) + 1 : b \in A \wedge f(\tau)\hat{\ }b \in T\} \\
&\geq \sup\{\rho_T(f(\tau\hat{\ }a)) + 1 : a \in A \wedge \tau\hat{\ }a \in S\} \\
&\geq \sup\{\rho_S(\tau\hat{\ }a) + 1 : a \in A \wedge \tau\hat{\ }a \in S\} \\
&= \rho_S(\tau).
\end{aligned}$$

Väite seuraa, koska $\rho(S) = \rho_S(\emptyset) \leq \rho_T(f(\emptyset)) \leq \rho_T(\emptyset) = \rho(T)$. □

Jos $T$ on joukon $A$ puu ja $\sigma \in T$, merkitään

$$T_\sigma = \{\tau \in {}^{<\omega}A : \sigma\hat{\ }\tau \in T\}.$$

Selvästi $T_\sigma$ on joukon $A$ puu ja $\rho(T_\sigma) = \rho_T(\sigma)$ kaikilla $\sigma \in T$.

**Lemma 1.1.7.** *Olkoot $S$ ja $T$ joukon $A$ puita ja $T$ hyvinperustettu. Tällöin $\rho(S) < \rho(T)$, jos ja vain jos on olemassa järjestyksen säilyttävä kuvaus $f : S \to T_\sigma$ jollakin $\sigma \in T \setminus \{\emptyset\}$.*

*Todistus.* ($\Rightarrow$) Koska $T$ on hyvinperustettu,

$$\begin{aligned}
\rho(T) &= \rho_T(\emptyset) = \sup\{\rho_T((a)) + 1 : a \in A \wedge (a) \in T\} \\
&= \sup\{\rho(T_{(a)}) + 1 : a \in A \wedge (a) \in T\}.
\end{aligned}$$

Siis $\rho(S) < \rho(T) = \sup\{\rho(T_{(a)}) + 1 : a \in A \wedge (a) \in T\}$, joten on olemassa $a \in A$, jolla $(a) \in T$ ja $\rho(S) \leq \rho(T_{(a)})$. Tällöin lemman 1.1.6 nojalla on olemassa järjestyksen säilyttävä kuvaus $f : S \to T_{(a)}$.
($\Leftarrow$) Jos jollakin $\sigma \in T \setminus \{\emptyset\}$ on olemassa järjestyksen säilyttävä $f : S \to T_\sigma$, niin lemman 1.1.6 ja puun $T$ hyvinperustuvuuden nojalla

$$\rho(S) \leq \rho(T_\sigma) = \rho_T(\sigma) < \rho_T(\emptyset) = \rho(T). \quad \square$$

Jatkossa käsitellään muotoa $({}^{\omega}A_0 \times {}^{\omega}A_1 \times \ldots \times {}^{\omega}A_{n-1})$ olevia avaruuksia. Jotta näiden avaruuksien osajoukkoja voitaisiin käsitellä puiden avulla, otetaan käyttöön jonopuun käsite. Joukko $T \subseteq ({}^{<\omega}A_0 \times {}^{<\omega}A_1 \times \ldots \times {}^{<\omega}A_{n-1})$ on *jonopuu,* jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(1) $T \neq \emptyset$.
(2) $(\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}) \in T \Longrightarrow |\sigma_0| = |\sigma_1| = \ldots = |\sigma_{n-1}|$.
(3) $(\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}) \in T \Longrightarrow \forall i \leq |\sigma_0|((\sigma_0 \restriction i, \ldots, \sigma_{n-1} \restriction i) \in T)$.

Lisäksi määritellään jonopuun $T$ runko

$$[T] = \{(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) : \forall i((\alpha_0 \restriction i, \ldots, \alpha_{n-1} \restriction i) \in T)\}.$$

Jonopuiden ja puiden välillä on luonnollinen vastaavuus. Käsitellään merkintöjen yksinkertaistamiseksi kahden joukon $A$ ja $B$ tuloavaruutta. Määritellään kuvaus $\psi : {}^{<\omega}(A \times B) \to ({}^{<\omega}A \times {}^{<\omega}B)$, jossa kaikilla $k < \omega$

$$((a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_{k-1}, b_{k-1})) \mapsto ((a_0, a_1, \dots, a_{k-1}), (b_0, b_1, \dots, b_{k-1})).$$

Selvästi $\psi$ on bijektio joukkojen ${}^{<\omega}(A \times B)$ ja $\{(\sigma, \tau) \in ({}^{<\omega}A \times {}^{<\omega}B) : |\sigma| = |\tau|\}$ välillä ja $T$ on joukon $A \times B$ puu, jos ja vain jos $\psi(T) \subseteq ({}^{<\omega}A \times {}^{<\omega}B)$ on jonopuu. Jatkossa tuloavaruuden puita käsitellään jonopuina ja niistäkin käytetään yksinkertaisempaa nimitystä puu.

## 1.2 Topologiset peruskäsitteet

Tässä alaluvussa esitellään lyhyesti tärkeimmät tutkielmassa käytettävät topologiset käsitteet. Tarkemmin topologian määritelmät ja tulokset löytyvät teoksesta [Vä2].

**Määritelmä 1.2.1.** *Olkoon $X$ joukko ja $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ kokoelma $X$:n osajoukkoja. $\mathcal{T}$ on $X$:n* topologia, *jos seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:*

(1) $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$.

(2) $(A \in \mathcal{T} \wedge B \in \mathcal{T}) \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$.

(3) $\emptyset \in \mathcal{T} \wedge X \in \mathcal{T}$.

Olkoon $X$ joukko ja $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ joukon $X$ topologia. Paria $(X, \mathcal{T})$ kutsutaan *topologiseksi avaruudeksi.* Jos asiayhteydestä on selvää, mitä joukon $X$ topologiaa käsitellään, puhutaan topologisesta avaruudesta $X$. Topologian $\mathcal{T}$ joukkoja kutsutaan avaruuden $X$ *avoimiksi* joukoiksi ja avointen joukkojen komplementteja kutsutaan avaruuden $X$ *suljetuiksi* joukoiksi. Pisteen $x \in X$ *ympäristö* avaruudessa $X$ on avoin joukko $U \subseteq X$, joka sisältää pisteen $x$. Tällöin joukko $A \subseteq X$ on avoin, jos ja vain jos jokaisella $A$:n pisteellä on ympäristö, joka sisältyy joukkoon $A$. Olkoon $A \subseteq X$. Piste $x \in X$ on joukon $A$ *kosketuspiste,* jos jokainen pisteen $x$ ympäristö kohtaa joukon $A$. Joukon $A$ *sulkeuma* on $A$:n kosketuspisteiden joukko ja sitä merkitään $\overline{A}$ tai $\mathrm{cl}_X(A)$. Tällöin $\overline{A}$ on suppein suljettu joukko, joka sisältää joukon $A$. Joukko $A$ on *tiheä* avaruudessa $X$, jos $\overline{A} = X$. Piste $x$ on joukon $A$ *erakkopiste,* jos $x$:llä on sellainen ympäristö $U \subseteq X$, että $U \cap A = \{x\}$. $A$ on *perfekti* avaruudessa $X$, jos $A$ on suljettu eikä $A$:lla ole erakkopisteitä. Joukon $A$ *sisäpisteiden* joukko on $\mathrm{int}(A) = \bigcup\{U \subseteq A : U \text{ avoin}\}$. Tällöin $\mathrm{int}(A)$ on laajin $A$:n avoin osajoukko. Joukon $A$ *reuna* $\partial A$ käsittää ne pisteet, joiden jokainen ympäristö kohtaa sekä joukon $A$ että joukon $(X \setminus A)$. Siis $\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{int}(A)$. Avaruuden $X$ jono $(x_i)_{i<\omega}$ *suppenee kohti pistettä* $x \in X$, jos jokaiselle pisteen $x$ ympäristölle $U$ on olemassa indeksi $j \in \mathbb{N}$, jolla $x_i \in U$ kaikilla $i > j$. Tällöin $x$ on jonon $(x_i)_{i<\omega}$ raja-arvo ja merkitään $x_i \to x$. Avaruuden $X$ jono *suppenee,* jos on olemassa $x \in X$, jota kohti jono suppenee.

**Määritelmä 1.2.2.** *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Kokoelma $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ on avaruuden $X$* kanta, *jos jokaiselle epätyhjälle $U \in \mathcal{T}$ on olemassa perhe $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, jolla $U = \bigcup \mathcal{U}$.*

Kokoelma $\mathcal{E}$ topologisen avaruuden $X$ avoimia joukkoja on $X$:n *esikanta,* jos perheen $\mathcal{E}$ äärelliset leikkaukset muodostavat avaruuden $X$ kannan.

Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $A \subseteq X$. Tällöin joukolle $A$ määritellään *relatiivitopologia* $\mathcal{T}|A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$, jolla varustettuna $A$ on topologinen avaruus. Jatkossa topologisten avaruuksien osajoukkoja käsitellään topologisina avaruuksina, joiden topologiana on relatiivitopologia.

Olkoon $\xi$ ordinaali ja $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i<\xi}$ perhe topologisia avaruuksia. Tällöin joukolle $\prod_{i<\xi} X_i$ määritellään *tulotopologia,* jonka esikanta on

$$\{\mathrm{pr}_i^{-1}[U] : i < \xi \wedge U \in \mathcal{T}_i\},$$

missä $\mathrm{pr}_i : \prod_{j<\xi} X_j \to X_i$ on projektiokuvaus. Jatkossa topologisten avaruuksien tuloa käsitellään topologisena avaruutena, jonka topologiana on tulotopologia.

Olkoot $(X, \mathcal{T}_X)$ ja $(Y, \mathcal{T}_Y)$ erillisiä topologisia avaruuksia. Avaruuksien $X$ ja $Y$ topologinen summa $X \bigoplus Y$ määritellään topologisena avaruutena $(X \cup Y, \mathcal{T}_+)$, jossa joukko $U \subseteq X \cup Y$ on $\mathcal{T}_+$-avoin, jos ja vain jos $U \cap X$ on $\mathcal{T}_X$-avoin ja $U \cap Y$ on $\mathcal{T}_Y$-avoin.

**Määritelmä 1.2.3.** *Olkoon $X$ joukko. Kuvaus $d : (X \times X) \to [0, \infty[$ on joukon $X$* metriikka, *jos*

$$\begin{aligned} &(1) \quad \forall x \forall y (d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y) \\ &(2) \quad \forall x \forall y (d(x,y) = d(y,x)) \\ &(3) \quad \forall x \forall y \forall z (d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)). \end{aligned}$$

Ehto (3) on *kolmioepäyhtälö.* Olkoon $X$ joukko ja $d$ joukon $X$ metriikka. Määritellään kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$ *avoin kuula* $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$. Topologista avaruutta, jonka kanta on $\{B(x,r) : x \in X \wedge r > 0\}$ merkitään $(X, d)$ ja kutsutaan *metriseksi avaruudeksi.* Tällöin myös $e_r(x,y) = \min\{d(x,y), r\}$ on joukon $X$ metriikka kaikilla $r > 0$ ja määrää saman topologian kuin $d$ [Vä1 : 10.7]. Metrisen avaruuden $(X, d)$ jono $(x_i)_{i<\omega}$ on *Cauchy-jono,* jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ kaikilla $i, j > n$. Metrinen avaruus $(X, d)$ on *täydellinen,* jos jokainen Cauchy-jono suppenee. Tällöin sanotaan myös, että metriikka $d$ on *täydellinen.* Olkoot $A, B \subseteq X$ epätyhjiä. Määritellään joukkojen $A$ ja $B$ välinen *etäisyys* $d(A, B) = \inf\{d(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$. Pisteen $x \in X$ *etäisyys* joukkoon $A$ määritellään lukuna $d(\{x\}, A)$. Joukon $A$ *halkaisija* on $d(A) = \sup\{d(x,y) : x \in A \wedge y \in A\}$.

Jos $\mathcal{T}$ on joukon $X$ topologia ja on olemassa joukon $X$ metriikka, joka määrää topologian $\mathcal{T}$, avaruutta $(X, \mathcal{T})$ sanotaan *metristyväksi.* Jos $\mathcal{T}$ metristyy täydellisellä metriikalla, $(X, \mathcal{T})$ on *täydellisesti metristyvä.* Jos topologisella avaruudella $X$ on numeroituva tiheä osajoukko, $X$:ää sanotaan *separoituvaksi.* Topologinen avaruus, jonka eri pisteillä on erilliset ympäristöt on *Hausdorff*-avaruus.

Topologisten avaruuksien $X$ ja $Y$ välinen kuvaus $f : X \to Y$ on *jatkuva pisteessä* $x \in X$, jos jokaista pisteen $f(x) \in Y$ ympäristöä $V \subseteq Y$ kohden on olemassa pisteen $x$ ympäristö $U \subseteq X$, jolla $f[U] \subseteq V$. Jos $f$ on jatkuva jokaisessa pisteessä, sanotaan että $f$ on *jatkuva*. Yhtäpitävästi kuvaus $f : X \to Y$ on jatkuva, jos $Y$:llä on kanta tai esikanta, jonka joukkojen alkukuvat ovat avoimia avaruudessa $X$ [Vä2:3.3]. Kuvaus $f : X \to Y$ on *avoin,* jos $f[U] \subseteq Y$ on avoin kaikilla avoimilla $U \subseteq X$.

Kuvaus $f : X \to Y$ on *homeomorfismi,* jos $f$ on bijektio ja $f$ sekä $f^{-1}$ ovat jatkuvia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *upotus,* jos se on homeomorfismi avaruudelta $X$ avaruudelle $f[X] \subseteq Y$.

# Luku 2

# Deskriptiivistä joukko-oppia

## 2.1 Puolalaiset avaruudet

Deskriptiivinen joukko-oppi sai alkunsa reaalilukujoukkojen tutkimuksesta. Sittemmin tarkastelun kohteeksi on otettu yleisemmät *puolalaiset avaruudet* eli separoituvat ja täydellisesti metristyvät topologiset avaruudet. Puolalaisten avaruuksien luokalle käytetään merkintää $\mathcal{X}$.

Lauseen [Vä2:12.21] mukaan metristyvällä avaruudella on numeroituva kanta, jos ja vain jos avaruus on separoituva. Erityisesti puolalaisilla avaruuksilla on numeroituva kanta. Todistetaan seuraavaksi eräitä tapauksia, joissa puolalaisuus säilyy tuloissa, topologisessa summassa ja relatiivitopologiaan siirryttäessä.

**Lause 2.1.1.** *Olkoon $0 < \xi \leq \omega$ ja olkoot avaruudet $X_i$ täydellisesti metristyviä kaikilla $i < \xi$. Tällöin tuloavaruus $X = \prod_{i<\xi} X_i$ on täydellisesti metristyvä.*

*Todistus.* Määrätköön kaikilla $i < \xi$ täydellinen metriikka $d_i : X_i \times X_i \to [0, 1]$ avaruuden $X_i$ topologian ([Vä1:10.7]). Tällöin myös $\frac{d_i}{i+1}$ on avaruuden $X_i$ täydellinen metriikka. Olkoon $d : X \times X \to [0, 1]$ kuvaus

$$d(x, y) = \max\left\{\frac{d_i(x_i, y_i)}{i+1} : i < \xi\right\}.$$

Tällöin $d$ on $X$:n metriikka, joka määrää avaruuden $X$ topologian. (Tapaus $\xi < \omega$ : [Vä2:7.2] ja $\xi = \omega$ : lause [Vä2:10.3]). Osoitetaan, että $d$ on täydellinen.

Olkoon $(x^j)_{j<\omega}$ avaruuden $X$ Cauchy-jono. Tällöin

$$\begin{aligned}
&\forall n > 0\, \exists m \forall j, k > m \left( d(x^j, x^k) < \frac{1}{n} \right) \\
\implies &\forall n > 0\, \exists m \forall j, k > m \left( \max \left\{ \frac{d_i(x_i^j, x_i^k)}{i+1} : i < \xi \right\} < \frac{1}{n} \right) \\
\implies &\forall n > 0\, \exists m \forall j, k > m \forall i < \xi \left( d_i(x_i^j, x_i^k) < \frac{i+1}{n} \right) \\
\implies &\forall i < \xi\, \forall n > 0\, \exists m \forall j, k > m \left( d_i(x_i^j, x_i^k) < \frac{1}{n} \right),
\end{aligned}$$

missä viimeinen implikaatio seuraa, koska kiinnittämällä indeksi $i < \xi$ ja luku $n > 0$ voidaan implikaation etujäsenen nojalla valita lukua $(i+1)n > 0$ kohden sellainen $m$, että

$$\forall j, k > m \forall \ell < \xi \left( d_\ell(x_\ell^j, x_\ell^k) < \frac{\ell+1}{(i+1)n} \right),$$

jolloin tapauksessa $\ell = i$ saadaan

$$\forall j, k > m \left( d_i(x_i^j, x_i^k) < \frac{i+1}{(i+1)n} = \frac{1}{n} \right).$$

Siis $(x_i^j)_{j<\omega}$ on avaruuden $(X_i, d_i)$ Cauchy-jono kaikilla $i < \xi$ ja koska $(X_i, d_i)$ on täydellinen, jono $(x_i^j)_{j<\omega}$ suppenee kohti avaruuden $X_i$ alkiota. Olkoon kaikilla $i < \xi$ alkio $y_i \in X_i$ jonon $(x_i^j)_{j<\omega}$ raja-arvo. Tällöin lauseen [Vä2:7.13] mukaan jono $(x^j)_{j<\omega}$ suppenee avaruudessa $X$ kohti alkiota $y = (y_i)_{i<\xi} \in X$. Siis metriikka $d$ on täydellinen. □

**Lause 2.1.2.** *Olkoon $0 < \xi \leq \omega$ ja olkoot avaruudet $X_i$ puolalaisia kaikilla $i < \xi$. Tällöin tuloavaruus $X = \prod_{i<\xi} X_i$ on puolalainen.*

*Todistus.* Koska avaruuksilla $X_i$ on numeroituva kanta, niin lauseen [Vä2:12.12] mukaan myös avaruudella $X$ on numeroituva kanta. Lisäksi lauseen 2.1.1 nojalla $X$ on täydellisesti metristyvä. □

**Lause 2.1.3.** *Olkoot $X$ ja $Y$ erillisiä puolalaisia avaruuksia. Tällöin topologinen summa $X \bigoplus Y$ on puolalainen avaruus.*

*Todistus.* Olkoot $d_X : X \times X \to [0,1]$ ja $d_Y : Y \times Y \to [0,1]$ täydellisiä metriikoita, jotka määräävät avaruuksien $X$ ja $Y$ topologiat. Määritellään kuvaus $d_+ : (X \cup Y) \times (X \cup Y) \to [0,2]$ ehdolla

$$d_+(u,v) = \begin{cases} d_X(u,v), & \text{jos } u, v \in X \\ d_Y(u,v), & \text{jos } u, v \in Y \\ 2, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Koska $d_X$ ja $d_Y$ ovat metriikoita, niin kaikilla $u, v \in X \cup Y$ $d_+(u,v) = d_+(v,u)$ ja $d_+(u,v) = 0$, jos ja vain jos $u = v$. Olkoon $u, v, w \in X \cup Y$. Jos $\{u, v, w\} \subseteq Z$, jollakin $Z \in \{X, Y\}$, niin $d_+(u,w) = d_Z(u,w) \leq d_Z(u,v) + d_Z(v,w) = d_+(u,v) + d_+(v,w)$, joten kolmioepäyhtälö on voimassa. Oletetaan $\{u, v, w\} \cap X \neq \emptyset$ ja $\{u, v, w\} \cap Y \neq \emptyset$. Tällöin ainakin toinen luvuista $d_+(u,v)$ ja $d_+(v,w)$ on 2 ja koska $d_+(u,w) \leq 2 \leq d_+(u,v) + d_+(v,w)$, niin kolmioepäyhtälö pätee myös tässä tapauksessa. Siis $d_+$ on joukon $X \cup Y$ metriikka.

Olkoon $u \in X \cup Y$ ja $0 < r \leq 2$. Jos $u \in X$, niin $B_+(u,r) = B_X(u,r)$ ja jos $u \in Y$, niin $B_+(u,r) = B_Y(u,r)$. Jos $r > 2$, niin $B_+(u,r) = X \cup Y$. Siis avaruuden $(X \cup Y, d_+)$ avoimet kuulat ovat

$$\{B_X(x,r) : x \in X \wedge r > 0\} \cup \{B_Y(y,r) : y \in Y \wedge r > 0\} \cup \{X \cup Y\},$$

joten avaruuden $(X \cup Y, d_+)$ topologia muodostuu joukoista $U \cup V$, missä $U \subseteq X$ on avoin avaruudessa $X$ ja $V \subseteq Y$ on avoin avaruudessa $Y$. Tämä osoittaa $(X \cup Y, d_+) = X \bigoplus Y$.

Jos $(u_i)_{i<\omega}$ on avaruuden $(X \cup Y, d_+)$ Cauchy-jono, niin on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $d_+(u_i, u_j) < 2$, kun $i, j > n$. Tällöin joko $\{u_i : i > n\} \subseteq X$ tai $\{u_i : i > n\} \subseteq Y$. Tarkastellaan tapausta $\{u_i : i > n\} \subseteq X$. Tällöin $d_+(u_i, u_j) = d_X(u_i, u_j)$ kaikilla $i, j > n$, joten $(u_i)_{i>n}$ on avaruuden $(X, d_X)$ Cauchy-jono. Koska $d_X$ on täydellinen metriikka, niin on olemassa $u \in X$, jota kohti jono $(u_i)_{i>n}$ suppenee metriikassa $d_X$. Koska $d_+(v,w) = d_X(v,w)$ kaikilla $v, w \in X$, niin jono $(u_i)_{i>n}$ suppenee kohti alkiota $u \in X$ myös metriikassa $d_+$. Vastaavasti jos $\{u_i : i > n\} \subseteq Y$, niin löydetään $u \in Y$, jota kohti jono $(u_i)_{i>n}$ suppenee metriikassa $d_+$. Siis jokainen Cauchy-jono suppenee ja avaruus $X \bigoplus Y = (X \cup Y, d_+)$ on täydellinen.

Osoitetaan vielä avaruuden $X \bigoplus Y$ separoituvuus. Olkoot $D_X \subseteq X$ ja $D_Y \subseteq Y$ avaruuksien $X$ ja $Y$ numeroituvia tiheitä osajoukkoja. Merkitään $D_+ = D_X \cup D_Y$. Tällöin $D_+ \subseteq X \cup Y$ on numeroituva. Olkoon $G \subseteq X \cup Y$ avoin epätyhjä joukko avaruudessa $X \bigoplus Y$. Tällöin $G = U \cup V$, jollain $d_X$-avoimella $U \subseteq X$ ja $d_Y$-avoimella $V \subseteq Y$, joista ainakin toinen on epätyhjä. Tällöin ainakin toinen joukoista $U \cap D_X$ ja $V \cap D_Y$ on epätyhjä, joten

$$G \cap D_+ = (U \cup V) \cap (D_X \cup D_Y) = (U \cap D_X) \cup (V \cap D_Y) \neq \emptyset.$$

Siis $D_+$ on numeroituva tiheä joukko avaruudessa $X \bigoplus Y$. □

Topologisen avaruuden osajoukkoa sanotaan *$G_\delta$-joukoksi,* jos se voidaan esittää avointen joukkojen numeroituvana leikkauksena ja *$F_\sigma$-joukoksi,* jos se voidaan esittää suljettujen joukkojen numeroituvana yhdisteenä.

**Lause 2.1.4.** (*i*) *Metristyvän avaruuden suljetut joukot ovat $G_\delta$-joukkoja.*
(*ii*) *Metristyvän avaruuden avoimet joukot ovat $F_\sigma$-joukkoja.*
(*iii*) *$G_\delta$-joukkojen äärellinen yhdiste ja numeroituva leikkaus ovat $G_\delta$-joukkoja.*
(*iv*) *$F_\sigma$-joukkojen äärellinen leikkaus ja numeroituva yhdiste ovat $F_\sigma$-joukkoja.*

*Todistus.* (*i*) Olkoon $X$ metristyvä avaruus ja $d$ avaruuden $X$ topologian määräävä metriikka. Olkoon $F \subseteq X$ suljettu. Koska $\emptyset = \bigcap_n \emptyset$, voidaan olettaa

$F \neq \emptyset$. Olkoon $G_n = \{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n+1}\}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että $G_n \subseteq X$ on avoin kaikilla $n$ ja $F = \bigcap_n G_n$, jolloin $F$ on $G_\delta$-joukko. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in G_n$. Koska $d(x, F) < \frac{1}{n+1}$, on olemassa $z \in F$, jolla $d(x, z) < \frac{1}{n+1}$. Olkoon $r = \frac{1}{n+1} - d(x, z) > 0$ ja $y \in B(x, r)$. Tällöin $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < r + d(x, z) = \frac{1}{n+1}$, joten $d(y, F) < \frac{1}{n+1}$ ja $y \in G_n$. Siis $B(x, r) \subseteq G_n$ ja $G_n$ on avoin. Selvästi $F \subseteq G_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten $F \subseteq \bigcap_n G_n$. Olkoon $x \in \bigcap_n G_n$. Tällöin $d(x, F) < \frac{1}{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten $d(x, F) = 0$ ja $x \in \overline{F} = F$. Siis myös $\bigcap_n G_n \subseteq F$ eli $F = \bigcap_n G_n$.

$(ii)$ Olkoon $X$ metristyvä avaruus ja $G \subseteq X$ avoin. Kohdan $(i)$ nojalla $(X \setminus G) = \bigcap_n G_n$ joillain avoimilla joukoilla $G_n \subseteq X$. Merkitään $F_n = X \setminus G_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, jolloin joukot $F_n$ ovat suljettuja ja de Morganin lain perusteella

$$G = X \setminus (X \setminus G) = X \setminus \bigcap_n G_n = \bigcup_n (X \setminus G_n) = \bigcup_n F_n$$

on $F_\sigma$-joukko.

$(iv)$ Olkoot $A$ ja $B$ topologisen avaruuden $X$ $F_\sigma$-joukkoja. Tällöin on olemassa avaruuden $X$ suljettujen joukkojen perheet $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ja $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$, joilla $A = \bigcup_i A_i$ ja $B = \bigcup_j B_j$. Koska $A_i \cap B_j \subseteq X$ on suljettu kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$, niin

$$A \cap B = \bigcup_i A_i \cap \bigcup_j B_j = \bigcup_i \bigcup_j (A_i \cap B_j) = \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} (A_i \cap B_j)$$

on $F_\sigma$-joukko, sillä $\mathbb{N}^2$ on numeroituva. Samoin jos $A_i = \bigcup_j F_j^i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, missä $F_j^i \subseteq X$ on suljettu kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$, niin

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_i \bigcup_j F_j^i = \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} F_j^i$$

on $F_\sigma$-joukko.

$(iii)$ Seuraa de Morganin laeista ja kohdasta $(iv)$. □

Koska puolalaisen avaruuden $X$ suljettu osajoukko $F$ on täydellisesti metristyvä [Vä2:10.6] ja sillä on numeroituva kanta, niin $F$ on puolalainen avaruus. Osoitetaan, että yleisesti puolalaisen avaruuden $G_\delta$-joukon relatiivitopologia on puolalainen, vaikka avaruuden alkuperäisen metriikan rajoittuma $G_\delta$-joukkoon ei välttämättä ole täydellinen.

**Lause 2.1.5.** *Olkoon $X$ puolalainen avaruus ja $A \subseteq X$. Tällöin joukon $A$ relatiivitopologia on puolalainen, jos ja vain jos $A$ on $G_\delta$-joukko.*

*Todistus.* $(\Rightarrow)$ Oletetaan, että joukon $A$ relatiivitopologia on puolalainen. Olkoon $d : A \times A \to [0, \infty[$ avaruuden $A$ topologian määräävä täydellinen metriikka. Olkoon $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ avaruuden $X$ kanta ja

$$B = \mathrm{cl}_X(A) \cap \bigcap_{m>0} \bigcup \{V_i : i \in \mathbb{N} \wedge A \cap V_i \neq \emptyset \wedge d(A \cap V_i) < \frac{1}{m}\}.$$

Lauseen 2.1.4 ($i$) mukaan $\mathrm{cl}_X(A) \subseteq X$ on $G_\delta$-joukko, joten $B$ on $G_\delta$-joukkojen leikkauksena $G_\delta$-joukko avaruudessa $X$. Voidaan olettaa $A \neq \emptyset$.

Osoitetaan $A \subseteq B$. Olkoon $x \in A$ ja $m > 0$. Koska $B_d(x, \frac{1}{2m+1}) = A \cap U$, jollakin avoimella $U \subseteq X$, niin on olemassa $i_m \in \mathbb{N}$, jolla $x \in V_{i_m} \subseteq U$. Tällöin $x \in A \cap V_{i_m}$ ja $d(A \cap V_{i_m}) \leq d(A \cap U) < \frac{1}{m}$. Siis $x \in B$.

Osoitetaan $B \subseteq A$. Olkoon $x \in B$ ja olkoon kaikilla $m > 0$ indeksi $i_m \in \mathbb{N}$ sellainen, että $x \in V_{i_m}$ ja $A \cap V_{i_m} \neq \emptyset$ sekä $d(A \cap V_{i_m}) < \frac{1}{m}$. Koska $V_{i_1} \cap \ldots \cap V_{i_m} \subseteq X$ on pisteen $x$ ympäristö ja $x \in \mathrm{cl}_X(A)$, niin $A \cap V_{i_1} \cap \ldots \cap V_{i_m} \neq \emptyset$. Olkoon $y_m \in A \cap V_{i_1} \cap \ldots V_{i_m}$ kaikilla $m > 0$. Tällöin $d(y_k, y_\ell) < d(A \cap V_{i_k}) < \frac{1}{k}$ kaikilla $\ell \geq k > 0$. Siis $(y_m)_{m>0}$ on Cauchy-jono metriikassa $d$ ja täydellisyyden nojalla suppenee kohti erästä alkiota $y \in A$. Koska $x \in \mathrm{cl}_X(A)$, on olemassa joukon $A$ jono $(x_i)_{i>0}$, joka suppenee kohti alkiota $x$ avaruudessa $X$. Koska $V_{i_m} \subseteq X$ on pisteen $x$ ympäristö, voidaan olettaa $x_m \in A \cap V_{i_m}$ kaikilla $m > 0$ tarvittaessa siirtymällä sopivaan osajonoon. Tällöin $d(x_m, y_m) \leq d(A \cap V_{i_m}) < \frac{1}{m}$ kaikilla $m > 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan sellainen $k > \frac{2}{\varepsilon}$, että $d(y_i, y) < \frac{\varepsilon}{2}$, kun $i > k$. Tällöin $d(x_i, y) \leq d(x_i, y_i) + d(y_i, y) < \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, kun $i > k$. Siis $x_i \to y$. Koska avaruuden $X$ jono $(x_i)_{i>0}$ voi supeta korkeintaan yhtä pistettä kohti [Vä1:11.4], niin $x = y \in A$. Siis $A = B$ on $G_\delta$-joukko avaruudessa $X$.

($\Leftarrow$) Olkoon $d : X \times X \to [0, \infty[$ avaruuden $X$ topologian määräävä täydellinen metriikka ja $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ perhe avaruuden $X$ avoimia joukkoja, jolla $A = \bigcap_i G_i$. Määritellään kuvaus $f : A \to X \times \mathbb{R}^\mathbb{N}$ ehdolla

$$f(x) = \left( x, \frac{1}{d(x, X \setminus G_0)}, \frac{1}{d(x, X \setminus G_1)}, \ldots \right).$$

Koska kaikilla $i$ joukko $X \setminus G_i$ on suljettu avaruudessa $X$, niin $d(x, X \setminus G_i) > 0$ kaikilla $x \in A$ ja $i \in \mathbb{N}$, joten kuvaus $f$ on hyvin määritelty. Selvästi $f$ on jatkuva injektio ja koska jatkuvan kuvauksen $\mathrm{pr}_X : X \times \mathbb{R}^\mathbb{N} \to X$ rajoittuma joukkoon $f[A]$ on kuvauksen $f$ käänteiskuvaus, niin $f$ on upotus. Osoitetaan, että $f[A] \subseteq X \times \mathbb{R}^\mathbb{N}$ on suljettu, jolloin $f[A]$ on puolalainen avaruus. Koska $A$ ja $f[A]$ ovat homeomorfiset, niin tällöin myös $A$ on puolalainen avaruus.

Voidaan olettaa $A \neq \emptyset$. Olkoon $(x, r_0, r_1, \ldots) \in \overline{f[A]}$ ja olkoon $(x_j)_{j<\omega}$ sellainen jono avaruudessa $A$, että

$$f(x_j) = \left( x_j, \frac{1}{d(x_j, X \setminus G_0)}, \frac{1}{d(x_j, X \setminus G_1)}, \ldots \right) \to (x, r_0, r_1, \ldots), \text{ kun } j \to \infty.$$

Tällöin $x_j \to x$ ja $1/d(x_j, X \setminus G_i) \to r_i$ kaikilla $i$, joten erityisesti $d(x_j, X \setminus G_i) \not\to 0$. Toisaalta etäisyysfunktion jatkuvuuden perusteella $d(x_j, X \setminus G_i) \to d(x, X \setminus G_i)$, joten $d(x, X \setminus G_i) > 0$ ja $x \in G_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Siis $x \in A$ ja $(x, r_0, r_1, \ldots) = f(x) \in f[A]$. □

Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ standarditopologiallaan varustettuna on täydellisesti metristyvä [Vä1:12.5] ja separoituva ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$), joten suljettu yksikköväli $\mathbb{I} = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ on puolalainen avaruus ja lauseen 2.1.2 mukaan tuloavaruus $\mathbb{H} = {}^\omega\mathbb{I}$ on puolalainen. Avaruutta $\mathbb{H}$ kutsutaan *Hilbertin kuutioksi* ja sillä on seuraava universaalisuusominaisuus.

**Lause 2.1.6.** *Olkoon $X$ puolalainen avaruus. Tällöin Hilbertin kuutiolla $\mathbb{H}$ on avaruuden $X$ kanssa homeomorfinen osajoukko.*

*Todistus.* Voidaan olettaa $X \neq \emptyset$. Olkoon $d_X : X \times X \to [0,1[$ avaruuden $X$ topologian määräävä täydellinen metriikka ja $d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ avaruuden $\mathbb{H}$ topologian määräävä metriikka

$$d_{\mathbb{H}}((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \max\left\{\frac{\min\{|x_i - y_i|, 1\}}{i+1} : i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Olkoon $D \subseteq X$ numeroituva tiheä osajoukko $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Määritellään kuvaus $f : X \to \mathbb{H}$ ehdolla $f(x) = (d_X(x, x_0), d_X(x, x_1), \ldots)$ ja osoitetaan, että $f$ on upotus.

Olkoon $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$. Jos $y \in X$ ja $d_X(x, y) < \varepsilon$, niin lauseen [Väl:2.10] mukaan $|d_X(x, x_i) - d_X(y, x_i)| \leq d_X(x, y) < \varepsilon$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, joten

$$d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) \leq \max\left\{\frac{|d_X(x, x_i) - d_X(y, x_i)|}{i+1} : i \in \mathbb{N}\right\} < \varepsilon.$$

Siis $f$ on jatkuva.

Oletetaan $y \in (X \setminus \{x\})$ ja olkoon $r = d_X(x, y) > 0$. Koska $D$ on tiheä avaruudessa $X$, on olemassa $i \in \mathbb{N}$, jolla $d_X(x, x_i) < \frac{r}{2}$. Tällöin $d_X(y, x_i) \geq d_X(x, y) - d_X(x, x_i) > \frac{r}{2} > d_X(x, x_i)$, joten $f(x) \neq f(y)$. Siis $f$ on injektio.

Osoitetaan $f^{-1}$ jatkuvaksi kuvaukseksi joukossa $f[X]$. Olkoon $x \in X, \varepsilon \in ]0,1[$ ja $i \in \mathbb{N}$ indeksi, jolla $d_X(x, x_i) < \frac{\varepsilon}{3}$. Jos $y \in X$ ja $d_X(y, x_i) > \frac{2\varepsilon}{3}$, niin

$$d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) \geq \frac{|d_X(x, x_i) - d_X(y, x_i)|}{i+1} > \frac{\varepsilon}{3(i+1)}.$$

Siis jos $y \in X$ ja $d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3(i+1)}$, niin $d_X(y, x_i) \leq \frac{2\varepsilon}{3}$ ja $d_X(x, y) \leq d_X(x, x_i) + d_X(y, x_i) < \varepsilon$. Täten $f^{-1}$ on jatkuva kuvaus joukossa $f[X]$. $\square$

Olkoon $A$ joukko. Tarkastellaan joukkoa ${}^{\omega}A = \prod_{i<\omega} A$ topologisena avaruutena, jonka topologiana on $A$:n diskreetin topologian tulotopologia. Lauseen 2.1.1 todistuksesta käy ilmi, että ${}^{\omega}A$ metristyy täydellisellä metriikalla

$$d(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{kun } \alpha \neq \beta \text{ ja } n = \min\{i < \omega : a_i \neq b_i\}. \\ 0, & \text{kun } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Metriikan määräämät epätyhjät kuulaympäristöt

$$N_\sigma = \{\alpha \in {}^{\omega}A : \sigma \subset \alpha\}, \text{ missä } \sigma \in {}^{<\omega}A$$

muodostavat avaruuden ${}^{\omega}A$ *standardikannan* $\{N_\sigma\}_{\sigma\in{}^{<\omega}A}$. Jos $A$ on numeroituva, niin $A$ diskreettinä avaruutena on puolalainen ja lauseen 2.1.2 mukaan myös ${}^{\omega}A$ on puolalainen avaruus. Tällöin yhden tiheän numeroituvan osajoukon muodostavat jonot, joiden loppuosa on vakio:

$$\{\alpha \in {}^{\omega}A : \exists n(\forall m \geq n(a_m = a_n))\}.$$

Jatkossa avaruuteen ${}^{\omega}A$ oletetaan aina joukon $A$ diskreetin topologian tulotopologia. Seuraava tulos osoittaa suljettujen joukkojen ja puiden runkojen välisen yhteyden.

**Lause 2.1.7.** *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $(A_i)_{i \leq n}$ perhe joukkoja. Tällöin $F \subseteq \prod_{i \leq n} {}^{\omega}A_i$ on suljettu, jos ja vain jos $F = [T]$ jollakin puulla $T \subseteq \prod_{i \leq n} {}^{<\omega}A_i$.*

*Todistus.* Merkintöjen yksinkertaistamiseksi käsitellään tapaus $n = 1$. Merkitään $A = A_0$ ja $B = A_1$.

($\Rightarrow$) Olkoon $F \subseteq ({}^{\omega}A \times {}^{\omega}B)$ suljettu. Koska $\emptyset = [\{(\emptyset, \emptyset)\}]$, voidaan olettaa $F \neq \emptyset$. Määritellään

$$T = \{(\alpha \upharpoonright i, \beta \upharpoonright i) \in ({}^{<\omega}A \times {}^{<\omega}B) : i < \omega \wedge (\alpha, \beta) \in F\}.$$

Selvästi $T$ on puu. Jos $(\alpha, \beta) \in F$, niin $(\alpha \upharpoonright i, \beta \upharpoonright i) \in T$ kaikilla $i < \omega$, joten $(\alpha, \beta) \in [T]$. Jos taas $(\alpha, \beta) \in ({}^{\omega}A \times {}^{\omega}B) \setminus F$, niin koska $F$:n komplementti on avoin, on olemassa $i < \omega$, jolla $N_{(\alpha \upharpoonright i, \beta \upharpoonright i)} \subseteq ({}^{\omega}A \times {}^{\omega}B) \setminus F$. Siis $(\alpha \upharpoonright i, \beta \upharpoonright i) \notin T$ ja $(\alpha, \beta) \notin [T]$. On osoitettu $F = [T]$.

($\Leftarrow$) Olkoon $F = [T]$ jollakin puulla $T \subseteq ({}^{<\omega}A \times {}^{<\omega}B)$. Oletetaan $(\alpha, \beta) \in ({}^{\omega}A \times {}^{\omega}B) \setminus F$. Koska $(\alpha, \beta) \notin [T]$, on olemassa $i < \omega$, jolla $(\alpha \upharpoonright i, \beta \upharpoonright i) \notin T$. Tällöin $N_{(\alpha \upharpoonright i, \beta \upharpoonright i)} \subseteq ({}^{\omega}A \times {}^{\omega}B) \setminus [T] = ({}^{\omega}A \times {}^{\omega}B) \setminus F$, joten alkiolla $(\alpha, \beta)$ on ympäristö, joka sisältyy joukon $F$ komplementtiin. Siis $F$ on suljettu. $\square$

Topologisen avaruuden $X$ osajoukko $A$ on $X$:n *retrakti,* jos on olemassa jatkuva kuvaus $f : X \to A$, jolla $f \upharpoonright A = \mathrm{id}_A$.

**Lause 2.1.8.** *Olkoon $A$ joukko. Jokainen epätyhjä suljettu $F \subseteq {}^{\omega}A$ on avaruuden ${}^{\omega}A$ retrakti.*

*Todistus.* Oletetaan, että $F \subseteq {}^{\omega}A$ on epätyhjä ja suljettu. Valitaan jokaiselle $\sigma \in {}^{<\omega}A$, jolla $F \cap N_\sigma \neq \emptyset$, alkio $\beta_\sigma \in F \cap N_\sigma$. Määritellään kuvaus $f : {}^{\omega}A \to F$

$$f(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{jos } \alpha \in F. \\ \beta_{\alpha \upharpoonright m}, & \text{jos } \alpha \notin F, \text{ missä } m = \max\{i < \omega : F \cap N_{\alpha \upharpoonright i} \neq \emptyset\}. \end{cases}$$

Jos $\alpha \notin F$, niin koska $F$ on suljettu, on olemassa $n \in \mathbb{N}$, jolla $d(\alpha, F) > \frac{1}{n+1}$. Tällöin $F \cap N_{\alpha \upharpoonright i} = \emptyset$ kaikilla $i \geq n$. Lisäksi $F \cap N_{\alpha \upharpoonright 0} = F \cap N_\emptyset = F \cap {}^{\omega}A = F \neq \emptyset$, joten $0 \leq \max\{i < \omega : F \cap N_{\alpha \upharpoonright i} \neq \emptyset\} \leq n$ ja kuvaus $f$ on hyvin määritelty.

Osoitetaan, että $f$ on jatkuva jokaisessa avaruuden ${}^{\omega}A$ pisteessä. Olkoon $\alpha \in F$ ja $i < \omega$, jolloin $N_{\alpha \upharpoonright i}$ on kuvapisteen $f(\alpha) = \alpha$ ympäristö, jonka halkaisija on $\frac{1}{i+1}$. Osoitetaan $f[N_{\alpha \upharpoonright i}] \subseteq N_{\alpha \upharpoonright i}$, jolloin $f$ on jatkuva pisteessä $\alpha$. Olkoon $\gamma \in N_{\alpha \upharpoonright i}$. Jos $\gamma \in F$, niin $f(\gamma) = \gamma \in N_{\alpha \upharpoonright i}$. Jos $\gamma \notin F$, niin koska $\alpha \in F \cap N_{\gamma \upharpoonright i}$, joukko $F \cap N_{\gamma \upharpoonright i}$ on epätyhjä ja kuvauksen $f$ määritelmästä seuraa $f(\gamma) = \beta_{\gamma \upharpoonright m}$ jollakin $m \geq i$, joten

$$f(\gamma) \in N_{\gamma \upharpoonright m} \subseteq N_{\gamma \upharpoonright i} = N_{\alpha \upharpoonright i}.$$

Oletetaan $\alpha \in {}^{\omega}A \setminus F$. Edellä todetun nojalla on olemassa $m = \max\{i < \omega : F \cap N_{\alpha \upharpoonright i} \neq \emptyset\}$. Tällöin $f[N_{\alpha \upharpoonright (m+1)}] = \{\beta_{\alpha \upharpoonright m}\} = \{f(\alpha)\}$, joten $f$ on jatkuva pisteessä $\alpha$. Selvästi $f \upharpoonright A = \mathrm{id}_A$. $\square$

Keskeisiä puolalaisia avaruuksia ovat *Bairen avaruus* $\mathcal{N} = {}^{\omega}\mathbb{N}$ ja *Cantorin avaruus* $\mathcal{C} = {}^{\omega}2$. Tihonovin lauseen [Vä2:18.4] perustella $\mathcal{C}$ on kompakti.

**Lemma 2.1.9.** *Avaruudet $\mathcal{C}$ ja ${}^{\omega}\mathcal{C}$ ovat homeomorfiset.*

*Todistus.* Olkoon $\phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ bijektio $(n, m) \mapsto (2^n(2m+1) - 1)$ ja olkoon $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ kuvauksen $\phi$ käänteiskuvaus. Määritellään $f : \mathcal{C} \to {}^{\omega}\mathcal{C}$ ehdolla

$$\gamma \mapsto (\gamma_j)_{j<\omega}, \text{ missä } \gamma_j(i) = \gamma(\phi(j,i)) \text{ kaikilla } i, j \in \mathbb{N}.$$

Koska $\phi$ on bijektio, niin myös $f$ on bijektio. Olkoon $\sigma \in {}^{<\omega}2$ ja $j \in \mathbb{N}$. Olkoon $E = \mathrm{pr}_j^{-1}[N_\sigma] \subseteq {}^{\omega}\mathcal{C}$ ja kiinnitetään $\gamma \in f^{-1}[E]$. Olkoon $m = |\sigma|$ ja $\nu \in N_{\gamma\restriction(\phi(j,m))}$. Tällöin $(f(\nu))_j(i) = \nu(\phi(j,i)) = \gamma(\phi(j,i)) = \sigma(i)$ kaikilla $i < m = |\sigma|$. Siis $f(\nu) \in E$ ja $N_{\gamma\restriction(\phi(j,m))} \subseteq f^{-1}[E]$, joten $f^{-1}[E]$ on avoin. Koska ${}^{\omega}\mathcal{C}$:llä on esikanta, jonka alkukuvat ovat avoimia, niin $f$ on jatkuva.

Olkoon $(\gamma_j)_{j<\omega} \in f[N_\sigma]$ ja olkoon $m = \max\{\psi_i(n) : i \in \{0,1\} \wedge n \leq |\sigma|\} + 1$. Olkoon

$$(\nu_j)_{j<\omega} \in \bigcap_{j<m} \mathrm{pr}_j^{-1}[N_{\gamma_j\restriction m}].$$

Osoitetaan $(\nu_j)_{j<\omega} \in f[N_\sigma]$, jolloin $f$ on avoin kuvaus. Selvästi $\nu_j(i) = \gamma_j(i)$ kaikilla $j, i < m$. Erityisesti jos $\phi(j,i) < |\sigma|$, niin $i, j < m$ ja $\nu_j(i) = \gamma_j(i) = \sigma(\phi(j,i))$. Siis $(\nu_j)_{j<\omega} \in f[N_\sigma]$. $\square$

Seuraavat tulokset osoittavat, miksi avaruuksilla $\mathcal{N}$ ja $\mathcal{C}$ on keskeinen rooli puolalaisten avaruuksien luokassa.

**Lause 2.1.10.** *Olkoon $(X, d)$ täydellinen metrinen avaruus. Jos $(F_i)_{i<\omega}$ on laskeva jono avaruuden $X$ suljettuja epätyhjiä osajoukkoja, joilla $d(F_i) \to 0$, kun $i \to \infty$, niin $\bigcap_{i<\omega} F_i$ on yksiö.*

*Todistus.* Olkoon $x_i \in F_i$ kaikilla $i < \omega$. Koska jono $(F_i)_{i<\omega}$ on laskeva, niin $x_j \in F_i$ kaikilla $j \geq i \geq 0$, joten $d(x_j, x_k) \leq d(F_i)$, kun $j, k \geq i$. Koska $d(F_i) \to 0$, niin $(x_i)_{i<\omega}$ on avaruuden $X$ Cauchy-jono ja $X$:n täydellisyyden nojalla suppenee kohti erästä pistettä $x \in X$. Koska $\{x_j : j \geq i\} \subseteq F_i$ ja $F_i$ on suljettu, niin joukon $\{x_j : j \geq i\}$ kosketuspiste $x$ kuuluu joukkoon $F_i$ kaikilla $i < \omega$. Siis $x \in \bigcap_{i<\omega} F_i$. Jos $y \in \bigcap_{i<\omega} F_i$, niin $d(x, y) \leq d(F_i)$ kaikilla $i < \omega$, joten $d(x, y) = 0$ ja $x = y$. Siis $\bigcap_{i<\omega} F_i = \{x\}$. $\square$

**Määritelmä 2.1.11.** *Olkoon $(X, d)$ puolalainen avaruus ja $A$ joukko. Avaruuden $X$ osajoukkojen kokoelmaa $(F_\sigma)_{\sigma\in{}^{<\omega}A}$ sanotaan avaruuden $X$* Lusinin perheeksi, *jos*

$$(i)\ \forall\sigma\forall a \in A(\overline{F_{\sigma^\frown a}} \subseteq F_\sigma),$$
$$(ii)\ \forall\alpha \in {}^{\omega}A(d(F_{\alpha\restriction i}) \to 0, \text{ kun } i \to \infty),$$
$$(iii)\ \forall\sigma\forall\tau(\sigma \perp \tau \to F_\sigma \cap F_\tau = \emptyset).$$

**Lemma 2.1.12.** *Olkoon $X$ puolalainen avaruus, $A$ joukko ja $(F_\sigma)_{\sigma\in{}^{<\omega}A}$ avaruuden $X$ Lusinin perhe. Tällöin*

(1) *Joukko $D = \{\alpha \in {}^\omega A : \forall i(F_{\alpha\restriction i} \neq \emptyset)\} \subseteq {}^\omega A$ on suljettu.*

(2) *Joukko $\bigcap_{i<\omega} F_{\alpha\restriction i} = \bigcap_{i<\omega} \overline{F_{\alpha\restriction i}}$ on yksiö kaikilla $\alpha \in D$.*

(3) *Ehdolla $\{f(\alpha)\} = \bigcap_{i<\omega} F_{\alpha\restriction i}$ määräytyvä kuvaus $f : D \to X$ on jatkuva injektio.*

(4) *Jos $F_\emptyset = X$ ja $F_\sigma = \bigcup_{a\in A} F_{\sigma\hat{}a}$ kaikilla $\sigma \in {}^{<\omega}A$, niin $f$ on surjektio.*

*Todistus.* (1) Jos $F_\emptyset = \emptyset$, niin $D = \emptyset$ on suljettu. Jos $F_\emptyset \neq \emptyset$, niin $T = \{\sigma \in {}^{<\omega}A : F_\sigma \neq \emptyset\}$ on ehdon $(i)$ nojalla joukon $A$ puu ja $D = [T]$. Lauseen 2.1.7 nojalla $D \subseteq {}^\omega A$ on suljettu.

(2)
$$\bigcap_{i<\omega} F_{\alpha\restriction i} \subseteq \bigcap_{i<\omega} \overline{F_{\alpha\restriction i}} \subseteq \bigcap_{i\geq 1} \overline{F_{\alpha\restriction i}} \subseteq \bigcap_{i<\omega} F_{\alpha\restriction i},$$

missä viimeinen inkluusio seuraa ehdosta $(i)$. Siis $\bigcap_{i<\omega} F_{\alpha\restriction i} = \bigcap_{i<\omega} \overline{F_{\alpha\restriction i}}$. Jos $\alpha \in D$, niin $\overline{F_{\alpha\restriction i}}$ on epätyhjä suljettu joukko kaikilla $i < \omega$ ja ehtojen $(i)$ ja $(ii)$ mukaan jono $(\overline{F_{\alpha\restriction i}})_{i<\omega}$ on laskeva ja halkaisijaltaan häviävä. Lauseen 2.1.10 nojalla joukko $\bigcap_{i<\omega} \overline{F_{\alpha\restriction i}}$ on yksiö.

(3) Olkoon $\alpha \in D$ ja $\varepsilon > 0$. Ehdon $(ii)$ nojalla on olemassa $i < \omega$, jolla $d(F_{\alpha\restriction i}) < \varepsilon$. Tällöin $D \cap N_{\alpha\restriction i}$ on alkion $\alpha$ ympäristö avaruudessa $D$ ja

$$f[D \cap N_{\alpha\restriction i}] \subseteq F_{\alpha\restriction i} \subseteq B(f(\alpha), \varepsilon),$$

joten $f$ on jatkuva. Olkoon $\beta \in D$ ja $\beta \neq \alpha$. Olkoon $m \in \mathbb{N}^*$ pienin luku, jolla $\alpha(m-1) \neq \beta(m-1)$. Tällöin $\alpha \restriction m \neq \beta \restriction m$, joten ehdon $(iii)$ perusteella $F_{\alpha\restriction m} \cap F_{\beta\restriction m} = \emptyset$. Koska $f(\alpha) \in F_{\alpha\restriction m}$ ja $f(\beta) \in F_{\beta\restriction m}$, niin $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Siis $f$ on injektio.

(4) Olkoon $x \in X$. Konstruoidaan jonot $\sigma_n \in {}^nA$ kaikilla $n < \omega$ niin, että $x \in F_{\sigma_n}$ ja $\sigma_n \subset \sigma_m$ kun $m > n \geq 0$. Tällöin $\alpha = \bigcup_n \sigma_n \in {}^\omega A$ ja $x \in \bigcap_n F_{\alpha\restriction n}$, joten $f(\alpha) = x$ ja $f$ on surjektio. Konstruktio etenee rekursiivisesti luvun $n$ suhteen. Olkoon $\sigma_0 = \emptyset$. Koska $F_\emptyset = X$, niin $x \in F_{\sigma_0}$. Olkoon $n \geq 1$ ja oletetaan, että jonot $\sigma_k$ on konstruoitu kaikilla $k < n$. Tällöin $x \in F_{\sigma_{n-1}}$ ja koska oletuksen mukaan $F_{\sigma_{n-1}} = \bigcup_{a\in A} F_{\sigma_{n-1}\hat{}a}$, niin on olemassa $a \in A$, jolla $x \in F_{\sigma_{n-1}\hat{}a}$. Olkoon $\sigma_n = \sigma_{n-1}\hat{}a$. $\square$

Kohdan (3) kuvausta $f$ kutsutaan Lusinin perheen $(F_\sigma)_{\sigma\in{}^{<\omega}A}$ määräämäksi kuvaukseksi.

**Lause 2.1.13.** *Olkoon $X$ metristyvä avaruus ja $f : \mathcal{C} \to X$ jatkuva injektio. Tällöin $f[\mathcal{C}]$ on epätyhjä perfekti joukko avaruudessa $X$.*

*Todistus.* Kiinnitetään avaruuden $X$ topologian määräävä metriikka $d_X$. Koska $\mathcal{C}$ on kompakti ja $f$ jatkuva, niin $f[\mathcal{C}]$ on kompakti [Vä2:15.6] siis erityisesti suljettu [Vä2:15:3] avaruudessa $X$. $\mathcal{C} \neq \emptyset$, joten $f[\mathcal{C}] \neq \emptyset$. Olkoon $x \in f[\mathcal{C}]$ ja $\varepsilon > 0$. Olkoon $\gamma \in \mathcal{C}$ alkio, jolla $f(\gamma) = x$ ja valitaan kuvauksen $f$ jatkuvuuden perusteella sellainen $n \in \mathbb{N}^*$, että $d_X(f(\gamma), f(\nu)) < \varepsilon$, kun $d_{\mathcal{C}}(\gamma, \nu) < \frac{1}{n}$. Olkoon $\nu \in \mathcal{C}$ määritelty ehdoilla $\nu \restriction n = \gamma \restriction n$, $\nu(n) = 1 - \gamma(n)$ ja $\nu(i) = 0$, kun $i > n$. Tällöin $\nu \neq \gamma$ koska $\nu(n) \neq \gamma(n)$ ja $d_{\mathcal{C}}(\gamma, \nu) < \frac{1}{n}$, sillä $\gamma \restriction n = \nu \restriction n$. Kuvauksen $f$ injektiivisyyden perusteella $f(\nu) \neq f(\gamma)$ ja luvun $n$ valinnan perusteella $d_X(f(\gamma), f(\nu)) < \varepsilon$. On osoitettu, että jokainen pisteen $x = f(\gamma)$ ympäristö sisältää pisteen $y \in f[\mathcal{C}] \setminus \{x\}$. Siis joukolla $f[\mathcal{C}]$ ei ole erakkopisteitä. □

**Lause 2.1.14.** *Olkoon $X$ epätyhjä perfekti puolalainen avaruus. Tällöin on olemassa upotus $f : \mathcal{C} \to X$.*

*Todistus.* Olkoon $d : X \times X \to [0, 1]$ avaruuden $X$ täydellinen metriikka. Konstruoidaan avaruuden $X$ Lusinin perhe $(G_\sigma)_{\sigma \in {}^{<\omega}2}$ avoimista epätyhjistä joukoista niin, että $d(G_\sigma) \leq 2^{-|\sigma|}$. Konstruktio etenee jonon $\sigma$ pituuden suhteen. Olkoon $G_\emptyset = X$. Tällöin $G_\emptyset$ on avoin ja epätyhjä ja $d(G_\emptyset) \leq 1 = 2^0$. Olkoon $n \geq 0$ ja oletetaan, että joukot $G_\sigma$ on konstruoitu kaikilla $\sigma \in {}^{<\omega}2$, joilla $|\sigma| \leq n$. Kiinnitetään $\sigma \in {}^n2$ ja konstruoidaan joukot $G_{\sigma\frown 0}$ ja $G_{\sigma\frown 1}$. Koska $X$ on perfekti ja $G_\sigma \subseteq X$ avoin ja epätyhjä, on olemassa kaksi eri alkiota $x, y \in G_\sigma$. Olkoon

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{d(x, y), d(x, X \setminus G_\sigma), d(y, X \setminus G_\sigma), 2^{-n-1}\}.$$

Koska $x \neq y$ ja $x, y \in G_\sigma$ ja $G_\sigma$ on avoin, niin $\varepsilon > 0$. Asetetaan $G_{\sigma\frown 0} = B(x, \varepsilon)$ ja $G_{\sigma\frown 1} = B(y, \varepsilon)$, jolloin joukot $G_{\sigma\frown i}$ ovat epätyhjiä ja avoimia, kun $i \in \{0, 1\}$. Luvun $\varepsilon$ valinnasta seuraa $G_{\sigma\frown 0} \cap G_{\sigma\frown 1} = \emptyset$, $\overline{G_{\sigma\frown i}} \subseteq G_\sigma$ ja $d(G_{\sigma\frown i}) \leq 2^{-(n+1)}$, kun $i \in \{0, 1\}$. Konstruktio on valmis ja $(G_\sigma)_{\sigma \in {}^{<\omega}2}$ on annetut ehdot täyttävä joukon $X$ Lusinin perhe. Koska kaikki joukot $G_\sigma$ ovat epätyhjiä, perheen $(G_\sigma)_{\sigma \in {}^{<\omega}2}$ määräämä kuvaus $f$ on määritelty kaikilla $\alpha \in \mathcal{C}$. Koska $\mathcal{C}$ on kompakti ja $f : \mathcal{C} \to X$ jatkuva injektio (lause 2.1.11 (3)), niin $f$ on upotus [Vä2:15.17]. □

**Lause 2.1.15.** *(Cantor-Bendixson). Olkoon $X$ topologinen avaruus, jolla on numeroituva kanta. Tällöin on olemassa perfekti $P \subseteq X$ ja numeroituva avoin $C \subseteq X$, joilla $P \cap C = \emptyset$ ja $P \cup C = X$.*

*Todistus.* Sanotaan pistettä $x \in X$ *tiheyspisteeksi*, jos jokainen $x$:n ympäristö on ylinumeroituva. Olkoon $P = \{x \in X : x \text{ on tiheyspiste}\}$ ja $C = X \setminus P$. Olkoon $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ avaruuden $X$ kanta. Jos $x \in C$, niin $x$:llä on numeroituva ympäristö, joten on olemassa $i \in \mathbb{N}$, jolla $x \in V_i$ ja $|V_i| \leq \aleph_0$. Toisaalta jos $|V_i| \leq \aleph_0$, niin $V_i \subseteq C$. Siis $C = \bigcup\{V_i : i \in \mathbb{N} \wedge |V_i| \leq \aleph_0\}$, joten $C$ on numeroituvien joukkojen numeroituvana yhdisteenä numeroituva ja avointen joukkojen yhdisteenä avoin. Koska $P = X \setminus C$, niin $P$ on suljettu. Tyhjä joukko on perfekti, joten voidaan olettaa, että $P$ on epätyhjä. Olkoon $x \in P$ ja $U \subseteq X$ pisteen $x$ ympäristö. $U = (U \cap P) \cup (U \cap C)$ on ylinumeroituva ja koska $C$ on numeroituva, niin $U \cap P$ on ylinumeroituva. Erityisesti on olemassa $y \in (U \cap P) \setminus \{x\}$. Siis $x$ ei ole joukon $P$ erakkopiste. On osoitettu joukko $P$ perfektiksi avaruudessa $X$. □

Luokalle $\Gamma$ puolalaisten avaruuksien osajoukkoja pätee *perfektisyysdikotomia*, jos jokainen $\Gamma$:n joukko on numeroituva tai sisältää epätyhjän perfektin osajoukon. Lauseiden 2.1.14 ja 2.1.13 nojalla tämän kanssa on yhtäpitävää, että jokainen ylinumeroituva $\Gamma$:n joukko sisältää $\mathcal{C}$:n kanssa homeomorfisen osajoukon. Koska $|\mathcal{C}| = 2^{\aleph_0}$, perfektisyysdikotomia on kontinuumihypoteesin deskriptiivinen vahvennus. Seuraavan lauseen nojalla puolalaisten avaruuksien luokalle pätee perfektisyysdikotomia.

**Lause 2.1.16.** *Olkoon $X$ ylinumeroituva puolalainen avaruus. Tällöin $X$ sisältää avaruuden $\mathcal{C}$ kanssa homeomorfisen osajoukon.*

*Todistus.* Cantor-Bendixsonin lauseen (2.1.15) nojalla on olemassa sellainen perfekti $P \subseteq X$, että $X \setminus P$ on numeroituva. Koska $X$ on ylinumeroituva, niin $P$ on ylinumeroituva ja erityisesti epätyhjä. Lauseen 2.1.14 nojalla on olemassa $Y \subseteq P$, joka on homeomorfinen avaruuden $\mathcal{C}$ kanssa. $\square$

Seuraavat kolme lemmaa tarvitaan lauseen 2.1.20 todistamiseen.

**Lemma 2.1.17.** *Olkoon $(X, d)$ separoituva metrinen avaruus, $G \subseteq X$ avoin joukko ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa perhe $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avaruuden $X$ avoimia joukkoja, joilla $d(G_i) < \varepsilon$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{G_i} = G$.*

*Todistus.* Olkoon $C \subseteq X$ numeroituva tiheä joukko avaruudessa $X$ ja olkoon $\ell \mapsto c_\ell$ surjektio joukolta $\mathbb{N}$ joukolle $C$. Olkoon $m \in \mathbb{N}^*$ luku, jolla $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Merkitään kaikilla $\ell \in \mathbb{N}$

$$U_j^\ell = \begin{cases} B(c_\ell, \frac{1}{jm}), & \text{jos } j \geq 1. \\ \emptyset, & \text{jos } j = 0. \end{cases}$$

Olkoon $\mathcal{U} = \{U_j^\ell : \ell \in \mathbb{N} \wedge j \in \mathbb{N} \wedge \overline{U_j^\ell} \subseteq G\}$. $\mathcal{U}$ on epätyhjä ($U_0^0 = \emptyset \in \mathcal{U}$) ja numeroituva, joten on olemassa surjektio $i \mapsto G_i$ joukolta $\mathbb{N}$ joukolle $\mathcal{U}$. Osoitetaan, että $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on etsitty perhe avoimia joukkoja.

Koska $d(U) < \frac{2}{m} < \varepsilon$ kaikilla $U \in \mathcal{U}$, niin $d(G_i) < \varepsilon$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Oletetaan $x \in G$. Koska $G$ on avoin, niin on olemassa $j \in \mathbb{N}^*$, jolla $B(x, \frac{1}{jm}) \subseteq G$. Koska $C$ on tiheä avaruudessa $X$, niin on olemassa $\ell \in \mathbb{N}$, jolla $c_\ell \in B(x, \frac{1}{3jm})$. Tällöin $x \in B(c_\ell, \frac{1}{3jm}) = U_{3j}^\ell$ ja

$$\overline{U_{3j}^\ell} = \overline{B}\left(c_\ell, \frac{1}{3jm}\right) \subseteq \overline{B}\left(x, \frac{2}{3jm}\right) \subseteq B\left(x, \frac{1}{jm}\right) \subseteq G.$$

Siis $U_{3j}^\ell \in \mathcal{U}$ ja on olemassa $i \in \mathbb{N}$, jolla $G_i = U_{3j}^\ell$. Tällöin $x \in G_i$ ja on osoitettu $G \subseteq \bigcup_i G_i$. Toisaalta joukon $\mathcal{U}$ määritelmän perusteella $\overline{G_i} \subseteq G$ kaikilla $i$, joten $\bigcup_i \overline{G_i} \subseteq G$. Siis $G \subseteq \bigcup_i G_i \subseteq \bigcup_i \overline{G_i} \subseteq G$ eli $G = \bigcup_i G_i = \bigcup_i \overline{G_i}$. $\square$

**Lemma 2.1.18.** *Olkoon $(X, d)$ separoituva metrinen avaruus, $F \subseteq X$ suljettu, $G \subseteq X$ avoin ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa perhe $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pareittain erillisiä avaruuden $X$ $F_\sigma$-joukkoja, joilla $d(Y_i) < \varepsilon$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Y_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{Y_i} = F \cap G$.*

*Todistus.* Olkoon $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ lemman 2.1.17 mukainen perhe avaruuden $X$ avoimia joukkoja, joilla $d(G_i) < \varepsilon$ ja $G = \bigcup_i G_i = \bigcup_i \overline{G_i}$. Olkoon kaikilla $i \in \mathbb{N}$

$$Y_i = F \cap (G_i \setminus (G_0 \cup \ldots \cup G_{i-1})).$$

Koska $Y_i = F \cap G_i \cap \bigcap_{j=0}^{i-1}(X \setminus G_j)$ niin $Y_i$ on $F_\sigma$-joukkojen äärellisenä leikkauksena $F_\sigma$-joukko kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Jos $j < i$, niin $Y_j \subseteq G_j$ ja $Y_i \cap G_j = \emptyset$, joten joukot $Y_i$ ovat pareittain erillisiä. Koska $Y_i \subseteq G_i$, niin $d(Y_i) \leq d(G_i) < \varepsilon$, kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Olkoon $x \in F \cap G$. Tällöin $x \in G = \bigcup_i G_i$. Olkoon $m \in \mathbb{N}$ pienin indekseistä $i$, jolla $x \in G_i$. Tällöin $x \in G_m \setminus (G_0 \cup \ldots \cup G_{m-1})$. Koska lisäksi $x \in F$, niin $x \in Y_m$. Siis $F \cap G \subseteq \bigcup_i Y_i$. Olkoon $x \in \overline{Y_i}$. Tällöin

$$x \in \overline{F \cap G_i \setminus (G_0 \cup \ldots \cup G_{i-1})} \subseteq \overline{F} \cap \overline{G_i \setminus (G_0 \cup \ldots \cup G_{i-1})} \subseteq F \cap \overline{G_i} \subseteq F \cap G.$$

Siis $\overline{Y_i} \subseteq F \cap G$, kaikilla $i \in \mathbb{N}$. On osoitettu $F \cap G \subseteq \bigcup_i Y_i \subseteq \bigcup_i \overline{Y_i} \subseteq F \cap G$, joten $F \cap G = \bigcup_i Y_i = \bigcup_i \overline{Y_i}$. □

**Lemma 2.1.19.** *Olkoon $(X, d)$ separoituva metrinen avaruus, $Y \subseteq X$ $F_\sigma$-joukko ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa perhe $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pareittain erillisiä avaruuden $X$ $F_\sigma$-joukkoja, joilla $d(Y_i) < \varepsilon$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Y_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{Y_i} = Y$.*

*Todistus.* Olkoon $(F_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ perhe avaruuden $X$ suljettuja joukkoja, jolla $Y = \bigcup_\ell F_\ell$. Voidaan olettaa $F_\ell \subseteq F_{\ell+1}$ kaikilla $\ell \in \mathbb{N}$ korvaamalla tarvittaessa joukko $F_\ell$ suljetulla joukolla $F_0 \cup \ldots \cup F_\ell$. Määritellään joukot $(A_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ asettamalla $A_0 = F_0$ ja $A_\ell = F_\ell \setminus F_{\ell-1}$, kaikilla $\ell \in \mathbb{N}^*$. Tällöin joukot $(A_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ ovat pareittain erillisiä ja $Y = \bigcup_\ell A_\ell$. Koska $A_0 = F_0 \cap X$ ja $A_\ell = F_\ell \cap (X \setminus F_{\ell-1})$ kaikilla $\ell \in \mathbb{N}^*$, niin lemman 2.1.18 nojalla kaikilla $\ell \in \mathbb{N}$ on olemassa perhe $(E^\ell_j)_{j\in\mathbb{N}}$ pareittain erillisiä $F_\sigma$-joukkoja, joiden halkaisija on pienempi kuin $\varepsilon$ ja joilla $A_\ell = \bigcup_j E^\ell_j = \bigcup_j \overline{E^\ell_j}$. Koska lisäksi joukot $(A_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ ovat pareittain erillisiä, niin perheen $(E^\ell_j)_{\ell,j\in\mathbb{N}}$ joukot ovat pareittain erillisiä. Olkoon kuvaus $i \mapsto Y_i$ sellainen surjektio joukolta $\mathbb{N}$ joukolle $\{E^\ell_j : \ell, j \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$, että $Y_i \cap Y_j = \emptyset$, kun $i \neq j$. Tällöin $d(Y_i) < \varepsilon$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja joukot $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ovat pareittain erillisiä $F_\sigma$-joukkoja. Jos $x \in Y$, niin $x \in A_\ell$ jollakin $\ell \in \mathbb{N}$ ja edelleen $x \in E^\ell_j$ jollakin $j \in \mathbb{N}$. Siis on olemassa $i \in \mathbb{N}$, jolla $x \in Y_i$ ja $x \in \bigcup_i Y_i$. Jos $x \in \overline{Y_i}$ ja $\ell$ ja $j$ ovat lukuja, joilla $Y_i = E^\ell_j$, niin $x \in \overline{E^\ell_j} \subseteq A_\ell \subseteq Y$. Siis $\bigcup_i \overline{Y_i} \subseteq Y$. On osoitettu $Y \subseteq \bigcup_i Y_i \subseteq \bigcup_i \overline{Y_i} \subseteq Y$, joten $Y = \bigcup_i Y_i = \bigcup_i \overline{Y_i}$. □

**Lause 2.1.20.** *Olkoon $X$ puolalainen avaruus. Tällöin on olemassa suljettu $F \subseteq \mathcal{N}$ ja jatkuva bijektio $f : F \to X$.*

*Todistus.* Olkoon $d : X \times X \to [0, 1]$ avaruuden $X$ topologian määräävä täydellinen metriikka. Konstruoidaan avaruuden $X$ Lusinin perhe $(Y_\sigma)_{\sigma\in{}^{<\omega}\mathbb{N}}$ $F_\sigma$-joukoista niin, että $Y_\emptyset = X$, $Y_\sigma = \bigcup_i Y_{\sigma\frown i}$ ja $d(Y_\sigma) \leq \frac{1}{|\sigma|+1}$ kaikilla $\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}$. Konstruktio etenee rekursiivisesti jonon $\sigma$ pituuden suhteen. $Y_\emptyset = X$ on suljettu, siis erityisesti $F_\sigma$-joukko ja $d(Y_\emptyset) \leq 1 = \frac{1}{0+1}$. Oletetaan, että $n \in \mathbb{N}$ ja joukot $Y_\sigma$ on määritelty kaikilla $\sigma$, joilla $|\sigma| \leq n$. Kiinnitetään $\sigma \in {}^n\mathbb{N}$ ja määritellään joukot $Y_{\sigma\frown i}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Olkoon $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ perhe lemman 2.1.19 mukaisia pareittain erillisiä $F_\sigma$-joukkoja, joiden halkaisija on pienempi kuin $\frac{1}{n+2}$

ja joilla $Y_\sigma = \bigcup_i A_i = \bigcup \overline{A_i}$. Asetetaan $Y_{\sigma\frown i} = A_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tällöin $d(Y_{\sigma\frown i}) = d(A_i) < \frac{1}{n+2} = \frac{1}{|\sigma\frown i|+1}$, kaikilla $i$ ja $Y_\sigma = \bigcup_i A_i = \bigcup_i Y_{\sigma\frown i}$. Konstruktio on valmis.

Jos $\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}$ ja $i \in \mathbb{N}$, niin $\bigcup_i \overline{Y_{\sigma\frown i}} = Y_\sigma$, joten erityisesti $\overline{Y_{\sigma\frown i}} \subseteq Y_\sigma$ ja Lusinin perheen määritelmässä annettu ehto $(i)$ on voimassa. Ehto $(ii)$ seuraa, koska $d(Y_\sigma) < \frac{1}{|\sigma|+1}$. Ehdon $(iii)$ tarkastamiseksi olkoot $\sigma$ ja $\tau$ yhteensopimattomia jonoja ja $m \in \mathbb{N}$ pienin luku, jolla $\sigma(m) \neq \tau(m)$. Konstruktiosta seuraa, että $Y_{\sigma\restriction(m+1)}$ ja $Y_{\tau\restriction(m+1)}$ ovat erillisiä ja koska $Y_\sigma \subseteq Y_{\sigma\restriction(m+1)}$ ja $Y_\tau \subseteq Y_{\tau\restriction(m+1)}$, niin myös $Y_\sigma$ ja $Y_\tau$ ovat erillisiä. Siis ehto $(iii)$ on voimassa ja $(Y_\sigma)_{\sigma\in{}^{<\omega}\mathbb{N}}$ on Lusinin perhe. Olkoon $F = \{\alpha \in \mathcal{N} : \forall i(Y_{\alpha\restriction i} \neq \emptyset)\}$ ja $f : F \to X$ Lusinin perheen $(Y_\sigma)_{\sigma\in{}^{<\omega}\mathbb{N}}$ määräämä kuvaus. Lemman 2.1.12 nojalla $F \subseteq \mathcal{N}$ on suljettu ja $f$ jatkuva bijektio. $\square$

**Lause 2.1.21.** *Olkoon $X$ epätyhjä puolalainen avaruus. Tällöin on olemassa jatkuva surjektio $f : \mathcal{N} \to X$.*

*Todistus.* Lauseen 2.1.20 mukaan on olemassa suljettu $F \subseteq \mathcal{N}$ ja jatkuva bijektio $g : F \to X$. Koska $X$ on epätyhjä, niin $F$ on epätyhjä ja lauseen 2.1.8 mukaan on olemassa jatkuva surjektio $h : \mathcal{N} \to F$. Tällöin yhdistetty kuvaus $f = (g \circ h) : \mathcal{N} \to X$ on jatkuva surjektio. $\square$

Erityisesti lauseesta 2.1.21 yhdessä lauseen 2.1.16 kanssa seuraa, että jokaisen ylinumeroituvan puolalaisen avaruuden mahtavuus on $2^{\aleph_0}$.

## 2.2 Borelin joukot

Deskriptiivisessä joukko-opissa tutkitaan joukkoja, joiden topologinen rakenne on määriteltävissä yksinkertaisten operaatioiden avulla. Tarkasteltavat joukot jaetaan rakenteen monimutkaisuuden perusteella hierarkian eri tasoille. Topologian mielessä avoimet joukot ovat yksinkertaisimpia. Sulkemalla avointen joukkojen perhe komplementoinnin ja numeroituvan yhdisteen suhteen saadaan Borelin joukoista muodostuva $\sigma$-algebra.

**Määritelmä 2.2.1.** *Olkoon $X$ joukko. Perhe $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ on joukon $X$* $\sigma$-algebra, *jos seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:*

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \emptyset \in \mathcal{M},\\
&(2)\quad A \in \mathcal{M} \Longrightarrow (X \setminus A) \in \mathcal{M},\\
&(3)\quad A_n \in \mathcal{M},\ \textit{kaikilla}\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}.
\end{aligned}
$$

Määritelmästä seuraa, että $\sigma$-algebra on suljettu numeroituvan leikkauksen ja joukkojen erotuksen suhteen. Lisäksi joukko itse kuuluu jokaiseen $\sigma$-algebraansa. Jos $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ on joukon $X$ $\sigma$-algebra, paria $(X, \mathcal{M})$ kutsutaan *mitta-avaruudeksi* ja perheen $\mathcal{M}$ joukkoja *mitallisiksi* joukoiksi. Jos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$, merkitään

$$\sigma(\mathcal{G}) = \bigcap\{\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{M} \text{ on } \sigma\text{-algebra ja } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}\}.$$

Koska $\mathcal{P}(X)$ on joukon $X$ $\sigma$-algebra, niin $\sigma(\mathcal{G})$ on hyvin määritelty kaikilla $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

**Lemma 2.2.2.** *Olkoon $X$ joukko ja $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Tällöin $\sigma(\mathcal{G})$ on suppein joukon $X$ $\sigma$-algebra, joka sisältää perheen $\mathcal{G}$.*

*Todistus.* Osoitetaan $\sigma(\mathcal{G})$ $\sigma$-algebraksi. Tyhjä joukko kuuluu jokaiseen $\sigma$-algebraan, joten erityisesti se kuuluu eräiden $\sigma$-algebrojen leikkaukseen $\sigma(\mathcal{G})$. Olkoon $A \in \sigma(\mathcal{G})$ ja $\mathcal{M}$ joukon $X$ $\sigma$-algebra, joka sisältää perheen $\mathcal{G}$. Tällöin $A \in \mathcal{M}$ ja koska $\mathcal{M}$ on $\sigma$-algebra, niin $(X \setminus A) \in \mathcal{M}$. Siis $(X \setminus A)$ kuuluu jokaiseen joukon $X$ $\sigma$-algebraan, joka sisältää perheen $\mathcal{G}$ eli $(X \setminus A) \in \sigma(\mathcal{G})$. Olkoot $A_n \in \sigma(\mathcal{G})$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\mathcal{M}$ joukon $X$ $\sigma$-algebra, joka sisältää perheen $\mathcal{G}$. Tällöin $A_n \in \mathcal{M}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja koska $\mathcal{M}$ on $\sigma$-algebra, niin $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$. Siis $\bigcup_n A_n$ kuuluu jokaiseen joukon $X$ $\sigma$-algebraan, joka sisältää perheen $\mathcal{G}$, joten $\bigcup_n A_n \in \sigma(\mathcal{G})$. On osoitettu $\sigma(\mathcal{G})$ $\sigma$-algebraksi. Selvästi $\mathcal{G} \subseteq \sigma(\mathcal{G})$ ja $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{M}$ jokaisella $\sigma$-algebralla $\mathcal{M}$, joka sisältää perheen $\mathcal{G}$. Siis $\sigma(\mathcal{G})$ on suppein joukon $X$ $\sigma$-algebra, joka sisältää perheen $\mathcal{G}$. $\square$

Sigma-algebraa $\sigma(\mathcal{G})$ kutsutaan perheen $\mathcal{G}$ *virittämäksi* $\sigma$-algebraksi. Luonnollinen säännöllisyysvaatimus mitta-avaruuksien väliselle kuvaukselle on *mitallisuus*.

**Määritelmä 2.2.3.** *Olkoot $(X, \mathcal{M})$ ja $(Y, \mathcal{K})$ mitta-avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on* mitallinen, *jos $f^{-1}[A] \in \mathcal{M}$ kaikilla $A \in \mathcal{K}$.*

**Lause 2.2.4.** *Olkoot $(X, \mathcal{M})$ ja $(Y, \mathcal{K})$ mitta-avaruuksia ja $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ perhe, joka virittää $\sigma$-algebran $\mathcal{K}$. Kuvaus $f : X \to Y$ on mitallinen, jos ja vain jos $f^{-1}[A] \in \mathcal{M}$ kaikilla $A \in \mathcal{G}$.*

*Todistus.* Jos $f : X \to Y$ on mitallinen, niin $f^{-1}[A] \in \mathcal{M}$ kaikilla $A \in \mathcal{K}$ ja erityisesti kaikilla $A \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{K}$. Oletetaan $f^{-1}[A] \in \mathcal{M}$ kaikilla $A \in \mathcal{G}$. Merkitään $\mathcal{F} = \{A \subseteq Y : f^{-1}[A] \in \mathcal{M}\}$. Tällöin $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Osoitetaan, että $\mathcal{F}$ on $\sigma$-algebra, jolloin $\mathcal{K} = \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$ ja $f$ on mitallinen. Koska $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset \in \mathcal{M}$, niin $\emptyset \in \mathcal{F}$. Jos $f^{-1}[A] \in \mathcal{M}$ jollakin $A \subseteq Y$, niin $f^{-1}[Y \setminus A] = (X \setminus f^{-1}[A]) \in \mathcal{M}$, joten $(Y \setminus A) \in \mathcal{F}$. Oletetaan $A_n \subseteq Y$ ja $f^{-1}[A_n] \in \mathcal{M}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $f^{-1}[\bigcup_n A_n] = \bigcup_n f^{-1}[A_n] \in \mathcal{M}$, joten $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$. $\square$

**Määritelmä 2.2.5.** *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Määritellään avaruuden $(X, \mathcal{T})$ Borelin joukkojen perhe $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ topologian $\mathcal{T}$ virittämänä $\sigma$-algebrana $\sigma(\mathcal{T})$.*

Jos on selvää, mitä joukon $X$ topologiaa tarkoitetaan, merkitään Borelin joukkojen perhettä myös $\mathcal{B}(X)$. Jos $B \subseteq X$ on Borelin joukko avaruudessa $X$, niin avaruuden $B$ Borelin joukot ovat myös avaruuden $X$ Borelin joukkoja, sillä avaruuden $B$ avoimet joukot ovat muotoa $B \cap U$, missä $U \subseteq X$ on avoin ja siis Borelin joukkoja avaruudessa $X$.

Topologisten avaruuksien $X$ ja $Y$ välinen kuvaus $f$ on *Borelin* kuvaus, jos $f$ on mitallinen mitta-avaruuksien $(X, \mathcal{B}(X))$ ja $(Y, \mathcal{B}(Y))$ suhteen. Lauseen 2.2.4 nojalla $f$ on Borelin kuvaus, jos ja vain jos avointen joukkojen alkukuvat ovat

Borelin joukkoja. Erityisesti jatkuvat kuvaukset ovat Borelin kuvauksia. Jos $f$ on bijektio ja $f$ sekä $f^{-1}$ ovat Borelin kuvauksia, sanotaan että $f$ on *Borel-isomorfismi* ja avaruudet $X$ ja $Y$ ovat *Borel-isomorfiset.*

Puolalaisten avaruuksien Borelin joukot voidaan jakaa ordinaalilla $\omega_1$ indeksöityväksi hierarkiaksi.

**Määritelmä 2.2.6.** *Olkoon $X$ puolalainen avaruus. Määritellään transfiniittisellä rekursiolla Borelin hierarkian perheet $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ ja $\mathbf{\Pi}^0_\xi(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ kaikilla ordinaaleilla $1 \leq \xi < \omega_1$ :*

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}^0_1(X) &= \{A \subseteq X : A \textit{ avoin}\}, \\ \mathbf{\Pi}^0_\xi(X) &= \{A \subseteq X : (X \setminus A) \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)\}, \\ \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) &= \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : \forall n \exists \xi_n (\xi_n < \xi \wedge A_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\xi_n}(X)) \right\}, \textit{jos } \xi > 1. \end{aligned}$$

*Lisäksi määritellään kaikilla $1 \leq \xi < \omega_1$ perhe $\mathbf{\Delta}^0_\xi(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ :*

$$\mathbf{\Delta}^0_\xi(X) = \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) \cap \mathbf{\Pi}^0_\xi(X).$$

**Lause 2.2.7.** *Olkoon $X$ puolalainen avaruus. Tällöin*
*(i) $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) \cup \mathbf{\Pi}^0_\xi(X) \subseteq \mathbf{\Delta}^0_{\xi+1}(X)$ kaikilla $0 < \xi < \omega_1$ ja*
*(ii)*

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_{0<\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) = \bigcup_{0<\xi<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\xi(X) = \bigcup_{0<\xi<\omega_1} \mathbf{\Delta}^0_\xi(X).$$

*Todistus.* $(i)$ Todistetaan väite induktiolla ordinaalin $\xi \geq 1$ suhteen. Koska $\mathbf{\Delta}^0_{\xi+1}(X)$ on suljettu komplementoinnin suhteen, riittää todistaa $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) \subseteq \mathbf{\Delta}^0_{\xi+1}(X)$ kaikilla $\xi \geq 1$. Olkoon $G \in \mathbf{\Sigma}^0_1(X)$. Lauseen 2.1.4($ii$) mukaan $G$ on $F_\sigma$-joukko eli $\mathbf{\Sigma}^0_2$. Toisaalta $(X \setminus G) \in \mathbf{\Pi}^0_1(X)$, joten $(X \setminus G) = \bigcup_n (X \setminus G) \in \mathbf{\Sigma}^0_2(X)$ ja $G \in \mathbf{\Pi}^0_2(X)$. Siis $G \in \mathbf{\Delta}^0_2(X)$. Oletetaan $\xi > 1$ ja $\mathbf{\Sigma}^0_\delta(X) \subseteq \mathbf{\Delta}^0_{\delta+1}(X)$ kaikilla $0 < \delta < \xi$. Olkoon $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$. Tällöin $A = \bigcup_n A_n$ joillain $A_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\xi_n}(X)$, missä $\xi_n < \xi$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Induktio-oletuksen mukaan $A_n \in \mathbf{\Delta}^0_{\xi_n+1}(X) \subseteq \mathbf{\Pi}^0_{\xi_n+1}(X)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska $\xi_n + 1 \leq \xi < \xi + 1$, niin $A = \bigcup_n A_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\xi+1}(X)$. Lisäksi $(X \setminus A) \in \mathbf{\Pi}^0_\xi(X)$, joten $(X \setminus A) = \bigcup_n (X \setminus A) \in \mathbf{\Sigma}^0_{\xi+1}(X)$ ja $A \in \mathbf{\Pi}^0_{\xi+1}(X)$. Siis $A \in \mathbf{\Delta}^0_{\xi+1}(X)$.

$(ii)$ Todistetaan induktiolla ordinaalin $0 < \xi < \omega_1$ suhteen $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$ ja $\mathbf{\Pi}^0_\xi(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$. Koska $\mathcal{B}(X)$ on suljettu komplemetoinnin suhteen, riittää todistaa $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$ kaikilla $0 < \xi < \omega_1$. Avoimet joukot virittävät $\sigma$-algebran $\mathcal{B}(X)$, joten $\mathbf{\Sigma}^0_1(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$. Olkoon $\xi > 1$ ja oletetaan $\mathbf{\Sigma}^0_\delta(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$ ja $\mathbf{\Pi}^0_\delta(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$ kaikilla $0 < \delta < \xi$. Olkoon $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$. Tällöin on olemassa ordinaalit $\xi_n < \xi$ ja joukot $A_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\xi_n}(X)$, joilla $A = \bigcup_n A_n$. Induktio-oletuksen mukaan $A_n \in \mathcal{B}(X)$ kaikilla $n$, joten koska $\mathcal{B}(X)$ on suljettu numeroituvien yhdisteiden suhteen, $A \in \mathcal{B}(X)$. Siis $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$. On todistettu $\bigcup_\xi \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$ ja $\bigcup_\xi \mathbf{\Pi}^0_\xi(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$.

Osoitetaan joukko $\bigcup_\xi \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$ $\sigma$-algebraksi, jolloin $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathbf{\Sigma}^0_1(X)) \subseteq \bigcup_\xi \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$. Ensinnäkin $\emptyset \in \mathbf{\Sigma}^0_1(X) \subseteq \bigcup_\xi \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$. Olkoon $A \in \bigcup_\xi \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$ ja olkoon $\xi < \omega_1$ ordinaali, jolla $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$. Kohdan $(i)$ perusteella $A \in \mathbf{\Delta}^0_{\xi+1}(X) \subseteq \mathbf{\Pi}^0_{\xi+1}(X)$, joten $(X \setminus A) \in \mathbf{\Sigma}^0_{\xi+1}(X) \subseteq \bigcup_\xi \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$. Siis joukko $\bigcup_\xi \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$ on suljettu komplementoinnin suhteen. Olkoon $A_n \in \bigcup_\xi \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja olkoot ordinaalit $\xi_n < \omega_1$ sellaisia, että $A_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\xi_n}(X)$. Olkoon $\xi = \sup\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$, jolloin ordinaalin $\omega_1$ säännöllisyyden perusteella $\xi < \omega_1$. Tällöin $A_n \in \mathbf{\Delta}^0_{\xi_n+1}(X) \subseteq \mathbf{\Pi}^0_{\xi_n+1}(X)$ kaikilla $n$ ja $A = \bigcup_n A_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\xi+2}(X) \subseteq \bigcup_\xi \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$. Siis $\bigcup_\xi \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$ on suljettu numeroituvien yhdisteiden suhteen ja muodostaa $\sigma$-algebran. On osoitettu $\mathcal{B}(X) = \bigcup_{0<\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$. Selvästi $\bigcup_\xi \mathbf{\Delta}^0_\xi(X) \subseteq \bigcup_\xi \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$ ja $\bigcup_\xi \mathbf{\Delta}^0_\xi(X) \subseteq \bigcup_n \mathbf{\Pi}^0_\xi(X)$ ja toisaalta kohdan $(i)$ perusteella myös $\bigcup_\xi \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) \subseteq \bigcup_\xi \mathbf{\Delta}^0_\xi(X)$ ja $\bigcup_\xi \mathbf{\Pi}^0_\xi(X) \subseteq \bigcup_\xi \mathbf{\Delta}^0_\xi(X)$. Siis

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_{0<\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) = \bigcup_{0<\xi<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\xi(X) = \bigcup_{0<\xi<\omega_1} \mathbf{\Delta}^0_\xi(X).$$

□

**Lause 2.2.8.** *Olkoon $0 < \xi \leq \omega$, $(X_i)_{i<\xi}$ perhe puolalaisia avaruuksia ja $B_i \in \mathcal{B}(X_i)$ kaikilla $i < \xi$. Tällöin $\prod_{i<\xi} B_i \in \mathcal{B}(\prod_{i<\xi} X_i)$.*

*Todistus.* Olkoon $A_i = \mathrm{pr}_i^{-1}[B_i] \subseteq \prod_{i<\xi} X_i$ kaikilla $i < \xi$. Koska projektiokuvaukset ovat jatkuvia, niin $A_i \in \mathcal{B}(\prod_{i<\xi} X_i)$ kaikilla $i < \xi$ ja $\prod_{i<\xi} B_i = \bigcap_{i<\xi} A_i \in \mathcal{B}(\prod_{i<\xi} X_i)$. □

Todistetaan seuraavaksi, että hienontamalla puolalaista topologiaa sopivasti voidaan etukäteen valitusta Borelin joukosta tehdä $\mathbf{\Delta}^0_1$-joukko ja samalla säilyttää alkuperäinen Borelin joukkojen perhe.

**Lemma 2.2.9.** *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ puolalainen avaruus ja $F \subseteq X$ suljettu joukko. Tällöin on olemassa sellainen joukon $X$ puolalainen topologia $\mathcal{T}_F \supseteq \mathcal{T}$, että $F$ on avoin ja suljettu avaruudessa $(X, \mathcal{T}_F)$ ja $\mathcal{B}(\mathcal{T}_F) = \mathcal{B}(\mathcal{T})$.*

*Todistus.* Koska $F$ on $\mathcal{T}$-suljettu, niin avaruus $(F, \mathcal{T}|F)$ on puolalainen ja koska $X \setminus F$ on $\mathcal{T}$-avoin, niin lauseen 2.1.5 mukaan avaruus $(X \setminus F, \mathcal{T}|(X \setminus F))$ on puolalainen. Olkoon $\mathcal{T}_F$ topologisen summan $F \bigoplus (X \setminus F)$ topologia joukossa $F \cup (X \setminus F) = X$. Lauseen 2.1.3 mukaan avaruus $(X, \mathcal{T}_F)$ on puolalainen ja selvästi $F$ on sekä avoin että suljettu topologiassa $\mathcal{T}_F$. Jos $G \subseteq X$ on $\mathcal{T}$-avoin, niin relatiivitopologian määritelmän perusteella $G \cap F$ on $\mathcal{T}|F$-avoin ja $G \cap (X \setminus F)$ on $\mathcal{T}|(X \setminus F)$-avoin. Siis $G$ on $\mathcal{T}_F$-avoin ja $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_F$. Jos $G \subseteq X$ on $\mathcal{T}_F$-avoin, niin $G = U \cup V$, missä $U \subseteq F$ on $\mathcal{T}|F$-avoin ja $V \subseteq X \setminus F$ on $\mathcal{T}|(X \setminus F)$-avoin. Tällöin $V$ on $\mathcal{T}$-avoin ja $U = F \cap W$ jollakin $\mathcal{T}$-avoimella joukolla $W \subseteq X$. Siis $G = (F \cap W) \cup U$ on $\mathbf{\Sigma}^0_2$-joukko ja erityisesti Borelin joukko avaruudessa $(X, \mathcal{T})$, joten $\mathcal{B}(\mathcal{T}_F) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{T})$. Koska $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_F$, niin $\mathcal{B}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{T}_F)$. Siis $\mathcal{B}(\mathcal{T}_F) = \mathcal{B}(\mathcal{T})$. □

**Lemma 2.2.10.** *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ puolalainen avaruus ja $(\mathcal{T}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ perhe avaruuden $X$ puolalaisia topologioita, joilla $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tällöin perheen $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_i$ virittämä joukon $X$ topologia $\mathcal{T}_\infty$ on puolalainen ja jos $\mathcal{B}(\mathcal{T}_i) = \mathcal{B}(\mathcal{T})$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin myös $\mathcal{B}(\mathcal{T}_\infty) = \mathcal{B}(\mathcal{T})$.*

*Todistus.* Olkoot $X_i = X$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja olkoon $f : X \to \prod_i X_i$ ehdolla $x \mapsto (x, x, x, \ldots)$ määräytyvä kuvaus. Merkitään $F = f[X] = \{(x, x, x, \ldots) : x \in X\}$. Osoitetaan, että $F$ on suljettu (puolalaisessa) avaruudessa $\prod_i (X_i, \mathcal{T}_i)$ ja $f$ on upotus avaruudesta $(X, \mathcal{T}_\infty)$ avaruuteen $\prod_i (X_i, \mathcal{T}_i)$. Olkoon $\chi \in (\prod_i X_i) \setminus F$ ja merkitään $\chi = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Koska $\chi \notin F$, on olemassa luvut $m, n \in \mathbb{N}$, joilla $x_m \neq x_n$. Koska topologia $\mathcal{T}$ on puolalainen (erityisesti Hausdorff), niin on olemassa erilliset $\mathcal{T}$-avoimet joukot $U \subseteq X$ ja $V \subseteq X$, joilla $x_m \in U$ ja $x_n \in V$. Koska $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_m$ ja $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_n$, niin $U$ on $\mathcal{T}_m$-avoin ja $V$ on $\mathcal{T}_n$-avoin. Tällöin $G = \mathrm{pr}_m^{-1}[U] \cap \mathrm{pr}_n^{-1}[V]$ on alkion $\chi$ ympäristö avaruudessa $\prod_i (X_i, \mathcal{T}_i)$ ja $x'_m \neq x'_n$ kaikilla $\chi' = (x'_0, x'_1, x'_2, \ldots) \in G$, sillä $x'_m \in U$, $x'_n \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$. Siis $G \subseteq \prod_i X_i \setminus F$ ja $F$ on suljettu.

Selvästi kuvaus $f$ on injektio. Olkoon $i \in \mathbb{N}$ ja $U \in \mathcal{T}_i$. Tällöin

$$f^{-1}[\mathrm{pr}_i^{-1}[U]] = U \in \mathcal{T}_i \subseteq T_\infty.$$

Siis kuvaus $f$ on jatkuva. Lisäksi

$$f[U] = \{(x, x, x, \ldots) : x \in U\} = F \cap \mathrm{pr}_i^{-1}[U]$$

on avoin avaruudessa $F$, joten $f$ kuvaa avaruuden $(X, \mathcal{T}_\infty)$ esikannan $\bigcup_i \mathcal{T}_i$ avoimiksi joukoiksi eli $f^{-1}$ on jatkuva kuvaus joukossa $F$. On osoitettu, että $(X, \mathcal{T}_\infty)$ on homeomorfinen puolalaisen avaruuden $\prod_i (X_i, \mathcal{T}_i)$ suljetun joukon $F$ kanssa ja siis itsekin puolalainen avaruus.

Jos $\mathcal{B}(\mathcal{T}_i) = \mathcal{B}(\mathcal{T})$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin avaruuden $(X, \mathcal{T}_\infty)$ esikanta $\bigcup_i \mathcal{T}_i$ sisältyy perheeseen $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ ja siten $\mathcal{B}(\mathcal{T}_\infty) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{T})$. Koska $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_\infty$, niin $\mathcal{B}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{T}_\infty)$. Siis $\mathcal{B}(\mathcal{T}_\infty) = \mathcal{B}(\mathcal{T})$. □

**Lause 2.2.11.** *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ puolalainen avaruus. Tällöin jokaisella Borelin joukolla $B \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$ on olemassa sellainen joukon $X$ puolalainen topologia $\mathcal{T}_B \supseteq \mathcal{T}$, että $B$ on avoin ja suljettu topologiassa $\mathcal{T}_B$ ja $\mathcal{B}(\mathcal{T}_B) = \mathcal{B}(\mathcal{T})$.*

*Todistus.* Olkoon $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{T})$ niiden Borelin joukkojen $B$ perhe, joilla on olemassa topologiaa $\mathcal{T}$ hienontava puolalainen topologia $\mathcal{T}_B$, jossa $B$ on avoin ja suljettu ja $\mathcal{B}(\mathcal{T}_B) = \mathcal{B}(\mathcal{T})$. Osoitetaan $\mathcal{B}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{U}$.

Määritelmänsä perusteella $\mathcal{U}$ on suljettu komplementoinnin suhteen. Lemman 2.2.9 perusteella $\mathcal{U}$ sisältää suljetut joukot. Riittää siis osoittaa, että $\mathcal{U}$ on suljettu numeroituvien yhdisteiden suhteen. Olkoon $B_i \in \mathcal{U}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja merkitään $B = \bigcup_i B_i$. Olkoot joukon $X$ puolalaiset topologiat $\mathcal{T}_i$ sellaisia, että $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_i$, $B_i \in \mathbf{\Delta}^0_1(\mathcal{T}_i)$ ja $\mathcal{B}(\mathcal{T}_i) = \mathcal{B}(\mathcal{T})$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Lemman 2.2.10 mukaan perheen $\bigcup_i \mathcal{T}_i$ virittämä joukon $X$ topologia $\mathcal{T}_\infty$ on puolalainen ja $\mathcal{B}(\mathcal{T}_\infty) = \mathcal{B}(\mathcal{T})$. Tällöin $B \in \mathcal{T}_\infty$ ja joukko $X \setminus B$ on $\mathcal{T}_\infty$-suljettu, joten lemman 2.2.9 mukaan on olemassa joukon $X$ puolalainen topologia $\mathcal{T}_B \supseteq \mathcal{T}_\infty$, jossa $(X \setminus B)$ on avoin ja jolle $\mathcal{B}(\mathcal{T}_B) = \mathcal{B}(\mathcal{T}_\infty)$. Tällöin $B \in \mathbf{\Delta}^0_1(\mathcal{T}_B)$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{T}_B$ ja $\mathcal{B}(\mathcal{T}_B) = \mathcal{B}(\mathcal{T}_\infty) = \mathcal{B}(\mathcal{T})$. Siis $B \in \mathcal{U}$. □

Edeltävien tulosten avulla voidaan siirtää puolalaisten avaruuksien keskeiset ominaisuudet myös Borelin joukoille.

**Lause 2.2.12.** *Olkoon $X$ puolalainen avaruus ja $B \subseteq X$ ylinumeroituva Borelin joukko. Tällöin on olemassa epätyhjä $P \subseteq B$, joka on perfekti avaruudessa $X$.*

*Todistus.* Olkoon $\mathcal{T}$ avaruuden $X$ topologia. Olkoon $\mathcal{T}_B$ lauseen 2.2.11 mukainen puolalainen topologia, jolla $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_B$ ja $B \in \mathbf{\Delta}_1^0(\mathcal{T}_B)$. Tällöin $(B, \mathcal{T}_B|B)$ on ylinumeroituva puolalainen avaruus ja lauseen 2.1.16 mukaan on olemassa upotus $g : \mathcal{C} \to B$. Koska $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_B$, niin $g$ on jatkuva myös topologian $\mathcal{T}|B$ suhteen. Määritellään $f : \mathcal{C} \to X$ ehdolla $f(\gamma) = g(\gamma)$, jolloin $f$ on $\mathcal{T}$-jatkuva injektio ja lauseen 2.1.13 mukaan $f[\mathcal{C}] \subseteq B$ on perfekti avaruudessa $(X, \mathcal{T})$. □

**Lause 2.2.13.** *Olkoon $X$ puolalainen avaruus ja $B \in \mathcal{B}(X)$ epätyhjä. Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus $f : \mathcal{N} \to X$, jonka kuvajoukko on $B$.*

*Todistus.* Olkoon $\mathcal{T}$ avaruuden $X$ topologia. Lauseen 2.2.11 mukaan on olemassa sellainen joukon $X$ puolalainen topologia $\mathcal{T}_B$, että $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_B$ ja $B \in \mathbf{\Delta}_1^0(\mathcal{T}_B)$. Tällöin $(B, \mathcal{T}_B|B)$ on puolalainen avaruus ja lauseen 2.1.21 mukaan on olemassa $\mathcal{T}_B|B$-jatkuva surjektio $g : \mathcal{N} \to B$. Koska $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_B$, niin $g$ on jatkuva myös topologiassa $\mathcal{T}|B$. Määritellään $f : \mathcal{N} \to X$ ehdolla $f(\alpha) = g(\alpha)$. Selvästi $f$ on $\mathcal{T}$-jatkuva ja $f[\mathcal{N}] = B$. □

Seuraavia kolmea tulosta käytetään Borel-isomorfian (lause 2.2.17) todistamiseen.

**Lause 2.2.14.** *Cantorin avaruus $\mathcal{C}$ on Borel-isomorfinen yksikkövälin $\mathbb{I} = [0, 1]$ kanssa.*

*Todistus.* Merkitään $D = \{x \in \mathbb{I} : \exists m \exists n(x = \frac{m}{2^n})\}$. Joukon $D$ alkioita kutsutaan *dyadisiksi rationaaliluvuiksi.* Selvästi $|D| = \aleph_0$. Merkitään $C = \{\gamma \in \mathcal{C} : \exists n \forall k \geq n(\gamma(k) = \gamma(n))\}$. Tällöin $|C| = |^{<\omega}2| \cdot 2 = \aleph_0$. Merkitään kaikilla $\gamma \in \mathcal{C}$ ja $k \in \mathbb{N}$

$$x_\gamma = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma(i)}{2^{i+1}}, \quad s_k(\gamma) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\gamma(i)}{2^{i+1}} \quad \text{ja} \quad S_k(\gamma) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma(i)}{2^{i+1}}.$$

Tällöin $x_\gamma = s_k(\gamma) + S_k(\gamma)$ kaikilla $\gamma$ ja $k$ sekä $0 \leq x_\gamma \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$. Siis $x_\gamma \in \mathbb{I}$ kaikilla $\gamma \in \mathcal{C}$.

Olkoon $\gamma \in C$. Osoitetaan $x_\gamma \in D$. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ luku, jolla $\gamma(k) = \gamma(n)$ kaikilla $k \geq n$. Merkitään $p = \sum_{i=0}^{n}(2^{n-i}\gamma(i)) \in \mathbb{N}$, jolloin

$$s_n(\gamma) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\gamma(i)}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{2^{n-i}\gamma(i)}{2^{n+1}} = \frac{p}{2^{n+1}}.$$

Jos $\gamma(n) = 0$, niin $S_n(\gamma) = 0$ ja $x_\gamma = s_n(\gamma) = \frac{p}{2^{n+1}} \in D$. Jos $\gamma(n) = 1$, niin $S_n(\gamma) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$ ja $x_\gamma = s_n(\gamma) + S_n(\gamma) = \frac{p}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{p+1}{2^{n+1}} \in D$.

Jos $\gamma \in (\mathcal{C} \setminus C)$, niin kaikilla $k \in \mathbb{N}$ on olemassa $j, \ell > k$, joilla $\gamma(j) = 0$ ja $\gamma(\ell) = 1$, joten kaikilla $k \in \mathbb{N}$

$$0 < S_k(\gamma) < \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{2.1}$$

Olkoon $\gamma \in (\mathcal{C} \setminus C)$. Osoitetaan $x_\gamma \in (\mathbb{I} \setminus D)$. Ehdosta 2.1 seuraa $0 < x_\gamma < 1$. Olkoon $d \in D \setminus \{0, 1\}$ ja $m, n \in \mathbb{N}^*$ lukuja, joilla $d = \frac{m}{2^n}$. Osoitetaan $x_\gamma \neq d$. Olkoon $p = \sum_{i=0}^{n-1} (2^{n-1-i}\gamma(i)) \in \mathbb{N}$, jolloin

$$s_{n-1}(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\gamma(i)}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{n-1-i}\gamma(i)}{2^n} = \frac{p}{2^n}.$$

Ehdon 2.1 nojalla $0 < S_{n-1}(\gamma) < \frac{1}{2^n}$, joten

$$\frac{p}{2^n} = s_{n-1}(\gamma) < s_{n-1}(\gamma) + S_{n-1}(\gamma) = x_\gamma = s_{n-1}(\gamma) + S_{n-1}(\gamma) < \frac{p}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{p+1}{2^n},$$

eli $p < 2^n x_\gamma < p + 1$ ja $2^n x_\gamma \notin \mathbb{N}$. Erityisesti $x_\gamma \neq \frac{m}{2^n} = d$.

Olkoon $g : (\mathcal{C} \setminus C) \to (\mathbb{I} \setminus D)$ kuvaus $\gamma \mapsto x_\gamma$. Osoitetaan, että $g$ on homeomorfismi. Aloitetaan injektiivisyydestä. Olkoon $\gamma, \nu \in (\mathcal{C} \setminus C)$ eri alkioita ja $m = \min\{i \in \mathbb{N} : \gamma(i) \neq \nu(i)\}$. Voidaan olettaa $\gamma(m) = 0$ ja $\nu(m) = 1$. Ehdon 2.1 nojalla $S_m(\gamma) < \frac{1}{2^{m+1}}$, joten

$$x_\gamma = s_m(\gamma) + S_m(\gamma) = s_m(\nu) - \frac{1}{2^{m+1}} + S_m(\gamma) < s_m(\nu) < x_\nu.$$

Siis $x_\gamma \neq x_\nu$ ja $g$ on injektio.
Osoitetaan $g$ surjektioksi. Koska $x_\gamma \in D$ kaikilla $\gamma \in C$, riittää osoittaa, että jokaisella $x \in \mathbb{I}$ on olemassa $\gamma \in \mathcal{C}$, jolla $x = x_\gamma$. Olkoon $x \in \mathbb{I}$. Valitaan luvut $c_i \in \{0, 1\}$ kaikilla $i < \omega$ niin, että kaikilla $k < \omega$

$$T_k \leq x \leq T_k + \frac{1}{2^{k+1}}, \text{ missä } T_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{c_i}{2^{i+1}}. \tag{2.2}$$

Asetetaan

$$c_0 = \begin{cases} 0, & \text{jos } 0 \leq x < \frac{1}{2}. \\ 1, & \text{jos } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Tällöin ehto 2.2 on voimassa kun $k = 0$. Oletetaan, että $n < \omega$ ja luvut $c_0, \ldots, c_n$ on valittu siten, että ehto 2.2 on voimassa kaikilla $k \leq n$. Erityisesti $T_n \leq x \leq T_n + \frac{1}{2^{n+1}}$. Asetetaan

$$c_{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{jos } T_n \leq x < T_n + \frac{1}{2^{n+2}}. \\ 1, & \text{jos } T_n + \frac{1}{2^{n+2}} \leq x \leq T_n + \frac{1}{2^{n+1}}. \end{cases}$$

Tällöin

$$T_{n+1} = T_n + \frac{c_{n+1}}{2^{n+2}} \leq x \leq T_n + \frac{c_{n+1}}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+2}} = T_{n+1} + \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Olkoon $\gamma = (c_i)_{i<\omega}$, jolloin $s_k(\gamma) = T_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Määritellään kaikilla $k \in \mathbb{N}$ suljettu väli $I_k = [s_k(\gamma), s_k(\gamma) + \frac{1}{2^{k+1}}]$. Tällöin $I_k \supset I_{k+1}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja koska $d(I_k) = \frac{1}{2^{k+1}} \to 0$, niin lauseen 2.1.10 mukaan $\bigcap_k I_k$ on yksiö. Alkioiden $c_i$ konstruktion nojalla $x \in \bigcap_k I_k$ ja välien $I_k$ määrittelyn nojalla $x_\gamma \in \bigcap_k I_k$, joten $x = x_\gamma$.

Kuvaus $g$ on jatkuva, koska kaikilla $\gamma, \nu \in \mathcal{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}}(\gamma, \nu) < \frac{1}{n+1} &\Longrightarrow \gamma \restriction (n+1) = \nu \restriction (n+1) \Longrightarrow s_n(\gamma) = s_n(\nu) \\ &\Longrightarrow |x_\gamma - x_\nu| \leq \frac{1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Osoitetaan $g$ avoimeksi kuvaukseksi. Olkoon $\sigma \in {}^{<\omega}2 \setminus \{\emptyset\}$ ja $n = |\sigma|$. Merkitään $a = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sigma(i)}{2^{i+1}}$. Selvästi $g[N_\sigma \setminus C] \subseteq [a, a + \frac{1}{2^n}]$ ja edellä esitetyn konstruktion nojalla nähdään, että kaikilla $x \in [a, a + \frac{1}{2^n}]$ on olemassa $\gamma \in N_\sigma$, jolla $x = x_\gamma$. Siis $g[N_\sigma \setminus C] = [a, a + \frac{1}{2^n}] \setminus D = ]a, a + \frac{1}{2^n}[ \cap (\mathbb{I} \setminus D)$, sillä $a$ ja $a + \frac{1}{2^n}$ ovat dyadisia rationaalilukuja. Siksi $g[N_\sigma \cap (\mathcal{C} \setminus C)]$ on avoin avaruudessa $\mathbb{I} \setminus D$ ja $g$ on avoin kuvaus.

Koska $C$ ja $D$ ovat numeroituvia, on olemassa bijektio $h : C \to D$. Olkoon $f : \mathcal{C} \to \mathbb{I}$ kuvaus

$$f(\gamma) = \begin{cases} g(\gamma), & \text{jos } \gamma \in \mathcal{C} \setminus C. \\ h(\gamma), & \text{jos } \gamma \in C. \end{cases}$$

Kuvaus $f$ on bijektio, sillä $g$ ja $h$ ovat bijektioita. Osoitetaan, että $f^{-1}$ ja $f$ ovat Borelin kuvauksia. Olkoon $U \subseteq \mathcal{C}$ avoin. Koska $g$ on homeomorfismi, niin $g[U \setminus C] = V \setminus D$, jollakin avoimella $V \subseteq \mathbb{I}$. Lisäksi $N = h[U \cap C]$ on numeroituva. Koska metristyvän avaruuden numeroituvat joukot ovat $\mathbf{\Sigma}^0_2$-joukkoja, niin

$$f[U] = g[U \setminus C] \cup h[U \cap C] = (V \setminus D) \cup N \in (\mathbf{\Sigma}^0_1 \cap \mathbf{\Pi}^0_2) \cup \mathbf{\Sigma}^0_2$$

on Borelin joukko. Olkoon $V \subseteq \mathbb{I}$ avoin. Tällöin $g^{-1}[V \setminus D] = U \setminus C$, jollakin avoimella $U \subseteq \mathcal{C}$ ja $N = h^{-1}[V \cap D]$ on numeroituva. Siis

$$f^{-1}[V] = g^{-1}[V \setminus D] \cup h^{-1}[V \cap D] = (U \setminus C) \cup N \in (\mathbf{\Sigma}^0_1 \cap \mathbf{\Pi}^0_2) \cup \mathbf{\Sigma}^0_2$$

on Borelin joukko. □

Todistetaan Borelin kuvauksille muotoiltu versio Shröder-Bernsteinin lauseesta.

**Lause 2.2.15.** *Olkoot $X$ ja $Y$ puolalaisia avaruuksia, $A \subseteq X$ ja $B \subseteq Y$ Borelin joukkoja sekä $f : X \to B$ ja $g : Y \to A$ Borel-isomorfismeja. Tällöin avaruudet $X$ ja $Y$ ovat Borel-isomorfiset.*

*Todistus.* Määritellään $X_0 = X$, $Y_0 = Y$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$ asetetaan $X_{n+1} = g[f[X_n]]$ sekä $Y_{n+1} = f[g[Y_n]]$. Selvästi $g[Y_0] = A \subseteq X = X_0$ ja $f[X_0] = B \subseteq Y = Y_0$. Oletetaan $n \in \mathbb{N}$ ja $g[Y_n] \subseteq X_n$ sekä $f[X_n] \subseteq Y_n$ . Tällöin $g[Y_{n+1}] = g[f[g[Y_n]]] \subseteq g[f[X_n]] = X_{n+1}$ ja $f[X_{n+1}] = f[g[f[X_n]]] \subseteq f[g[Y_n]] = Y_{n+1}$. Siis

$g[Y_n] \subseteq X_n$ ja $f[X_n] \subseteq Y_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska lisäksi $Y_{n+1} = f[g[Y_n]] \subseteq f[X_n]$ ja $X_{n+1} = g[f[X_n]] \subseteq g[Y_n]$, niin kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$X_{n+1} \subseteq g[Y_n] \subseteq X_n \quad \text{ja} \quad Y_{n+1} \subseteq f[X_n] \subseteq Y_n.$$

Tällöin

$$g[Y_n \setminus f[X_n]] = g[Y_n] \setminus g[f[X_n]] = g[Y_n] \setminus X_{n+1}$$

ja

$$f[X_n \setminus g[Y_n]] = f[X_n] \setminus f[g[Y_n]] = f[X_n] \setminus Y_{n+1}.$$

Olkoot $X^* = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ja $Y^* = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n$. Koska

$$Y^* = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n \supseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f[X_n] \supseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_{n+1} = Y^*$$

ja $f$ on bijektio, niin $f[X^*] = f[\bigcap_n X_n] = \bigcap_n f[X_n] = Y^*$. Koska $X$ on erillinen yhdiste

$$X = X^* \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((X_n \setminus g[Y_n]) \cup (g[Y_n] \setminus X_{n+1}))$$

ja $Y$ on erillinen yhdiste

$$Y = Y^* \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((Y_n \setminus f[X_n]) \cup (f[X_n] \setminus Y_{n+1})),$$

niin kuvaus $h : X \to Y$

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jos } x \in X^* \cup \bigcup_n (X_n \setminus g[Y_n]). \\ g^{-1}(x), & \text{jos } x \in \bigcup_n (g[Y_n] \setminus X_{n+1}). \end{cases}$$

on bijektio. Koska $f$ ja $g$ ovat Borel-isomorfismeja ja $A \subseteq X$ sekä $B \subseteq Y$ ovat Borelin joukkoja, niin $X_n, g[Y_n], X^* \subseteq X$ ja $Y_n, f[X_n], Y^* \subseteq Y$ ovat Borelin joukkoja kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tästä seuraa, että $h : X \to Y$ on Borel-isomorfismi. $\square$

**Lemma 2.2.16.** *Olkoon $X$ ylinumeroituva puolalainen avaruus. Tällöin $X$ on Borel-isomorfinen Cantorin avaruuden $\mathcal{C}$ kanssa.*

*Todistus.* Koska lauseen 2.2.14 mukaan $\mathcal{C}$ ja $\mathbb{I}$ ovat Borel-isomorfiset, niin lauseen 2.2.8 nojalla avaruudet ${}^{\omega}\mathcal{C}$ ja ${}^{\omega}\mathbb{I} = \mathbb{H}$ ovat Borel-isomorfiset. Koska ${}^{\omega}\mathcal{C}$ on homeomorfinen avaruuden $\mathcal{C}$ kanssa (lemma 2.1.9), niin $\mathcal{C}$ ja $\mathbb{H}$ ovat Borel-isomorfiset. Olkoon $f_2 : \mathbb{H} \to \mathcal{C}$ Borel-isomorfismi. Lauseiden 2.1.6 ja 2.1.5 nojalla on olemassa avaruuden $X$ kanssa homeomorfinen $G \in \mathbf{\Pi}^0_2(\mathbb{H})$. Olkoon $f_1 : X \to G$ homeomorfismi. Olkoon $B = f_2[G] \subseteq \mathcal{C}$. Tällöin $f = (f_2 \circ f_1) : X \to B$ on Borel-isomorfismi. Toisaalta lauseen 2.1.16 mukaan on olemassa $A \subseteq X$ ja homeomorfismi $g : \mathcal{C} \to A$. Koska $\mathcal{C}$ on kompakti, $A$ on kompakti ja koska $X$ on metristyvä, $A$ on suljettu. Lauseen 2.2.15 mukaan $X$ ja $\mathcal{C}$ ovat Borel-isomorfiset. $\square$

**Lause 2.2.17.** *(Borel-isomorfia.) Olkoot $X$ ja $Y$ yhtä mahtavia puolalaisia avaruuksia. Tällöin $X$ ja $Y$ ovat Borel-isomorfiset.*

*Todistus.* Oletetaan $|X| = |Y| \leq \aleph_0$. Olkoon $h : X \to Y$ bijektio. Koska puolalaisen avaruuden numeroituvat joukot ovat Borelin joukkoja (tarkemmin $\mathbf{\Sigma}^0_2$), $h$ on Borel-isomorfismi.

Oletetaan $|X| = |Y| > \aleph_0$. Lemman 2.2.16 nojalla $X$ ja $Y$ ovat Borel-isomorfisia avaruuden $\mathcal{C}$ kanssa, joten $X$ ja $Y$ ovat keskenään Borel-isomorfiset. $\square$

## 2.3 Analyyttiset joukot

Borelin joukkojen luokka $\mathcal{B}$ ei yleisesti ole suljettu projektiokuvausten suhteen. Tämä antaa aiheen projektiivisen hierarkian ensimmäisen tason määrittelemiseen.

**Määritelmä 2.3.1.** *Olkoon $X$ puolalainen avaruus. Määritellään avaruuden $X$* analyyttisten *joukkojen perhe*

$$\mathbf{\Sigma}^1_1(X) = \exists^{\mathcal{N}} \mathbf{\Pi}^0_1(X \times \mathcal{N}).$$

Analyyttisen joukon käsitteen otti käyttöön Suslin vuonna 1916 huomattuaan virheen Lebesguen artikkelissa "Sur les fonctions représentables analytiquement". Lebesgue oli pitänyt (virheellisesti) selvänä, että tason $\mathbb{R}^2$ Borelin joukon projektio on aina Borelin joukko $\mathbb{R}$:ssä.

Seuraavia kahta aputulosta käytetään analyyttisten joukkojen karakterisoinnissa.

**Lemma 2.3.2.** *Olkoon $X$ Hausdorff-avaruus. Tällöin avaruuden $X$ identtisyysrelaatio $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$ on suljettu joukko tuloavaruudessa $X \times X$.*

*Todistus.* Olkoon $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$ eli $x \neq y$. Haudorff-ominaisuuden nojalla on olemassa erilliset avoimet joukot $U \subseteq X$ ja $V \subseteq X$, joilla $x \in U$ ja $y \in V$. Tällöin $U \times V$ on alkion $(x, y)$ ympäristö avaruudessa $X \times X$ ja koska $U \cap V = \emptyset$, niin $U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta_X$. Siis $(X \times X) \setminus \Delta_X$ on avoin ja $\Delta_X$ suljettu. $\square$

Merkitään funktion $f : X \to Y$ kuvaajaa

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\}.$$

**Lemma 2.3.3.** *Olkoon $X$ topologinen avaruus, $Y$ Hausdorff-avaruus ja $f : X \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin kuvauksen $f$ kuvaaja graph($f$) on suljettu joukko avaruudessa $X \times Y$.*

*Todistus.* Määritellään kuvaus $g : X \times Y \to Y \times Y$ ehdolla $(x, y) \mapsto (f(x), y)$. Tällöin $g = (f \times \mathrm{id}_Y)$ on jatkuva. Koska lemman 2.3.2 mukaan joukko $\Delta_Y$ on suljettu, niin myös $\mathrm{graph}(f) = g^{-1}[\Delta_Y]$ on suljettu. $\square$

Suslinin alkuperäinen analyyttisen joukon määritelmä perustuu *Suslinin operaatioon.*

**Määritelmä 2.3.4.** *Olkoon $X$ joukko ja $A_\sigma \subseteq X$, kaikilla $\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}$. Määritellään* Suslinin operaatio $\mathcal{A}$ *joukko-operaationa*

$$\mathcal{A}(A_\sigma)_{\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\alpha \restriction n}.$$

Jatkossa käytetään Suslinin operaatiolle lyhempää merkintää $\mathcal{A}(A_\sigma)$.

**Lause 2.3.5.** *Olkoon $X$ puolalainen avaruus ja $A \subseteq X$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*
*(1) $A$ on analyyttinen.*
*(2) $A = \emptyset$ tai on olemassa jatkuva kuvaus $f : \mathcal{N} \to X$, jonka kuvajoukko on $A$.*
*(3) On olemassa perhe $(F_\sigma)_{\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}}$ avaruuden $X$ suljettuja joukkoja, joilla*

$$A = \mathcal{A}(F_\sigma).$$

*(4) On olemassa puolalainen avaruus $Y$ ja $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$, jolla $A = \exists^Y B$.*

*Todistus.* (1) $\Rightarrow$ (2). Oletetaan, että $A$ on epätyhjä ja analyyttinen. Olkoon $F \in \mathbf{\Pi}^0_1(X \times \mathcal{N})$ joukko, jolla $A = \exists^{\mathcal{N}} F$. Lauseen 2.2.13 mukaan on olemassa jatkuva kuvaus $g : \mathcal{N} \to (X \times \mathcal{N})$, jonka kuvajoukko on $F$. Olkoon $f = (\mathrm{pr}_X \circ g) : \mathcal{N} \to X$. Tällöin $f$ on jatkuva ja $f[\mathcal{N}] = \mathrm{pr}_X[g[\mathcal{N}]] = \mathrm{pr}_X[F] = \exists^{\mathcal{N}} F = A$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Jos $A = \emptyset$, valitaan $F_\sigma = \emptyset$ kaikilla $\sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Tällöin joukot $F_\sigma$ ovat suljettuja ja $\mathcal{A}(F_\sigma) = \emptyset = A$. Oletetaan, että on olemassa jatkuva kuvaus $f : \mathcal{N} \to X$, jonka kuvajoukko on $A$. Olkoon $F_\sigma = \overline{f[N_\sigma]}$ kaikilla $\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}$. Tällöin joukot $F_\sigma \subseteq X$ ovat suljettuja. Osoitetaan $\bigcap_i F_{\alpha \restriction i} = \{f(\alpha)\}$ kaikilla $\alpha \in \mathcal{N}$. Olkoon $\alpha \in \mathcal{N}$. Selvästi $f(\alpha) \in \bigcap_i f[N_{\alpha \restriction i}] \subseteq \bigcap_i F_{\alpha \restriction i}$. Valitaan kuvauksen $f$ jatkuvuuden perusteella jokaista lukua $n \in \mathbb{N}$ kohden luku $m_n > 0$, jolla $d_X(f(\alpha), f(\beta)) < \frac{1}{n+1}$, kun $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) < \frac{1}{m_n}$. Tällöin

$$d_X(F_{\alpha \restriction m_n}) = d_X(\overline{f[N_{\alpha \restriction m_n}]}) = d_X(f[N_{\alpha \restriction m_n}]) \leq \frac{1}{n+1},$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten $d_X(\bigcap_i F_{\alpha \restriction i}) = 0$ ja $\bigcap_i F_{\alpha \restriction i} = \{f(\alpha)\}$. Siis

$$\mathcal{A}(F_\sigma) = \bigcup_\alpha \bigcap_i F_{\alpha \restriction i} = \bigcup_\alpha \{f(\alpha)\} = f[\mathcal{N}] = A.$$

(3) $\Rightarrow$ (4). Olkoon $\{F_\sigma\}_{\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}}$ perhe avaruuden $X$ suljettuja joukkoja ja $A = \mathcal{A}(F_\sigma)$. Olkoon

$$B = \bigcap_n \bigcup_{\{\sigma : |\sigma| = n\}} (F_\sigma \times N_\sigma),$$

missä $N_\sigma = \{\alpha \in \mathcal{N} : \sigma \subset \alpha\}$. Koska joukot $F_\sigma$ ja $N_\sigma$ ovat suljettuja, niin $B \subseteq X \times \mathcal{N}$ on Borelin joukko (tarkemmin $\mathbf{\Pi}^0_3$) ja

$$\begin{aligned}(x, \alpha) \in B &\iff \forall n \exists \sigma (|\sigma| = n \wedge x \in F_\sigma \wedge \sigma \subset \alpha) \iff \forall n (x \in F_{\alpha \restriction n}) \\ &\iff x \in \bigcap_n F_{\alpha \restriction n}.\end{aligned}$$

Siis

$$x \in \exists^{\mathcal{N}} B \iff x \in \bigcup_{\alpha} \bigcap_{n} F_{\alpha \restriction n} \iff x \in \mathcal{A}(F_\sigma) \iff x \in A$$

eli $A = \exists^{\mathcal{N}} B$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Olkoon $Y$ puolalainen avaruus, $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ ja $A = \exists^Y B$. Jos $B = \emptyset$, niin $A = \emptyset = \exists^{\mathcal{N}} \emptyset$ on analyyttinen. Oletetaan $B \neq \emptyset$. Lauseen 2.2.13 nojalla on olemassa jatkuva kuvaus $g : \mathcal{N} \to X \times Y$, jonka kuvajoukko on $B$. Tällöin kuvaus $f = (\mathrm{pr}_X \circ g) : \mathcal{N} \to X$ on jatkuva ja

$$A = \exists^Y B = \exists^Y g[\mathcal{N}] = \mathrm{pr}_X[g[\mathcal{N}]] = f[\mathcal{N}].$$

Olkoon $F' = \mathrm{graph}(f) \subseteq (\mathcal{N} \times X)$. Lemman 2.3.3 nojalla $F'$ on suljettu joukko. Olkoon $F = \{(x, \alpha) \in (X \times \mathcal{N}) : (\alpha, x) \in F'\}$. Koska kuvaus $(\alpha, x) \mapsto (x, \alpha)$ on homeomorfismi, niin $F$ on suljettu ja

$$x \in A \iff x \in f[\mathcal{N}] \iff x \in \mathrm{pr}_X[F'] \iff x \in \mathrm{pr}_X[F] \iff x \in \exists^{\mathcal{N}} F.$$

Siis $A = \exists^{\mathcal{N}} F$ on analyyttinen. □

Ehdosta (2) seuraa, että analyyttisen joukon jatkuva kuva on analyyttinen ja lauseesta 2.2.13 yhdessä ehdon (2) kanssa seuraa, että Borelin joukot ovat analyyttisiä. Usein käytetty esitys avaruuden $\mathcal{N}$ analyyttiselle joukolle saadaan yhdistämällä lause 2.1.7 ja määritelmä 2.3.1. Nimittäin joukko $A \subseteq \mathcal{N}$ on analyyttinen, jos ja vain jos on olemassa puu $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega}$, jolla

$$A = \exists^{\mathcal{N}} [T].$$

Analyyttisillä joukoilla on monia säännöllisyysominaisuuksia, esimerkiksi Bairen ominaisuus (lause 3.2.6) ja perfektisyysdikotomia (lause 4.2.5 ). Jatkamalla projisointia $\exists^{\mathcal{N}}$ ja komplementointia päädytään kuitenkin nopeasti joukkoihin, joiden ominaisuuksia ei enää voida ratkaista ZFC:ssä.

**Määritelmä 2.3.6.** *Olkoon $X$ puolalainen avaruus. Määritellään joukkoperheet $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$, $\mathbf{\Pi}^1_n(X)$ ja $\mathbf{\Delta}^1_n(X)$ kaikilla $n \geq 1$ seuraavasti:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X) &= \exists^{\mathcal{N}} \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N}) \\
\mathbf{\Pi}^1_n(X) &= \{A \subseteq X : (X \setminus A) \in \mathbf{\Sigma}^1_n(X)\} \\
\mathbf{\Delta}^1_n(X) &= \mathbf{\Sigma}^1_n(X) \cap \mathbf{\Pi}^1_n(X).
\end{aligned}$$

Avaruuden $X$ projektiivisten joukkojen perhe $\mathbf{P}(X)$ määritellään näiden joukkoperheiden yhdisteenä. Erityisesti $\mathbf{\Pi}^1_1$-joukkoja kutsutaan *koanalyyttisiksi.* Koska Borelin joukkojen komplementit ovat Borelin joukkoja ja erityisesti analyyttisiä, niin Borelin joukot ovat myös koanalyyttisiä. Siis $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathbf{\Delta}^1_1(X)$. Koska tutkielman päätulokset käsittelevät projektiivisen hierarkian ensimmäistä tasoa ($\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_1$ ja $\mathbf{\Delta}^1_1$), jatkossa käsitellään vain näitä luokkia, vaikka useat tulokset saadaan induktiolla todistettua myös korkeammille projektiivisen hierarkian tasoille.

**Lemma 2.3.7.** *Olkoot $X$ ja $Y$ puolalaisia avaruuksia ja $f : X \to Y$ Borelin kuvaus. Tällöin kuvauksen $f$ kuvaaja graph$(f)$ on Borelin joukko avaruudessa $X \times Y$.*

*Todistus.* Olkoon $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ avaruuden $Y$ kanta. Koska metristyvät avaruudet ovat Hausdorff-avaruuksia, kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$ pätee

$$f(x) \neq y \iff \exists i(f(x) \in V_i \wedge y \notin V_i),$$

joten

$$\mathrm{graph}(f) = \complement(\bigcup_i (f^{-1}[V_i] \times (Y \setminus V_i))).$$

Koska $f^{-1}[V_i] \in \mathcal{B}(X)$ ja $(Y \setminus V_i) \in \mathcal{B}(Y)$, lauseen 2.2.8 nojalla graph$(f) \in \mathcal{B}(X \times Y)$. □

**Lause 2.3.8.** *Kaikilla puolalaisilla avaruuksilla $X$ :*
*(i) Luokat $\mathbf{\Sigma}_1^1, \mathbf{\Pi}_1^1$ ja $\mathbf{\Delta}_1^1$ ovat suljettuja Borelin kuvausten alkukuvien suhteen.*
*(ii) Perheet $\mathbf{\Sigma}_1^1(X), \mathbf{\Pi}_1^1(X)$ ja $\mathbf{\Delta}_1^1(X)$ ovat suljettuja numeroituvan yhdisteen ja numeroituvan leikkauksen suhteen.*
*(iii) Luokat $\mathbf{\Sigma}_1^1, \mathbf{\Pi}_1^1$ ja $\mathbf{\Delta}_1^1$ ovat suljettuja numeroituvan karteesisen tulon suhteen.*
*(iv) Luokka $\mathbf{\Sigma}_1^1$ on suljettu kvantifioinnin $\exists^X$ suhteen ja luokka $\mathbf{\Pi}_1^1$ on suljettu kvantifioinnin $\forall^X$ suhteen.*
*(v) Luokka $\mathbf{\Sigma}_1^1$ on suljettu Borelin kuvausten kuvien suhteen.*

*Todistus.* Tulokset luokalle $\mathbf{\Delta}_1^1$ seuraavat välittömästi tuloksista luokille $\mathbf{\Sigma}_1^1$ ja $\mathbf{\Pi}_1^1$.

(*i*) Olkoot $X$ ja $Y$ puolalaisia avaruuksia ja $f : X \to Y$ Borelin kuvaus. Olkoon $A \in \mathbf{\Sigma}_1^1(Y)$ ja $C \in \mathbf{\Pi}_1^0(Y \times \mathcal{N})$ joukko, jolla $A = \exists^{\mathcal{N}} C$. Määritellään

$$B = \{(x, \alpha) \in X \times \mathcal{N} : (f(x), \alpha) \in C\} = (f \times \mathrm{id}_{\mathcal{N}})^{-1}[C].$$

Koska $(f \times \mathrm{id}_{\mathcal{N}})$ on Borelin kuvaus, niin $B$ on Borelin joukko ja

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[A] &\iff f(x) \in A \iff \exists \alpha((f(x), \alpha) \in C) \iff \exists \alpha((x, \alpha) \in B) \\ &\iff x \in \exists^{\mathcal{N}} B. \end{aligned}$$

Lauseen 2.3.5 (4) nojalla $f^{-1}[A] = \exists^{\mathcal{N}} B \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$.
Koska $\mathbf{\Sigma}_1^1$ on suljettu Borelin kuvausten alkukuvien suhteen, niin myös $\mathbf{\Pi}_1^1$ on suljettu Borelin kuvausten alkukuvien suhteen, sillä $f^{-1}[C] = (X \setminus f^{-1}[Y \setminus C]) \in \mathbf{\Pi}_1^1(X)$ kaikilla $C \in \mathbf{\Pi}_1^1(Y)$.

(*ii*) Olkoot $A_i \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja olkoot joukot $C_i \in \mathbf{\Pi}_1^0(X \times \mathcal{N})$ sellaisia, että $A_i = \exists^{\mathcal{N}} C_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Merkitään $C = \bigcup_i C_i \in \mathbf{\Sigma}_2^0(X \times \mathcal{N})$. Tällöin

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_i \exists^{\mathcal{N}} C_i = \exists^{\mathcal{N}} \bigcup_i C_i = \exists^{\mathcal{N}} C,$$

joten lauseen 2.3.5 (4) nojalla $\bigcup_i A_i = \exists^{\mathcal{N}} C \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$. Olkoon $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ jatkuva surjektio (lause 2.1.21) ja merkitään

$$D = \{(x,\alpha) \in X \times \mathcal{N} : \forall i((x, f_i(\alpha)) \in C_i)\} = \bigcap_i (\mathrm{id}_X \times f_i)^{-1}[C_i].$$

Tällöin $D$ on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu ja

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_i A_i \iff x \in \bigcap_i \exists^{\mathcal{N}} C_i \iff \forall i \exists \alpha((x,\alpha) \in C_i) \\ \iff \exists \alpha \forall i((x, f_i(\alpha)) \in C_i) \iff x \in \exists^{\mathcal{N}} D. \end{aligned}$$

Siis $\bigcap_i A_i = \exists^{\mathcal{N}} D \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$. Koska $\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$ on suljettu numeroituvien yhdisteiden ja leikkausten suhteen, de Morganin lakien perusteella sama pätee luokalle $\mathbf{\Pi}_1^1(X)$.

(*iii*) Olkoon $0 < \xi \leq \omega$ ja $X_i$ puolalainen avaruus kaikilla $i < \xi$. Olkoon $A_i \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X_i)$ kaikilla $i < \xi$. Kohdan (*i*) nojalla $B_i = \mathrm{pr}_i^{-1}[A_i] \subseteq \prod_{i<\xi} X_i$ on $\mathbf{\Sigma}_1^1$-joukko kaikilla $i < \xi$ ja kohdan (*ii*) perusteella $\prod_{i<\xi} A_i = \bigcap_i B_i$ on $\mathbf{\Sigma}_1^1$-joukko. Samoin todistetaan väite luokalle $\mathbf{\Pi}_1^1$.

(*iv*) Olkoon $Y$ puolalainen avaruus ja $A \in \mathbf{\Sigma}_1^1(Y \times X)$. Koska $\mathbf{\Sigma}_1^1$ on suljettu jatkuvien kuvien suhteen (lause 2.3.5 (2)), niin $\exists^X A = \mathrm{pr}_Y[A] \in \mathbf{\Sigma}_1^1(Y)$. Olkoon $C \in \mathbf{\Pi}_1^1(Y \times X)$. Tällöin $((Y \times X) \setminus C)$ kuuluu perheeseen $\mathbf{\Sigma}_1^1(Y \times X)$ ja edellä todistetun nojalla joukko $A = \exists^X((Y \times X) \setminus C)$ on $\mathbf{\Sigma}_1^1(Y)$. Kaikilla $y \in Y$ :

$$\begin{aligned} y \in \forall^X C &\iff \forall x((y,x) \in C) \iff \neg\exists x \neg((y,x) \in C) \\ &\iff \neg\exists x((y,x) \in (Y \times X) \setminus C) \iff \neg(y \in \exists^X((Y \times X) \setminus C)) \\ &\iff y \notin A \iff y \in (Y \setminus A). \end{aligned}$$

Siis $\forall^X C = (Y \setminus A) \in \mathbf{\Pi}_1^1(Y)$.

(*v*) Olkoot $X$ ja $Y$ puolalaisia avaruuksia ja $f : X \to Y$ Borelin kuvaus. Merkitään $G'(f) = \mathrm{graph}(f) \subseteq (X \times Y)$. Lauseen 2.3.7 mukaan $G'(f)$ on Borelin joukko. Koska $(x,y) \mapsto (y,x)$ on homeomorfismi avaruuksien $(X \times Y)$ ja $(Y \times X)$ välillä, myös $G(f) = \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in G'\}$ on Borelin joukko. Olkoon $A \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$ ja $C \in \mathbf{\Pi}_1^0(X \times \mathcal{N})$ joukko, jolla $A = \exists^{\mathcal{N}} C$. Määritellään

$$B = \{(y,x,\alpha) \in Y \times X \times \mathcal{N} : (y,x) \in G(f) \wedge (x,\alpha) \in C\} = (G(f) \times \mathcal{N}) \cap (Y \times C).$$

Koska $G(f)$ ja $C$ ovat Borelin joukkoja, niin $B$ on Borelin joukko ja

$$\begin{aligned} y \in f[A] &\iff \exists x \in A(y = f(x)) \iff \exists \alpha \exists x((x,\alpha) \in C \wedge (x,y) \in G'(f)) \\ &\iff \exists \alpha \exists x((x,\alpha) \in C \wedge (y,x) \in G(f)) \iff y \in \exists^X \exists^{\mathcal{N}} B \end{aligned}$$

Siis $f[A] = \exists^X \exists^{\mathcal{N}} B$ ja koska $\exists^{\mathcal{N}} B$ on $\mathbf{\Sigma}_1^1$-joukko, kohdan (*iv*) nojalla myös $f[A]$ on $\mathbf{\Sigma}_1^1$-joukko. $\square$

## 2.4 Universaalit joukot

Numeroituvalle puolalaiselle avaruudelle edellä esitetyt hierarkiat eivät ole tarkoituksenmukaisia vaan kutistuvat tasolle $\mathbf{\Sigma}^0_2$, sillä metristyvän avaruuden yksiöt ovat suljettuja ja jokainen numeroituvan avaruuden osajoukko voidaan esittää yksiöiden numeroituvana yhdisteenä. Voidaan kuitenkin osoittaa, että ylinumerotuvalle puolalaiselle avaruudelle sekä Borelin hierarkia että projektiivinen hierarkia ovat aidosti kasvavia. Tämä tehdään universaalien joukkojen avulla. Tässä tutkielmassa käytetään universaaleja joukkoja osoittamaan sellaisen analyyttisen joukon olemassaolo, joka ei ole koanalyyttinen. Tätä tulosta tarvitaan $\mathbf{\Sigma}^1_1$-rajoittuvuuden todistamiseen (lause 2.8.2).

Olkoon $\Gamma$ luokka puolalaisten avaruuksien osajoukkoja. Joukkoa $U \in \Gamma(\mathcal{N} \times X)$ sanotaan $X$:n $\Gamma$-*universaaliksi* joukoksi, jos kaikilla $A \subseteq X$

$$A \in \Gamma(X) \iff \exists \alpha (A = U_\alpha),$$

missä $U_\alpha = \{x \in X : (\alpha, x) \in U\}$ on joukon U $\alpha$-leikkaus. Luokalla $\Gamma$ on *universaalisuusominaisuus,* jos kaikilla avaruuksilla $X \in \mathcal{X}$ on olemassa $\Gamma$-universaali joukko $U \in \Gamma(\mathcal{N} \times X)$.

**Lause 2.4.1.** *Luokilla $\mathbf{\Sigma}^0_1$ ja $\mathbf{\Pi}^0_1$ on universaalisuusominaisuus.*

*Todistus.* Olkoon $X$ puolalainen avaruus. Kiinnitetään avaruuden $X$ numeroituva kanta $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, missä $V_0 = \emptyset$. Määritellään joukko $U \subseteq \mathcal{N} \times X$ ehdolla

$$(\alpha, x) \in U \iff x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{\alpha(n)}.$$

Selvästi $G \in \mathbf{\Sigma}^0_1(X)$, jos ja vain jos on olemassa $\alpha \in \mathcal{N}$, jolla $G = U_\alpha$. Osoitetaan $U$ avoimeksi. Jos $(\alpha, x) \in U$, niin $x \in \bigcup_n V_{\alpha(n)}$, joten $x \in V_{\alpha(i)}$ jollakin $i \in \mathbb{N}$. Tällöin pisteen $(\alpha, x)$ ympäristö $(N_{\alpha\restriction(i+1)} \times V_{\alpha(i)}) \subseteq U$ ja $U$ on avoin. Siis $U$ on avaruuden $X$ $\mathbf{\Sigma}^0_1$-universaali joukko.

Merkitään $C = (\mathcal{N} \times X) \setminus U \in \mathbf{\Pi}^0_1(\mathcal{N} \times X)$. Tällöin kaikilla $\alpha \in \mathcal{N}$ ja $x \in X$

$$x \in C_\alpha \iff (\alpha, x) \in C \iff (\alpha, x) \notin U \iff x \notin U_\alpha \iff x \in X \setminus U_\alpha.$$

Siis $C_\alpha = X \setminus U_\alpha$ ja koska $U_\alpha$ on avoin, niin $C_\alpha$ on suljettu kaikilla $\alpha \in \mathcal{N}$. Jos $F \in \mathbf{\Pi}^0_1(X)$, niin $(X \setminus F) \in \mathbf{\Sigma}^0_1(X)$, joten on olemassa $\alpha$, jolla $X \setminus F = U_\alpha$. Tällöin $F = X \setminus U_\alpha = C_\alpha$. Tämä osoittaa joukon $C$ avaruuden $X$ $\mathbf{\Pi}^0_1$-universaaliksi joukoksi. $\square$

**Lause 2.4.2.** *Luokilla $\mathbf{\Sigma}^1_1$ ja $\mathbf{\Pi}^1_1$ on universaalisuusominaisuus.*

*Todistus.* Olkoon $X$ puolalainen avaruus ja $C \subseteq \mathcal{N} \times (X \times \mathcal{N})$ avaruuden $(X \times \mathcal{N})$ $\mathbf{\Pi}^0_1$-universaali joukko (lause 2.4.1). Olkoon $U = \exists^{\mathcal{N}} C \in \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{N} \times X)$. Tällöin $U_\alpha = \mathrm{pr}_X[U \cap (\{\alpha\} \times X)]$ on $\mathbf{\Sigma}^1_1$-joukon jatkuva kuva, joten $U_\alpha \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ kaikilla $\alpha \in \mathcal{N}$. Olkoon $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$. Tällöin on olemassa $F \in \mathbf{\Pi}^0_1(X \times \mathcal{N})$, jolla $A = \exists^{\mathcal{N}} F$. Olkoon $\alpha \in \mathcal{N}$ alkio, jolla $C_\alpha = F$. Tällöin

$$A = \exists^{\mathcal{N}} F = \exists^{\mathcal{N}} C_\alpha = (\exists^{\mathcal{N}} C)_\alpha = U_\alpha.$$

Siis $U$ on $X$:n $\mathbf{\Sigma}_1^1$-universaali joukko. Tällöin $(\mathcal{N}\times X)\setminus U$ on $X$:n $\mathbf{\Pi}_1^1$-universaali joukko (perustelu kuten lauseen 2.4.1 todistuksessa). □

**Lause 2.4.3.** *Olkoon $X$ ylinumeroituva puolalainen avaruus. Tällöin on olemassa $A \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X) \setminus \mathbf{\Pi}_1^1(X)$.*

*Todistus.* Olkoon $U \subseteq (\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ lauseen 2.4.2 mukainen avaruuden $\mathcal{N}$ $\mathbf{\Sigma}_1^1$-universaali joukko ja olkoon

$$A = \{\alpha \in \mathcal{N} : (\alpha, \alpha) \in U\} = (\mathrm{id}, \mathrm{id})^{-1}[U] \in \mathbf{\Sigma}_1^1(\mathcal{N}).$$

Jos myös $\mathcal{N} \setminus A$ olisi $\mathbf{\Sigma}_1^1$-joukko, niin $(\mathcal{N} \setminus A) = U_\alpha$ eräällä $\alpha \in \mathcal{N}$ ja tällöin

$$\alpha \in A \iff (\alpha, \alpha) \in U \iff \alpha \in U_\alpha \iff \alpha \in (\mathcal{N} \setminus A) \iff \alpha \notin A,$$

mikä on ristiriita. Siis $(\mathcal{N} \setminus A) \notin \mathbf{\Sigma}_1^1(\mathcal{N})$ eli $A \notin \mathbf{\Pi}_1^1(\mathcal{N})$. Koska $X$ on Borel-isomorfinen avaruuden $\mathcal{N}$ kanssa (lause 2.2.17), väite seuraa. □

Erityisesti jos $A \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X) \setminus \mathbf{\Pi}_1^1(X)$, niin $A \notin \mathbf{\Delta}_1^1(X)$ ja $A$ ei ole Borelin joukko. Siis analyyttisten joukkojen perhe on aidosti Borelin joukkoja laajempi ylinumeroituvalle puolalaiselle avaruudelle.

## 2.5 Laskettavuuden teoria

Deskriptiivisen joukko-opin tutkimus sai uuden käänteen, kun 1950-luvulla huomattiin sen käsitteiden ja tulosten läheinen yhteys laskettavuuden teoriaan, joka tuolloin oli varsin uusi matemaattisen logiikan haara. Laskettavuuden käsitteistöä deskriptiiviseen joukko-oppiin yhdistävää teoriaa kutsutaan *efektiiviseksi.*

**Määritelmä 2.5.1.** *Kuvaus $f$ on joukon $X$* osittainen *kuvaus, jos $dom(f) \subseteq X$. Jos lisäksi $ran(f) \subseteq Y$, merkitään $f : X \rightharpoonup Y$.*
*Joukon $X$ osittaista kuvausta $f$ sanotaan* totaaliksi, *jos $dom(f) = X$.*

Laskettavuuden teorian peruskäsite on *laskettava* funktio, jolla tarkoitetaan äärellisen algoritmin määräämää osittaista kuvausta $f : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$. Intuitiivisena ideana on, että osittainen kuvaus on laskettava, jos periaatteessa olisi mahdollista tehdä tietokoneohjelma, joka pysähtyy ja tulostaa arvon $f(\overline{n})$ syötteillä $\overline{n} = (n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}) \in \mathrm{dom}(f)$ ja joka ei pysähdy syötteillä $\overline{n} \notin \mathrm{dom}(f)$. Tätä intuitiivista ideaa ovat formalisoineet ainakin Gödel-Kleene (rekursiiviset funktiot), Church ($\lambda$-kalkyyli), Turing (Turingin koneet), Post ja Markov (yleiset päättelyjärjestelmät) sekä Shepherdson-Sturgis (URM-kone). Kaikkien näiden eri lähtökohdista syntyneiden formalisointien on osoitettu johtavan täsmälleen samoihin laskettaviin funktioihin. Tämä antaa vahvaa tukea Churchin teesin nimellä kulkevalle väittämälle, että intuitiivinen laskettavan funktion käsite on formalisoitu. Tässä tutkielmassa annetaan Churchin teesin mukainen määritelmä laskettavuudelle (osittaisten) rekursiivisten funktioiden avulla.

Sovitaan seuraavasta merkinnästä. Jos $\phi(\overline{x})$ ja $\psi(\overline{x})$ ovat muuttujia $\overline{x}$ sisältäviä (numeerisia) lausekkeita, niin merkitään $\phi(\overline{x}) \simeq \psi(\overline{x})$, jos $\phi$ ja $\psi$ ovat määriteltyjä täsmälleen samoilla muuttujien arvoilla ja saavat samat arvot yhteisessä määrittelyjoukossaan.

**Määritelmä 2.5.2.** *Rekursiivisten funktioiden joukko* $\mathcal{R}$ *on suppein joukko osittaisia kuvauksia* $f : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*$, *joka sisältää*
*(1)nollafunktion* $(\overline{n} \mapsto 0)$,
*(2)seuraajafunktion* $(n \mapsto n+1)$,
*(3)projektiofunktiot* $((n_0, \ldots, n_{k-1}) \mapsto n_i)$ *kaikilla* $k > i \geq 0$
*ja joka on suljettu seuraavien operaatioiden suhteen.*
*(4) (Yhdistäminen.) Jos* $k, m \in \mathbb{N}^*$ *ja* $f_1, \ldots, f_m, g \in \mathcal{R}$, $dom(f_i) \subseteq \mathbb{N}^k$ *kaikilla* $1 \leq i \leq m$ *ja* $dom(g) \subseteq \mathbb{N}^m$ *sekä* $h : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$ *on määritelty lausekkeella*

$$h(\overline{n}) \simeq g(f_1(\overline{n}), \ldots, f_m(\overline{n})),$$

*niin* $h \in \mathcal{R}$.
*(5) (Pimitiivirekursio.) Jos* $k \in \mathbb{N}^*$ *ja* $f_1, f_2 \in \mathcal{R}$, $dom(f_1) \subseteq \mathbb{N}^k, dom(f_2) \subseteq \mathbb{N}^{k+2}$ *sekä* $h : \mathbb{N}^{k+1} \rightharpoonup \mathbb{N}$ *on määritelty ehdoilla*

$$\begin{aligned} h(\overline{n}, 0) &\simeq f_1(\overline{n}) \\ h(\overline{n}, i+1) &\simeq f_2(\overline{n}, i, h(\overline{n}, i)), \end{aligned}$$

*niin* $h \in \mathcal{R}$.
*(6) (Minimalisaatio.) Jos* $k \in \mathbb{N}^*$ *ja* $f \in \mathcal{R}$, $dom(f) \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ *sekä* $h : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$ *on määritelty lausekkeella*

$$h(\overline{n}) \simeq min\{m \in \mathbb{N} : f(\overline{n}, m) = 0\},$$

*niin* $h \in \mathcal{R}$.

Määritellään osittaisen kuvauksen $f : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}^\ell$ olevan rekursiivinen, jos projektiokuvaukset $f_i = (\mathrm{pr}_i \circ f) : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$ ovat rekursiivisia kaikilla $0 \leq i < \ell$.

Jos $\alpha \in \mathcal{N}$, niin rekursiivisten funktioiden joukko voidaan laajentaa *$\alpha$:lla rekursiivisten funktioiden joukoksi* $\mathcal{R}_\alpha$, joka määritellään suppeimmaksi $\alpha$:n sisältäväksi ja ehdot 1-6 täyttäväksi joukoksi. Tässä siis $\alpha \in \mathcal{N} = {}^\omega\mathbb{N}$ tulkitaan luonnollisella tavalla kuvaukseksi $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Intuitiivisesti $\mathcal{R}_\alpha$ sisältää kaikki osittaiset kuvaukset, joiden laskemiseen on olemassa äärellinen algoritmi, joka voi edellä mainittujen operaatioiden lisäksi käyttää hyväkseen mielivaltaista mutta äärellistä määrää $\alpha$:n arvoista. Selvästi $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_\alpha$, jos $\alpha$ ei itsessään ole rekursiivinen.

Voidaan osoittaa, että tavanomaiset aritmeettiset operaatiot kuten yhteenlasku, rajoitettu vähennyslasku, maksimi- ja minimifunktiot ja tavanomaisten relaatioiden kuten $=$ ja $\leq$ karakteristiset funktiot ovat rekursiivisia. Todistukset on esitetty matemaattisen logiikan kurssilla. Jatkossa funktion rekursiivisuuden toteamiseksi tyydytään osoittamaan funktion intuitiivinen laskettavuus ja vedotaan Churchin teesiin.

Laskettavuuden teorian yhteydessä tulee vastaan kahdenlaisia joukkoja. Joukko $A \subseteq \mathbb{N}$ on *rekursiivinen,* jos sen karakteristinen funktio on rekursiivinen. Intuitiivisesti rekursiiviselle joukolle on olemassa algoritmi, joka ratkaisee kuuluuko annettu alkio joukkoon vai ei. Rekursiivisten joukkojen perhe on suljettu yhdisteen ja leikkauksen suhteen, sillä jos $\chi_P$ ja $\chi_Q$ ovat rekursiivisten joukkojen $P$ ja $Q$ karakteristisia funktioita, niin rekursiivinen funktio $n \mapsto \max\{\chi_P(n), \chi_Q(n)\}$ karakterisoi joukon $P \cup Q$ ja rekursiivinen funktio $n \mapsto (\chi_P(n)\chi_Q(n))$ karakterisoi joukon $P \cap Q$. Toinen käsite on rekursiivinen numeroituvuus. Joukko $A \subseteq \mathbb{N}$ on *rekursiivisesti numeroituva,* jos se on jonkin rekursiivisen funktion $f : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ kuvajoukko. Jokainen epätyhjä rekursiivisesti numeroituva joukko $A \subseteq \mathbb{N}$ on jonkin totaalin rekursiivisen funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kuvajoukko [Cu:7.2.1].

Rekursiivisuuden käsitteistön laajentamiseksi tarvitaan rekursiivinen tapa koodata objekteja kokonaisluvuilla. Olkoon $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiivinen bijektio [1]. Määritellään koodausfunktiot $\lfloor\ \rfloor_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ kaikilla $k \geq 1$ seuraavasti :

$$\begin{aligned}
\lfloor n_0 \rfloor_1 &= n_0 \\
\lfloor (n_0, n_1) \rfloor_2 &= \varphi(n_0, n_1) \\
\lfloor (n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}) \rfloor_k &= \lfloor (\lfloor (n_0, n_1, \ldots, n_{k-2}) \rfloor_{k-1}, n_{k-1}) \rfloor_2, \text{ kun } k > 2.
\end{aligned}$$

Lisäksi määritellään äärellisten jonojen koodausfunktio $\lfloor\ \rfloor : {}^{<\omega}\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\lfloor (n_0, n_2, \ldots, n_{k-1}) \rfloor = \lfloor (k, \lfloor (n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}) \rfloor_k) \rfloor_2 + 1, \text{ kun } k \geq 1 \text{ ja } \lfloor \emptyset \rfloor = 0.$$

Kaikki koodausfunktiot ovat rekursiivisia bijektioita ja niille on olemassa rekursiiviset käänteisfunktiot $\lceil\ \rceil^k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ ja $\lceil\ \rceil : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{<\omega}$. Jos $n \in \mathbb{N}$ ja $k \geq 1$, merkitään

$$\lceil n \rceil^k = (\lceil n \rceil^k_0, \ldots, \lceil n \rceil^k_{k-1}).$$

Jos lisäksi $|\lceil n \rceil| = k$, merkitään

$$\lceil n \rceil = (\lceil n \rceil_0, \ldots, \lceil n \rceil_{k-1}).$$

Määritellään funktion $f : \mathbb{N} \rightharpoonup {}^{<\omega}\mathbb{N}$ olevan rekursiivinen, jos yhdistetty kuvaus $\lfloor f \rfloor : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ on rekursiivinen. Vastaavasti bijektion $\lfloor\ \rfloor$ välityksellä määritellään myös ${}^{<\omega}\mathbb{N}$:n rekursiiviset ja rekursiivisesti numeroituvat joukot.

Efektiivisen teorian yhteydessä tarkastellaan vain muotoa $\mathbb{N}^k \times \mathcal{N}^\ell$ ja $\mathcal{N}^\ell \times \mathbb{N}^k$ olevien avaruuksien aliavaruuksien joukkoa, jota merkitään $\mathcal{X}_e$. Jos $X = \mathbb{N}^k \times \mathcal{N}^\ell$, merkitään

$$S_X = \mathbb{N}^k \times ({}^{<\omega}\mathbb{N})^\ell,$$

jolloin $X$:n standardikanta muodostuu joukoista

$$N_\Phi = \{(n_0, \ldots, n_{k-1}, \alpha_0, \ldots \alpha_{\ell-1}) : \forall i < \ell (\tau_i \subset \alpha_i)\},$$

missä $\Phi = (n_0, \ldots, n_{k-1}, \tau_0, \ldots \tau_{\ell-1}) \in S_X$.

Määritellään funktion $f : \mathbb{N} \rightharpoonup S_X$ olevan rekursiivinen, jos projektiokuvaukset $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$ ovat rekursiivisia kaikilla $i < k + \ell$. Tapauksessa $X = \mathbb{N}^k$ tämä määritelmä on yhtäpitävä alkuperäisen rekursiivisuuden määritelmän kanssa. Määritellään joukon $A \subseteq S_X$ olevan rekursiivisesti numeroituva, jos $A$ on jonkin rekursiivisen funktion $f : \mathbb{N} \rightharpoonup S_X$ kuvajoukko.

[1] esimerkiksi $(n, m) \mapsto 2^n(2m + 1) - 1$

## 2.6 Efektiivinen hierarkia

Yleisesti $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$-joukko voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä standardikannan joukoista. Vaatimalla indeksijoukon olevan rekursiivisesti numeroituva päädytään efektiivisesti avoimiin joukkoihin.

**Määritelmä 2.6.1.** *Olkoon $X \in \mathcal{X}_e$. Joukko $G \subseteq X$ on* efektiivisesti avoin, *jos $G = \bigcup_n N_{f(n)}$ jollakin rekursiivisella funktiolla $f : \mathbb{N} \rightharpoonup S_X$. Avaruuden $X$ efektiivisesti avointen joukkojen perhettä merkitään $\Sigma^0_1(X)$.*

Erityisesti siis $\emptyset$, standardikannan joukot $\{N_\Phi\}_{\Phi \in S_X}$ ja koko avaruus $X$ ovat efektiivisesti avoimia. Perhe $\Sigma^0_1(X)$ on numeroituva, sillä rekursiivisia funktioita on numeroituva määrä [Mo 3F.3].

Jos $\alpha \in \mathcal{N}$, niin $\Sigma^0_1$ voidaan laajentaa $\alpha$:lla efektiivisesti avointen joukkojen perheeksi $\Sigma^0_1(\alpha)$ korvaamalla määritelmässä 2.6.1 vaatimus $f$:n rekursiivisuudesta lievemmällä vaatimuksella, että $f$ on rekursiivinen $\alpha$:lla.

Jos $n, m \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in \mathcal{N}$, merkitään $\overline{m}(n) = \lfloor (m, \ldots, m) \rfloor$, missä $m$ esiintyy $n$ kertaa koodattavassa jonossa ja $\overline{\alpha}(n) = \lfloor \alpha \restriction n \rfloor = \lfloor (\alpha(0), \ldots, \alpha(n-1)) \rfloor$. Jos lisäksi $x \in \mathbb{N}^k \times \mathcal{N}^\ell$, merkitään $\overline{x}(n) = (\overline{x}_0(n), \ldots, \overline{x}_{k+\ell-1}(n))$.

**Lause 2.6.2.** *Olkoon $X = \mathbb{N}^k \times \mathcal{N}^\ell$ ja $R \subseteq \mathbb{N}^{k+\ell}$ rekursiivinen. Ehdolla*

$$A(x) \iff \exists i R(\overline{x}(i))$$

*määritelty joukko $A \subseteq X$ on efektiivisesti avoin.*

*Todistus.* Oletetaan merkintöjen yksinkertaistamiseksi $X = \mathbb{N} \times \mathcal{N}$.
Olkoon $R \subseteq \mathbb{N}^2$ rekursiivinen joukko. Määritellään rekursiivinen kuvaus $f : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N} \times {}^{<\omega}\mathbb{N}$ ehdolla

$$n \mapsto \begin{cases} (\lceil \lceil n \rceil^2_0 \rceil_0, \lceil \lceil n \rceil^2_1 \rceil), & \text{jos } R(\lceil n \rceil^2_0, \lceil n \rceil^2_1), |\lceil \lceil n \rceil^2_0 \rceil| = |\lceil \lceil n \rceil^2_1 \rceil| \\ & \text{ja } \lceil n \rceil^2_0 \text{ koodaa vakiojonon.} \\ \text{määrittelemätön}, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Osoitetaan

$$\operatorname{ran}(f) = \{(i, \sigma) \in (\mathbb{N} \times {}^{<\omega}\mathbb{N}) : R(\bar{i}(|\sigma|), \lfloor \sigma \rfloor)\}.$$

Olkoon $(i, \sigma) \in \operatorname{ran}(f)$. Tällöin $(i, \sigma) = (\lceil m \rceil_0, \lceil m' \rceil)$ joillakin luvuilla $m, m' \in \mathbb{N}$, joilla $|\lceil m \rceil| = |\lceil m' \rceil| = |\sigma|$ ja $m = \bar{i}(|\sigma|)$. Lisäksi $R(m, m')$ eli $R(\bar{i}(|\sigma|), \lfloor \sigma \rfloor)$. Oletetaan $i \in \mathbb{N}, \sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}$ ja $R(\bar{i}(|\sigma|), \lfloor \sigma \rfloor)$. Olkoon $n = \lfloor (\bar{i}(|\sigma|), \lfloor \sigma \rfloor) \rfloor_2$. Tällöin $\lceil n \rceil^2_0 = \bar{i}(|\sigma|)$ koodaa vakiojonon, $|\lceil \lceil n \rceil^2_0 \rceil| = |\sigma| = |\lceil \lfloor \sigma \rfloor \rceil| = |\lceil \lceil n \rceil^2_1 \rceil|$ ja $R(\bar{i}(|\sigma|), \lfloor \sigma \rfloor)$ eli $R(\lceil n \rceil^2_0, \lceil n \rceil^2_1)$. Siis $(i, \sigma) = f(n) \in \operatorname{ran}(f)$.

Osoitetaan $A = \bigcup_n N_{f(n)}$, jolloin $A \in \Sigma^0_1(X)$. Olkoon $A(i, \alpha)$ ja $n \in \mathbb{N}$ luku, jolla $R(\bar{i}(n), \overline{\alpha}(n))$. Olkoon $\sigma = \alpha \restriction n$. Tällöin $|\sigma| = n$ ja $R(\bar{i}(|\sigma|), \lfloor \sigma \rfloor)$. Siis $(i, \sigma) \in \operatorname{ran}(f)$. Olkoon $m \in \mathbb{N}$ luku, jolla $f(m) = (i, \sigma)$. Tällöin $(i, \alpha) \in N_{f(m)} \subseteq \bigcup_n N_{f(n)}$ eli $A \subseteq \bigcup_n N_{f(n)}$.

Olkoon $(i, \alpha) \in \bigcup_n N_{f(n)}$ ja olkoon $m \in \mathbb{N}$ luku, jolla $(i, \alpha) \in N_{f(m)}$. Olkoon $(j, \sigma) = f(m)$. Koska $(i, \alpha) \in N_{(j,\sigma)}$, niin $j = i$ ja $\sigma \subset \alpha$. Lisäksi $(j, \sigma) \in \operatorname{ran}(f)$, joten $R(\bar{j}(|\sigma|), \lfloor \sigma \rfloor)$ eli $R(\bar{i}(|\sigma|), \overline{\alpha}(|\sigma|))$. Siis $A(i, \alpha)$ ja $\bigcup_n N_{f(n)} \subseteq A$. $\square$

**Lause 2.6.3.** *Olkoon $X = \mathbb{N}^k \times \mathcal{N}^\ell$ ja $A \subseteq X$. $A \in \Sigma^0_1(X)$, jos ja vain jos on olemassa sellainen rekursiivinen $R \subseteq \mathbb{N}^{k+\ell}$, että kaikilla $x \in X$*

$$A(x) \iff \exists i R(\overline{x}(i))$$

*ja*

$$\forall n \forall m[(R(\overline{x}(n)) \wedge (m \geq n)) \to R(\overline{x}(m))]. \tag{2.3}$$

*Todistus.* Oletetaan merkintöjen yksinkertaistamiseksi $X = \mathbb{N} \times \mathcal{N}$.

($\Rightarrow$) Jos $A = \emptyset$, valitaan $R = \emptyset$. Olkoon $A$ epätyhjä $\Sigma^0_1$-joukko ja olkoot $i \mapsto m_i$ ja $i \mapsto \sigma_i$ totaaleja rekursiivisia funktioita, joilla $A = \bigcup_i(\{m_i\} \times N_{\sigma_i})$. Määritellään

$$R = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : \exists i \exists j \leq i(\lceil p \rceil = \underbrace{(m_j, \ldots, m_j)}_{i} \wedge |\lceil q \rceil| = i \wedge \sigma_j \subseteq \lceil q \rceil)\}.$$

$R$ on rekursiivinen, koska annettua paria $(p, q)$ kohden riittää tarkastaa äärellinen määrä rekursiivisia ehtoja luvuilla $i = |\lceil q \rceil|$ ja $j \leq i$. Lisäksi kaikilla $(m, \alpha) \in X$

$$\begin{aligned} A(m, \alpha) &\iff \exists j(m = m_j \wedge \sigma_j \subset \alpha) \\ &\iff \exists i \exists j \leq i(m = m_j \wedge \sigma_j \subseteq \alpha \restriction i) \\ &\iff \exists i R(\overline{m}(i), \overline{\alpha}(i)). \end{aligned}$$

Osoitetaan, että joukolla $R$ on ominaisuus (2.3). Oletetaan $i \leq m$ ja $R(\overline{n}(i), \overline{\alpha}(i))$ jollakin $(n, \alpha) \in X$. Tällöin on olemassa $j \leq i$, jolla $n = m_j$ ja $\sigma_j \subseteq \alpha \restriction i$. Koska $i \leq m$, niin $j \leq m$ ja $\sigma_j \subseteq \alpha \restriction m$, joten $R(\overline{n}(m), \overline{\alpha}(m))$.

($\Leftarrow$) Seuraa lauseesta 2.6.2. □

Jatkossa joukko $A \subseteq X$ todetaan efektiivisesti avoimeksi, jos relaation $A(x)$ voimassaolo voidaan todeta rekursiivisesti alkioiden $x_i$ äärellisten, mutta mielivaltaisen pitkien alkusegmenttien $\overline{x_i}(n)$ perusteella.

Jotta $\Sigma^0_1$-joukoille saadaan sulkeumaominaisuus kuvausten alkukuvien suhteen, tarvitaan efektiivinen versio jatkuvuudesta.

**Määritelmä 2.6.4.** *Olkoon $X = \mathbb{N}^k \times \mathcal{N}^\ell$.*
*Kuvaus $f : X \to \mathbb{N}$ on* rekursiivinen*, jos joukko $G_f \subseteq (X \times \mathbb{N})$*

$$G_f(x, i) \iff f(x) = i$$

*on efektiivisesti avoin.*
*Kuvaus $f : X \to \mathcal{N}$ on* rekursiivinen, *jos joukko $G_f \subseteq (X \times \mathbb{N})$*

$$G_f(x, \lfloor \sigma \rfloor) \iff f(x) \in N_\sigma$$

*on efektiivisesti avoin.*
*Jos $Y = \mathbb{N}^p \times \mathcal{N}^q$, niin kuvaus $f : X \to Y$ on* rekursiivinen, *jos projektiokuvaukset $f_i$ ovat rekursiivisia kaikilla $0 \leq i < p + q$.*

Osoitetaan, että tapauksessa $X = \mathbb{N}^k, Y = \mathbb{N}^p$ tämä määritelmä yhtyy aiemmin annettuun rekursiivisuuden määritelmään. Jos $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^p$ on rekursiivinen alaluvun 2.5 mielessä ja $0 \leq j < p$, niin määrittelemällä rekursiivinen funktio $g : \mathbb{N} \to (\mathbb{N}^k \times \mathbb{N})$ ehdolla

$$i \mapsto (\lceil i \rceil^k, f_j(\lceil i \rceil^k)),$$

nähdään $G_{f_j} = \bigcup_i \{g(i)\} \in \Sigma_1^0(\mathbb{N}^k \times \mathbb{N})$. Siis projektiokuvaukset $f_j$ ovat rekursiivisia määritelmän 2.6.4 mielessä ja siten kuvaus $f$ on rekursiivinen määritelmän 2.6.4 mielessä. Olkoon $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^p$ kuvaus, jolla $G_{f_j}$ on epätyhjä ja efektiivisesti avoin kaikilla $0 \leq j < p$. Kiinnitetään $j < p$. On olemassa totaalit rekursiiviset funktiot $i \mapsto \overline{n}_i \in \mathbb{N}^k$ ja $i \mapsto m_i \in \mathbb{N}$, joilla $G_{f_j} = \bigcup_i \{(\overline{n}_i, m_i)\}$. Määritellään rekursiivinen funktio $g : \mathbb{N}^k \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ehdolla

$$g(\overline{n}, i) = \sum_{\ell=0}^{k-1} |(\overline{n})_\ell - (\overline{n_i})_\ell|.$$

Koska $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N}^k$, niin $\forall \overline{n} \exists i (g(\overline{n}, i) = 0)$ ja minimalisaation nojalla kuvaus

$$h(\overline{n}) = \min\{i : g(\overline{n}, i) = 0\} = \min\{i : \overline{n} = \overline{n}_i\}$$

on totaali ja rekursiivinen. Tällöin $f_j = (\overline{n} \mapsto m_{h(\overline{n})})$ on rekursiivisten funktioiden yhdistelmänä rekursiivinen funktio. Koska projektiokuvaukset $f_j$ ovat rekursiivisia kaikilla $j < p$ alaluvun 2.5 mielessä, myös $f$ on rekursiivinen alaluvun 2.5 mielessä.

Todetaan jatkoa varten, että avaruuden $X = \mathbb{N}^k \times \mathcal{N}^\ell$ projektiokuvaukset $\mathrm{pr}_i$ ovat rekursiivisia kaikilla $0 \leq i < k + \ell$. Ehdot $\mathrm{pr}_i(x) = j$, $0 \leq i < k$ voidaan tarkistaa rekursiivisesti yhden pituisesta alkion $x$ alkusegmentistä ja ehdot $\sigma \subset \mathrm{pr}_i(x)$, $k \leq i < k + \ell$ voidaan tarkistaa rekursiivisesti $|\sigma|$ pituisesta $x$:n alkusegmentistä. Siis joukot $G_{\mathrm{pr}_i}$ ovat efektiivisesti avoimia ja projektiokuvaukset rekursiivisia.

Myös rekursiivisuuden käsite voidaan luonnollisella tavalla laajentaa rekursiivisuudeksi $\alpha$:lla vaatimalla kuvaukselta $f$, että $G_f \in \Sigma_1^0(\alpha)$.

**Lause 2.6.5.** *Luokka $\Sigma_1^0$ on suljettu yhdisteen, leikkauksen, kvantifioinnin $\exists^{\mathbb{N}}$ ja rekursiivisten kuvausten alkukuvien suhteen.*

*Todistus.* Olkoon $X = \mathbb{N}^k \times \mathcal{N}^\ell$ ja $P, Q \in \Sigma_1^0(X)$. Olkoon $R_P, R_Q \subseteq \mathbb{N}^{k+\ell}$ rekursiivisia joukkoja, joilla $P(x) \iff \exists n R_P(\overline{x}(n))$ ja $Q(x) \iff \exists n R_Q(\overline{x}(n))$ ja joilla on ominaisuus 2.3. Tällöin joukot $R_\cup = R_P \cup R_Q \subseteq \mathbb{N}^{k+\ell}$ ja $R_\cap = R_P \cap R_Q \subseteq \mathbb{N}^{k+\ell}$ ovat rekursiivisia ja selvästi

$$P(x) \vee Q(x) \iff \exists n R_\cup(\overline{x}(n)).$$

Siis $P \cup Q \in \Sigma_1^0(X)$. Lisäksi

$$P(x) \wedge Q(x) \iff \exists n R_\cap(\overline{x}(n)),$$

sillä jos $P(x) \wedge Q(x)$, niin $R_P(\overline{x}(n))$ ja $R_Q(\overline{x}(m))$ joillakin $n, m \in \mathbb{N}$ ja tällöin ominaisuuden 2.3 nojalla $R_\cap(\overline{x}(\max\{m, n\})$. Siis $P \cap Q \in \Sigma^0_1(X)$.

Olkoon $A \in \Sigma^0_1(X \times \mathbb{N})$ ja olkoon $f : \mathbb{N} \rightharpoonup S_X \times \mathbb{N}$ rekursiivinen kuvaus, jolla $A = \bigcup_i (N_{f_0(i)} \times \{f_1(i)\})$. Tällöin kuvaus $f_0 : \mathbb{N} \rightharpoonup S_X$ on rekursiivinen ja joukko

$$\exists^{\mathbb{N}} A = \{x \in X : \exists n A(x, n)\} = \bigcup_i N_{f_0(i)}$$

on efektiivisesti avoin.

Olkoon $Y = \mathbb{N}^p \times \mathcal{N}^q$ ja $f : X \to Y$ rekursiivinen. Olkoon $P \in \Sigma^0_1(Y)$ ja $Q = f^{-1}[P]$. Osoitetaan $Q \in \Sigma^0_1(X)$. Voidaan olettaa $P \neq \emptyset$. Olkoon $g : \mathbb{N} \to S_Y$ totaali rekursiivinen funktio, jolla $P = \bigcup_i N_{g(i)}$. Määritellään joukko $K \subseteq \mathbb{N}^{p+q+1}$ ehdolla

$$K(i, k_0, k_1, \ldots, k_{p+q-1}) \iff$$
$$(g_0(i) = k_0 \wedge \ldots \wedge g_{p-1}(i) = k_{p-1} \wedge g_p(i) \subseteq \lceil k_p \rceil \wedge \ldots \wedge g_{p+q-1}(i) \subseteq \lceil k_{p+q-1} \rceil).$$

Selvästi $K$ on rekursiivinen ja erityisesti efektiivisesti avoin. Lisäksi

$$K(i, k_0, k_1, \ldots, k_{p+q-1}) \iff N_{(k_0, \ldots, k_{p-1}, \lceil k_p \rceil, \ldots \lceil k_{p+q-1} \rceil)} \subseteq N_{g(i)}.$$

Määritellään joukot $G'_j \subseteq X \times \mathbb{N}^{p+q}$ kaikilla $0 \leq j < p+q$ ehdolla

$$G'_j(x, k_0, \ldots, k_{p+q-1}) \iff G_{f_j}(x, k_j).$$

Koska joukko $G'_j$ voidaan karakterisoida olennaisesti samalla rekursiivisella joukolla kuin $G_{f_j}$, niin $G'_j$ on efektiivisesti avoin kaikilla $j$. Määritellään joukko $G \subseteq X \times \mathbb{N}^{p+q}$ ehdolla

$$G(x, k_0, \ldots, k_{p+q-1}) \iff G_{f_0}(x, k_0) \wedge \ldots \wedge G_{f_{p+q-1}}(x, k_{p+q-1}).$$

Tällöin $G = \bigcap_{j=0}^{p+q-1} G'_j$ on efektiivisesti avoin. Lisäksi

$$\begin{aligned} Q(x) &\iff f(x) \in P \iff \exists i (f(x) \in N_{g(i)}) \\ &\iff \exists i \exists k_0 \ldots \exists k_{p+q-1} (K(i, k_0, \ldots, k_{p+q-1}) \wedge G(x, k_0, \ldots, k_{p+q-1})), \end{aligned}$$

joten edellä todistettujen sulkeumaominaisuuksien nojalla $Q$ on efektiivisesti avoin. $\square$

Efektiivisten käsitteiden yhteys topologiaan on seuraava.

**Lause 2.6.6.** *Olkoot $X = \mathbb{N}^k \times \mathcal{N}^\ell$, $A \subseteq X$ ja $Y = \mathbb{N}^p \times \mathcal{N}^q$. Tällöin*
*(i) $A \in \mathbf{\Sigma}^0_1$, jos ja vain jos $A \in \Sigma^0_1(\alpha)$ jollakin $\alpha \in \mathcal{N}$.*
*(ii) Kuvaus $f : X \to Y$ on jatkuva, jos ja vain jos $f$ on rekursiivinen $\alpha$:lla jollakin $\alpha \in \mathcal{N}$.*

*Todistus.* $(i)(\Rightarrow)$ Jos $A = \emptyset$, niin $A$ on efektiivisesti avoin. Oletetaan, että $A$ on avoin ja epätyhjä. Tällöin $A = \bigcup_i N_{\Phi_i}$ jollakin kuvauksella $i \mapsto \Phi_i$. Jokainen $\Phi = (n_0, \ldots, n_{k-1}, \tau_0, \ldots \tau_{\ell-1}) \in S_X$ voidaan koodata luonnolliseksi luvuksi $c(\Phi) = \lfloor (n_0, \ldots, n_{k-1}, \lfloor \tau_0 \rfloor, \ldots, \lfloor \tau_{\ell-1} \rfloor) \rfloor$. Olkoon $\alpha(i) = c(\Phi_i)$. Tällöin kuvaus $i \mapsto \Phi_i$ on rekursiivinen $\alpha$:lla ja $A \in \Sigma^0_1(\alpha)$.
$(i)(\Leftarrow)$ $A = \bigcup_i N_{\Phi_i}$ jollakin $\alpha$:lla rekursiivisella kuvauksella, joten erityisesti $A$ on kantajoukkojen yhdisteenä avoin.
$(ii)(\Rightarrow)$ Olkoon $g : X \to \mathbb{N}$ jatkuva. Tällöin $G_g = \bigcup_i (f^{-1}[\{i\}] \times \{i\}) \in \mathbf{\Sigma}^0_1$. Vastaavasti jos $g : X \to \mathcal{N}$ on jatkuva, niin $G_g = \bigcup_\sigma (f^{-1}[N_\sigma] \times \{\lfloor \sigma \rfloor\}) \in \mathbf{\Sigma}^0_1$. Molemmissa tapauksissa kohdan $(i)$ perusteella $G_g \in \Sigma^0_1(\alpha)$ jollakin $\alpha \in \mathcal{N}$ eli $g$ on rekursiivinen $\alpha$:lla. Olkoon $f : X \to Y$ jatkuva ja olkoot alkiot $\alpha_i \in \mathcal{N}$ sellaisia, että $f_i$ on rekursiivinen $\alpha_i$:lla kaikilla $i < p + q$. Olkoon $\alpha \in \mathcal{N}$ määrätty ehdolla $\alpha(n(p + q) + i) = \alpha_i(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $i < p + q$. Tällöin projektiofunktiot $f_i$ ovat rekursiivisia $\alpha$:lla ja siten $f$ on rekursiivinen $\alpha$:lla.
$(ii)(\Leftarrow)$ Jos $g : X \to \mathbb{N}$ on rekursiivinen $\alpha$:lla, niin $G_g \in \Sigma^0_1(\alpha)$ ja kohdan $(i)$ perusteella $G_g$ on avoin. Tällöin $g^{-1}[\{i\}] = \{x : G_g(x, i)\}$ on avoimen joukon $G_g$ alkukuva jatkuvassa kuvauksessa $x \mapsto (x, i)$ ja siis avoin kaikilla $i$, joten $g$ on jatkuva. Vastaavasti jos $g : X \to \mathcal{N}$ on rekursiivinen $\alpha$:lla, niin $g^{-1}[N_\sigma] = \{x : G_g(x, \lfloor \sigma \rfloor)\}$ on avoin kaikilla $\sigma$, koska $G_g$ on avoin. Siis $g$ on jatkuva. On osoitettu, että kuvauksen $f$ projektiokuvaukset ovat jatkuvia, joten myös kuvaus $f$ on jatkuva. $\square$

Efektiivinen versio Borelin hierarkian äärellisistä tasoista määritellään korvaamalla klassisessa hierarkiassa esiintyvä numeroituva yhdiste projektiolla $\exists^{\mathbb{N}}$.

**Määritelmä 2.6.7.** *Määritellään luokat $\Sigma^0_{n+1}$, $\Pi^0_n$ ja $\Delta^0_n$ kaikilla $n \geq 1$ ja $X \in \mathcal{X}_e$ seuraavasti:*

$$\begin{aligned}
\Sigma^0_{n+1}(X) &= \exists^{\mathbb{N}} \Pi^0_n(X \times \mathbb{N}), \\
\Pi^0_n(X) &= \{A \subseteq X : (X \setminus A) \in \Sigma^0_n(X)\}, \\
\Delta^0_n(X) &= \Sigma^0_n(X) \cap \Pi^0_n(X).
\end{aligned}$$

Luokan $\Pi^0_1$ joukkoja kutsutaan *efektiivisesti suljetuiksi.* Lauseen 2.1.7 efektiivinen vastine on

**Lause 2.6.8.** *Olkoon $n \geq 1$. Joukko $F \subseteq \mathcal{N}^n$ on efektiivisesti suljettu, jos ja vain jos $F = [T]$ jollakin rekursiivisella puulla $T \subseteq ({}^{<\omega}\mathbb{N})^n$.*

*Todistus.* $(\Rightarrow)$ Jos $F = \emptyset$, niin $F = [\{(\emptyset, \ldots, \emptyset)\}]$ ja $\{(\emptyset, \ldots, \emptyset)\} \subseteq ({}^{<\omega}\mathbb{N})^n$ on rekursiivinen puu. Oletetaan $F \in \Pi^0_1(\mathcal{N}^n)$ ja $F \neq \emptyset$. Lauseen 2.6.3 nojalla on olemassa rekursiivinen $R \subseteq \mathbb{N}^n$, jolla

$$F(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \iff \neg \exists i R(\overline{\alpha_0}(i), \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}(i)).$$

Määritellään $T \subseteq ({}^{<\omega}\mathbb{N})^n$ ehdolla

$$\begin{aligned}
(\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}) &\in T \iff \\
&(|\sigma_0| = \ldots = |\sigma_{n-1}|) \wedge \forall k \leq |\sigma_0| (\neg R(\lfloor \sigma_0 \restriction k \rfloor, \ldots, \lfloor \sigma_{n-1} \restriction k \rfloor)).
\end{aligned}$$

Koska $F \neq \emptyset$, niin $T \neq \emptyset$ ja määritelmästä seuraa, että $T$ on rekursiivinen puu.

$$\begin{aligned}
(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in [T] &\iff \forall i((\alpha_0 \restriction i, \ldots, \alpha_{n-1} \restriction i) \in T) \\
&\iff \forall i \forall k \leq i(\neg R(\lfloor \alpha_0 \restriction k \rfloor, \ldots, \lfloor \alpha_{n-1} \restriction k \rfloor)) \\
&\iff \forall i \forall k \leq i(\neg R(\overline{\alpha_0}(k), \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}(k))) \\
&\iff \forall i(\neg R(\overline{\alpha_0}(i), \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}(i)) \\
&\iff \neg \exists i R(\overline{\alpha_0}(i), \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}(i)) \\
&\iff F(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}).
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Olkoon $T \subseteq ({}^{<\omega}\mathbb{N})^n$ rekursiivinen puu ja $F = [T]$. Määritellään $R \subseteq \mathbb{N}^n$ ehdolla

$$R(\lfloor \sigma_0 \rfloor, \ldots, \lfloor \sigma_{n-1} \rfloor) \iff \neg((\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}) \in T).$$

Tällöin $R$ on rekursiivinen ja

$$\begin{aligned}
F(\alpha_0, \ldots \alpha_{n-1}) &\iff \forall i((\alpha_0 \restriction i, \ldots, \alpha_{n-1} \restriction i) \in T) \\
&\iff \neg \exists i \neg((\alpha_0 \restriction i, \ldots, \alpha_{n-1} \restriction i) \in T) \\
&\iff \neg \exists i R(\overline{\alpha_0}(i), \ldots, \overline{\alpha_{n-1}}(i)).
\end{aligned}$$

Siis $F$ on efektiivisesti suljettu. □

**Lause 2.6.9.** *Olkoon $n \geq 1$. Luokka $\Sigma^0_n$ on suljettu yhdisteen, leikkauksen, kvantifioinnin $\exists^{\mathbb{N}}$ ja rekursiivisten alkukuvien suhteen. Luokka $\Pi^0_n$ on suljettu yhdisteen, leikkauksen, kvantifioinnin $\forall^{\mathbb{N}}$ ja rekursiivisten alkukuvien suhteen.*

*Todistus.* Todistetaan väite induktiolla luvun $n \geq 1$ suhteen. Koska lauseessa 2.6.5 on todistettu väite luokalle $\Sigma^0_1$, niin riittää todistaa, että jos luokalla $\Sigma^0_n$ on väitetyt ominaisuudet, niin myös luokilla $\Pi^0_n$ ja $\Sigma^0_{n+1}$ on väitetyt ominaisuudet. Olkoon $n \geq 1$ ja oletetaan, että luokalla $\Sigma^0_n$ on väitetyt ominaisuudet. Olkoon $P, Q \in \Pi^0_n(X)$. Tällöin

$$P \cup Q = (X \setminus ((X \setminus P) \cap (X \setminus Q))) \in \neg(\neg\Pi^0_n \wedge \neg\Pi^0_n) = \neg(\Sigma^0_n \wedge \Sigma^0_n) \subseteq \neg\Sigma^0_n = \Pi^0_n$$

ja

$$P \cap Q = (X \setminus ((X \setminus P) \cup (X \setminus Q))) \in \neg(\neg\Pi^0_n \vee \neg\Pi^0_n) = \neg(\Sigma^0_n \vee \Sigma^0_n) \subseteq \neg\Sigma^0_n = \Pi^0_n.$$

Olkoon $A \in \Pi^0_n(X \times \mathbb{N})$. Tällöin

$$\forall^{\mathbb{N}} A = \neg\exists^{\mathbb{N}}\neg A \in \neg\exists^{\mathbb{N}}\neg\Pi^0_n = \neg\exists^{\mathbb{N}}\Sigma^0_n \subseteq \neg\Sigma^0_n = \Pi^0_n.$$

Jos $f : X \to Y$ on rekursiivinen, $P \in \Pi^0_n(Y)$ ja $Q = (Y \setminus P) \in \Sigma^0_n$, niin

$$f^{-1}[P] = (X \setminus f^{-1}[Q]) \in \neg\Sigma^0_n = \Pi^0_n.$$

Siis luokalla $\Pi^0_n$ on väitetyt ominaisuudet.
Todistetaan luokan $\Sigma^0_{n+1}$ sulkeumaominaisuudet käyttämällä luokan $\Pi^0_n$ sulkeumaominaisuuksia. Olkoon $f : X \to Y$ rekursiivinen, $B \in \Sigma^0_{n+1}(Y)$ ja

$A = f^{-1}[B]$. Olkoon $P \in \Pi^0_n(Y \times \mathbb{N})$ joukko, jolla $B = \exists^{\mathbb{N}} P$ ja määritellään $Q = (f \times \mathrm{id}_{\mathbb{N}})^{-1}[P]$. Koska kuvaus $(f \times \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ on rekursiivinen, niin $Q$ on $\Pi^0_n(X \times \mathbb{N})$-joukko ja

$$A(x) \iff B(f(x)) \iff \exists n(P(f(x), n)) \iff \exists n(Q(x, n)).$$

Siis $A = \exists^{\mathbb{N}} Q \in \Sigma^0_{n+1}(X)$ eli $\Sigma^0_{n+1}$ on suljettu rekursiivisten alkukuvien suhteen. Olkoot $A, B \in \Sigma^0_{n+1}(X)$ ja olkoot $P, Q \in \Pi^0_n(X \times \mathbb{N})$ joukkoja, joilla $A = \exists^{\mathbb{N}} P$ ja $B = \exists^{\mathbb{N}} Q$. Tällöin $A \cup B = \exists^{\mathbb{N}}(P \cup Q)$ ja luokan $\Pi^0_n$ sulkeumaominaisuuksien perusteella $P \cup Q$ on $\Pi^0_n$. Siis $A \cup B$ on $\Sigma^0_{n+1}$. Määritellään $R \subseteq (X \times \mathbb{N})$ ehdolla

$$R(x, n) \iff P(x, \lceil n \rceil^2_0) \wedge Q(x, \lceil n \rceil^2_1).$$

Tällöin $R = P' \cap Q'$, missä $P' = (\mathrm{id}_X, \lceil\ \rceil^2_0)^{-1}[P]$ ja $Q' = (\mathrm{id}_X, \lceil\ \rceil^2_1)^{-1}[Q]$ ovat $\Pi^0_n(X \times \mathbb{N})$ joukkoja, joten $R \in \Pi^0_n$. Lisäksi

$$\begin{aligned}
\exists n R(x, n) &\iff \exists n(P(x, \lceil n \rceil^2_0) \wedge Q(x, \lceil n \rceil^2_1)) \iff \exists n \exists m(P(x, n) \wedge Q(x, m)) \\
&\iff A(x) \wedge B(x).
\end{aligned}$$

Siis $A \cap B = \exists^{\mathbb{N}} R \in \Sigma^0_{n+1}$. Olkoon $A \in \Sigma^0_{n+1}(X \times \mathbb{N})$ ja olkoon $P \in \Pi^0_n(X \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ joukko, jolla $A = \exists^{\mathbb{N}} P$. Määritellään $P' = (\mathrm{id}_X \times \lceil\ \rceil^2)^{-1}[P]$. Tällöin $P' \in \Pi^0_n(X \times \mathbb{N})$ ja

$$\begin{aligned}
\exists n A(x, n) &\iff \exists m \exists n(P(x, n, m)) \iff \exists n(P(x, \lceil n \rceil^2_0, \lceil n \rceil^2_1)) \\
&\iff \exists n P'(x, n).
\end{aligned}$$

Siis $\exists^{\mathbb{N}} A = \exists^{\mathbb{N}} P' \in \Sigma^0_{n+1}$ ja luokalla $\Sigma^0_{n+1}$ on väitetyt ominaisuudet. $\square$

Borelin hierarkian transfiniitille osallekin on efektiivinen vastineensa, mutta koska sitä ei tarvita tämän tutkielman päätulosten todistamiseen, siirrytään efektiiviseen versioon projektiivisesta hierarkiasta.

**Määritelmä 2.6.10.** *Olkoon $X \in \mathcal{X}_e$. Määritellään efektiivisesti analyyttisten joukkojen perhe*

$$\Sigma^1_1(X) = \exists^{\mathcal{N}} \Pi^0_1(X \times \mathcal{N}).$$

**Määritelmä 2.6.11.** *Määritellään luokat $\Sigma^1_{n+1}$, $\Pi^1_n$ ja $\Delta^1_n$ kaikilla $n \geq 1$ ja $X \in \mathcal{X}_e$ seuraavasti:*

$$\begin{aligned}
\Sigma^1_{n+1}(X) &= \exists^{\mathcal{N}} \Pi^1_n(X \times \mathcal{N}), \\
\Pi^1_n(X) &= \{A \subseteq X : (X \setminus A) \in \Sigma^1_n(X)\}, \\
\Delta^1_n(X) &= \Sigma^1_n(X) \cap \Pi^1_n(X).
\end{aligned}$$

Erityisesti $\Pi^1_1$-joukkoja kutsutaan *efektiivisesti koanalyyttisiksi.* Efektiivisen hierarkian luokat relativoituvat luonnollisesti alkioon $\alpha \in \mathcal{N}$ kunhan rekursiiviset määritelmät 2.6.7, 2.6.10 ja 2.6.11 aloitetaan perheestä $\Sigma^0_1(\alpha)$. Lauseen 2.6.6 nojalla saadaan yhteys klassiseen hierarkiaan:

$$\boldsymbol{\Sigma}^1_n \upharpoonright \mathcal{X}_e = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \Sigma^1_n(\alpha), \quad \boldsymbol{\Pi}^1_n \upharpoonright \mathcal{X}_e = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \Pi^1_n(\alpha) \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\Delta}^1_n \upharpoonright \mathcal{X}_e = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \Delta^1_n(\alpha).$$

Efektiivinen hierarkia siis vain hienontaa klassista hierarkiaa eikä mitään klassisia joukkoja jää sen ulkopuolelle.

Sulkeumaominaisuuksien todistamiseksi määritellään kuvaus, joka liittää jokaiseen pariin $(\alpha, n) \in (\mathcal{N} \times \mathbb{N})$ jonon $(\alpha)_n \in \mathcal{N}$ :

$$(\alpha)_n(i) = \alpha(\lfloor (n,i) \rfloor_2)$$

ja kuvaus $\alpha \mapsto \alpha^*$, jolla $\alpha^*(i) = \alpha(i+1)$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Selvästi nämä kuvaukset ovat rekursiivisia.

**Lause 2.6.12.** *(Sulkeumaominaisuudet)*
*(i) Luokat $\Sigma_1^1, \Pi_1^1$ ja $\Delta_1^1$ ovat suljettuja rekursiivisten alkukuvien suhteen.*
*(ii) Luokat $\Sigma_1^1, \Pi_1^1$ ja $\Delta_1^1$ ovat suljettuja yhdisteen ja leikkauksen suhteen.*
*(iii) Luokat $\Sigma_1^1, \Pi_1^1$ ja $\Delta_1^1$ ovat suljettuja äärellisen karteesisen tulon suhteen.*
*(iv) Luokat $\Sigma_1^1, \Pi_1^1$ ja $\Delta_1^1$ ovat suljettuja kvantifiointien $\exists^{\mathbb{N}}$ ja $\forall^{\mathbb{N}}$ suhteen.*
*(v) Luokka $\Sigma_1^1$ on suljettu kvantifioinnin $\exists^{\mathcal{N}}$ suhteen ja luokka $\Pi_1^1$ on suljettu kvantifioinnin $\forall^{\mathcal{N}}$ suhteen.*

*Todistus.* Väiteet luokalle $\Delta_1^1$ seuraavat välittömästi väitteistä luokille $\Sigma_1^1$ ja $\Pi_1^1$.
*(i)* Olkoot $X, Y \in \mathcal{X}_e$, $f : X \to Y$ rekursiivinen ja $B \in \Sigma_1^1(Y)$. Osoitetaan $A = f^{-1}[B] \in \Sigma_1^1$. Olkoon $P \in \Pi_1^0(Y \times \mathcal{N})$ joukko, jolla $B = \exists^{\mathcal{N}} P$. Tällöin $Q = (f \times \mathrm{id}_{\mathcal{N}})^{-1}[P] \in \Pi_1^0(X \times \mathcal{N})$ ja

$$A(x) \iff B(f(x)) \iff \exists \alpha P(f(x), \alpha) \iff \exists \alpha Q(x, \alpha).$$

Siis $A = \exists^{\mathcal{N}} Q \in \Sigma_1^1$. Koska joukon komplementin alkukuva on joukon alkukuvan komplementti, niin myös $\Pi_1^1$ on suljettu rekursiivisten alkukuvien suhteen.
*(ii)* Olkoon $X \in \mathcal{X}_e$ ja $A, B \in \Sigma_1^1(X)$ sekä joukot $P, Q \in \Pi_1^0(X \times \mathcal{N})$ sellaisia, että $A = \exists^{\mathcal{N}} P$ ja $B = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Tällöin $P \cup Q \in \Pi_1^0$ ja $A \cup B = \exists^{\mathcal{N}}(P \cup Q) \in \Sigma_1^1$. Määritellään $R \subseteq (X \times \mathcal{N})$ ehdolla

$$R(x, \alpha) \iff P(x, (\alpha)_0) \wedge Q(x, (\alpha)_1).$$

Tällöin $R = P' \cap Q'$, missä $P' = (\mathrm{id}_X \times (\,)_0)^{-1}[P]$ ja $Q' = (\mathrm{id}_X \times (\,)_1)^{-1}[Q]$ ovat $\Pi_1^0(X \times \mathcal{N})$ joukkoja, joten $R \in \Pi_1^0$. Lisäksi

$$\begin{aligned} \exists \alpha R(x, \alpha) &\iff \exists \alpha (P(x, (\alpha)_0) \wedge Q(x, (\alpha)_1)) \iff \exists \alpha \exists \beta (P(x, \alpha) \wedge Q(x, \beta)) \\ &\iff A(x) \wedge B(x). \end{aligned}$$

Siis $A \cap B = \exists^{\mathcal{N}} R \in \Sigma_1^1$. De Morganin lakien perusteella myös luokka $\Pi_1^1$ on suljettu yhdisteen ja leikkauksen suhteen.
*(iii)* Olkoon $0 < \xi < \omega$, $X_i \in \mathcal{X}_e$ kaikilla $i < \xi$, ja $A_i \in \Sigma_1^1(X_i)$ kaikilla $i < \xi$. Kohdan *(i)* nojalla $B_i = \mathrm{pr}_i^{-1}[A_i] \subseteq \prod_i X_i$ on $\Sigma_1^1$ joukko kaikilla $i < \xi$ ja tällöin kohdan *(ii)* perusteella myös $\prod_{i<\xi} A_i = \bigcap_{i<\xi} B_i$ on $\Sigma_1^1$ joukko. Samoin todistetaan väite luokalle $\Pi_1^1$.
*(iv)* Olkoon $A \in \Sigma_1^1(X \times \mathbb{N})$ ja $P \in \Pi_1^0(X \times \mathbb{N} \times \mathcal{N})$ joukko, jolla $A = \exists^{\mathcal{N}} P$. Määritellään $Q \subseteq (X \times \mathcal{N})$ ehdolla

$$Q(x, \alpha) \iff P(x, \alpha(0), \alpha^*).$$

Tällöin $Q = (\mathrm{id}_X \times ((\alpha \mapsto \alpha(0)), (\alpha \mapsto \alpha^*)))^{-1}[P]$ on $\Pi^0_1$-joukko ja

$$\begin{aligned} \exists\alpha Q(x,\alpha) &\iff \exists\alpha P(x,\alpha(0),\alpha^*) \iff \exists n\exists\alpha P(x,n,\alpha) \\ &\iff \exists n A(x,n) \end{aligned}$$

Siis $\exists^{\mathbb{N}} A = \exists^{\mathcal{N}} Q \in \Sigma^1_1$ eli luokka $\Sigma^1_1$ on suljettu kvantifioinnin $\exists^{\mathbb{N}}$ suhteen. Määritellään joukko $R \subseteq (X \times \mathbb{N} \times \mathcal{N})$ ehdolla

$$R(x,\alpha,n) \iff P(x,n,(\alpha)_n).$$

Tällöin $R = (\mathrm{id}_X \times (\mathrm{pr}_1, ((\alpha,n) \mapsto (\alpha)_n))^{-1}[P] \in \Pi^0_1$ ja $S = \forall^{\mathbb{N}} R$ on $\Pi^0_1$-joukko.

$$\begin{aligned} \exists\alpha S(x,\alpha) &\iff \exists\alpha\forall n R(x,\alpha,n) \iff \exists\alpha\forall n P(x,n,(\alpha)_n) \\ &\iff \forall n\exists\alpha P(x,n,\alpha) \iff \forall n A(x,n). \end{aligned}$$

Siis $\forall^{\mathbb{N}} A = \exists^{\mathcal{N}} S \in \Sigma^1_1$. Koska

$$\exists^{\mathbb{N}}(\neg A) = \neg\forall^{\mathbb{N}} A \text{ ja } \forall^{\mathbb{N}}(\neg A) = \neg\exists^{\mathbb{N}} A$$

niin myös luokka $\Pi^1_1$ on suljettu avaruuden $\mathbb{N}$ yli tapahtuvan kvantifioinnin suhteen.
($v$) Olkoon $A \in \Sigma^1_1(X \times \mathcal{N})$ ja $P \in \Pi^0_1(X \times \mathcal{N} \times \mathcal{N})$ joukko, jolla $A = \exists^{\mathcal{N}} P$. Määritellään $Q \subseteq (X \times \mathcal{N})$ ehdolla

$$Q(x,\alpha) \iff P(x,(\alpha)_0,(\alpha)_1).$$

Tällöin $Q = (\mathrm{id}_X \times ((\,)_0,(\,)_1))^{-1}[P] \in \Pi^0_1$ ja

$$\begin{aligned} \exists\alpha Q(x,\alpha) &\iff \exists\alpha P(x,(\alpha)_0,(\alpha)_1) \iff \exists\beta\exists\alpha P(x,\alpha,\beta) \\ &\iff \exists\alpha A(x,\alpha). \end{aligned}$$

Siis $\exists^{\mathcal{N}} A = \exists^{\mathcal{N}} Q \in \Sigma^1_1$. Koska

$$\forall^{\mathcal{N}}(\neg A) = \neg\exists^{\mathcal{N}} A,$$

niin luokka $\Pi^1_1$ on suljettu kvantifioinnin $\forall^{\mathcal{N}}$ suhteen. □

**Lemma 2.6.13.** $\Sigma^0_1 \subseteq \Sigma^0_2$.

*Todistus.* Olkoon $X = \mathbb{N}^k \times \mathcal{N}^\ell$ ja $A \in \Sigma^0_1(X)$. Lauseen 2.6.3 mukaan on olemassa rekursiivinen $R \subseteq \mathbb{N}^{k+\ell}$, jolla $A(x) \iff \exists n R(\overline{x}(n))$. Määritellään $P \subseteq (X \times \mathbb{N})$ ehdolla

$$P(x,n) \iff R(\overline{x}(n))$$

ja $S \subseteq \mathbb{N}^{k+\ell+1}$ ehdolla

$$\begin{aligned} S(\lfloor\sigma_0\rfloor,\dots,\lfloor\sigma_{k+\ell-1}\rfloor,\lfloor\tau\rfloor) \iff\ & (\tau \neq \emptyset \wedge |\tau| \geq \tau(0) \\ & \wedge|\sigma_0| = |\sigma_1| = \ldots = |\sigma_{k+\ell-1}| = |\tau| \\ & \wedge\neg R(\lfloor\sigma_0 \restriction \tau(0)\rfloor,\dots,\lfloor\sigma_{k+\ell-1} \restriction \tau(0)\rfloor) \end{aligned}$$

Selvästi $S$ on rekursiivinen ja kaikilla $x \in X$ ja $n, t \in \mathbb{N}$

$$S(\overline{x}(t), \overline{n}(t)) \iff ((t > 0) \wedge (t \geq n) \wedge \neg R(\overline{x}(n))).$$

Siis kaikilla $x \in X$ ja $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(x,n) &\iff R(\overline{x}(n)) \iff \forall t((t = 0) \vee (t < n) \vee R(\overline{x}(n))) \\ &\iff \forall t \neg((t > 0) \wedge (t \geq n) \wedge \neg R(\overline{x}(n))) \iff \forall t \neg S(\overline{x}(t), \overline{n}(t)) \\ &\iff \neg \exists t S(\overline{x}(t), \overline{n}(t)). \end{aligned}$$

Koska $S$ on rekursiivinen, niin $P \in \Pi^0_1(X \times \mathbb{N})$. Tällöin $\exists^{\mathbb{N}} P \in \Sigma^0_2$ ja kaikilla $x \in X$

$$(\exists^{\mathbb{N}} P)(x) \iff \exists n P(x,n) \iff \exists n R(\overline{x}(n)) \iff A(x).$$

Siis $A = \exists^{\mathbb{N}} P \in \Sigma^0_2(X)$. □

**Lause 2.6.14.** $\Sigma^0_n \cup \Pi^0_n \subseteq \Delta^1_1$ *kaikilla* $n \geq 1$.

*Todistus.* Määritelmänsä perusteella $\Delta^1_1 = \Sigma^1_1 \cap \Pi^1_1$, joten $\Delta^1_1$ on suljettu komplementoinnin suhteen. Lisäksi lauseen 2.6.12 kohdan $(iv)$ nojalla $\Delta^1_1$ on suljettu kvantifioinnin $\exists^{\mathbb{N}}$ suhteen. Riittää siis osoittaa $\Pi^0_1 \subseteq \Delta^1_1$. Olkoon $X \in \mathcal{X}_e$ ja $P \in \Pi^0_1(X)$. Merkitään $\mathrm{pr}_X : (X \times \mathcal{N}) \to X$ projektiokuvausta. Koska $\mathrm{pr}_X$ on rekursiivinen, niin $\mathrm{pr}_X^{-1}[P] = (P \times \mathcal{N})$ on $\Pi^0_1(X \times \mathcal{N})$-joukko ja $P = \exists^{\mathcal{N}}(P \times \mathcal{N}) \in \Sigma^1_1(X)$. Siis $\Pi^0_1 \subseteq \Sigma^1_1$. Olkoon $Q = \neg P$. Tällöin $Q \in \Sigma^0_1(X)$ ja lemman 2.6.13 nojalla $Q \in \Sigma^0_2(X)$. Olkoon $A \in \Pi^0_1(X \times \mathbb{N})$ joukko, jolla $Q = \exists^{\mathbb{N}} A$. Tällöin edellä todistetun nojalla $A \in \Sigma^1_1(X \times \mathbb{N})$, joten $\neg A \in \Pi^1_1(X \times \mathbb{N})$ ja lauseen 2.6.12 kohdan $(iv)$ nojalla $\forall^{\mathbb{N}}(\neg A) \in \Pi^1_1(X)$. Koska

$$P = \neg Q = \neg \exists^{\mathbb{N}} A = \forall^{\mathbb{N}}(\neg A),$$

niin $P \in \Pi^1_1(X)$ ja $\Pi^0_1 \subseteq \Pi^1_1$. □

Alaluvussa 2.4 konstruoiduille klassisen hierarkian universaaleille joukoille on myös efektiiviset vastineensa. Tämän näyttämiseksi tarvitaan rekursiivisesti numeroituvien joukkojen parametrisointia.

**Lause 2.6.15.** *Olkoon* $k \in \mathbb{N}^*$. *On olemassa sellainen rekursiivisesti numeroituva* $U^k \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$, *että kaikilla* $A \subseteq \mathbb{N}^k$

$$A \text{ on rekursiivisesti numeroituva} \iff A = U^k_n \text{ jollakin } n \in \mathbb{N}.$$

*Todistus.* Laskettavuuden teorian kursilla on osoitettu, että on olemassa sellainen rekursiivisten kuvausten $f : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ numerointi $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, että kuvaus $F : \mathbb{N}^2 \rightharpoonup \mathbb{N}$

$$F(m,n) \simeq f_m(n)$$

on rekursiivinen [Cu:5.1.2]. Määritellään $g : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}^2$ ehdolla $n \mapsto (\lceil n \rceil^2_0, F(\lceil n \rceil^2))$. Selvästi $g$ on rekursiivinen. Asetetaan $U^1 = \mathrm{ran}(g)$. Tällöin $U^1$ on rekursiivisesti numeroituva ja kaikilla $p, q \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} U^1(p,q) &\iff \exists n(g(n) = (p,q)) \iff \exists n(\lceil n \rceil^2_0 = p \wedge F(\lceil n \rceil^2) = q) \\ &\iff \exists n(q = F(p,n)) \iff \exists n(q = f_p(n)) \iff q \in \mathrm{ran}(f_p). \end{aligned}$$

Siis joukolla $U^1$ on väitetty ominaisuus. Asetetaan $U^k = (\mathrm{id}_{\mathbb{N}} \times \ulcorner\ \urcorner^k)[U^1]$ kaikilla $k > 1$. Tällöin joukoilla $U^k$ on väitetty ominaisuus kaikilla $k \in \mathbb{N}^*$. □

Olkoon $\Gamma$ luokka efektiivisiä joukkoja. Joukkoa $U \in \Gamma(\mathbb{N} \times X)$ sanotaan $X$:n $\Gamma$-*universaaliksi* joukoksi, jos kaikilla $A \subseteq X$

$$A \in \Gamma(X) \iff \exists n(A = U_n).$$

Luokalla $\Gamma$ on *universaalisuusominaisuus,* jos kaikilla avaruuksilla $X \in \mathcal{X}_e$ on $\Gamma$-universaali joukko $U \in \Gamma(\mathbb{N} \times X)$.

**Lause 2.6.16.** *Luokilla $\Sigma_1^0, \Pi_1^0, \Sigma_1^1$ ja $\Pi_1^1$ on universaalisuusominaisuus.*

*Todistus.* Olkoon $X = \mathbb{N}^p \times \mathcal{N}^q, k = p + q$ ja $U^k$ kuten lauseessa 2.6.15. Määritellään

$$S^{p+q} = \{(n, n_0, \ldots, n_{p-1}, \tau_0, \ldots, \tau_{q-1}) : (n, n_0, \ldots, n_{p-1}, \lfloor\tau_0\rfloor, \ldots, \lfloor\tau_{q-1}\rfloor) \in U^k\}.$$

Koska $U^k$ on rekursiivisesti numeroituva, niin myös $S^{p+q} \subseteq \mathbb{N} \times S_X$ on rekursiivisesti numeroituva ja kaikilla $A \subseteq X$ pätee

$$\begin{aligned} A \in \Sigma_1^0(X) &\iff A = \bigcup_{\Phi \in S} N_\Phi \text{ jollakin rekursiivisesti numeroituvalla } S \subseteq S_X \\ &\iff A = \bigcup_{\Phi \in S_n^{p+q}} N_\Phi \text{ jollakin } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Siis joukko $U = \bigcup_{\Phi \in S^{p+q}} N_\Phi \in \Sigma_1^0(\mathbb{N} \times X)$ on universaali $X$:n efektiivisesti avoimille joukoille. Muille efektiivisen hierarkian luokille voidaan nyt määritellä universaalit joukot samoin periaattein kuin lauseiden 2.4.1 ja 2.4.2 todistuksissa on tehty klassisen hierarkian luokille. □

## 2.7 $\Pi_1^1$-normi

Olkoon $A$ joukko. Kuvausta $\phi : A \to \mathbb{O}n$ sanotaan joukon $A$ *normiksi.* Jokaiseen normiin $\phi$ liittyy esihyvinjärjestys

$$x \leq_\phi y \iff \phi(x) \leq \phi(y).$$

Jos esihyvinjärjestys täyttää joukkona tietyt määriteltävyysehdot, niin normia käyttäen saadaan todistettua joukkojen rakenteeseen liittyviä tuloksia.

**Määritelmä 2.7.1.** *Olkoon $\Gamma$ luokka puolalaisten avaruuksien osajoukkoja, $A \in \Gamma(X)$ ja $\phi : A \to \mathbb{O}n$ joukon $A$ normi. Normia $\phi$ sanotaan $\Gamma$-normiksi, jos on olemassa sellaiset relaatiot $\leq_\phi^\Gamma \in \Gamma(X \times X)$ ja $\leq_\phi^{\neg\Gamma} \in \neg\Gamma(X \times X)$, että kaikilla $y \in A$*

$$x \in A \wedge \phi(x) \leq \phi(y) \iff x \leq_\phi^\Gamma y \iff x \leq_\phi^{\neg\Gamma} y.$$

Joukon $A \subseteq X$ normi $\phi$ voidaan jatkaa koko avaruuden $X$ normiksi asettamalla $\phi(x) = \sup\{\phi(y) : y \in A\} + 1$ kaikilla $x \in X \setminus A$. Jatketun normin avulla määritellään relaatiot $<^*_\phi, \leq^*_\phi \subseteq (X \times X)$ ehdoilla

$$x <^*_\phi y \iff x \in A \wedge \phi(x) < \phi(y),$$

$$x \leq^*_\phi y \iff x \in A \wedge \phi(x) \leq \phi(y).$$

**Lemma 2.7.2.** *Oletetaan, että $\Gamma$ on suljettu rekursiivisten alkukuvien sekä yhdisteen ja leikkauksen suhteen. Jos $A \in \Gamma$, niin $\phi : A \to \mathbb{O}n$ on $\Gamma$-normi, jos ja vain jos $\leq^*_\phi \in \Gamma$ ja $<^*_\phi \in \Gamma$.*

*Todistus.* ($\Rightarrow$) Oletetaan, että $\phi$ on joukon $A$ $\Gamma$-normi. Todetaan ensin, että relaatioiden $<^*_\phi$ ja $\leq^*_\phi$ määritelmät voidaan antaa seuraavasti:

$$\begin{aligned} x <^*_\phi y &\iff x \in A \wedge \neg(y \leq^{\neg\Gamma}_\phi x), \\ x \leq^*_\phi y &\iff x \in A \wedge (x \leq^\Gamma_\phi y \vee \neg(y \leq^{\neg\Gamma}_\phi x)). \end{aligned}$$

Nimittäin jos $x \notin A$, niin ekvivalenssien oikeat puolet ovat epätosia kuten relaatioiden $x <^*_\phi y$ ja $x \leq^*_\phi y$ määritelmät vaativat. Jos $y \notin A$, niin kaikilla $x \in A$ pätee $\neg(y \leq^{\neg\Gamma}_\phi x)$ ja annettujen ekvivalenssien oikeat puolet ovat tosia kaikilla $x \in A$ kuten relaatioiden $x <^*_\phi y$ ja $x \leq^*_\phi y$ määritelmät vaativat. Jos taas $y \in A$, niin

$$\begin{aligned} x \in A \wedge \neg(y \leq^{\neg\Gamma}_\phi x) &\iff x \in A \wedge (y \notin A \vee \phi(y) \not\leq \phi(x)) \\ &\iff x \in A \wedge \phi(y) \not\leq \phi(x) \\ &\iff x \in A \wedge \phi(x) < \phi(y) \\ &\iff x <^*_\phi y, \\ x \in A \wedge (x \leq^\Gamma_\phi y \vee \neg(y \leq^{\neg\Gamma}_\phi x)) &\iff x \in A \wedge (\phi(x) \leq \phi(y) \vee (y \notin A \vee \phi(y) \not\leq \phi(x))) \\ &\iff x \in A \wedge (\phi(x) \leq \phi(y) \vee \phi(y) \not\leq \phi(x)) \\ &\iff x \in A \wedge \phi(x) \leq \phi(y) \\ &\iff x \leq^*_\phi y. \end{aligned}$$

Koska projektiokuvaukset ovat rekursiivisia, niin joukot $A \times X = \mathrm{pr}_X^{-1}[A]$ ja $\{(x, y) \in X^2 : \neg(y \leq^{\neg\Gamma}_\phi x)\} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_0)^{-1}[X^2 \setminus \leq^{\neg\Gamma}_\phi]$ kuuluvat luokkaan $\Gamma$. Siis edellä annettujen määritelmien perusteella

$$<^*_\phi = (A \times X) \cap \{(x, y) : \neg(y \leq^{\neg\Gamma}_\phi x)\} \in \Gamma$$

ja

$$\leq^*_\phi = (A \times X) \cap (\leq^\Gamma_\phi \cup \{(x, y) : \neg(y \leq^{\neg\Gamma}_\phi x)\}) \in \Gamma.$$

($\Leftarrow$) Oletetaan $<^*_\phi, \leq^*_\phi \in \Gamma$. Määritellään relaatiot $\leq^\Gamma_\phi$ ja $\leq^{\neg\Gamma}_\phi$ ehdoilla

$$\begin{aligned} x \leq^\Gamma_\phi y &\iff x \leq^*_\phi y, \\ x \leq^{\neg\Gamma}_\phi y &\iff \neg(y <^*_\phi x). \end{aligned}$$

Selvästi relaatio $\leq_\phi^\Gamma$ täyttää $\Gamma$-normin määritelmässä annetun ehdon.
Jos $y \in A$, niin

$$\begin{aligned} x \leq_\phi^{\neg\Gamma} y &\iff \neg(y <_\phi^* x) \iff \neg(y \in A \wedge \phi(y) < \phi(x)) \\ &\iff y \notin A \vee \phi(y) \not< \phi(x) \iff \phi(x) \leq \phi(y) \\ &\iff x \in A \wedge \phi(x) \leq \phi(y), \end{aligned}$$

missä viimeinen implikaatio vasemmalta oikealle seuraa, koska jatketun normin määritelmän perusteella $\phi(x) > \phi(y)$ kaikilla $x \notin A$. Myös relaatio $\leq_\phi^{\neg\Gamma}$ täyttää $\Gamma$-normin määritelmässä annetun ehdon, sillä $\leq_\phi^{\neg\Gamma} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_0)^{-1}[X^2 \setminus <_\phi^*]$, joten $\leq_\phi^{\neg\Gamma} \in \neg\Gamma$. Siis $\phi$ on $\Gamma$-normi. □

Puolalaisten avaruuksien osajoukkojen luokkaa $\Gamma$ sanotaan *normitetuksi,* jos kaikilla joukoilla $A \in \Gamma$ on $\Gamma$-normi. Normin avulla todistettavista joukkojen rakenteellisista tuloksista esitetään tässä reduktio- ja separaatiolauseet. Näitä tarvitaan luokille $\Pi_1^1$ ja $\Sigma_1^1$ Silverin lauseen todistukseen liittyvässä lemmassa 4.2.2.

Luokalla $\Gamma$ on *reduktio-ominaisuus,* jos kaikilla avaruuksilla $X$ ja joukoilla $A, B \in \Gamma(X)$ on olemassa joukot $A^*, B^* \in \Gamma(X)$, joilla $A^* \subseteq A, B^* \subseteq B, A^* \cap B^* = \emptyset$ ja $A^* \cup B^* = A \cup B$.

**Lause 2.7.3.** *Olkoon $\Gamma$ suljettu rekursiivisten alkukuvien, yhdisteen ja leikkauksen suhteen sekä $\Sigma_1^0 \subseteq \Gamma$. Jos $\Gamma$ on normitettu, niin luokalla $\Gamma$ on reduktio-ominaisuus.*

*Todistus.* Olkoon $X \in \mathcal{X}_e$ ja $A, B \in \Gamma(X)$. Merkitään $C = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$. Koska $A, \{0\} \in \Gamma$, niin $A \times \{0\} = \mathrm{pr}_X^{-1}[A] \cap \mathrm{pr}_{\mathbb{N}}^{-1}[\{0\}] \in \Gamma$. Vastaavasti $B \times \{1\} \in \Gamma$ ja edelleen $C \in \Gamma$. Olkoon $\phi : C \to \mathbb{O}n$ joukon $C$ $\Gamma$-normi. Määritellään joukot $A^* \subseteq X$ ja $B^* \subseteq X$ ehdoilla

$$\begin{aligned} x \in A^* &\iff (x,0) \leq_\phi^* (x,1), \\ x \in B^* &\iff (x,1) <_\phi^* (x,0). \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} x \in A^* &\iff (x,0) \in C \wedge \phi(x,0) \leq \phi(x,1) \iff x \in A \wedge \phi(x,0) \leq \phi(x,1), \\ x \in B^* &\iff (x,1) \in C \wedge \phi(x,1) < \phi(x,0) \iff x \in B \wedge \phi(x,1) < \phi(x,0). \end{aligned}$$

Selvästi $A^* \subseteq A$ ja $B^* \subseteq B$.
Jos $x \in A \setminus B$, niin $(x,0) \in C$ ja $(x,1) \notin C$, joten $\phi(x,0) \leq \phi(x,1)$ ja $x \in A^*$.
Jos $x \in B \setminus A$, niin $(x,1) \in C$ ja $(x,0) \notin C$, joten $\phi(x,1) < \phi(x,0)$ ja $x \in B^*$.
Jos $x \in A \cap B$, niin täsmälleen yksi ehdoista $\phi(x,0) \leq \phi(x,1)$ ja $\phi(x,1) < \phi(x,0)$ on voimassa. Siispä $A^* \cap B^* = \emptyset$ ja $A^* \cup B^* = A \cup B$.
Määritellään rekursiiviset kuvaukset $f, g : X \to (X \times \mathbb{N})^2$ ehdoilla

$$f(x) = (x,0,x,1) \text{ ja } g(x) = (x,1,x,0).$$

Koska oletuksen mukaan relaatiot $\leq_\phi^*$ ja $<_\phi^*$ ovat $\Gamma$-joukkoja, niin myös $A^* = f^{-1}[\leq_\phi^*] \in \Gamma$ ja $B^* = g^{-1}[<_\phi^*] \in \Gamma$. □

Luokalla $\Gamma$ on *separaatio-ominaisuus,* jos kaikilla avaruuksilla $X$ ja erillisillä joukoilla $A, B \in \Gamma(X)$ on olemassa $C \in \Gamma(X) \cap \neg\Gamma(X)$, jolla $A \subseteq C$ ja $B \cap C = \emptyset$.

**Lause 2.7.4.** *Olkoon $\Gamma$ suljettu rekursiivisten alkukuvien, yhdisteen ja leikkauksen suhteen sekä $\Sigma^0_1 \subseteq \Gamma$. Jos $\Gamma$ on normitettu, niin luokalla $\neg\Gamma$ on separaatio-ominaisuus.*

*Todistus.* Olkoot $A, B \in \neg\Gamma(X)$ erillisiä joukkoja. Sovelletaan lausetta 2.7.3 $\Gamma$-joukkoihin $X \setminus A$ ja $X \setminus B$. Saadaan $\Gamma$-joukot $A^* \subseteq X \setminus A$ ja $B^* \subseteq X \setminus B$, joilla $A^* \cap B^* = \emptyset$ ja $A^* \cup B^* = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B) = X$. Tällöin $B^* = X \setminus A^* \in \neg\Gamma(X)$, joten $B^* \in \Gamma(X) \cap \neg\Gamma(X)$. Koska $A^* \subseteq (X \setminus A)$, niin $A \subseteq (X \setminus A^*) = B^*$ ja koska $B^* \subseteq (X \setminus B)$ niin $B \cap B^* = \emptyset$. Joukko $B^* \in \Gamma \cap \neg\Gamma$ separoi joukot $A$ ja $B$. $\square$

Jos $\Gamma$ on luokka puolalaisten avaruuksien osajoukkoja, niin joukkoa $C \in \Gamma(Y)$ sanotaan $\Gamma$-*täydelliseksi,* jos kaikilla avaruuksilla $X$ ja joukoilla $A \in \Gamma(X)$ on olemassa rekursiivinen kuvaus $f : X \to Y$, jolla $A = f^{-1}[C]$.

Luokan $\Gamma$ osoittaminen normitetuksi voidaan tehdä konstruoimalla jollekin $\Gamma$-täydelliselle joukolle $\Gamma$-normi. Käytetään tässä $\Pi^1_1$-täydellisenä joukkona hyvinjärjestettyjen puiden joukkoa (sopivasti koodattuna Cantorin avaruuden osajoukoksi).

Jos $\alpha \in \mathcal{C}$, niin $\alpha$ *koodaa* joukon

$$\mathrm{Code}(\alpha) = \{\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N} : \alpha(\lfloor\sigma\rfloor) = 1\}.$$

Merkitään

$$\begin{aligned} Tr &= \{\alpha \in \mathcal{C} : \mathrm{Code}(\alpha) \text{ on puu}\} \text{ ja} \\ WF &= \{\alpha \in \mathcal{C} : \mathrm{Code}(\alpha) \text{ on hyvinperustettu puu}\}. \end{aligned}$$

**Lause 2.7.5.** $Tr \in \Pi^0_1(\mathcal{N})$.

*Todistus.* Määritellään $R \subseteq \mathbb{N}$ ehdolla

$$\begin{aligned} R(\lfloor\sigma\rfloor) \iff \; & \sigma \notin {}^{<\omega}2 \vee \sigma(0) \neq 1 \vee \\ & \exists n \exists m (n < |\sigma| \wedge m < |\sigma| \wedge \lceil n \rceil \subseteq \lceil m \rceil \wedge \sigma(m) = 1 \wedge \sigma(n) \neq 1). \end{aligned}$$

Tällöin $R$ on rekursiivinen ja

$$\neg Tr(\alpha) \iff \exists t R(\overline{\alpha}(t)),$$

joten $\neg Tr \in \Sigma^0_1$ ja $Tr \in \Pi^0_1$. $\square$

**Lause 2.7.6.** $WF \in \Pi^1_1(\mathcal{N})$.

*Todistus.*

$$\begin{aligned} WF(\alpha) &\iff Tr(\alpha) \wedge \forall\beta(\forall n(\alpha(b_n) = 1) \to \exists n(\lceil b_n \rceil \not\subset \lceil b_{n+1} \rceil) \\ &\iff Tr(\alpha) \wedge \forall\beta(\exists n(\alpha(b_n) \neq 1) \vee \exists n(\lceil b_n \rceil \not\subset \lceil b_{n+1} \rceil)) \\ &\iff Tr(\alpha) \wedge \forall\beta\exists n(\alpha(b_n) \neq 1 \vee \lceil b_n \rceil \not\subset \lceil b_{n+1} \rceil) \\ &\iff Tr(\alpha) \wedge \forall\beta\exists n \neg(\alpha(b_n) = 1 \wedge \lceil b_n \rceil \subset \lceil b_{n+1} \rceil). \end{aligned}$$

Tämän perusteella

$$\begin{aligned} WF &\in \Pi^0_1 \wedge \forall^{\mathcal{N}}\exists^{\mathbb{N}}\neg(\Sigma^0_1 \wedge \Sigma^0_1) \subseteq \Pi^1_1 \wedge \forall^{\mathcal{N}}\exists^{\mathbb{N}}\neg\Sigma^0_1 \subseteq \Pi^1_1 \wedge \forall^{\mathcal{N}}\exists^{\mathbb{N}}\Pi^0_1 \\ &\subseteq \Pi^1_1 \wedge \forall^{\mathcal{N}}\exists^{\mathbb{N}}\Pi^1_1 \subseteq \Pi^1_1 \wedge \forall^{\mathcal{N}}\Pi^1_1 \subseteq \Pi^1_1 \wedge \Pi^1_1 \\ &\subseteq \Pi^1_1. \end{aligned}$$

□

**Lause 2.7.7.** *$WF \subseteq Tr$ on $\Pi^1_1$-täydellinen.*

*Todistus.* Olkoon $X = \mathbb{N}^k \times \mathcal{N}^\ell$ ja $A \in \Pi^1_1(X)$. Osoitetaan, että on olemassa rekursiivinen $f : X \to Tr$, jolla $A = f^{-1}[WF]$. Koska $A \in \Pi^1_1$, niin $\neg A \in \Sigma^1_1$ ja on olemassa $P \in \Pi^0_1(X \times \mathcal{N})$, jolla $\neg A = \exists^{\mathcal{N}} P$. Olkoon $R \subseteq \mathbb{N}^{k+\ell+1}$ rekursiivinen joukko, jolla on ominaisuus (2.3) eli

$$\forall n \forall m (R(\overline{y}(n)) \wedge (m \geq n) \Longrightarrow R(\overline{y}(m)))$$

ja jolla $P(x, \alpha) \iff \neg\exists t R(\overline{x}(t), \overline{\alpha}(t))$. Voidaan olettaa $\neg R(0, 0, \ldots, 0)$, koska joukko $R \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ on rekursiivinen, sillä on ominaisuus (2.3) ja ominaisuuden (2.3) nojalla

$$P(x, \alpha) \iff \neg\exists t R(\overline{x}(t), \overline{\alpha}(t)) \iff \neg\exists t > 0 R(\overline{x}(t), \overline{\alpha}(t)).$$

Tällöin

$$\begin{aligned} A(x) &\iff \neg(\neg A(x)) \iff \neg\exists\alpha P(x, \alpha) \iff \neg\exists\alpha\neg\exists t R(\overline{x}(t), \overline{\alpha}(t)) \\ &\iff \forall\alpha\exists t R(\overline{x}(t), \overline{\alpha}(t)). \end{aligned}$$

Määritellään kaikilla $x \in X$ joukko $T(x) = \{\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N} : \neg R(\overline{x}(|\sigma|), \lfloor\sigma\rfloor)\}$. Koska $\neg R(0, 0, \ldots, 0)$, niin $\emptyset \in T(x)$ kaikilla $x \in X$. Olkoon $x \in X$, $\sigma \in T(x)$ ja $\tau \subseteq \sigma$. Koska $\neg R(\overline{x}(|\sigma|), \lfloor\sigma\rfloor)$, niin ominaisuuden (2.3) nojalla $\neg R(\overline{x}(|\tau|), \lfloor\tau\rfloor)$ eli $\tau \in T(x)$. Siis $T(x)$ on puu kaikilla $x \in X$. Lisäksi kaikilla $x \in X$

$$\begin{aligned} \exists\alpha(\alpha \in [T(x)]) &\iff \exists\alpha\forall t(\alpha \upharpoonright t \in T(x)) \iff \exists\alpha\forall t\neg R(\overline{x}(t), \overline{\alpha}(t)) \\ &\iff \exists\alpha\neg\exists t R(\overline{x}(t), \overline{\alpha}(t)) \iff \exists\alpha P(x, \alpha) \\ &\iff \neg A(x), \end{aligned}$$

joten $T(x)$ on hyvinperustettu täsmälleen silloin kun $A(x)$. Määritellään kuvaus $f : X \to Tr$ ehdolla

$$(f(x))(i) = \begin{cases} 0, & \lceil i \rceil \notin T(x). \\ 1, & \lceil i \rceil \in T(x). \end{cases}$$

Tällöin $\mathrm{Code}(f(x)) = T(x)$, joten $f(x) \in Tr$ ja

$$A(x) \iff [T(x)] = \emptyset \iff [\mathrm{Code}(f(x))] = \emptyset \iff f(x) \in WF$$

kaikilla $x \in X$. Siis $A = f^{-1}[WF]$.

Kuvauksen $f$ rekursiivisuuden osoittamiseksi määritellään $Q \subseteq \mathbb{N}^{k+\ell+1}$

$$\begin{aligned} Q(i_0, \ldots, i_{k+\ell-1}, j) \iff\ & \exists x \in X \exists \sigma \in {}^{<\omega}2 \exists t \in \mathbb{N} \\ & (\forall h \leq (k+l-1)(i_h = \overline{x_h}(t)) \wedge j = \overline{\lfloor \sigma \rfloor}(t) \wedge \\ & \forall n < |\sigma|(|\lceil n \rceil| \leq t) \wedge \\ & \forall n < |\sigma|(\neg R(\overline{x}(|\lceil n \rceil|), n) \leftrightarrow \sigma(n) = 1)). \end{aligned}$$

Määritelmässä mainitut (mahdolliset) $\sigma$ ja $t$ löydetään rekursiivisesti luvusta $j$ ja (mahdollisen) alkion $x$ $t$:n pituiset alkusegmentit löydetään rekursiivisesti luvuista $i_0, \ldots, i_{k+\ell-1}$. Lisäksi määritelmässä tarkistetaan äärellinen määrä ($2|\sigma|$ kappaletta) rekursiivisia ehtoja, joten $Q$ on rekursiivinen. Kaikilla $x \in X$ ja $\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \exists t Q(\overline{x}(t), \overline{\lfloor \sigma \rfloor}(t)) &\iff \sigma \in {}^{<\omega}2 \wedge \forall n < |\sigma|(\neg R(\overline{x}(|\lceil n \rceil|), n) \leftrightarrow \sigma(n) = 1) \\ &\iff \sigma \in {}^{<\omega}2 \wedge \forall n < |\sigma|(\lceil n \rceil \in T(x) \leftrightarrow \sigma(n) = 1) \\ &\iff \sigma \in {}^{<\omega}2 \wedge \forall n < |\sigma|((f(x))(n) = 1 \leftrightarrow \sigma(n) = 1) \\ &\iff f(x) \in N_\sigma. \end{aligned}$$

Lauseen 2.6.3 nojalla joukko $G_f$ :

$$G_f(x, \lfloor \sigma \rfloor) \iff f(x) \in N_\sigma$$

on efektiivisesti avoin ja kuvaus $f$ rekursiivinen. □

**Lemma 2.7.8.** $\{(S,T) \in Tr \times Tr : \rho(S) \leq \rho(T)\} \in \Sigma^1_1(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$.

*Todistus.* Lemman 1.1.6 mukaan joukolle saadaan määritelmä : $S, T \in Tr$ ja on olemassa järjestyksen säilyttävä kuvaus $S$:ltä $T$:lle. Formaalisti

$$\begin{aligned} Tr(S) \wedge Tr(T) \wedge \exists \alpha\ (\ & \forall m \forall n((S(m) = 1 \wedge S(n) = 1 \wedge \lceil m \rceil \subset \lceil n \rceil) \rightarrow \\ & (T(a_m) = 1 \wedge T(a_n) = 1 \wedge \lceil a_m \rceil \subset \lceil a_n \rceil)). \end{aligned}$$

Siis joukko $\{(S,T) \in Tr \times Tr : \rho(S) \leq \rho(T)\}$ kuuluu luokkaan

$$\Pi^0_1 \wedge \Pi^0_1 \wedge \exists^{\mathcal{N}}(\forall^{\mathbb{N}}(\Sigma^0_1 \rightarrow \Sigma^0_1)) \subseteq \Pi^0_1 \wedge \exists^{\mathcal{N}}\forall^{\mathbb{N}}\Pi^0_2 \subseteq \Pi^0_1 \wedge \exists^{\mathcal{N}}\Pi^0_2 \subseteq \Pi^0_1 \wedge \Sigma^1_1 \subseteq \Sigma^1_1.$$

□

**Lemma 2.7.9.** $\{(S,T) \in WF \times WF : \rho(S) \leq \rho(T)\} \in \Pi^1_1(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$.

*Todistus.* Osoitetaan ensin, että

$$A = \{(S,T) \in Tr \times Tr : \exists \sigma \neq \emptyset(\exists f : S \rightarrow T_\sigma, \text{ joka säilyttää järjestyksen})\}$$

on $\Sigma^1_1$-joukko.

$$\begin{aligned} A(S,T) \iff\ & Tr(S) \wedge Tr(T) \wedge \\ & \exists k \exists \alpha[k \neq 0 \wedge T(k) = 1 \wedge \forall m(T(a_m) = 1 \rightarrow \lceil k \rceil \subseteq \lceil a_m \rceil) \wedge \\ & \forall m \forall n((S(m) = 1 \wedge S(n) = 1 \wedge \lceil m \rceil \subset \lceil n \rceil) \rightarrow \\ & (T(a_m) = 1 \wedge T(a_n) = 1 \wedge \lceil a_m \rceil \subset \lceil a_n \rceil))]. \end{aligned}$$

Joten määritelmänsä perusteella

$$\begin{aligned}A &\in \Pi^0_1 \wedge \Pi^0_1 \wedge \exists^{\mathbb{N}}\exists^{\mathcal{N}}(\neg\Sigma^0_1 \wedge \Sigma^0_1 \wedge \forall^{\mathbb{N}}(\Sigma^0_1 \to \Sigma^0_1) \wedge \forall^{\mathbb{N}}(\Sigma^0_1 \to \Sigma^0_1)) \\ &\subseteq \Pi^0_1 \wedge \exists^{\mathbb{N}}\exists^{\mathcal{N}}(\Sigma^0_2 \wedge \forall^{\mathbb{N}}\Pi^0_2 \wedge \forall^{\mathbb{N}}\Pi^0_2) \subseteq \Pi^0_1 \wedge \exists^{\mathbb{N}}\exists^{\mathcal{N}}(\Sigma^0_2 \wedge \Pi^0_2) \\ &\subseteq \Pi^0_1 \wedge \exists^{\mathbb{N}}\exists^{\mathcal{N}}\Sigma^1_1 \subseteq \Pi^0_1 \wedge \exists^{\mathbb{N}}\Sigma^1_1 \subseteq \Pi^0_1 \wedge \Sigma^1_1 \\ &\subseteq \Sigma^1_1.\end{aligned}$$

Huomioimalla lemma 1.1.7 saadaan

$$\begin{aligned}WF(S) \wedge WF(T) \wedge \rho(S) \leq \rho(T) &\iff WF(S) \wedge WF(T) \wedge \neg(\rho(T) < \rho(S)) \\ &\iff WF(S) \wedge WF(T) \wedge \neg A(T,S).\end{aligned}$$

Siis $\{(S,T) \in WF \times WF : \rho(S) \leq \rho(T)\}$ kuuluu luokkaan

$$\Pi^1_1 \wedge \Pi^1_1 \wedge \neg\Sigma^1_1 \subseteq \Pi^1_1 \wedge \Pi^1_1 \subseteq \Pi^1_1.$$

□

**Lause 2.7.10.** *Luokka $\Pi^1_1$ on normitettu.*

*Todistus.* Olkoon $X \in \mathcal{X}_e$, $A \in \Pi^1_1(X)$ ja $f : X \to Tr$ lauseen 2.7.7 mukainen rekursiivinen kuvaus, jolla $A = f^{-1}[WF]$. Määritellään joukon $A$ normi $\phi = \rho \circ f : A \to \mathbb{O}n$ ja osoitetaan $\phi$ $\Pi^1_1$-normiksi.
Merkitään

$$O_\Pi = \{(S,T) \in WF \times WF : \rho(S) \leq \rho(T)\}$$

ja

$$O_\Sigma = \{(S,T) \in Tr \times Tr : \rho(S) \leq \rho(T)\}.$$

Lemmojen 2.7.9 ja 2.7.8 nojalla $O_\Pi \in \Pi^1_1(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ ja $O_\Sigma \in \Sigma^1_1(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$.
Määritellään relaatio $\leq^{\Pi^1_1} = (f \times f)^{-1}[O_\Pi] \in \Pi^1_1(X \times X)$. Jos $y \in A$, niin $WF(f(y))$ ja

$$\begin{aligned}x \leq^{\Pi^1_1} y &\iff (f(x), f(y)) \in O_\Pi \iff WF(f(x)) \wedge \rho(f(x)) \leq \rho(f(y)) \\ &\iff x \in A \wedge \phi(x) \leq \phi(y).\end{aligned}$$

Määritellään relaatio $\leq^{\Sigma^1_1} = (f \times f)^{-1}[O_\Sigma] \in \Sigma^1_1(X \times X)$. Jos $y \in A$, niin $WF(f(y))$ ja

$$\begin{aligned}x \leq^{\Sigma^1_1} y &\iff (f(x), f(y)) \in O_\Sigma \iff Tr(f(x)) \wedge \rho(f(x)) \leq \rho(f(y)) \\ &\iff WF(f(x)) \wedge \rho(f(x)) \leq \rho(f(y)) \iff x \in A \wedge \phi(x) \leq \phi(y).\end{aligned}$$

Relaatiot $\leq^{\Pi^1_1}$ ja $\leq^{\Sigma^1_1}$ osoittavat kuvauksen $\phi$ $\Pi^1_1$-normiksi.

□

Erityisesti todistuksesta seuraa, että $\rho : WF \to \omega_1$ on joukon $WF$ $\Pi^1_1$-normi.

**Lause 2.7.11.** *Luokalla $\Pi^1_1$ on reduktio-ominaisuus ja luokalla $\Sigma^1_1$ on separaatio-ominaisuus.*

*Todistus.* Koska $\Pi_1^1$ on normitettu, suljettu rekursiivisten alkukuvien, yhdisteen ja leikkauksen suhteen sekä $\Sigma_1^0 \subseteq \Pi_1^1$, väite seuraa lauseista 2.7.3 ja 2.7.4. □

On selvää, että tässä alaluvussa esitetyt luokkaa $\Pi_1^1$ koskevat tulokset saadaan sellaisinaan pätemään kaikille luokille $\Pi_1^1(\alpha)$, kunhan korvataan määritelmissä ja tuloksissa esiintyvät rekursiiviset funktiot $\alpha$:lla rekursiivisilla funktioilla. Edelleen tästä seuraa klassiset tulokset luokalle $\mathbf{\Pi}_1^1$.

**Lause 2.7.12.** *(i) Olkoon $X \in \mathcal{X}_e$ ja $A \in \mathbf{\Pi}_1^1(X)$. Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus $f : X \to Tr$, jolla $A = f^{-1}[WF]$.*
*(ii) Olkoon $X$ puolalainen avaruus ja $A \in \mathbf{\Pi}_1^1(X)$. Tällöin on olemassa Borelin kuvaus $f : X \to Tr$, jolla $A = f^{-1}[WF]$.*

*Todistus.* (*i*) Koska $A \in \Pi_1^1(\alpha)$ jollakin $\alpha \in \mathcal{N}$, niin lauseen 2.7.7 $\alpha$:aan relativoidun version nojalla on olemassa $\alpha$:lla rekursiivinen $f : X \to Tr$, jolla $A = f^{-1}[WF]$. Lauseen 2.6.6 mukaan $f$ on jatkuva.
(*ii*) Olkoon $Y \in \mathcal{X}_e$ avaruus, jolla $|Y| = |X|$ ja olkoon $g : X \to Y$ Borel-isomorfismi (lause 2.2.17). Tällöin $B = g[A] \in \mathbf{\Pi}_1^1(Y)$ ja kohdan (*i*) nojalla on olemassa jatkuva $h : Y \to Tr$, jolla $B = h^{-1}[WF]$. Tällöin $f = (h \circ g) : X \to Tr$ on Borelin kuvaus ja $f^{-1}[WF] = g^{-1}[h^{-1}[WF]] = g^{-1}[B] = A$. □

**Lause 2.7.13.** *Luokka $\mathbf{\Pi}_1^1$ on normitettu.*

*Todistus.* Täsmälleen kuten lauseen 2.7.10 todistus, kunhan korvataan rekursiivinen kuvaus $f$ vastaavalla Borelin kuvauksella. □

## 2.8 $\mathbf{\Sigma}_1^1$-rajoittuvuus

Eräs varhaisista deskriptiivisen joukko-opin tuloksista on Suslinin nimeä kantava Borelin joukkojen karakterisointi $\mathbf{\Delta}_1^1$-joukkoina. Tämän mukaan Borelin joukkoja ovat siis täsmälleen ne analyyttiset joukot, joiden komplementtikin on analyyttinen. Perinteinen todistus on osoittaa, että kaksi erillistä analyyttistä joukkoa voidaan separoida Borelin joukoilla. Tässä Suslinin tulos saadaan Burgessin lausetta varten todistettavan $\mathbf{\Sigma}_1^1$-rajoittuvuuden seurauksena.

Kun $\xi < \omega_1$, merkitään

$$WF_\xi = \{T \in WF : \rho(T) < \xi\}.$$

**Lause 2.8.1.** *$WF_\xi$ on Borelin joukko kaikilla $\xi < \omega_1$.*

*Todistus.* Edetään induktiolla ordinaalin $\xi$ suhteen.
$WF_0 = \emptyset \in \mathcal{B}$. Olkoon $0 < \xi < \omega_1$ ja oletetaan $WF_\delta \in \mathcal{B}$ kaikilla $\delta < \xi$. Jos $\xi$

on seuraajaordinaali $\delta+1$, niin

$$\begin{aligned} WF_\xi &= WF_{\delta+1} = \{T \in WF : \rho(T) < \delta+1\} \\ &= \{T \in Tr : \rho_T(\emptyset) \leq \delta\} \\ &= \{T \in Tr : \forall \sigma \in T(\sigma \neq \emptyset \rightarrow \rho_T(\sigma) < \delta)\} \\ &= \{T \in Tr : \forall \sigma \neq \emptyset(\sigma \notin T \vee \rho(T_\sigma) < \delta)\} \\ &= \bigcap_{\sigma \neq \emptyset} \{T \in Tr : \sigma \notin T \vee T_\sigma \in WF_\delta\} \\ &= \bigcap_{\sigma \neq \emptyset} (\{T \in Tr : T(\lfloor\sigma\rfloor) = 0\} \cup (T \mapsto T_\sigma)^{-1}[WF_\delta]) \end{aligned}$$

Koska ehdon $T(\lfloor\sigma\rfloor) = 0$ määräämä $Tr$:n osajoukko on suljettu ja induktio-oletuksen nojalla $WF_\delta$ on Borelin joukko, riitää todeta, että ehdolla $T \mapsto T_\sigma$ määräytyvä kuvaus $g_\sigma : \{T \in Tr : T(\lfloor\sigma\rfloor) = 1\} \rightarrow \mathcal{C}$ on jatkuva kaikilla $\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}$. Olkoon $\tau = (t_0, t_1, \dots t_{n-1}) \in {}^{<\omega}2$, missä $n \geq 1$. Tällöin

$$g_\sigma^{-1}[N_\tau] = \{T \in Tr : T(\lfloor\sigma\rfloor) = 1\} \cap \bigcap_{i<n} \{T \in Tr : T(\lfloor\sigma\hat{\ }\lceil i \rceil\rfloor) = t_i\}$$

on avointen joukkojen äärellisenä leikkauksena avoin ja $g_\sigma$ on jatkuva kaikilla $\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}$. Jos $\xi$ on rajaordinaali, niin $WF_\xi = \bigcup_{\delta<\xi} WF_\delta$ on Borelin joukkojen numeroituvana yhdisteenä Borelin joukko. □

Sanotaan koanalyyttisen joukon $A$ $\mathbf{\Pi}^1_1$-normia $\phi$ *kanoniseksi,* jos $\phi = \rho \circ f$ jollakin Borelin kuvauksella $f : X \rightarrow Tr$, jolla $A = f^{-1}[WF]$. Lauseen 2.7.13 todistuksen mukaan kaikilla koanalyyttisillä joukoilla on kanoninen normi.

**Lause 2.8.2.** ($\mathbf{\Sigma}^1_1$*-rajoittuvuus.*) *Olkoon $X$ puolalainen avaruus, $A \in \mathbf{\Pi}^1_1(X)$ ja $\phi : X \rightarrow \mathbb{O}n$ joukon $A$ kanoninen $\mathbf{\Pi}^1_1$-normi. Tällöin kaikilla $B \subseteq A$*

$$B \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X) \Longrightarrow \sup\{\phi(y) : y \in B\} < \omega_1.$$

*Todistus.* Olkoon $f : X \rightarrow Tr$ Borelin kuvaus, jolla $A = f^{-1}[WF]$ ja $\phi = \rho \circ f$. Oletetaan vastoin väitettä, että $B \subseteq A$ on $\mathbf{\Sigma}^1_1$-joukko mutta

$$\sup\{\phi(y) : y \in B\} = \omega_1.$$

Koska $\omega_1$ on säännöllinen, joukon $B$ ja avaruuden $X$ on oltava ylinumeroituvia. Lauseesta 2.4.3 seuraa, että on olemassa $C \in \mathbf{\Pi}^1_1(X) \setminus \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$. Olkoon $g : X \rightarrow Tr$ Borelin kuvaus, jolla $C = g^{-1}[WF]$. Koska $\rho : WF \rightarrow \mathbb{O}n$ on joukon $WF$ $\mathbf{\Pi}^1_1$-normi, kaikilla $x \in X$

$$\begin{aligned} x \in C &\iff g(x) \in WF \iff (\rho \circ g)(x) < \omega_1 \\ &\iff \exists y(y \in B \wedge (\rho \circ g)(x) \leq \phi(y)) \\ &\iff \exists y(y \in B \wedge \rho(g(x)) \leq \rho(f(y))) \\ &\iff \exists y(y \in B \wedge g(x) \leq^{\mathbf{\Sigma}^1_1}_\rho f(y)) \\ &\iff x \in \exists^X((X \times B) \cap (g \times f)^{-1}[\leq^{\mathbf{\Sigma}^1_1}_\rho]). \end{aligned}$$

Joten $C$ on $\mathbf{\Sigma}_1^1$-joukko vastoin joukon $C$ valintaa. Tämä ristiriita osoittaa

$$\sup\{\phi(y) : y \in B\} < \omega_1.$$

□

Nyt voidaan todistaa Suslinin lause.

**Lause 2.8.3.** *Olkoon $X$ puolalainen avaruus. Tällöin $\mathbf{\Delta}_1^1(X) = \mathcal{B}(X)$.*

*Todistus.* ($\Rightarrow$) Olkoon $D \in \mathbf{\Delta}_1^1(X)$ ja $\phi : X \to \mathbb{O}n$ joukon $D$ kanoninen $\mathbf{\Pi}_1^1$-normi. Olkoon $f : X \to Tr$ Borelin kuvaus, jolla $D = f^{-1}[WF]$ ja $\phi = \rho \circ f$. Koska $D \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$, lauseen 2.8.2 nojalla $\xi = \sup\{\phi(x) : x \in D\} < \omega_1$. Tällöin $D = f^{-1}[WF_\xi]$ ja koska lauseen 2.8.1 mukaan $WF_\xi$ on Borelin joukko, niin $D \in \mathcal{B}(X)$.
($\Leftarrow$) Lauseen 2.3.5 yhteydessä todettiin $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathbf{\Delta}_1^1(X)$. □

# Luku 3

# Topologiaa

Silverin lauseen todistuksessa tarvitaan topologiset käsitteet laiha joukko, Bairen ominaisuus ja Bairen kategoriaehto. Intuitiivisesti laihat joukot ovat kategoriaehdon täyttävissä avaruuksissa kooltaan pieniä avoimiin joukkoihin verrattuina. Bairen ominaisuus on joukoilla, jotka ovat laihaa joukkoa vaille avoimia ja ne muodostavat analyyttiset joukot sisältävän $\sigma$-algebran.

## 3.1 Kategoriaehto

**Määritelmä 3.1.1.** *Olkoon $X$ topologinen avaruus. Joukko $H \subseteq X$ on* harva, *jos $int(\overline{H}) = \emptyset$.*

**Lause 3.1.2.** *Olkoot $X$ ja $Y$ topologisia avaruuksia.*
*($i$) $H \subseteq X$ on harva, jos ja vain jos $\overline{H}$ on harva.*
*($ii$) $H \subseteq X$ on harva, jos ja vain jos $X \setminus \overline{H}$ on tiheä.*
*($iii$) Jos $H \subseteq X$ on harva, niin $A \subseteq H$ on harva.*
*($iv$) Jos $H \subseteq X$ on harva, niin $H \times Y \subseteq X \times Y$ on harva.*

*Todistus.* ($i$) $\mathrm{cl}_X(\overline{H}) = \overline{H}$.
($ii$) Kohdan ($i$) nojalla voidaan olettaa $H = \overline{H}$. $H$ on harva, joss $G \nsubseteq H$ kaikilla epätyhjillä avoimilla $G \subseteq X$, joss $G \cap (X \setminus H) \neq \emptyset$ kaikilla epätyhjillä avoimilla $G \subseteq X$, joss $X \setminus H$ on tiheä.
($iii$) $\mathrm{int}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{int}(\overline{H}) = \emptyset$.
($iv$) Lauseen [Vä2:7.14(2)] nojalla

$$\mathrm{int}(\overline{H \times Y}) = \mathrm{int}(\overline{H} \times \overline{Y}) = \mathrm{int}(\overline{H}) \times \mathrm{int}(\overline{Y}) = \mathrm{int}(\overline{H}) \times Y,$$

joten jos $\mathrm{int}(\overline{H}) = \emptyset$, niin $\mathrm{int}(\overline{H \times Y}) = \emptyset$. □

**Lause 3.1.3.** *Olkoon $X$ topologinen avaruus.*
*($i$) Jos $G \subseteq X$ on avoin ja epätyhjä, niin $G$ ei ole harva.*
*($ii$) Jos $F \subseteq X$ on suljettu, niin $\partial F$ on harva.*

*(iii) Jos $A \subseteq X$ ja $H \subseteq A$ on harva joukon $A$ relatiivitopologiassa, niin $H$ on harva avaruudessa $X$.*
*(iv) Jos $U \subseteq X$ on avoin, niin $H \subseteq U$ on harva avaruudessa $X$, jos ja vain jos $H$ on harva joukon $U$ relatiivitopologiassa.*

*Todistus.* $(i)$ Jos $G$ on avoin, niin $G = \operatorname{int}(G) \subseteq \operatorname{int}(\overline{G})$, joten jos $G \neq \emptyset$, niin $\operatorname{int}(\overline{G}) \neq \emptyset$.
$(ii)$ Olkoon $F \subseteq X$ suljettu. Todetaan, että $\partial F = F \setminus \operatorname{int} F = F \cap (X \setminus \operatorname{int} F)$ on suljettu. Voidaan olettaa $\partial F \neq \emptyset$. Olkoon $V \subseteq X$ avoin joukko, joka kohtaa joukon $\partial F$ ja olkoon $x \in V \cap \partial F$. Koska $V$ on alkion $x$ ympäristö ja $x \in \partial F$, niin $V \cap (X \setminus F)$ on avoin ja epätyhjä. Olkoon $y \in V \cap (X \setminus F)$. Tällöin $y \notin \partial F$, sillä $y$:llä on ympäristö $V \cap (X \setminus F)$, joka ei kohtaa joukkoa $F$. Tästä seuraa $V \not\subseteq \partial F$. On osoitettu, ettei mikään avoin epätyhjä joukko sisälly joukkoon $\partial F = \overline{\partial F}$. Siis $\partial F$ on harva.
$(iii)$ Olkoon $H \subseteq A$ harva joukon $A \subseteq X$ relatiivitopologiassa. Edellisen lauseen kohdan $(i)$ nojalla voidaan olettaa $H = \operatorname{cl}_A(H)$. Oletetaan vastoin väitettä, että $H$ ei ole harva avaruudessa $X$. Olkoon $U \subseteq \operatorname{cl}_X(H)$ epätyhjä avoin joukko. Kohdan $(i)$ nojalla $U$ ei ole harva $X$:ssä, joten kohdan $(ii)$ nojalla $U \not\subseteq \operatorname{cl}_X(H) \setminus \operatorname{int}_X(H)$. Siis $U \cap \operatorname{int}_X(H)$ on avoin ja epätyhjä. Koska $H \subseteq A$, niin $U \cap \operatorname{int}_X(H) \subseteq H$ on avoin epätyhjä joukko myös avaruudessa $A$ ja toisaalta $H$:n alijoukkona harva avaruudessa $A$. Saadaan ristiriita kohdan $(i)$ kanssa.
$(iv)$ Olkoon $U \subseteq X$ avoin ja $H \subseteq U$ harva avaruudessa $X$. Koska $U$ on avoin, niin

$$\operatorname{int}_U(\operatorname{cl}_U(H)) = \operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(H) \cap U) \subseteq \operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(H)) = \emptyset.$$

Siis $H$ on harva joukon $U$ relatiivitopologiassa. Käänteinen väite seuraa kohdasta $(iii)$. □

**Määritelmä 3.1.4.** *Joukko $A \subseteq X$ on* laiha, *jos $A$ on numeroituva yhdiste harvoista joukoista. Käytetään avaruuden $X$ laihojen joukkojen perheelle merkintää $\mathbf{M}(X)$ (engl. meager).*
*Joukko $A \subseteq X$ on* lihava, *jos $X \setminus A$ on laiha. Käytetään avaruuden $X$ lihavien joukkojen perheelle merkintää $\mathbf{CM}(X)$ (engl. comeager).*

Laihoja joukkoja kutsutaan myös *ensimmäisen kategorian* joukoiksi. Joukot, jotka eivät ole laihoja muodostavat *toisen kategorian* joukot.

**Lause 3.1.5.** *Olkoot $X$ ja $Y$ topologisia avaruuksia.*
*$(i)$ $\mathbf{M}(X)$ on suljettu alijoukkojen ja numeroituvan yhdisteen suhteen.*
*$(ii)$ $\mathbf{CM}(X)$ on suljettu ylijoukkojen ja numeroituvan leikkauksen suhteen.*
*$(iii)$ Jos $M \subseteq X$ on laiha, niin $M \times Y \subseteq X \times Y$ on laiha.*
*$(iv)$ Jos $A \subseteq X$ ja $M \subseteq A$ on laiha joukon $A$ relatiivitopologiassa, niin $M$ on laiha avaruudessa $X$.*
*$(v)$ Jos $U \subseteq X$ on avoin, niin $M \subseteq U$ on laiha avaruudessa $X$, jos ja vain jos $M$ on laiha joukon $U$ relatiivitopologiassa.*

*Todistus.* $(i)$ Olkoon $M \subseteq X$ laiha ja $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ perhe $X$:n harvoja joukkoja, joilla $M = \bigcup_n H_n$. Olkoon $A \subseteq M$ ja $A_n = A \cap H_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$A_n \subseteq H_n$ on harva kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$$A = A \cap M = A \cap \bigcup_n H_n = \bigcup_n (A \cap H_n) = \bigcup_n A_n$$

on laiha.
Olkoon $M_n \subseteq X$ laiha kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja olkoot kaikilla $n \in \mathbb{N}$ $\{H_i^n\}_{i \in \mathbb{N}}$ perhe $X$:n harvoja joukkoja, joilla $M_n = \bigcup_i H_i^n$. Tällöin

$$\bigcup_n M_n = \bigcup_n \bigcup_i H_i^n = \bigcup_{(n,i) \in \mathbb{N}^2} H_i^n$$

on laiha, sillä $\mathbb{N}^2$ on numeroituva.
$(ii)$ Olkoon $C \subseteq X$ lihava ja $B$ joukko, jolla $C \subseteq B \subseteq X$. Tällöin $(X \setminus B) \subseteq (X \setminus C)$ on laihan joukon alijoukkona laiha. Siis $B$ on lihava.
Olkoon $C_n$ lihava kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $X \setminus \bigcap_n C_n = \bigcup_n (X \setminus C_n)$ on laihojen joukkojen numeroituvana yhdisteenä laiha. Siis $\bigcap_n C_n$ on lihava.
$(iii)$ Olkoon $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ perhe $X$:n harvoja joukkoja, joilla $M = \bigcup_n H_n$. Lauseen 3.1.2 kohdan $(iv)$ nojalla $(H_n \times Y) \subseteq (X \times Y)$ on harva kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $M \times Y = \bigcup_n (H_n \times Y)$ on laiha.
$(iv)$ Seuraa lauseen 3.1.3 kohdasta $(iii)$.
$(v)$ Seuraa lauseen 3.1.3 kohdasta $(iv)$. □

**Lause 3.1.6.** *Topologisen avaruuden $X$ osajoukko $C$ on lihava, jos ja vain jos $C$ sisältää avointen tiheiden joukkojen numeroituvan leikkauksen.*

*Todistus.* $C \subseteq X$ on lihava,
joss on olemassa perhe $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ harvoja joukkoja, joilla $X \setminus C \subseteq \bigcup_n \overline{H_n}$,
joss on olemassa perhe $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ harvoja joukkoja, joilla $C \supseteq \bigcap_n (X \setminus \overline{H_n})$,
joss on olemassa perhe $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avoimia tiheitä joukkoja, joilla $C \supseteq \bigcap_n G_n$. □

**Lemma 3.1.7.** *Olkoot $X$ ja $Y$ topologisia avaruuksia ja $Y$:llä numeroituva kanta. Jos $F \subseteq X \times Y$ on harva, niin $B = \{x \in X : F_x \subseteq Y \text{ on harva}\}$ on lihava.*

*Todistus.* Voidaan olettaa $Y \neq \emptyset$ ja $F = \overline{F}$. Olkoon $U = (X \times Y) \setminus F$, jolloin $U$ on avoin ja tiheä. Olkoon $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avaruuden $Y$ epätyhjien joukkojen muodostama kanta. Merkitään $U_n = \mathrm{pr}_X(U \cap (X \times V_n))$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska $\mathrm{pr}_X$ on avoin kuvaus [Vä2:7.19], joukot $U_n \subseteq X$ ovat avoimia. Olkoon $G \subseteq X$ avoin ja epätyhjä. Koska $U$ on tiheä, niin $U \cap (G \times V_n) \neq \emptyset$, joten $U_n \cap G = \mathrm{pr}_X(U \cap (G \times V_n)) \neq \emptyset$ ja $U_n$ on tiheä $X$:ssä.
Jos $x \in \bigcap_n U_n$, niin $U_x \cap V_n \neq \emptyset$ kaikilla $n$ eli $U_x$ on tiheä $Y$:ssä. Joukko $F_x = (y \mapsto (x, y))^{-1}[F]$ on suljetun joukon jatkuvana alkukuvana suljettu. Lisäksi joukon $F_x = Y \setminus U_x$ komplementti on tiheä, joten $F_x$ on harva. Siis $\bigcap_n U_n \subseteq B$ ja lauseen 3.1.6 nojalla $B$ on lihava. □

**Lemma 3.1.8.** *Olkoot $X$ ja $Y$ topologisia avaruuksia ja $Y$:llä numeroituva kanta. Jos $M \subseteq X \times Y$ on laiha, niin $B = \{x \in X : M_x \subseteq Y \text{ on laiha}\}$ on lihava.*

*Todistus.* Olkoon $M = \bigcup_n H_n$, missä joukot $H_n \subseteq X \times Y$ ovat harvoja. Merkitään kaikilla $n$: $C_n = \{x \in X : (H_n)_x \text{ on harva}\}$. Lemman 3.1.7 nojalla $C_n$ on lihava kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten myös $\bigcap_n C_n$ on lihava. Lisäksi kaikilla $x \in \bigcap_n C_n$ ja $n \in \mathbb{N}$ joukko $(H_n)_x$ on harva, joten $M_x = \bigcup_n (H_n)_x$ on laiha. $B$:n määritelmän nojalla $\bigcap_n C_n \subseteq B$, joten $B$ on lihavan joukon ylijoukkona lihava. □

**Lemma 3.1.9.** *Olkoot $X$ ja $Y$ topologisia avaruuksia ja $Y$:llä numeroituva kanta. Kaikilla joukoilla $A \subseteq X$ ja $B \subseteq Y$*

$$A \times B \in \mathbf{M}(X \times Y) \iff A \in \mathbf{M}(X) \text{ tai } B \in \mathbf{M}(Y).$$

*Todistus.* ($\Rightarrow$) Olkoon $A \times B \subseteq X \times Y$ laiha. Lemman 3.1.8 nojalla on olemassa sellainen lihava $C \subseteq X$, että kaikilla $x \in C$ joukko $(A \times B)_x$ on laiha. Jos tällöin $A$ ei ole laiha, niin $A \not\subseteq (X \setminus C)$, koska $X \setminus C$ on laiha, joten $A \cap C \neq \emptyset$. Olkoon $x \in A \cap C$. Koska $x \in A$ niin $(A \times B)_x = B$; koska $x \in C$ niin $(A \times B)_x$ on laiha. Siis $B$ on laiha.
($\Leftarrow$) Jos $A$ on laiha, niin lauseen 3.1.5 kohdan $(iii)$ nojalla $A \times Y$ on laiha ja erityisesti $A \times B \subseteq A \times Y$ on laiha. Vastaavasti jos $B$ on laiha, niin $X \times B$ on laiha ja erityisesti $A \times B \subseteq X \times B$ on laiha. □

**Lause 3.1.10.** *Olkoon $X$ topologinen avaruus. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*
(1) *Mikään avaruuden $X$ avoin epätyhjä joukko ei ole laiha.*
(2) *Jokainen avaruuden $X$ lihava joukko on tiheä.*
(3) *Avaruuden $X$ tiheiden avointen joukkojen numeroituva leikkaus on tiheä.*

*Todistus.* (1) $\Rightarrow$ (2). Olkoon $C \subseteq X$ lihava. Ehdon (1) nojalla laiha joukko $X \setminus C$ ei sisällä epätyhjää avointa joukkoa, joten jokainen epätyhjä avoin joukko leikkaa $C$:tä. Siis $C$ on tiheä.
(2) $\Rightarrow$ (3). Olkoot joukot $G_n \subseteq X$ tiheitä ja avoimia kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin joukot $X \setminus G_n$ ovat harvoja, joten $X \setminus \bigcap_n G_n = \bigcup_n (X \setminus G_n)$ on laiha ja siis $\bigcap_n G_n$ lihava. Ehdon (2) nojalla $\bigcap_n G_n$ on tiheä.
(3) $\Rightarrow$ (1). Olkoon $M \subseteq X$ laiha ja $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ perhe $X$:n harvoja joukkoja, joilla $M = \bigcup_n H_n$. Tällöin joukot $G_n = X \setminus \overline{H_n}$ ovat avoimia ja tiheitä kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Ehdon (3) nojalla $\bigcap_n G_n$ on tiheä, joten $M = \bigcup_n H_n \subseteq \bigcup_n \overline{H_n} = X \setminus \bigcap_n G_n$ ei voi olla avoin ja epätyhjä, sillä se ei leikkaa tiheää joukkoa $\bigcap_n G_n$. □

**Määritelmä 3.1.11.** *Topologiselle avaruudelle $X$ pätee* (Bairen) kategoriaehto, *jos lauseen 3.1.10 ehdot ovat voimassa.*

Täydellisesti metristyville avaruuksille pätee kategoriaehto [Vä2:10.8], joten erityisesti puolalaisille avaruuksille pätee kategoriaehto.

**Lause 3.1.12.** *Jos $X$ ja $Y$ ovat kategoriaehdon toteuttavia topologisia avaruuksia, joista toisella on numeroituva kanta, niin tuloavaruudelle $X \times Y$ pätee kategoriaehto.*

*Todistus.* Voidaan olettaa, että $Y$:llä on numeroituva kanta. Todistetaan avaruudelle $X \times Y$ lauseen 3.1.10 ehto (1). Olkoon $G \subseteq X \times Y$ avoin ja epätyhjä. Tällöin $A \times B \subseteq G$, joillain avoimilla ja epätyhjillä $A \subseteq X$ ja $B \subseteq Y$. Kategoriaehdon nojalla kumpikaan joukoista $A \subseteq X$ tai $B \subseteq Y$ ei ole laiha. Lemman 3.1.9 nojalla $A \times B \subseteq X \times Y$ ei ole laiha, joten $G \supseteq A \times B$ ei ole laiha. □

**Lause 3.1.13.** *Olkoon $X$ topologinen avaruus, jolle pätee Bairen kategoriaehto. Jos $U \subseteq X$ on avoin, niin joukon $U$ relatiivitopologialle pätee Bairen kategoriaehto.*

*Todistus.* Olkoon $U \subseteq X$ avoin. Oletetaan vastoin väitettä, että on olemassa $M \subseteq U$, joka on avoin, epätyhjä ja laiha avaruudessa $U$. Koska $U \subseteq X$ on avoin, niin $M$ on avoin epätyhjä joukko avaruudessa $X$ ja lauseen 3.1.5 kohdan $(v)$ nojalla $M$ on laiha avaruudessa $X$. Tämä on ristiriidassa avaruuden $X$ kategoriaehdon kanssa. Siis mikään avaruuden $U$ avoin epätyhjä joukko ei ole laiha avaruudessa $U$. □

Silverin lauseen todistuksessa käytetään kategoriaehtoa seuraavan lemman kautta.

**Lemma 3.1.14.** *Olkoon $X$ topologinen avaruus, jolle pätee Bairen kategoriaehto. Jos $U \subseteq X$ on avoin ja $M \subseteq U$ laiha avaruudessa $X$, niin on olemassa laskeva ketju $(G_i)_{i<\omega}$ avaruuden $X$ avoimia joukkoja, jotka ovat tiheitä avaruudessa $U$ ja joilla $\bigcap_{i<\omega} G_i \subseteq (U \setminus M)$.*

*Todistus.* Olkoon $U \subseteq X$ avoin ja $M \subseteq U$ laiha avaruudessa $X$. Lauseen 3.1.5 kohdan $(v)$ nojalla $M$ on laiha avaruudessa $U$ eli $U \setminus M$ on lihava avaruudessa $U$. Lauseen 3.1.6 mukaan on olemassa numeroituva perhe $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ avaruuden $U$ avoimia tiheitä joukkoja joiden leikkaus sisältyy joukkoon $U \setminus M$. Määritellään kaikilla $i \in \mathbb{N}$

$$G_i = U_0 \cap U_1 \cap \ldots \cap U_i, \text{ kun } i \geq 0.$$

Joukot $G_i$ ovat avoimia avaruudessa $U$ ja koska $U$ on avoin $X$:ssä, niin joukot $G_i$ ovat avoimia $X$:ssä. Lisäksi $G_i \supseteq G_{i+1}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $\bigcap_i G_i = \bigcap_i U_i \subseteq (U \setminus M)$. Koska Bairen kategoriaehto pätee avaruudelle $X$, niin lauseen 3.1.13 nojalla se pätee myös avaruudelle $U$. Siispä joukot $G_i$ ovat tiheiden ja avointen joukkojen äärellisinä leikkauksina tiheitä $U$:ssa (lause 3.1.10 (3)). □

## 3.2 Bairen ominaisuus

Käytetään symbolia $\Delta$ joukkojen symmetriselle erotukselle:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

**Määritelmä 3.2.1.** *Olkoon $X$ topologinen avaruus. Joukolla $A \subseteq X$ on* Bairen ominaisuus, *jos $A \Delta G$ on laiha jollakin avoimella $G \subseteq X$. Merkitään $\mathbf{BP}(X)$:llä niiden avaruuden $X$ osajoukkojen perhettä, joilla on Bairen ominaisuus (engl. Baire property).*

Bairen ominaisuus siis sallii joukoille pienen (=laihan) poikkeaman avoimuudesta. Tämä kuitenkin laajentaa avointen joukkojen perhettä merkittävästi. Luokan **BP** sulkeumaominaisuudet saadaan seuraavista lauseista. Lauseiden todistuksissa käytetään symmetrisen erotuksen ominaisuuksia:

$$\begin{aligned} A\Delta B &= B\Delta A, \\ A\Delta(B\Delta C) &= (A\Delta B)\Delta C, \\ \complement(A\Delta B) &= (\complement A)\Delta B = A\Delta(\complement B), \\ A\Delta B = C \iff A\Delta C &= B \iff B\Delta C = A. \end{aligned}$$

**Lause 3.2.2.** *Olkoon $X$ topologinen avaruus, $A \subseteq X$ ja $B \in \mathbf{BP}(X)$. Jos $A\Delta B$ on laiha, niin $A$:lla on Bairen ominaisuus.*

*Todistus.* Olkoon $M = A\Delta B \subseteq X$ laiha. Joukon $B$ Bairen ominaisuuden nojalla on olemassa avoin $G \subseteq X$, jolla $B\Delta G$ on laiha. Tällöin

$$\begin{aligned} A\Delta G &= (A \setminus G) \cup (G \setminus A) \subseteq ((A \setminus B) \cup (B \setminus G)) \cup ((G \setminus B) \cup (B \setminus A)) \\ &= ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cup ((B \setminus G) \cup (G \setminus B)) \\ &= (A\Delta B) \cup (B\Delta G) = M \cup (B\Delta G) \in \mathbf{M}(X). \end{aligned}$$

Siis $A\Delta G$ on laiha ja $A \in \mathbf{BP}(X)$. □

**Lause 3.2.3.** *Olkoon $X$ topologinen avaruus. $\mathbf{BP}(X)$ on avaruuden $X$ suppein $\sigma$-algebra, joka sisältää avoimet ja laihat joukot.*

*Todistus. Väite 1*: Jos $A \in \mathbf{BP}(X)$, niin $(X \setminus A) \in \mathbf{BP}(X)$.
Olkoon $A \in \mathbf{BP}(X)$ ja olkoot avoin $G \subseteq X$ ja laiha $M \subseteq X$ sellaisia, että $A\Delta G = M$. Tällöin $G\Delta M = A$. Merkitään $F = X \setminus G$, jolloin $F$ on suljettu. Koska joukot $\operatorname{int}(F)$ ja $\partial F$ ovat erillisiä, niin $\operatorname{int}(F) \cup \partial F = \operatorname{int} F\Delta\partial F$ ja

$$\begin{aligned} X \setminus A &= X \setminus (G\Delta M) = (X \setminus G)\Delta M = F\Delta M = (\operatorname{int} F \cup \partial F)\Delta M \\ &= (\operatorname{int} F\Delta\partial F)\Delta M = \operatorname{int} F\Delta(\partial F\Delta M). \end{aligned}$$

Koska joukot $M$ ja $\partial F$ ovat laihoja (lause 3.1.3 (*ii*)), niin $\partial F\Delta M$ on laiha. Lisäksi $\operatorname{int} F$ on avoin, joten $X \setminus A \in \mathbf{BP}(X)$. ◇

*Väite 2*: Jos $A_n \in \mathbf{BP}(X)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $A = \bigcup_n A_n \in \mathbf{BP}(X)$.
Olkoot $A_n \in \mathbf{BP}(X)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja olkoot avoimet joukot $G_n \subseteq X$ ja laihat joukot $M_n \subseteq X$ sellaisia, että $A_n\Delta G_n = M_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $G = \bigcup_n G_n$ on avoin ja $M = \bigcup_n M_n$ on laiha. Lisäksi

$$\begin{aligned} A\Delta G &= \bigcup_n A_n \Delta \bigcup_n G_n = (\bigcup_n A_n \setminus \bigcup_n G_n) \cup (\bigcup_n G_n \setminus \bigcup_n A_n) \\ &\subseteq \bigcup_n (A_n \setminus G_n) \cup \bigcup_n (G_n \setminus A_n) = \bigcup_n ((A_n \setminus G_n) \cup (G_n \setminus A_n)) \\ &= \bigcup_n (A_n\Delta G_n) = \bigcup_n M_n = M \in \mathbf{M}(X). \end{aligned}$$

Siis $A\Delta G$ on laiha ja $A \in \mathbf{BP}(X)$. $\diamond$

Selväsi avoimilla ja laihoilla joukoilla on Bairen ominaisuus. Tämä yhdessä väitteiden 1 ja 2 kanssa osoittaa, että $\mathbf{BP}(X)$ on $\sigma$-algebra, joka sisältää avoimet ja laihat joukot. Lisäksi jokainen avoimet ja laihat joukot sisältävä $\sigma$-algebra sisältää myös näiden symmetriset erotukset eli joukot, joilla on Bairen ominaisuus. $\square$

Erityisesti lauseesta seuraa, että $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathbf{BP}(X)$. Itse asiassa puolalaisen avaruuden analyyttisilläkin joukoilla on Bairen ominaisuus. Tämän todistamiseen tarvitaan seuraavaa lemmaa.

**Lemma 3.2.4.** *Olkoon $X$ topologinen avaruus, jolla on numeroituva kanta ja olkoon $A \subseteq X$. Tällöin on olemassa sellainen $B \in \mathbf{BP}(X)$, että $A \subseteq B$ ja jos $A \subseteq B'$ jollakin $B' \in \mathbf{BP}(X)$, niin $B \setminus B'$ on laiha.*

*Todistus.* Olkoon $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ $X$:n kanta. Merkitään

$$A^* = \{x \in X : \forall i(x \in V_i \to V_i \cap A \notin \mathbf{M}(X))\}.$$

Jos $x \in X \setminus A^*$, niin on olemassa $j \in \mathbb{N}$, jolla $x \in V_j$ ja $V_j \cap A$ on laiha. Jos myös $y \in V_j$ niin $y \notin A^*$, koska $V_j \cap A$ on laiha. Siis $V_j$ on pisteen $x$ ympäristö, jolle $V_j \cap A^* = \emptyset$, joten $A^*$ on suljettu ja erityisesti $A^* \in \mathbf{BP}(X)$. Lisäksi joukko

$$A \setminus A^* = \bigcup\{A \cap V_i : i \in \mathbb{N} \wedge A \cap V_i \in \mathbf{M}(X)\}$$

on laihojen joukkojen numeroituvana yhdisteenä laiha ja erityisesti sillä on Bairen ominaisuus. Olkoon $B = A \cup A^* = (A \setminus A^*) \cup A^* \in \mathbf{BP}(X)$.

Olkon $B' \supseteq A$ joukko, jolla on Bairen ominaisuus ja olkoon $M = B \setminus B'$. Koska $B, B' \in \mathbf{BP}(X)$, niin joukolla $M$ on Bairen ominaisuus. Osoitetaan, että $M$ on laiha. Tehdään vastaoletus: $M$ ei ole laiha. Koska $M$:llä on Bairen ominaisuus, niin on olemassa avoin ja epätyhjä $G \subseteq X$, jolla $G\Delta M$ on laiha. Koska $M$ ei ole laiha, mutta $M \setminus G$ on laiha, niin $M \cap G \neq \emptyset$. On siis olemassa sellainen $i \in \mathbb{N}$, että $V_i \subseteq G$ ja $M \cap V_i \neq \emptyset$. Lisäksi $V_i \setminus M$ on laiha, sillä se sisältyy laihaan joukkoon $G \setminus M$.

$$V_i \setminus M = V_i \cap \complement M = V_i \cap \complement(B \cap \complement B') = V_i \cap (\complement B \cup B') \supseteq V_i \cap B' \supseteq V_i \cap A,$$

joten $V_i \cap A$ on laiha. Koska $V_i \cap M \neq \emptyset$ ja $M = (A \cup A^*) \setminus B' \subseteq A^*$, niin on olemassa $x \in V_i \cap A^*$. Joukon $A^*$ määritelmän perusteella $V_i \cap A$ ei ole laiha, mikä on ristiriidassa edellä todetun kanssa. Siis $M = B \setminus B'$ on laiha. $\square$

**Lause 3.2.5.** *Olkoon $X$ topologinen avaruus, jolla on numeroituva kanta. Jos $\{A_\sigma\}_{\sigma\in{}^{<\omega}\mathbb{N}}$ on perhe avaruuden $X$ osajoukkoja, joilla on Bairen ominaisuus, niin joukolla $A = \mathcal{A}(\{A_\sigma\}) \subseteq X$ on Bairen ominaisuus.*

*Todistus.* Määritelmän mukaan $A = \mathcal{A}(\{A_\sigma\}) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\alpha\restriction n}$, joten voidaan olettaa $A_\sigma \subseteq A_\tau$, kun $\tau \subseteq \sigma$. Merkitään kaikilla $\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}$

$$A^\sigma = \bigcup_{\alpha\supset\sigma} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\alpha\restriction n} \subseteq A_\sigma.$$

Tällöin $A^\emptyset = A$.

Lemman 3.2.4 nojalla kaikilla $\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}$ on olemassa sellainen $B^\sigma \supseteq A^\sigma$, että $B^\sigma$:lla on Bairen ominaisuus ja kaikilla $B \supseteq A^\sigma$, joilla on Bairen ominaisuus, joukko $B^\sigma \setminus B$ on laiha. Voidaan olettaa $B^\sigma \subseteq A_\sigma$ ja $B^\sigma \subseteq B^\tau$, jos $\tau \subseteq \sigma$, tarpeen vaatiessa korvaamalla $B^\sigma$ joukolla $(A_\sigma \cap B^\sigma) \cap (\bigcap_{\tau \subseteq \sigma} B^\tau) \in \mathbf{BP}(X)$.

Olkoon $M_\sigma = B^\sigma \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^{\sigma\hat{}n}$. Koska $A^\sigma = \bigcup_n A^{\sigma\hat{}n} \subseteq \bigcup_n B^{\sigma\hat{}n}$ ja joukolla $\bigcup_n B^{\sigma\hat{}n}$ on Bairen ominaisuus, niin $B^\sigma$:n määritelmän perusteella $M_\sigma$ on laiha. Olkoon $M = \bigcup_{\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}} M_\sigma$, jolloin $M$ on laiha.

Osoitetaan $B^\emptyset \setminus M \subseteq A$.
Voidaan olettaa $B^\emptyset \setminus M \neq \emptyset$. Olkoon $x \in B^\emptyset \setminus M$. Valitaan rekursiivisesti luvut $a_i$, $i < \omega$ niin, että $x \in \bigcap_n B^{\alpha \restriction n}$, missä $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Tällöin $x \in \bigcap_n B^{\alpha\restriction n} \subseteq \bigcap_n A_{\alpha \restriction n} \subseteq A$. Koska

$$x \in B^\emptyset \setminus M_\emptyset = B^\emptyset \setminus (B^\emptyset \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^{\emptyset\hat{}n}) = B^\emptyset \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^{(n)},$$

niin on olemassa $a_0$, jolla $x \in B^{(a_0)}$. Oletetaan, että luvut $a_0, \ldots, a_n$ on valittu siten, että $x \in B^{(a_0,\ldots,a_n)}$. Koska $x \notin M$, niin $x \notin M_{(a_0,\ldots,a_n)}$, joten

$$\begin{aligned} x \in B^{(a_0,\ldots,a_n)} \setminus M_{(a_0,\ldots,a_n)} &= B^{(a_0,\ldots,a_n)} \setminus (B^{(a_0,\ldots,a_n)} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B^{(a_0,\ldots,a_n)\hat{}m}) \\ &= B^{(a_0,\ldots,a_n)} \cap \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B^{(a_0,\ldots,a_n)\hat{}m}, \end{aligned}$$

ja on olemassa $a_{n+1}$, jolla $x \in B^{(a_0,\ldots,a_{n+1})}$. Konstruktio on valmis.

Koska $B^\emptyset \setminus M \subseteq A$, niin $B^\emptyset \setminus A \subseteq M$ ja on siten laiha. $A = A^\emptyset \subseteq B^\emptyset$, joten $A^\emptyset \setminus B^\emptyset = \emptyset$ ja $A \Delta B^\emptyset = \emptyset \cup (B^\emptyset \setminus A)$ on laiha. Koska joukolla $B^\emptyset$ on Bairen ominaisuus, niin lauseen 3.2.2 nojalla joukolla $A$ on Bairen ominaisuus. □

**Lause 3.2.6.** *Olkoon $X$ puolalainen avaruus. Tällöin*

$$\mathbf{\Sigma}^1_1(X) \cup \mathbf{\Pi}^1_1(X) \subseteq \mathbf{BP}(X).$$

*Todistus.* Puolalaisella avaruudella $X$ on numeroituva kanta, joten lauseen 3.2.5 nojalla Suslinin operaatio säilyttää Bairen ominaisuuden avaruudessa $X$. Suljetuilla joukoilla on Bairen ominaisuus lauseen 3.2.3 nojalla ja koska analyyttiset joukot saadaan soveltamalla Suslinin operaatiota suljettuihin joukkoihin (lause 2.3.5), $\mathbf{\Sigma}^1_1(X) \subseteq \mathbf{BP}(X)$. Koska $\mathbf{BP}$ on suljettu komplementoinnin suhteen, myös $\mathbf{\Pi}^1_1(X) \subseteq \mathbf{BP}(X)$. □

Huomautetaan vielä, että $\mathbf{BP}(X)$ on epätriviaali $\sigma$-algebra ylinumeroituvalle puolalaiselle avaruudelle $X$, sillä valinta-aksiooman nojalla on olemassa avaruuden $X$ osajoukko, jolla ei ole Bairen ominaisuutta [Ke 8.48].

# Luku 4

# Ekvivalenssirelaatiot

Joukko $E$ on joukon $X$ *ekvivalenssirelaatio,* jos $E \subseteq X \times X$ ja seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \forall x \in X(xEx), \\
&(2) \quad \forall x, y \in X(xEy \rightarrow yEx), \\
&(3) \quad \forall x, y, z \in X((xEy \wedge yEz) \rightarrow xEz).
\end{aligned}$$

Ehto 1 on *refleksiivisyys* $X$:llä, ehto 2 on *symmetrisyys* ja ehto 3 on *transitiivisuus.* Ekvivalenssirelaation yhteydessä merkintä $xEy$ tarkoittaa $(x, y) \in E$ ja tällöin sanotaan, että $x$ ja $y$ ovat ekvivalentit. Ekvivalenssirelaatio osittaa joukon $X$ pareittain erillisiin *ekvivalenssiluokkiin.* Voidaan ajatella ekvivalenssirelaation samastavan tiettyyn luokkaan kuuluvat alkiot keskenään ja siten yleistävän identtisyyden käsitteen. Alkion $x \in X$ ekvivalenssiluokkaa merkitään $[x]_E$. Siis $[x]_E = \{y \in X : xEy\}$. Ekvivalenssiluokkien joukkoa kutsutaan $E$:n *tekijäavaruudeksi* ja sitä merkitään $X/E$. Jos $\Gamma$ on luokka joukkoja ja $E \subseteq X \times X$ joukon $X$ ekvivalenssirelaatio, niin $E$ on $\Gamma$-*ekvivalenssirelaatio,* jos $E \in \Gamma(X \times X)$.

Johdannossa mainittu Vaughtin konjektuuri pitäisi paikkansa, jos puolalaisten avaruuksien $\mathbf{\Sigma}_1^1$-ekvivalenssirelaatioiden tekijäavaruuden mahtavuus olisi aina numeroituva tai $2^{\aleph_0}$ [M&W: s.108]. Seuraava esimerkki kuitenkin osoittaa, että näin ei tarvitse olla.

Olkoon $\sim \subseteq Tr \times Tr$ ehdolla

$$T \sim S \iff \rho(T) = \rho(S)$$

määrätty ekvivalenssirelaatio puiden muodostamassa puolalaisessa avaruudessa. Tällöin

$$T \sim S \iff \rho(T) \leq \rho(S) \wedge \rho(S) \leq \rho(T),$$

joten lauseen 2.7.8 nojalla $\sim$ on $\Sigma_1^1$-ekvivalenssirelaatio. Jokaisen joukon $\mathbb{N}$ puun korkeus on korkeintaan $\omega_1$ ja lauseen 1.1.5 mukaan jokaista ordinaalia $\xi < \omega_1$ kohden on olemassa joukon $\mathbb{N}$ puu, jonka korkeus on $\xi$, joten ekvivalenssirelaatiolla $\sim$ on täsmälleen $\aleph_1$ ekvivalenssiluokkaa.

Käy ilmi, että $\mathbf{\Sigma}^1_1$-ekvivalenssirelaatiolle tekijäavaruuden mahtavuus $\aleph_1$ on ainoa mahdollinen numeroituvuuden ja kontinuumin mahtavuuden lisäksi. Tämän Burgessin lauseen todistus esitetään alaluvussa 4.3 ja se perustuu alaluvussa 4.2 todistettavaan Silverin lauseeseen. Silverin lause osoittaa, että $\mathbf{\Pi}^1_1$-ekvivalenssirelaatioiden tekijäavaruuksille pätee kontinuumihypoteesin mukainen dikotomia.

Silverin alkuperäinen todistus [Si] vuodelta 1974 perustuu joukko-opilliseen pakotukseen ja käyttää siten huomattavasti vahvempia keinoja kuin tässä esitettävä efektiiviseen teoriaan pohjautuva todistus. Samalla tämä todistus on hyvä esimerkki efektiivisen teorian käyttökelpoisuudesta, sillä toistaiseksi Silverin lauseelle ei tunneta klassiseen deskriptiiviseen joukko-oppiin perustuvaa todistusta. Silverin lauseen todisti efektiivisillä menetelmillä Harrington vuonna 1976. Todistuksen ideana on löytää annetulle koanalyyttiselle ekvivalenssirelaatiolle $E$ sellainen epätyhjä avoin joukko $V$, että $E$ on laiha $V \times V$:ssä ja konstruoida kategoriaehdon avulla riittävä määrä keskenään eri luokkiin kuuluvia $V$:n alkioita. Tätä varten tarvitaan standarditopologiaa hienontava topologia, joka on alaluvun 4.1 aiheena.

## 4.1 Gandy-topologia

Puolalaisen avaruuden $X \in \mathcal{X}_e$ $\Sigma^1_1$-joukkojen perhe muodostaa $X$:n peitteen ja on suljettu leikkauksen suhteen. Siis $\Sigma^1_1$-joukot muodostavat erään joukon $X$ topologian kannan [Vä2:2.9]. Kyseistä topologiaa kutsutaan $X$:n *Gandy-topologiaksi.*

Merkitään $\mathcal{N}^n$:n Gandy-topologiaa $\mathcal{T}^n_G$ ja avaruuksien $(\mathcal{N}^k, \mathcal{T}^k_G)$ ja $(\mathcal{N}^\ell, \mathcal{T}^\ell_G)$ tulotopologiaa $\mathcal{T}^{k,\ell}_G$. Tällöin lauseen 2.6.12 kohdan $(iii)$ nojalla $\mathcal{T}^{k,\ell}_G \subseteq \mathcal{T}^{k+\ell}_G$.

Topologialla $\mathcal{T}^n_G$ on numeroituva kanta, koska $\Sigma^1_1(\mathcal{N}^n)$-joukkoja on numeroituva määrä. Lisäksi Gandy-topologia $\mathcal{T}^1_G$ hienontaa Bairen avaruuden standarditopologiaa, sillä standardikannan joukot $\{N_\sigma\}_{\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}}$ ovat efektiivisesti avoimia ja erityisesti efektiivisesti analyyttisiä.

**Lause 4.1.1.** *Topologialle $\mathcal{T}^1_G$ pätee Bairen kategoriaehto.*

*Todistus.* Todistetaan lauseen 3.1.10 ehto (3): tiheiden avointen joukkojen numeroituva leikkaus on tiheä. Olkoot joukot $G_i \subseteq \mathcal{N}$ $\mathcal{T}^1_G$-avoimia ja tiheitä kaikilla $i \in \mathbb{N}^*$ ja olkoon $U \in \Sigma^1_1(\mathcal{N})$ epätyhjä. Osoitetaan $U \cap (\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} G_i) \neq \emptyset$, jolloin $\bigcap_i G_i$ on tiheä.
Konstruoidaan jokaista lukua $n \in \mathbb{N}$ kohden rekursiivinen puu $T_n \subseteq {}^{<\omega}\mathbb{N} \times {}^{<\omega}\mathbb{N}$, jono $\sigma_n \in {}^n\mathbb{N}$ ja jonot $\tau^i_n \in {}^n\mathbb{N}$, kaikilla $0 \leq i \leq n$ niin, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$0 \leq i \leq n$

(1) $\sigma_i \subseteq \sigma_n$,
(2) $\tau_i^i \subseteq \tau_{i+1}^i \subseteq \ldots \subseteq \tau_n^i$,
(3) $(\sigma_n, \tau_n^i) \in T_i$,
(4) $\{\alpha \in \mathcal{N} : \alpha \supset \sigma_n \wedge \exists \beta \supset \tau_n^i((\alpha, \beta) \in [T_i])\} \subseteq G_i$, jos $i > 0$,
(5) $\bigcap_{i=0}^{n} \{\alpha \in \mathcal{N} : \alpha \supset \sigma_n \wedge \exists \beta \supset \tau_n^i((\alpha, \beta) \in [T_i])\} \neq \emptyset$.

Konstruktio etenee rekursiivisesti luvun $n \in \mathbb{N}$ suhteen.
Asetetaan $\sigma_0 = \tau_0^0 = \emptyset$ ja $T_0$ rekursiiviseksi puuksi, jolla $U = \exists^{\mathcal{N}}[T_0]$. Selvästi ehdot 1-5 ovat voimassa, kun $n = 0$.

Olkoon $m \geq 0$ ja oletetaan, että $T_n$, $\sigma_n$ ja $\tau_n^i$ ovat määriteltyjä ja toteuttavat ehdot 1-5, kun $0 \leq i \leq n \leq m$.

Merkitään

$$C = \bigcap_{i=0}^{m} \{\alpha \in \mathcal{N} : \alpha \supset \sigma_m \wedge \exists \beta \supset \tau_m^i((\alpha, \beta) \in [T_i])\}.$$

Ehdon (5) nojalla $C$ on epätyhjä. Lisäksi $C$ on äärellinen leikkaus muotoa $\Sigma_1^0 \wedge \exists^{\mathcal{N}}(\Pi_1^0 \wedge \Sigma_1^0) \subseteq \Sigma_1^1$ olevista joukoista, joten $C$ on $\Sigma_1^1$. Koska $G_{m+1}$ on tiheä ja $C$ avoin ja epätyhjä, niin $C \cap G_{m+1} \neq \emptyset$. Koska $G_{m+1}$ on avoin, on olemassa sellainen $\Sigma_1^1$-joukko $A \subseteq G_{m+1}$, että $C \cap A \neq \emptyset$. Olkoon $\gamma \in C \cap A$. Olkoon $T_{m+1}$ rekursiivinen puu, jolla $A = \exists^{\mathcal{N}}[T_{m+1}]$. Koska $\gamma \in C$, on olemassa sellaiset $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$, että $(\gamma, \beta_i) \in [T_i]$ ja $\beta_i \supset \tau_m^i$ kaikilla $i \leq m$. Koska lisäksi $\gamma \in A$, on olemassa $\beta_{m+1}$, jolla $(\gamma, \beta_{m+1}) \in [T_{m+1}]$.

Asetetaan

$$\begin{aligned} \sigma_{m+1} &= \gamma \restriction (m+1), \\ \tau_{m+1}^i &= \beta_i \restriction (m+1), \text{ kaikilla } i \leq m+1 \end{aligned}$$

ja tarkistetaan ehtojen 1-5 voimassaolo, kun $n = m + 1$.

Koska $\gamma \in C$, niin $\gamma \supset \sigma_m$ ja $\sigma_{m+1} = \gamma \restriction (m+1) \supset \gamma \restriction m = \sigma_m$ eli ehto (1) on voimassa.
Koska $\beta_i \supset \tau_m^i$, niin $\tau_{m+1}^i = \beta_i \restriction (m+1) \supset \beta_i \restriction m = \tau_m^i$, kun $i \leq m$, joten ehto (2) on voimassa.
Kun $0 \leq i \leq m+1$, niin $(\gamma, \beta_i) \in [T_i]$, joten $(\sigma_{m+1}, \tau_{m+1}^i) \in T_i$ ja

$$\gamma \in \bigcap_{i=0}^{m+1} \{\alpha \in \mathcal{N} : \alpha \supset \sigma_{m+1} \wedge \exists \beta \supset \tau_{m+1}^i((\alpha, \beta) \in [T_i])\}$$

eli ehdot (3) ja (5) ovat voimassa.
Kun $0 < i \leq m$, niin

$$\begin{aligned} \{\alpha \in \mathcal{N} : \alpha \supset \sigma_{m+1} \wedge \exists \beta \supset \tau_{m+1}^i((\alpha, \beta) \in [T_i])\} \\ \subseteq \{\alpha \in \mathcal{N} : \alpha \supset \sigma_m \wedge \exists \beta \supset \tau_m^i((\alpha, \beta) \in [T_i])\} \subseteq G_i, \end{aligned}$$

induktio-oletuksen nojalla. Kun $i = m + 1$, niin

$$\begin{aligned}\{\alpha \in \mathcal{N} : \alpha \supset \sigma_{m+1} \wedge \exists \beta \supset \tau^{m+1}_{m+1}((\alpha, \beta) \in [T_{m+1}])\} \\ \subseteq \{\alpha \in \mathcal{N} : \exists \beta((\alpha, \beta) \in [T_{m+1}])\} = A \subseteq G_{m+1}.\end{aligned}$$

Siis myös ehto (4) on voimassa ja konstruktio valmis.

Olkoot

$$\begin{aligned}\alpha &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n \text{ ja} \\ \beta^i &= \bigcup_{n \geq i} \tau^i_n, \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Ehdon (1) nojalla $\alpha \in \mathcal{N}$ ja ehdon (2) nojalla $\beta^i \in \mathcal{N}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Koska ehdon (3) nojalla $(\sigma_n, \tau^i_n) \in T_i$ kaikilla $n \geq i$, niin $(\alpha, \beta^i) \in [T_i]$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Erityisesti $(\alpha, \beta^0) \in [T_0]$, joten $\alpha \in \exists^{\mathcal{N}}[T_0] = U$. Lisäksi ehdon (4) nojalla $\alpha \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} G_i$. Siis $\alpha \in U \cap (\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} G_i)$, joten $U \cap (\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} G_i)$ on epätyhjä ja $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} G_i$ tiheä. $\square$

**Lemma 4.1.2.** *Avaruudet $(\mathcal{N}, \mathcal{T}^1_G)$ ja $(\mathcal{N}^n, \mathcal{T}^n_G)$ ovat homeomorfiset, kun $n \geq 1$.*

*Todistus.* Olkoon $n \geq 1$ ja $h : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^n$ kuvaus, joka määräytyy ehdolla

$$h_i(\alpha) = (a_i, a_{i+n}, a_{i+2n}, \ldots) \text{ kaikilla } 0 \leq i < n, \text{ kun } \alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots).$$

Selvästi $h$ on bijektio. Osoitetaan, että $h$ ja $h^{-1}$ ovat rekursiivisia. Kiinnitetään $i < n$. Olkoon $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in \mathcal{N}$ ja $\sigma = (s_0, s_1, \ldots, s_{|\sigma|-1}) \in {}^{<\omega}\mathbb{N}$. Tällöin

$$h_i(\alpha) \in N_\sigma \iff (a_i = s_0 \wedge a_{i+n} = s_1 \wedge \ldots \wedge a_{i+(|\sigma|-1)n} = s_{|\sigma|-1}).$$

Määritellään kuvaus $f : \mathbb{N}^2 \to {}^{<\omega}\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ seuraavalla algoritmilla

$$\begin{aligned}(m, \lfloor\sigma\rfloor) &\mapsto (\tau := \lceil m \rceil^{(|\sigma|-1)n+i+1}, \sigma) \\ &\mapsto (\tau, \sigma), \text{ missä on korvattu } \tau(i + nk) := \sigma(k), \text{ kun } 0 \leq k \leq |\sigma| - 1 \\ &\mapsto (\tau, \lfloor\sigma\rfloor).\end{aligned}$$

Tällöin $f$ on rekursiivinen funktio ja

$$h_i(\alpha) \in N_\sigma \iff (\alpha, \lfloor\sigma\rfloor) \in \bigcup_{(m,k)} N_{f(m,k)}.$$

Siis projektiokuvaukset $h_i$ ovat rekursiivisia, joten myös $h$ on rekursiivinen.

Tarkastellaan kuvausta $h^{-1}$ :

$$\begin{aligned}h^{-1}(\alpha^0, \ldots, \alpha^{n-1}) \in N_\sigma \iff\ & a^k_i = s_{k+in}, \text{ kaikilla } k \text{ ja } i, \text{ joilla} \\ & 0 \leq k \leq n-1 \text{ ja } k + in < |\sigma|.\end{aligned}$$

Määritellään kuvaus $g : \mathbb{N} \to ({}^{<\omega}\mathbb{N})^n \times \mathbb{N}$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} \lfloor\sigma\rfloor &\mapsto (\tau^0, \dots, \tau^{n-1}, \sigma), \text{ missä } \tau^k(i) = \sigma(k+in), \text{ kun } k+in < |\sigma|. \\ &\mapsto (\tau^0, \dots, \tau^{n-1}, \lfloor\sigma\rfloor). \end{aligned}$$

Tällöin $g$ on rekursiivinen funktio ja

$$h^{-1}(\alpha^0, \dots, \alpha^{n-1}) \in N_\sigma \iff (\alpha^0, \dots, \alpha^{n-1}, \lfloor\sigma\rfloor) \in \bigcup_m N_{g(m)}.$$

Siis $h^{-1}$ on rekursiivinen.

Koska $h$ ja $h^{-1}$ ovat rekursiivisia bijektioita, niin $\Sigma^1_1$-joukot (eli kantajoukot) kuvautuvat toisilleen ja $h$ on homeomorfismi avaruuksien $(\mathcal{N}, \mathcal{T}^1_G)$ ja $(\mathcal{N}^n, \mathcal{T}^n_G)$ välillä. □

Todistuksesta seuraa, että $h$ on samalla homeomorfismi avaruuksien $\mathcal{N}$ ja $\mathcal{N}^n$ standarditopologioiden välillä, koska rekursiiviset kuvaukset ovat jatkuvia standarditopologioiden suhteen.

**Lause 4.1.3.** *Topologioille $\mathcal{T}^n_G$ ja $\mathcal{T}^{k,\ell}_G$ pätee Bairen kategoriaehto, kun $n, k, \ell \in \mathbb{N}^*$.*

*Todistus.* Lauseen 4.1.1 mukaan topologialle $\mathcal{T}^1_G$ pätee kategoriehto ja lemman 4.1.2 nojalla $\mathcal{T}^n_G \approx \mathcal{T}^1_G$. Siis kategoriaehto pätee myös topologialle $\mathcal{T}^n_G$.

Koska $\mathcal{T}^k_G$ ja $\mathcal{T}^\ell_G$ toteuttavat kategoriaehdon ja niillä on numeroituvat kannat, niin lauseen 3.1.12 nojalla kategoriaehto pätee myös tulotopologialle $\mathcal{T}^{k,\ell}_G$. □

**Lemma 4.1.4.** *Jos $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{N}^2)$, niin $A$:lla on Bairen ominaisuus topologiassa $\mathcal{T}^{1,1}_G$.*

*Todistus.* Olkoon $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{N}^2)$ ja olkoon $\{F_\sigma\}_{\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}}$ lauseen 2.3.5 mukainen perhe avaruuden $\mathcal{N}^2$ suljettuja joukkoja, joilla $A = \mathcal{A}(\{F_\sigma\})$. Koska $\mathcal{T}^{1,1}_G$ hienontaa avaruuden $\mathcal{N}^2$ standarditopologiaa, joukot $F_\sigma$ ovat suljettuja myös topologiassa $\mathcal{T}^{1,1}_G$ ja erityisesti niillä on Bairen ominaisuus topologiassa $\mathcal{T}^{1,1}_G$. Koska topologialla $\mathcal{T}^{1,1}_G$ on numeroituva kanta, lauseen 3.2.5 mukaan joukolla $A = \mathcal{A}(\{F_\sigma\})$ on Bairen ominaisuus topologiassa $\mathcal{T}^{1,1}_G$. □

Jatkoa varten tarvitaan vielä seuraava Gandy-topologioita koskeva lemma.

**Lemma 4.1.5.** *Jos $A \subseteq \mathcal{N}^2$ on $\mathcal{T}^{1,1}_G$-harva, niin*

$$A^* = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{N}^3 : (\alpha, \gamma) \in A\}$$

*on $\mathcal{T}^{2,1}_G$-harva.*

*Todistus.* Olkoot $B^* \in \Sigma^1_1(\mathcal{N}^2)$ ja $C^* \in \Sigma^1_1(\mathcal{N})$ epätyhjiä. Osoitetaan $B^* \times C^* \not\subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{T}^{2,1}_G}(A^*)$. Tällöin joukko $A^*$ on $\mathcal{T}^{2,1}_G$-harva.

Merkitään $B' = \exists^{\mathcal{N}} B^*$, jolloin $B'$ on epätyhjä $\Sigma^1_1(\mathcal{N})$-joukko. Koska $A$ on $\mathcal{T}^{1,1}_G$-harva, niin $B' \times C^* \not\subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{T}^{1,1}_G}(A)$ ja on olemassa epätyhjät $\Sigma^1_1(\mathcal{N})$-joukot $B \subseteq B'$ ja $C \subseteq C^*$, joilla $(B \times C) \cap A = \emptyset$.

Merkitään $B_1 = \{(\alpha,\beta) \in B^* : \alpha \in B\}$. Koska $B \subseteq B' = \exists^{\mathcal{N}} B^*$, niin $B_1$ on epätyhjä. Koska projektiokuvaus on rekursiivinen, niin $\mathrm{pr}_0^{-1}(B) \in \Sigma^1_1(\mathcal{N}^2)$. Siispä $B_1 = B^* \cap \mathrm{pr}_0^{-1}(B)$ on epätyhjä $\Sigma^1_1(\mathcal{N}^2)$-joukko.

Jos $(\alpha,\beta,\gamma) \in (B_1 \times C)$, niin $\alpha \in B$ ja $\gamma \in C$, joten $(\alpha,\gamma) \notin A$ ja $(\alpha,\beta,\gamma) \notin A^*$. Siis avoin ja epätyhjä joukko $B_1 \times C$ ei kohtaa joukkoa $A^*$ eli $B_1 \times C$ ei sisällä joukon $A^*$ kosketuspisteitä, joten $(B_1 \times C) \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_G^{2,1}}(A^*) = \emptyset$. Koska $B_1 \times C \subseteq B^* \times C^*$, niin erityisesti $B^* \times C^* \not\subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_G^{2,1}}(A^*)$. □

Gandy-topologia voidaan luonnollisella tavalla relativoida alkioon $\alpha \in \mathcal{N}$, jolloin topologian kanta muodostuu avaruuden $\Sigma^1_1(\alpha)$-joukoista ja kaikki tässä luvussa todistetut tulokset pätevät myös relativoiduille Gandy-topologioille.

## 4.2 Silverin lause

Tässä alaluvussa todistetaan Silverin lause:

**Lause 4.2.1.** *(Silver). Olkoon $X$ puolalainen avaruus, $E \in \mathbf{\Pi}^1_1(X \times X)$ ekvivalenssirelaatio ja $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$. Jos $A/E$ on ylinumeroituva, niin on olemassa avaruuden $X$ epätyhjä perfekti joukko $P \subseteq A$, jonka alkiot kuuluvat keskenään eri ekvivalenssiluokkiin ekvivalenssirelaatiossa $E$. Erityisesti $|A/E| \leq \aleph_0$ tai $|A/E| = 2^{\aleph_0}$.*

*Todistus.* Koska Borel-isomorfismi kuvaa $\mathbf{\Pi}^1_1$ ekvivalenssirelaation $\mathbf{\Pi}^1_1$ ekvivalenssirelaatioksi, $\mathbf{\Sigma}^1_1$-joukon $\mathbf{\Sigma}^1_1$-joukoksi ja epätyhjän perfektin joukon kuva sisältää epätyhjän perfektin joukon (lause 2.2.12), niin Borel-isomorfian nojalla riittää todistaa väite avaruudelle $\mathcal{N}$.

Olkoon siis $E \in \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{N}^2)$ ekvivalenssirelaatio, $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{N})$ ja oletetaan, että $A/E$ on ylinumeroituva. Osoitetaan, että on olemassa avaruuden $\mathcal{N}$ epätyhjä perfekti $P \subseteq A$, jonka alkiot kuuluvat keskenään eri ekvivalenssiluokkiin ekvivalenssirelaatiossa $E$.
Lauseesta 2.6.6 seuraa, että on olemassa $\alpha^0, \alpha^1 \in \mathcal{N}$, joilla $E \in \Pi^1_1(\alpha^0)$ ja $A \in \Sigma^1_1(\alpha^1)$. Jos $\alpha^0 = (a^0_i)_{i<\omega}$, $\alpha^1 = (a^1_i)_{i<\omega}$ ja $\alpha = (a^0_0, a^1_0, a^0_1, a^1_1, \ldots)$, niin $E \in \Pi^1_1(\alpha)$ ja $A \in \Sigma^1_1(\alpha)$. Siis voidaan merkintöjen yksinkertaistamiseksi olettaa $E \in \Pi^1_1$ ja $A \in \Sigma^1_1$.

Olkoon
$$W = \bigcup\{U \in \Sigma^1_1(\mathcal{N}) : \exists\alpha(U \subseteq [\alpha]_E)\}$$
ja $V = A \cap (\mathcal{N} \setminus W)$.

**Lemma 4.2.2.** *$V$ on epätyhjä $\Sigma^1_1$-joukko.*

*Todistus.* Koska $\Sigma^1_1(\mathcal{N})$-joukkoja on numeroituva määrä ja $A/E$ on ylinumeroituva, on olemassa $\alpha \in A$, jolla mikään epätyhjä $\Sigma^1_1$-joukko ei sisälly joukkoon $[\alpha]_E$ ja tällöin $\alpha \in V$ eli $V$ on epätyhjä.

Osoitetaan $W \in \Pi^1_1$. Voidaan olettaa $W \neq \emptyset$, sillä $\emptyset \in \Pi^1_1$. Näytetään, että joukon $W$ määritelmässä voidaan $\Sigma^1_1$ korvata $\Delta^1_1$:llä. Olkoon tätä varten $\alpha \in \mathcal{N}$,

$U \in \Sigma^1_1(\mathcal{N}) \setminus \{\emptyset\}$ ja $U \subseteq [\alpha]_E$. Tällöin kaikilla $\beta \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} \beta \in [\alpha]_E &\iff \forall\gamma(U(\gamma) \to \beta E \gamma) \\ &\iff \forall\gamma(\neg U(\gamma) \vee \beta E \gamma), \end{aligned}$$

joten $[\alpha]_E$ on $\forall^{\mathcal{N}}(\neg\Sigma^1_1 \vee \Pi^1_1) \subseteq \forall^{\mathcal{N}}(\Pi^1_1 \vee \Pi^1_1) \subseteq \Pi^1_1$. Separaatiolauseen (lause 2.7.11) mukaan on olemassa $\Delta^1_1$-joukko $D$, jolla $U \subseteq D$ ja $D \cap (\mathcal{N} \setminus [\alpha]_E) = \emptyset$. Siis $U \subseteq D \subseteq [\alpha]_E$. Tämä osoittaa

$$\begin{aligned} W &= \bigcup\{U \in \Sigma^1_1(\mathcal{N}) : \exists\alpha(U \subseteq [\alpha]_E)\} \\ &= \bigcup\{D \in \Delta^1_1(\mathcal{N}) : \exists\alpha(D \subseteq [\alpha]_E)\}. \end{aligned}$$

Olkoon $Q \in \Pi^1_1(\mathbb{N} \times \mathcal{N})$ avaruuden $\mathcal{N}$ $\Pi^1_1$-universaali joukko (lause 2.6.16). Määritellään $Q$:n "kopiot"$Q^0 \subseteq (\mathbb{N} \times \mathcal{N})$ ja $Q^1 \subseteq (\mathbb{N} \times \mathcal{N})$ ehdoilla

$$\begin{aligned} Q^0(n,\alpha) &\iff Q(\lceil n \rceil^2_0, \alpha) \\ Q^1(n,\alpha) &\iff Q(\lceil n \rceil^2_1, \alpha). \end{aligned}$$

$Q^0$ ja $Q^1$ ovat $\Pi^1_1$-joukojen rekursiivisina alkukuvina $\Pi^1_1$-joukkoja.

Merkitsemällä joukon sektiota $Q^i_n = \{\alpha : Q^i(n,\alpha)\}$ määritellään $D \subseteq \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} D(n) &\iff Q^0_n \cup Q^1_n = \mathcal{N} \\ &\iff \forall\gamma[Q^0(n,\gamma) \vee Q^1(n,\gamma)]. \end{aligned}$$

Jälkimmäisen ehdon perusteella $D \in \forall^{\mathcal{N}}(\Pi^1_1 \vee \Pi^1_1) \subseteq \Pi^1_1$.

Olkoot $R^0 \subseteq Q^0$ ja $R^1 \subseteq Q^1$ reduktiolauseen (lause 2.7.11) mukaisia $\Pi^1_1$-joukkoja, joilla $R^0 \cap R^1 = \emptyset$ ja $R^0 \cup R^1 = Q^0 \cup Q^1$. Tällöin

$$D(n) \iff Q^0_n \cup Q^1_n = \mathcal{N} \iff R^0_n \cup R^1_n = \mathcal{N}$$

ja koska sektiot $R^i_n = (\alpha \mapsto (n,\alpha))^{-1}[R^i]$ ovat $\Pi^1_1$-joukkoja, niin

$$\begin{aligned} C \in \Delta^1_1(\mathcal{N}) &\iff \exists n \exists m(C = Q_n \wedge (\mathcal{N} \setminus C) = Q_m) \\ &\iff \exists n(C = Q^0_n \wedge (\mathcal{N} \setminus C) = Q^1_n) \\ &\iff \exists n(C = R^0_n \wedge (\mathcal{N} \setminus C) = R^1_n) \\ &\iff \exists n(D(n) \wedge C = R^0_n). \end{aligned}$$

Kaikilla $\alpha \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} W(\alpha) &\iff \alpha \in \bigcup\{C \in \Delta^1_1(\mathcal{N}) : \exists\gamma(C \subseteq [\gamma]_E)\} \\ &\iff \text{on olemassa } C \in \Delta^1_1, \text{ jolla } (C(\alpha) \wedge \forall\gamma\forall\beta((C(\gamma) \wedge C(\beta)) \to \gamma E \beta)) \\ &\iff \exists n[D(n) \wedge R^0_n(\alpha) \wedge \forall\gamma\forall\beta((R^0_n(\gamma) \wedge R^0_n(\beta)) \to \gamma E \beta)] \\ &\iff \exists n[D(n) \wedge R^0_n(\alpha) \wedge \forall\gamma\forall\beta(\neg R^0_n(\gamma) \vee \neg R^0_n(\beta) \vee \gamma E \beta)] \\ &\iff \exists n[D(n) \wedge R^0_n(\alpha) \wedge \forall\gamma\forall\beta(R^1_n(\gamma) \vee R^1_n(\beta) \vee \gamma E \beta)], \end{aligned}$$

joten

$$W \in \exists^{\mathbb{N}}[\Pi^1_1 \wedge \Pi^1_1 \wedge \forall^{\mathcal{N}}(\Pi^1_1 \vee \Pi^1_1 \vee \Pi^1_1)] \subseteq \Pi^1_1$$

ja

$$V = A \cap (\mathcal{N} \setminus W) \in \Sigma^1_1 \wedge \Sigma^1_1 \subseteq \Sigma^1_1. \qquad \diamond$$

**Lemma 4.2.3.** *$E \cap (V \times V)$ on laiha topologiassa $\mathcal{T}^{1,1}_G$.*

*Todistus.* Todistuksen tarkastelut tehdään topologian $\mathcal{T}^{1,1}_G$ suhteen. Tehdään vastaoletus: $E \cap (V \times V)$ ei ole laiha. Avoimella joukolla $V \times V$ on Bairen ominaisuus ja lemman 4.1.4 nojalla $\Sigma^1_1(\mathcal{N}^2)$-joukolla $(\mathcal{N}^2 \setminus E)$ on Bairen ominaisuus. Tällöin myös joukoilla $E$ ja $E \cap (V \times V)$ on Bairen ominaisuus. Siis on olemassa avoin $G$, jolla $(E \cap (V \times V))\Delta G$ on laiha. Koska $E \cap (V \times V)$ ei ole laiha mutta $(E \cap (V \times V)) \setminus G$ on laiha, niin $G$ on epätyhjä ja koska $G \setminus (E \cap (V \times V))$ on laiha, on olemassa epätyhjät $\Sigma^1_1(\mathcal{N})$-joukot $B'$ ja $C'$, joilla $(B' \times C') \setminus (E \cap (V \times V))$ on laiha.

Olkoon $B = B' \cap V$ ja $C = C' \cap V$. Tällöin $B$ ja $C$ ovat $\Sigma^1_1(\mathcal{N})$-joukkoja. Lisäksi $B$ ja $C$ ovat epätyhjiä, sillä muutoin $(B' \times C') = (B' \times C') \setminus (E \cap (V \times V))$ on laiha vastoin Bairen kategoriaehtoa topologialle $\mathcal{T}^{1,1}_G$.

$$\begin{aligned}
(B \times C) \setminus E &= (B \times C) \setminus (E \cap (B \times C)) \\
&= (B \times C) \setminus (E \cap (V \times V) \cap (B' \times C')) \\
&\subseteq (B' \times C') \setminus (E \cap (V \times V)) \in \mathbf{M}(\mathcal{T}^{1,1}_G),
\end{aligned}$$

joten $(B \times C) \setminus E$ on laiha.

Olkoon $B^* = \{(\alpha_0, \alpha_1) \in B \times B : \alpha_0 \not\!E \alpha_1\}$. Joukot $(B \times B)$ ja $(\mathcal{N}^2 \setminus E)$ kuuluvat perheeseen $\Sigma^1_1(\mathcal{N}^2)$, joten myös $B^* = (B \times B) \cap (\mathcal{N}^2 \setminus E) \in \Sigma^1_1(\mathcal{N}^2)$. Koska $B \subseteq V$, niin $V$:n määritelmän perusteella $B \not\subseteq [\alpha]_E$ kaikilla $\alpha \in \mathcal{N}$, joten $B^*$ on epätyhjä.

Olkoon $D_i = \{(\alpha_0, \alpha_1, \gamma) : (\alpha_0, \alpha_1) \in B^* \wedge \gamma \in C \wedge \alpha_i \not\!E \gamma\}$, kun $i \in \{0, 1\}$. Osoitetaan, että $D_i$ on $\mathcal{T}^{2,1}_G$-laiha. Edellä on todettu, että $(B \times C) \setminus E$ on laiha. Olkoon $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ perhe $\mathcal{T}^{1,1}_G$-harvoja joukkoja, joilla $(B \times C) \setminus E = \bigcup_n H_n$. Lemman 4.1.5 nojalla joukot

$$H^i_n = \{(\alpha_0, \alpha_1, \gamma) : \alpha_{(1-i)} \in B \wedge (\alpha_i, \gamma) \in H_n\}$$

ovat $\mathcal{T}^{2,1}_G$-harvoja kaikilla $i \in \{0, 1\}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $i \in \{0, 1\}$.

$$\begin{aligned}
(\alpha_0, \alpha_1, \gamma) \in D_i &\implies (\alpha_0, \alpha_1) \in B^* \wedge \gamma \in C \wedge \alpha_i \not\!E \gamma \\
&\implies (\alpha_0, \alpha_1) \in B^2 \wedge \gamma \in C \wedge \alpha_i \not\!E \gamma \\
&\implies \alpha_{(1-i)} \in B \wedge (\alpha_i, \gamma) \in (B \times C) \setminus E \\
&\implies \exists n(\alpha_{(1-i)} \in B \wedge (\alpha_i, \gamma) \in H_n) \\
&\implies \exists n((\alpha_0, \alpha_1, \gamma) \in H^i_n).
\end{aligned}$$

Siis $D_i \subseteq \bigcup_n H^i_n$, joten $D_i$ on $\mathcal{T}^{2,1}_G$-laiha, kun $i \in \{0, 1\}$.

Lauseen 4.1.3 mukaan topologialle $\mathcal{T}^{2,1}_G$ pätee Bairen kategoriaehto, joten epätyhjä $\mathcal{T}^{2,1}_G$-avoin joukko $(B^* \times C)$ ei ole laiha. Koska $\mathcal{T}^{2,1}_G$-laiha joukko

$(D_0 \cup D_1)$ sisältyy joukkoon $(B^* \times C)$, niin $(B^* \times C) \setminus (D_0 \cup D_1)$ on epätyhjä. Olkoon $(\alpha_0, \alpha_1, \gamma) \in (B^* \times C) \setminus (D_0 \cup D_1)$. Tällöin $\alpha_0 \not E \alpha_1$ ja $\alpha_0 E \gamma$ sekä $\alpha_1 E \gamma$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että ekvivalenssirelaatio $E$ on sekä symmetrinen että transitiivinen. Ristiriita osoittaa, että $E \cap (V \times V)$ on laiha topologiassa $\mathcal{T}_G^{1,1}$. $\diamond$

Perfektin joukon $P$ konstruoimista varten määritellään joukkoon ${}^{<\omega}2$ lineaarijärjestys $\lessdot$.

**Määritelmä 4.2.4.** *Olkoon* $m, n \in \mathbb{N}$ *ja*

$$\begin{aligned} \sigma &= (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) \in {}^{<\omega}2, \\ \tau &= (t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}) \in {}^{<\omega}2. \end{aligned}$$

*Määritellään*

$$\sigma \lessdot \tau \iff (n < m) \vee [(n = m) \wedge \exists i < n(\forall j < i(s_j = t_j) \wedge s_i < t_i)].$$

*Merkitään* $\ell_\sigma = Card(\{\tau \in {}^{<\omega}2 : |\tau| = |\sigma| \wedge \tau \lessdot \sigma\})$, *kun* $\sigma \in {}^{<\omega}2$.

Luku $\ell_\sigma$ siis kertoo jonon $\sigma$ samanpituisten edeltäjien lukumäärän, $0 \leq \ell_\sigma \leq 2^{|\sigma|} - 1$.

Nyt voidaan viimeistellä Silverin lauseen todistus. Olkoon $(G_i)_{0<i<\omega}$ lemman 3.1.14 mukainen laskeva jono $\mathcal{T}_G^{1,1}$-avoimia joukkoja, jotka ovat $\mathcal{T}_G^{1,1}$-tiheitä joukossa $(V \times V)$ ja joilla $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} G_i \subseteq (V \times V) \setminus E$.

Määritellään jokaista jonoa $\sigma \in {}^{<\omega}2$ kohden $U_\sigma \subseteq V$ niin, että seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa kaikilla $\sigma, \tau \in {}^{<\omega}2$ ja $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned} &(1) \quad U_\sigma \neq \emptyset \wedge U_\sigma \in \Sigma_1^1(\mathcal{N}), \\ &(2) \quad \tau \subseteq \sigma \Longrightarrow U_\sigma \subseteq U_\tau, \\ &(3) \quad (|\sigma| = |\tau| = n \wedge \sigma \lessdot \tau) \Longrightarrow (U_\sigma \times U_\tau) \subseteq G_n. \end{aligned}$$

Lisäksi halutaan varmistaa, että $\bigcap_n U_{\gamma \restriction n}$ on epätyhjä kaikilla $\gamma \in {}^{\omega}2$. Tätä varten määritellään kaikilla jonoilla $\sigma \in {}^{<\omega}2$ ja $\tau \subseteq \sigma$ jonot $\mu_\sigma \in {}^{|\sigma|}\mathbb{N}$ ja $\eta_\sigma^\tau \in {}^{|\sigma|}\mathbb{N}$ sekä rekursiivinen puu $T_\sigma \subseteq ({}^{<\omega}\mathbb{N} \times {}^{<\omega}\mathbb{N})$ siten, että seuraavat neljä ehtoa ovat voimassa kaikilla $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \tau \in {}^{<\omega}2$:

$$\begin{aligned} &(i) \quad \sigma \subseteq \tau \Longrightarrow \mu_\sigma \subseteq \mu_\tau, \\ &(ii) \quad (\tau \subseteq \sigma_1 \subseteq \sigma_2) \Longrightarrow \eta_{\sigma_1}^\tau \subseteq \eta_{\sigma_2}^\tau, \\ &(iii) \quad U_\sigma = \exists^{\mathcal{N}}[T_\sigma], \\ &(iv) \quad \bigcap_{\tau \subseteq \sigma} \{\alpha \in \mathcal{N} : \alpha \supset \mu_\sigma \wedge \exists \beta \supset \eta_\sigma^\tau((\alpha, \beta) \in [T_\tau])\} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Kun $\sigma \in {}^{<\omega}2$, merkitään

$$C_\sigma = \bigcap_{\tau \subseteq \sigma} \{\alpha \in \mathcal{N} : \alpha \supset \mu_\sigma \wedge \exists \beta \supset \eta_\sigma^\tau((\alpha, \beta) \in [T_\tau])\}.$$

Ehdon $(iv)$ nojalla $C_\sigma$ on epätyhjä ja määritelmänsä perusteella $\Sigma^1_1$-joukko.

Konstruktio etenee rekursiivisesti jonon $\sigma$ pituuden suhteen. Asetetaan $U_\emptyset = V, \mu_\emptyset = \eta^\emptyset_\emptyset = \emptyset$ sekä $T_\emptyset$ rekursiiviseksi puuksi, jolla $\exists^\mathcal{N}[T_\emptyset] = V$. Selvästi ehdot 1-3 ja $i - iv$ pätevät, kun $\sigma = \emptyset$.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja oletetaan, että $U_\sigma, \mu_\sigma, \eta^\tau_\sigma$ ja $T_\sigma$ on määritelty kaikilla $\tau, \sigma \in {}^{<\omega}2$, joilla $\tau \subseteq \sigma$ ja $|\sigma| \leq n$ niin, että ehdot 1-3 ja $i - iv$ ovat voimassa.

Määritellään joukot $U_\sigma$, kun $|\sigma| = n+1$. Tätä varten konstruoidaan jokaista jonoa $\sigma \in {}^{n+1}2$ kohden $2^{n+1}$ epätyhjää $\Sigma^1_1(\mathcal{N})$-joukkoa

$$B^0_{\ell_\sigma} \supseteq B^1_{\ell_\sigma} \supseteq \ldots \supseteq B^{2^{n+1}-1}_{\ell_\sigma}$$

niin, että

$$B^m_k \times B^{k+1}_m \subseteq G_{n+1}$$

kaikilla $0 \leq k < m < 2^{n+1}$. Merkintä $\ell_\sigma$ liittyy määritelmään 4.2.4. Asetetaan kaikilla $\sigma \in {}^{n+1}2$ $B^0_{\ell_\sigma} = C_{\sigma\restriction n}$, joka on induktio-oletuksen mukaan epätyhjä $\Sigma^1_1$-joukko. Joukkojen $B^i_{\ell_\sigma}, 1 \leq i < 2^{n+1}$ määrittely tapahtuu pareittain seuraavassa järjestyksessä:

$$\begin{aligned}
&(B^1_0, B^1_1), (B^2_0, B^1_2), \ldots, (B^{2^{n+1}-1}_0, B^1_{2^{n+1}-1}),\\
&(B^2_1, B^2_2), (B^3_1, B^2_3), \ldots, (B^{2^{n+1}-1}_1, B^2_{2^{n+1}-1}),\\
&\;\vdots\\
&(B^{2^{n+1}-1}_{2^{n+1}-2}, B^{2^{n+1}-1}_{2^{n+1}-1}).
\end{aligned}$$

Määrittelyssä esiintyvät siis täsmälleen parit

$$(B^m_k, B^{k+1}_m), \text{ missä } 0 \leq k < m < 2^{n+1}$$

ja noudattamalla yllä annettua järjestystä joukko $B^j_k$ tulee määritellyksi ennen joukkoa $B^i_k$, jos $j < i$.

Oletetaan $k < m < 2^{n+1}$ ja että määritelyssä on edetty parin $(B^m_k, B^{k+1}_m)$ kohdalle. Erityisesti siis $B^{m-1}_k$ ja $B^k_m$ on määritelty epätyhjiksi $\Sigma^1_1$-joukoiksi. Tällöin

$$(B^{m-1}_k \times B^k_m) \subseteq (B^0_k \times B^0_m) = (C_{\sigma\restriction n} \times C_{\sigma\restriction n}) \subseteq V \times V$$

on $\mathcal{T}^{1,1}_G$-avoin ja epätyhjä. Koska $G_{n+1}$ on $\mathcal{T}^{1,1}_G$-avoin ja tiheä joukossa $V \times V$, on olemassa epätyhjät $\Sigma^1_1(\mathcal{N})$-joukot $D_1$ ja $D_2$, joilla $D_1 \times D_2 \subseteq G_{n+1}$ ja $(D_1 \times D_2) \cap (B^{m-1}_k \times B^k_m)$ on epätyhjä. Asetetaan

$$B^m_k = D_1 \cap B^{m-1}_k \text{ ja } B^{k+1}_m = D_2 \cap B^k_m.$$

Tällöin $B^m_k \subseteq B^{m-1}_k$ ja $B^{k+1}_m \subseteq B^k_m$ ovat epätyhjiä $\Sigma^1_1$-joukkoja ja

$$B^m_k \times B^{k+1}_m \subseteq D_1 \times D_2 \subseteq G_{n+1}.$$

Lopuksi asetetaan kaikilla $\sigma \in {}^{n+1}2$

$$U_\sigma = B^{2^{n+1}-1}_{\ell_\sigma}$$

ja tarkastetaan ehdot 1-3.

Yllä olevan konstruktion mukaan $U_\sigma = B_{\ell_\sigma}^{2^{n+1}-1}$ on epätyhjä $\Sigma_1^1$-joukko, joten ehto (1) on voimassa.
Oletetaan $|\sigma| = n+1$ ja $\tau \subset \sigma$. Tällöin

$$U_\sigma = B_{\ell_\sigma}^{2^{n+1}-1} \subseteq B_{\ell\sigma}^0 = C_{\sigma\restriction n} \subseteq U_{\sigma\restriction n} \subseteq U_\tau,$$

missä viimeinen inkluusio seuraa induktio-oletuksesta, jonka mukaan ehto (2) pätee jonoille, joiden pituus on korkeintaan $n$. Siis ehto (2) on voimassa.
Oletetaan $|\sigma| = |\tau| = n+1$ ja $\sigma \lessdot \tau$. Tällöin $\ell_\sigma < \ell_\tau$ ja

$$U_\sigma \times U_\tau = B_{\ell_\sigma}^{2^{n+1}-1} \times B_{\ell_\tau}^{2^{n+1}-1} \subseteq B_{\ell_\sigma}^{\ell_\tau} \times B_{\ell_\tau}^{\ell_\sigma+1} \subseteq G_{n+1}.$$

Siis ehto (3) on voimassa.

Siirrytään konstruoimaan jonoja $\mu_\sigma$ ja $\eta_\sigma^\tau$ sekä rekursiivisia puita $T_\sigma$. Olkoon $\sigma \in {}^{n+1}2$. Koska $U_\sigma$ on $\Sigma_1^1$-joukko, niin on olemassa rekursiivinen puu $T$, jolla $\exists^{\mathcal{N}}[T] = U_\sigma$. Asetetaan $T_\sigma = T$. Tällöin ehto $(iii)$ toteutuu. Olkoon $\alpha \in U_\sigma$. Tällöin $\alpha \in B_{\ell_\sigma}^0 = C_{\sigma\restriction n}$, joten $\mu_{\sigma\restriction n} \subset \alpha$ ja jokaisella $\tau \subseteq \sigma \restriction n$ on olemassa jono $\beta^\tau \in \mathcal{N}$, jolla $\eta_{\sigma\restriction n}^\tau \subset \beta^\tau$ ja $(\alpha, \beta^\tau) \in [T_\tau]$. Olkoon lisäksi $\beta^\sigma$ jono, jolla $(\alpha, \beta^\sigma) \in [T_\sigma]$. Asetetaan

$$\begin{aligned} \mu_\sigma &= \alpha \restriction (n+1), \text{ ja} \\ \eta_\sigma^\tau &= \beta^\tau \restriction (n+1), \text{ kaikilla } \tau \subseteq \sigma. \end{aligned}$$

Tällöin

$$\mu_\sigma = \alpha \restriction (n+1) \supset \alpha \restriction n = \mu_{\sigma\restriction n},$$

ja

$$\eta_\sigma^\tau = \beta^\tau \restriction (n+1) \supset \beta^\tau \restriction n = \eta_{\sigma\restriction n}^\tau \text{ kaikilla } \tau \subseteq \sigma \restriction n,$$

joten ehdot $(i)$ ja $(ii)$ ovat voimassa. Lisäksi koska $\alpha \supset \mu_\sigma, \beta^\tau \supset \eta_\sigma^\tau$ ja $(\alpha, \beta^\tau) \in [T_\tau]$ kaikilla $\tau \subseteq \sigma$, niin $\alpha \in C_\sigma$ ja myös ehto $(iv)$ on voimassa. Konstruktio on valmis.

Olkoon kaikilla $\gamma \in {}^\omega 2$

$$\alpha_\gamma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu_{\gamma\restriction n}$$

ja kaikilla $\tau \in {}^{<\omega}2$, joilla $\tau \subset \gamma$

$$\beta_\gamma^\tau = \bigcup_{n \geq |\tau|} \eta_{\gamma\restriction n}^\tau.$$

Ehtojen $(i)$ ja $(ii)$ nojalla $\alpha_\gamma \in \mathcal{N}$ ja $\beta_\gamma^\tau \in \mathcal{N}$. Osoitetaan $(\alpha_\gamma, \beta_\gamma^\tau) \in [T_\tau]$ kaikilla $\tau \in {}^{<\omega}2$. Vastaoletuksesta seuraa, että on olemassa $m \in \mathbb{N}$, jolla

$$(\alpha_\gamma \restriction m, \beta_\gamma^\tau \restriction m) \notin T_\tau.$$

Voidaan olettaa $m \geq |\tau|$, jolloin $(\mu_{\gamma\restriction m}, \eta_{\gamma\restriction m}^\tau) = (\alpha_\gamma \restriction m, \beta_\gamma^\tau \restriction m) \notin T_\tau$. Mutta ehdon $(iv)$ nojalla on olemassa jonot $\nu \supset \mu_{\gamma\restriction m}$ ja $\upsilon \supset \eta_{\gamma\restriction m}^\tau$, joilla $(\nu, \upsilon) \in [T_\tau]$ ja saadaan ristiriita. Siis $(\alpha_\gamma, \beta_\gamma^\tau) \in [T_\tau]$ eli $\alpha_\gamma \in \exists^{\mathcal{N}}[T_\tau] = U_\tau$ kaikilla $\tau \subset \gamma$.

Olkoon $P = \{\alpha_\gamma : \gamma \in {}^\omega 2\}$. Olkoon $\gamma, \nu \in {}^\omega 2$ eri alkioita. Osoitetaan $\alpha_\gamma \not\!E \alpha_\nu$. Olkoon $m \in \mathbb{N}$ sellainen luku, että $\gamma \restriction m \neq \nu \restriction m$. Oletetaan, että $\gamma \restriction m \lessdot \nu \restriction m$, jolloin $\gamma \restriction n \lessdot \nu \restriction n$, myös kaikilla $n > m$. Ehdon (3) nojalla $(U_{\gamma\restriction n} \times U_{\nu\restriction n}) \subseteq G_n$, kaikilla $n \geq m$ ja siten $(\alpha_\gamma, \alpha_\nu) \in (U_{\gamma\restriction n} \times U_{\nu\restriction n}) \subseteq G_n$, kaikilla $n \geq m$. Koska ketju $(G_i)_{0<i<\omega}$ on laskeva, niin $(\alpha_\gamma, \alpha_\nu) \in G_i$ kaikilla $i \geq 1$. Erityisesti

$$(\alpha_\gamma, \alpha_\nu) \in \bigcap_{i \geq 1} G_i \subseteq (V \times V \setminus E)$$

ja siis $\alpha_\gamma \not\!E \alpha_\nu$. On osoitettu $P \subseteq V \subseteq A$ ja $P$:n alkiot kuuluvat keskenään eri ekvivalenssiluokkiin ekvivalenssirelaatiossa $E$. Osoitetaan, että $P$ on perfekti avaruudessa $\mathcal{N}$. Olkoon $f : \mathcal{C} \to \mathcal{N}$ ehdolla $\gamma \mapsto \alpha_\gamma$ määrätty kuvaus. Jos $\gamma \neq \nu$, niin $\alpha_\gamma \not\!E \alpha_\nu$ ja erityisesti $\alpha_\gamma \neq \alpha_\nu$. Siis $f$ on injektio. Olkoon $\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}$. Tällöin

$$f^{-1}[N_\sigma] = \{\gamma \in \mathcal{C} : \alpha_\gamma \in N_\sigma\} = \{\gamma \in \mathcal{C} : \mu_{\gamma\restriction|\sigma|} = \sigma\}.$$

Jos $\gamma \in f^{-1}[N_\sigma]$, niin $N_{\gamma\restriction|\sigma|} \subseteq f^{-1}[N_\sigma]$, joten $f^{-1}[N_\sigma]$ on avoin ja $f$ jatkuva. Lauseen 2.1.13 nojalla $P = f[\mathcal{C}]$ on epätyhjä perfekti joukko avaruudessa $\mathcal{N}$. $\square$

Silverin lause antaa yksinkertaisen tavan todistaa perfektisyysdikotomia analyyttisille joukoille.

**Lause 4.2.5.** *Olkoon $X$ puolalainen avaruus ja $A \subseteq X$ analyyttinen. Tällöin $A$ on numeroituva tai $A$ sisältää avaruuden $X$ perfektin epätyhjän osajoukon.*

*Todistus.* Oletetaan, että $A$ on ylinumeroituva. Olkoon $E = \Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ identtisyysrelaatio. Lemman 2.3.2 nojalla $E$ on suljettu ja erityisesti koanalyyttinen avaruudessa $X^2$. Lisäksi $E$:n ekvivalenssiluokat ovat avaruuden $X$ yksiöt. Koska $|A/E| = |A| > \aleph_0$, niin Silverin lauseen mukaan on olemassa avaruuden $X$ perfekti epätyhjä $P \subseteq A$. $\square$

Silverin lause esitettiin relativoituna analyyttiseen joukkoon $A$. Lausetta ei yleisesti voi relativoida $\mathbf{\Pi}^1_1$-joukkoon. Jos esimerkiksi $E \subseteq \mathcal{N}^2$ määritellään ehdolla

$$\alpha E \beta \iff \alpha = \beta \vee (WF(\alpha) \wedge WF(\beta) \wedge \rho(\alpha) = \rho(\beta)),$$

niin lauseen 2.7.9 nojalla $E \in \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{N}^2)$ mutta $\Pi^1_1$-joukko $WF$ sisältää edustajia täsmälleen $\aleph_1$:stä eri ekvivalenssiluokasta.

## 4.3 Burgessin lause

**Lause 4.3.1.** *(Burgess). Olkoon $X$ puolalainen avaruus, $E \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X \times X)$ ekvivalenssirelaatio ja $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$. Tällöin $|A/E| \leq \aleph_1$ tai on olemassa avaruuden $X$ epätyhjä perfekti joukko $P \subseteq A$, jonka alkiot kuuluvat keskenään eri ekvivalenssiluokkiin ekvivalenssirelaatiossa $E$. Erityisesti $|A/E| \leq \aleph_1$ tai $|A/E| = 2^{\aleph_0}$.*

*Todistus.* Koska Borel-isomorfismi kuvaa $\mathbf{\Sigma}_1^1$-ekvivalenssirelaation $\mathbf{\Sigma}_1^1$-ekvivalenssirelaatioksi, $\mathbf{\Sigma}_1^1$-joukon $\mathbf{\Sigma}_1^1$-joukoksi ja epätyhjän perfektin joukon kuva sisältää epätyhjän perfektin joukon (lause 2.2.12), niin Borel-isomorfian nojalla riittää todistaa väite avaruudelle $\mathcal{N}$.

Olkoon $E \subseteq \mathcal{N}^2$ $\mathbf{\Sigma}_1^1$-ekvivalenssirelaatio ja $A \in \mathbf{\Sigma}_1^1(\mathcal{N})$. Lauseen 2.7.12 nojalla on olemassa jatkuva $f : \mathcal{N}^2 \to Tr$, jolla

$$\alpha E \beta \iff f(\alpha, \beta) \notin WF.$$

Merkitään kaikilla ordinaaleilla $\xi < \omega_1$

$$R_\xi = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{N}^2 : \rho(f(\alpha, \beta)) \geq \xi\}.$$

Koska

$$\mathcal{N}^2 \setminus R_\xi = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{N}^2 : \rho(f(\alpha, \beta)) < \xi\} = f^{-1}[WF_\xi]$$

on Borelin joukko (lause 2.8.1), myös $R_\xi$ on Borelin joukko. Lisäksi

$$\begin{aligned} R_\xi &\subseteq R_\delta, \text{ jos } \delta < \xi < \omega_1, \\ R_\xi &= \bigcap_{\delta < \xi} R_\delta, \text{kun } \xi < \omega_1 \text{ on rajaordinaali ja} \\ E &= \bigcap_{\xi < \omega_1} R_\xi. \end{aligned}$$

Olkoon $O = \{\xi < \omega_1 : R_\xi \text{ on ekvivalenssirelaatio}\}$.

**Lemma 4.3.2.** *$O$ on ordinaalin $\omega_1$ osajoukkona suljettu ja rajoittamaton.*

*Todistus.* Oletetaan, että $(\xi_i)_{i<\omega}$ on aidosti kasvava jono $O$:n alkioita ja olkoon $\xi = \sup\{\xi_i : i < \omega\}$. Koska $R_\xi = \bigcap_{i<\omega} R_{\xi_i}$ ja jokainen $R_{\xi_i}$ on refleksiivinen, myös $R_\xi$ on refleksiivinen. Lisäksi koska jokainen $R_{\xi_i}$ on symmetrinen,

$$\alpha R_\xi \beta \Longrightarrow \forall i(\alpha R_{\xi_i} \beta) \Longrightarrow \forall i(\beta R_{\xi_i} \alpha) \Longrightarrow \beta R_\xi \alpha$$

ja koska jokainen $R_{\xi_i}$ on transitiivinen,

$$(\alpha R_\xi \beta \wedge \beta R_\xi \gamma) \Longrightarrow \forall i(\alpha R_{\xi_i} \beta \wedge \beta R_{\xi_i} \gamma) \Longrightarrow \forall i(\alpha R_{\xi_i} \gamma) \Longrightarrow \alpha R_\xi \gamma,$$

joten myös $R_\xi$ on symmetrinen ja transitiivinen. Siis $R_\xi$ on ekvivalenssirelaatio ja $\xi \in O$. Tämä osoittaa joukon $O \subseteq \omega_1$ suljetuksi.

$O$:n rajoittamattomuuden osoittamiseksi todistetaan kaksi apuväitettä.

*Väite 1:* Kaikilla $\xi < \omega_1$ on olemassa sellainen $\delta < \omega_1$, että

$$\forall \alpha \forall \beta (\alpha \not\!R_\xi \beta \to \beta \not\!R_\delta \alpha).$$

Olkoon $\xi < \omega_1$ ja $B = \{f(\beta, \alpha) : \alpha \in \mathcal{N} \wedge \beta \in \mathcal{N} \wedge \alpha \not\!R_\xi \beta\}$. Koska $E \subseteq R_\xi$ on ekvivalenssirelaatio, kaikilla $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$

$$\alpha \not\!R_\xi \beta \Longrightarrow \alpha \not\!E \beta \Longrightarrow \beta \not\!E \alpha \Longrightarrow f(\beta, \alpha) \in WF,$$

eli $B \subseteq WF$. Lisäksi $B$ on Borelin joukon $\mathcal{N}^2 \setminus R_\xi$ kuva jatkuvassa kuvauksessa $f \circ (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_0)$, joten $B$ on $\mathbf{\Sigma}^1_1$-joukko ja $\mathbf{\Sigma}^1_1$-rajoittuvuuden (lause 2.8.2) nojalla on olemassa $\delta < \omega_1$, jolla $B \subseteq WF_\delta$. Tällöin kaikilla $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$

$$\alpha \not R_\xi \beta \Longrightarrow f(\beta, \alpha) \in WF_\delta \Longrightarrow \rho(f(\beta, \alpha)) < \delta \Longrightarrow \beta \not R_\delta \alpha. \qquad \diamond$$

*Väite 2:* Kaikilla $\xi < \omega_1$ on olemassa sellainen $\delta < \omega_1$, että

$$\forall \alpha \forall \beta \forall \gamma ((\alpha R_\xi \beta \wedge \beta R_\xi \gamma \wedge \alpha \not R_\xi \gamma) \to (\alpha \not R_\delta \beta \vee \beta \not R_\delta \gamma)).$$

Olkoon $\xi < \omega_1$ ja

$$\begin{aligned} C = \{T \in Tr : \exists \alpha \exists \beta \exists \gamma (\alpha R_\xi \beta \quad & \wedge \beta R_\xi \gamma \wedge \alpha \not R_\xi \gamma \wedge \\ & \rho(T) \leq \rho(f(\alpha, \beta)) \wedge \rho(T) \leq \rho(f(\beta, \gamma))\}. \end{aligned}$$

Osoitetaan, että $C \subseteq WF$ on $\mathbf{\Sigma}^1_1$-joukko. Oletetaan $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{N}$ ja

$$\alpha R_\xi \beta \wedge \beta R_\xi \gamma \wedge \alpha \not R_\xi \gamma.$$

Koska $E \subseteq R_\xi$, niin $\alpha \not E \gamma$. Relaation $E$ transitiivisuudesta seuraa $\alpha \not E \beta$ tai $\beta \not E \gamma$, joten

$$\min\{\rho(f(\alpha, \beta)), \rho(f(\beta, \gamma))\} < \omega_1.$$

Tämä osoittaa $\rho(T) < \omega_1$ kaikilla $T \in C$ ja $C \subseteq WF$.
Olkoon $r$ jatkuva kuvaus $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\alpha, \beta, \beta, \gamma, \alpha, \gamma)$. Tällöin

$$B = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{N}^3 : \alpha R_\xi \beta \wedge \beta R_\xi \gamma \wedge \alpha \not R_\xi \gamma\} = r^{-1}[R_\xi \times R_\xi \times (\mathcal{N}^2 \setminus R_\xi)]$$

on Borelin joukko. Edelleen

$$B^* = \{(f(\alpha, \beta), f(\beta, \gamma)) : (\alpha, \beta, \gamma) \in B\} = ((f \circ (\mathrm{pr}_0, \mathrm{pr}_1)), (f \circ (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)))[B]$$

on Borelin joukon jatkuvana kuvana $\mathbf{\Sigma}^1_1$. Määritellään

$$\begin{aligned} B' &= \{(T, f(\alpha, \beta), T, f(\beta, \gamma)) : T \in Tr \wedge (\alpha, \beta, \gamma) \in B\} \\ &= (\mathrm{pr}_0, \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_0, \mathrm{pr}_2)[Tr \times B^*], \end{aligned}$$

joka on analyyttisen joukon jatkuvana kuvana $\mathbf{\Sigma}^1_1$. Lauseen 2.7.8 nojalla myös

$$K = \{(S, T) \in Tr \times Tr : \rho(S) \leq \rho(T)\} \in \mathbf{\Sigma}^1_1.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} C' &= (K \times K) \cap B' \\ &= \{(T, f(\alpha, \beta), T, f(\beta, \gamma)) : \quad T \in Tr \wedge (\alpha, \beta, \gamma) \in B \wedge \\ & \qquad\qquad \rho(T) \leq \rho(f(\alpha, \beta)) \wedge \rho(T) \leq \rho(f(\beta, \gamma))\} \end{aligned}$$

on $\mathbf{\Sigma}^1_1$-joukko ja $C = \mathrm{pr}_0[C'] \in \mathbf{\Sigma}^1_1$.

$\mathbf{\Sigma}^1_1$-rajoittuvuuden perusteella on olemassa $\delta < \omega_1$, jolla $C \subseteq WF_\delta$. Jos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{N}$ ja

$$\alpha R_\xi \beta \wedge \beta R_\xi \gamma \wedge \alpha \not R_\xi \gamma,$$

matalampi puista $f(\alpha, \beta)$ ja $f(\beta, \gamma)$ kuuluu joukkoon $C$ ja sen korkeus on pienempi kuin $\delta$. Jos $\rho(f(\alpha, \beta)) < \delta$, niin $\alpha \not R_\delta \beta$ ja jos $\rho(f(\beta, \gamma)) < \delta$, niin $\beta \not R_\delta \gamma$. Siis aina

$$\alpha \not R_\delta \beta \vee \beta \not R_\delta \gamma. \qquad \diamond$$

Määritellään kuvaukset $g, h : \omega_1 \to \omega_1$ ehdoilla

$$g(\xi) = \min\{\delta < \omega_1 : \forall\alpha\forall\beta(\alpha \not R_\xi \beta \to \beta \not R_\delta \alpha)\} \text{ ja}$$

$$h(\xi) = \min\{\delta < \omega_1 : \forall\alpha\forall\beta\forall\gamma((\alpha R_\xi \beta \wedge \beta R_\xi \gamma \wedge \alpha \not R_\xi \gamma) \to (\alpha \not R_\delta \beta \vee \beta \not R_\delta \gamma))\}.$$

Väitteiden 1 ja 2 nojalla $g$ ja $h$ ovat hyvin määriteltyjä. Olkoon $\xi < \omega_1$. Osoitetaan, että on olemassa $\delta \in O$, jolla $\delta > \xi$. Tällöin $O$ on rajoittamaton $\omega_1$:ssä. Määritellään jono $(\xi_i)_{i<\omega}$ ordinaaleja ehdoilla

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi \\ \xi_{i+1} &= \sup\{g(\xi_i), h(\xi_i), \xi_i\} + 1, \text{ kun } i \geq 0, \end{aligned}$$

ja asetetaan $\delta = \sup\{\xi_i : i < \omega\}$. Tällöin $\delta \geq \xi_1 > \xi_0 = \xi$. Lisäksi jono $(\xi_i)_{i<\omega}$ on aidosti kasvava, joten $\delta$ on rajaordinaali ja $R_\delta = \bigcap_{i<\omega} R_{\xi_i}$. Osoitetaan, että $R_\delta$ on ekvivalenssirelaatio, jolloin $\delta \in O$.
Koska $E \subseteq R_\delta$ ja $E$ on refleksiivinen, myös $R_\delta$ on refleksiivinen.
Jos $\alpha \not R_\delta \beta$, niin $\alpha \not R_{\xi_i} \beta$ jollakin $i < \omega$ ja koska $\xi_{i+1} > g(\xi_i)$, niin $\beta \not R_{\xi_{i+1}} \alpha$, josta seuraa $\beta \not R_\delta \alpha$. Siis $R_\delta$ on symmetrinen.
Oletetaan $\alpha R_\delta \beta$ ja $\beta R_\delta \gamma$. Osoitetaan $\alpha R_\delta \gamma$. Vastaoletuksesta $\alpha \not R_\delta \gamma$ seuraa $\alpha \not R_{\xi_i} \gamma$ jollakin $i < \omega$. Koska $\alpha R_{\xi_i} \beta$ ja $\beta R_{\xi_i} \gamma$ ja $\xi_{i+1} > h(\xi_i)$, niin $\alpha \not R_{\xi_{i+1}} \beta$ tai $\beta \not R_{\xi_{i+1}} \gamma$. Mutta tästä seuraa $\alpha \not R_\delta \beta$ tai $\beta \not R_\delta \gamma$, mikä on ristiriita. Siis vastaoletus on väärä ja $R_\delta$ on transitiivinen. $R_\delta$ on osoitettu ekvivalenssirelaatioksi, joten $\delta \in O$ ja $O \subseteq \omega_1$ on rajoittamaton. $\diamond$

**Lause 4.3.3.** *On olemassa joukon $\mathcal{N}$ Borelin ekvivalenssirelaatiot $(E_\xi)_{\xi<\omega_1}$, joilla*

(1) $E_\xi \supseteq E_\delta$, *jos* $\xi < \delta < \omega_1$,
(2) $E_\xi = \bigcap_{\delta<\xi} E_\delta$, *jos* $\xi < \omega_1$ *on rajaordinaali,*
(3) $E = \bigcap_{\xi<\omega_1} E_\xi$.

*Todistus.* Lemman 4.3.2 nojalla $O \subseteq \omega_1$ on rajoittamaton siis erityisesti epätyhjä. Olkoon $\xi_0 \in O$. Koska $O \subseteq \omega_1$ on suljettu ja rajoittamaton, voidaan transfiniittisella rekursiolla määritellä kuvaus $\phi : \omega_1 \to O$, joka täyttää seuraavat kolme ehtoa:

$\phi(0) = \xi_0$,
$\phi(\xi + 1) > \phi(\xi)$ kaikilla $\xi < \omega_1$,
$\phi(\delta) = \sup\{\phi(\xi) : \xi < \delta\}$, jos $\delta < \omega_1$ on rajaordinaali.

Olkoon $E_\xi = R_{\phi(\xi)}$ kaikilla $\xi < \omega$. Koska $\phi(\xi) \in O$, $E_\xi$ on Borelin ekvivalenssirelaatio ja ehdot 1-3 toteutuvat kaikilla $\xi < \omega_1$. $\diamond$

Oletetaan jatkossa $|A/E| \geq \aleph_2$ ja osoitetaan, että on olemassa avaruuden $\mathcal{N}$ epätyhjä perfekti joukko $P \subseteq A$, jonka alkiot kuuluvat keskenään eri ekvivalenssiluokkiin ekvivalenssirelaatiossa $E$. Olkoon $(E_\xi)_{\xi<\omega_1}$ lauseen 4.3.3 mukainen laskeva jono Borelin ekvivalenssirelaatioita, jolla $E = \bigcap_{\xi<\omega_1} E_\xi$. Jos $|A/E_\xi| > \aleph_0$ jollakin $\xi < \omega_1$, niin Silverin lauseen nojalla on olemassa $\mathcal{N}$:n epätyhjä perfekti $P \subseteq A$, jonka alkiot kuuluvat eri ekivalenssiluokkiin ekvivalenssirelaatiossa $E_\xi$. Koska $E \subseteq E_\xi$, niin tällöin $P$:n alkiot kuuluvat eri luokkiin myös ekvivalenssirelaatiossa $E$. Voidaan siis olettaa $|A/E_\xi| \leq \aleph_0$ kaikilla $\xi < \omega_1$.

**Lemma 4.3.4.** *Oletetaan $B \subseteq A$ ja $|B/E| \geq \aleph_2$. Tällöin on olemassa $\xi < \omega_1$ ja $\alpha_\xi \in B$, joilla*

$$|(B \cap [\alpha_\xi]_{E_\xi})/E| \geq \aleph_2 \textit{ ja } |(B \setminus [\alpha_\xi]_{E_\xi})/E| \geq \aleph_2.$$

*Erityisesti on olemassa $\beta \in B$, jolla $\beta \not{E}_\xi \alpha_\xi$ ja*

$$|(B \cap [\beta]_{E_\xi})/E| \geq \aleph_2.$$

*Todistus.* Olkoon $\delta < \omega_1$. Jos $|(B \cap [\alpha]_{E_\delta})/E| \leq \aleph_1$ kaikilla $\alpha \in B$, niin koska $|B/E_\delta| \leq \aleph_0$ saadaan

$$|B/E| \leq \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1 < \aleph_2,$$

mikä on ristiriidassa oletuksen $|B/E| \geq \aleph_2$ kanssa. Siis kaikilla $\delta < \omega_1$ on olemassa $\alpha_\delta \in B$, jolla

$$|(B \cap [\alpha_\delta]_{E_\delta})/E| \geq \aleph_2.$$

Jos $|(B \setminus [\alpha_\delta]_{E_\delta})/E| \leq \aleph_1$ kaikilla $\delta < \omega_1$, niin joukolle

$$C = \bigcup_{\delta<\omega_1} (B \setminus [\alpha_\delta]_{E_\delta}) \text{ pätee } |C/E| \leq \aleph_1 \cdot \aleph_1 = \aleph_1 \text{ ja}$$

$$\begin{aligned} B \setminus C &= B \setminus \bigcup_{\xi<\omega_1} (B \setminus [\alpha_\delta]_{E_\delta}) = B \cap \bigcap_{\delta<\omega_1} (\mathcal{N} \setminus (B \setminus [\alpha_\delta]_{E_\delta})) \\ &= \bigcap_{\delta<\omega_1} (B \cap ((\mathcal{N} \setminus B) \cup [\alpha_\delta]_{E_\delta})) = \bigcap_{\delta<\omega_1} (B \cap [\alpha_\delta]_{E_\delta}). \end{aligned}$$

Jos $\alpha, \beta \in B \setminus C$, niin $\alpha E_\delta \beta$ kaikilla $\delta < \omega_1$ eli $\alpha E \beta$. Siis $B \setminus C$:n alkiot ovat ekvivalentteja keskenään ja

$$|B/E| \leq |C/E| + 1 \leq \aleph_1 + 1 = \aleph_1,$$

mikä on ristiriidassa oletuksen $|B/E| \geq \aleph_2$ kanssa. Siis on olemassa $\xi < \omega_1$, jolla $|(B \setminus [\alpha_\xi]_{E_\xi})/E| \geq \aleph_2$.

Jos oletetaan vastoin lemman viimeistä väitettä

$$\forall \beta((\beta \in B \setminus [\alpha_\xi]_{E_\xi}) \to |(B \cap [\beta]_{E_\xi})/E| \leq \aleph_1),$$

niin koska $|B/E_\xi| \leq \aleph_0$ saadaan

$$|(B \setminus [\alpha_\xi]_{E_\xi})/E| \leq \aleph_1 \cdot \aleph_0 = \aleph_1 < \aleph_2,$$

mikä on ristiriidassa $\alpha_\xi$:n määrittelyn kanssa. $\diamond$

Konstruoidaan jokaista jonoa $\sigma \in {}^{<\omega}2$ kohden joukko $U_\sigma \subseteq A$ niin, että seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $\sigma, \tau \in {}^{<\omega}2$ ja $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ :

$$\begin{aligned}
&(1)\ U_\sigma \neq \emptyset \wedge U_\sigma \in \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{N}),\\
&(2)\ \sigma \subseteq \tau \Longrightarrow U_\tau \subseteq U_\sigma,\\
&(3)\ |U_\sigma/E| \geq \aleph_2,\\
&(4)\ (\alpha \in U_{\sigma\hat{}0} \wedge \beta \in U_{\sigma\hat{}1}) \Longrightarrow \alpha \not E \beta.
\end{aligned}$$

Lisäksi halutaan varmistaa, että $\bigcap_n U_{\gamma \restriction n}$ on epätyhjä kaikilla $\gamma \in {}^{\omega}2$. Menetellään kuten Silverin lauseen todistuksessa ja määritellään kaikilla jonoilla $\sigma \in {}^{<\omega}2$ ja $\tau \subseteq \sigma$ jonot $\mu_\sigma \in {}^{|\sigma|}\mathbb{N}$ ja $\eta^\tau_\sigma \in {}^{(|\sigma|-|\tau|)}\mathbb{N}$ sekä puut $T_\sigma \subseteq {}^{<\omega}\mathbb{N} \times {}^{<\omega}\mathbb{N}$ siten, että seuraavat neljä ehtoa ovat voimassa kaikilla $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \tau \in {}^{<\omega}2$ :

$$\begin{aligned}
&(i)\ \ \tau \subseteq \sigma \Longrightarrow \mu_\tau \subseteq \mu_\sigma,\\
&(ii)\ \tau \subseteq \sigma_1 \subseteq \sigma_2 \Longrightarrow \eta^\tau_{\sigma_1} \subseteq \eta^\tau_{\sigma_2},\\
&(iii)\ U_\sigma = \exists^{\mathcal{N}}[T_\sigma],\\
&(iv)\ U_\sigma = \bigcap_{\tau \subseteq \sigma} \{\alpha \in \mathcal{N} : \alpha \supset \mu_\sigma \wedge \exists \beta \supset \eta^\tau_\sigma((\alpha, \beta) \in [T_\tau])\}.
\end{aligned}$$

Konstruktio etenee rekursiivisesti jonon $\sigma$ pituuden suhteen. Asetetaan $U_\emptyset = A, \mu_\emptyset = \eta^\emptyset_\emptyset = \emptyset$ sekä $T_\emptyset$ puuksi, jolla $\exists^{\mathcal{N}}[T_\emptyset] = A$. Selvästi ehdot 1-4 ja $i - iv$ pätevät, kun $\sigma = \emptyset$.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja oletetaan, että $U_\sigma, \mu_\sigma, \eta^\tau_\sigma$ ja $T_\sigma$ on määritelty kaikilla $\tau, \sigma \in 2^{<\omega}$, joilla $\tau \subseteq \sigma$ ja $|\sigma| \leq n$ niin, että ehdot 1-4 ja $i - iv$ pätevät. Kiinnitetään $\sigma \in {}^n2$ ja määritellään konstruktiossa tarvittavat joukot, jonot ja puut jonoille $\sigma\hat{}0$ ja $\sigma\hat{}1$.

Koska ehdon (3) mukaan $|U_\sigma/E| \geq \aleph_2$ ja ehdon (2) mukaan $U_\sigma \subseteq U_\emptyset = A$, niin lemman 4.3.4 nojalla on olemassa sellaiset $\alpha_0, \alpha_1 \in U_\sigma$ ja $\xi < \omega_1$, että $\alpha_0 \not E_\xi \alpha_1$ ja joukot $B_i = U_\sigma \cap [\alpha_i]_{E_\xi}$, $i \in \{0, 1\}$ leikkaavat ainakin $\aleph_2$:ta relaation $E$ eri ekvivalenssiluokkaa. Merkitään kaikilla $i \in \{0, 1\}$, $j \in \mathbb{N}$ ja $\psi : \{\tau \in {}^{<\omega}2 : \tau \subseteq \sigma\} \to \mathbb{N}$

$$B_i(j, \psi) = \bigcap_{\tau \subseteq \sigma} \{\alpha \in B_i : \alpha \supset \mu_\sigma\hat{}j \wedge \exists \beta \supset \eta^\tau_\sigma\hat{}\psi(\tau)((\alpha, \beta) \in [T_\tau])\}.$$

Tällöin $B_i(j, \psi) \subseteq B_i$, kun $i \in \{0, 1\}$. Jos $\alpha \in B_i \subseteq U_\sigma$, ehdon $(iv)$ nojalla $\alpha \supset \mu_\sigma$ ja kaikilla $\tau \subseteq \sigma$ on olemassa $\beta^\tau \supset \eta^\tau_\sigma$, jolla $(\alpha, \beta) \in [T_\tau]$. Jos merkitään $j = \alpha(n)$ ja $\psi(\tau) = \beta^\tau(n - |\tau|)$ kaikilla $\tau \subseteq \sigma$, niin $\alpha \in B_i(j, \psi)$. Siis

$$B_i = \bigcup_{j, \psi} B_i(j, \psi), \text{ kun } i \in \{0, 1\}.$$

Koska yhdiste on numeroituva ja $|B_i/E| \geq \aleph_2$, on olemassa $j_i$ ja $\psi_i$, joilla $|B_i(j_i,\psi_i)/E| \geq \aleph_2$, kun $i \in \{0,1\}$.

Asetetaan $U_{\sigma\hat{}i} = B_i(j_i,\psi_i)$, kun $i \in \{0,1\}$. Alkioiden $j_i$ ja $\psi_i$ valinnasta seuraa, että ehto (3) on voimassa jonoille $\sigma\hat{}0$ ja $\sigma\hat{}1$.

Koska $[\alpha_i]_{E_\xi} = \exists^{\mathcal{N}}(E_\xi \cap (\mathcal{N} \times \{\alpha_i\}))$ on Borelin joukon projektiona $\mathbf{\Sigma}^1_1$, niin $B_i = U_\sigma \cap [\alpha_i]_{E_\xi}$ on $\mathbf{\Sigma}^1_1$ ja edelleen määritelmänsä perusteella $U_{\sigma\hat{}i} = B_i(j_i,\psi_i) \in \mathbf{\Sigma}^1_1$. Lisäksi $|U_{\sigma\hat{}i}| \geq |U_{\sigma\hat{}i}/E| \geq \aleph_2$, joten $U_{\sigma\hat{}i}$ on myös epätyhjä ja ehto (1) pätee jonoille $\sigma\hat{}0$ ja $\sigma\hat{}1$.

$U_{\sigma\hat{}i} = B_i(j_i,\psi_i) \subseteq B_i \subseteq U_\sigma$, joten ehto (2) pätee jonoille $\sigma\hat{}0$ ja $\sigma\hat{}1$.

Jos $\alpha \in U_{\sigma\hat{}0}$ ja $\beta \in U_{\sigma\hat{}1}$, niin $\alpha \in B_0$ ja $\beta \in B_1$, joten $\alpha \not{E}_\xi \beta$, mistä erityisesti seuraa $\alpha \not{E} \beta$. Siis ehto (4) on voimassa jonoille $\sigma\hat{}0$ ja $\sigma\hat{}1$.

Kun $i \in \{0,1\}$, asetetaan $\mu_{\sigma\hat{}i} = \mu_\sigma\hat{}j_i$ ja $\eta^\tau_{\sigma\hat{}i} = \eta^\tau_\sigma\hat{}\psi_i(\tau)$ kaikilla $\tau \subseteq \sigma$ sekä $\eta^{\sigma\hat{}i}_{\sigma\hat{}i} = \emptyset$. Koska $U_{\sigma\hat{}i}$ on analyyttinen, on olemassa puu $T \subseteq ({}^{<\omega}\mathbb{N})^2$, jolla $U_{\sigma\hat{}i} = \exists^{\mathcal{N}}[T]$. Määritellään $T_{\sigma\hat{}i} = T$. Tällöin ehdot $(i) - (iii)$ ovat voimassa. Lisäksi

$$\begin{aligned}
U_{\sigma\hat{}i} &= B_i(j_i,\psi_i) = B_i(j_i,\psi_i) \cap \exists^{\mathcal{N}}[T_{\sigma\hat{}i}] \\
&\subseteq \bigcap_{\tau\subseteq\sigma} \{\alpha \in \mathcal{N} : \alpha \supset \mu_{\sigma\hat{}i} \wedge \exists\beta \supset \eta^\tau_{\sigma\hat{}i}((\alpha,\beta) \in [T_\tau])\} \cap \exists^{\mathcal{N}}[T_{\sigma\hat{}i}] \\
&= \bigcap_{\tau\subseteq\sigma} \{\alpha \in \mathcal{N} : \alpha \supset \mu_{\sigma\hat{}i} \wedge \exists\beta \supset \eta^\tau_{\sigma\hat{}i}((\alpha,\beta) \in [T_\tau])\} \\
&\quad \cap \{\alpha \in \mathcal{N} : \alpha \supset \mu_{\sigma\hat{}i} \wedge \exists\beta \supset \emptyset((\alpha,\beta) \in [T_{\sigma\hat{}i}])\} \\
&= \bigcap_{\tau\subseteq\sigma\hat{}i} \{\alpha \in \mathcal{N} : \alpha \supset \mu_{\sigma\hat{}i} \wedge \exists\beta \supset \eta^\tau_{\sigma\hat{}i}((\alpha,\beta) \in [T_\tau])\} \\
&\subseteq \exists^{\mathcal{N}}[T_{\sigma\hat{}i}] = U_{\sigma\hat{}i}.
\end{aligned}$$

Siis ehto $(iv)$ on voimassa ja konstruktio valmis.

Olkoon kaikilla $\gamma \in {}^\omega 2$ ja $\tau \in {}^{<\omega}2$, joilla $\tau \subset \gamma$

$$\begin{aligned}
\alpha_\gamma &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu_{\gamma\restriction n} \text{ ja} \\
\beta^\tau_\gamma &= \bigcup_{n\geq|\tau|} \eta^\tau_{\gamma\restriction n}.
\end{aligned}$$

Ehdon $(i)$ nojalla $\alpha_\gamma \in \mathcal{N}$ ja ehdon $(ii)$ nojalla $\beta^\tau_\gamma \in \mathcal{N}$. Osoitetaan $(\alpha_\gamma, \beta^\tau_\gamma) \in [T_\tau]$. Vastaoletuksesta seuraa, että on olemassa $m \in \mathbb{N}$, jolla $(\alpha_\gamma \restriction m, \beta^\tau_\gamma \restriction m) \notin T_\tau$. Merkitään $n = m + |\tau|$. Tällöin $(\mu_{\gamma\restriction m}, \eta^\tau_{\gamma\restriction n}) = (\alpha_\gamma \restriction m, \beta^\tau_\gamma \restriction m) \notin T_\tau$. Mutta joukon $U_{\gamma\restriction n}$ epätyhjyyden ja ehdon $(iv)$ nojalla on olemassa jonot $\nu \supset \mu_{\gamma\restriction n} \supseteq \mu_{\gamma\restriction m}$ ja $\upsilon \supset \eta^\tau_{\gamma\restriction n}$, joilla $(\nu, \upsilon) \in [T_\tau]$ ja saadaan ristiriita. Siis $(\alpha_\gamma, \beta^\tau_\gamma) \in [T_\tau]$ eli $\alpha_\gamma \in \exists^{\mathcal{N}}[T_\tau] = U_\tau$ kaikilla $\tau \subset \gamma$.

Olkoon $P = \{\alpha_\gamma : \gamma \in {}^\omega 2\}$. Koska $\alpha_\gamma \in U_\emptyset = A$ kaikilla $\gamma \in {}^\omega 2$, niin $P \subseteq A$. Olkoon $\gamma, \nu \in {}^\omega 2$ eri alkioita ja $m \in \mathbb{N}$ pienin luku, jolla $\gamma(m) \neq \nu(m)$. Edellä todistetun nojalla $\alpha_\gamma \in U_{\gamma\restriction(m+1)}$ ja $\alpha_\nu \in U_{\nu\restriction(m+1)}$, joten ehdon (4) perusteella $\alpha_\gamma \not{E} \alpha_\nu$. Siis $P$:n alkiot kuuluvat keskenään eri ekvivalenssiluokkiin ekvivalenssirelaatiossa $E$. Osoitetaan, että $P$ on perfekti avaruudessa $\mathcal{N}$. Olkoon

$f : \mathcal{C} \to \mathcal{N}$ ehdolla $\gamma \mapsto \alpha_\gamma$ määräytyvä kuvaus. Jos $\gamma \neq \nu$, niin $\alpha_\gamma \not\subseteq \alpha_\nu$ ja erityisesti $\alpha_\gamma \neq \alpha_\nu$. Siis $f$ on injektio. Olkoon $\sigma \in {}^{<\omega}\mathbb{N}$. Tällöin

$$f^{-1}[N_\sigma] = \{\gamma \in \mathcal{C} : \alpha_\gamma \in N_\sigma\} = \{\gamma \in \mathcal{C} : \mu_{\gamma\restriction|\sigma|} = \sigma\}.$$

Jos $\gamma \in f^{-1}[N_\sigma]$, niin $N_{\gamma\restriction|\sigma|} \subseteq f^{-1}[N_\sigma]$, joten $f^{-1}[N_\sigma]$ on avoin ja $f$ jatkuva. Lauseen 2.1.13 nojalla $P = f[\mathcal{C}]$ on epätyhjä perfekti joukko avaruudessa $\mathcal{N}$. $\square$

**Lause 4.3.5.** *Olkoon $X$ puolalainen avaruus ja $C \subseteq X$ koanalyyttinen. Tällöin $|C| \leq \aleph_1$ tai on olemassa avaruuden $X$ perfekti epätyhjä joukko $P \subseteq C$. Erityisesti $|C| \leq \aleph_1$ tai $|C| = 2^{\aleph_0}$.*

*Todistus.* Oletetaan $|C| \geq \aleph_2$. Olkoon $E = (X \setminus C)^2 \cup \Delta$, missä $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ on identtisyysrelaatio. Lemman 2.3.2 nojalla $\Delta$ on suljettu, joten $E \in \mathbf{\Sigma}^1_1 \cup \mathbf{\Pi}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_1$. Selvästi $E$ on ekvivalenssirelaatio, jonka ekvivalenssiluokat ovat yksiöt $\{\{x\}\}_{x \in C}$ ja joukko $X \setminus C$. Koska $|\mathcal{N}/E| \geq |C| \geq \aleph_2$, Burgessin lauseen mukaan on olemassa perfekti epätyhjä $P^* \subseteq \mathcal{N}$, jonka alkiot kuuluvat keskenään eri ekvivalenssiluokkiin. Jos $P^* \subseteq C$, lause on todistettu ($P = P^*$). Jos $P^* \not\subseteq C$, niin $P^* \cap (X \setminus C) = \{x\}$, jollakin $x \in (X \setminus C)$, koska $X \setminus C$ muodostaa yhden ekvivalenssiluokan. Tällöin $P^* \setminus \{x\} \subseteq C$ kuuluu luokkaan $\mathbf{\Pi}^1_0 \cap \mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_1$ ja $|P^* \setminus \{x\}| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$, joten lauseen 4.2.5 nojalla on olemassa avaruuden $X$ perfekti epätyhjä joukko $P \subseteq P^* \setminus \{x\}$. $\square$

ZFC:n pohjalta ei voida ratkaista, sisältääkö jokainen ylinumeroituva $\mathbf{\Pi}^1_1$-joukko epätyhjän perfektin osajoukon [Sr: s.147].

# Lähteet


[Cu] N. J. Cutland. Computability: An Introduction to Recursive Function Theory. Cambridge University Press, 1980.

[Ke] A. S. Kechris. Classical Descriptive Set Theory. Graduate Texts in Mathematics 156. Springer Verlag, New York, 1995.

[Ke2] A. S. Kechris. New Directions in Descriptive Set Theory. The Bulletin of Symbolic Logic, Volume 5, Number 2, June 1999.

[Ma] D. Marker. Descriptive Set Theory, informal lecture notes given at University of Illinois in fall 2002.
www.math.uic.edu/~marker/math512/dst.ps

[Mo] Y. N. Moschovakis. Descriptive Set Theory. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Volume 100. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980.

[M&W] R. Mansfield & G. Weitkamp. Recursive Aspects of Descriptive Set Theory. Oxford University Press, New York, 1985.

[Ro] C. A. Rogers et Al. Analytic Sets. Academic Press, London, 1980.

[Si] J. H. Silver. Counting the Number of Equivalence Classes of Borel and Coanalytic Equivalence Relations. Annals of Mathematical Logic 18 (1980) p. 1-28.

[Sr] S. M. Srivastava. A Course on Borel Sets. Graduate Texts in Mathematics 180. Springer-Verlag, New York, 1998.

[Vä1] J. Väisälä. Topologia I. 1. painos, Limes ry, Helsinki, 1999.

[Vä2] J. Väisälä. Topologia II. 1. painos, Limes ry, Helsinki, 1999.