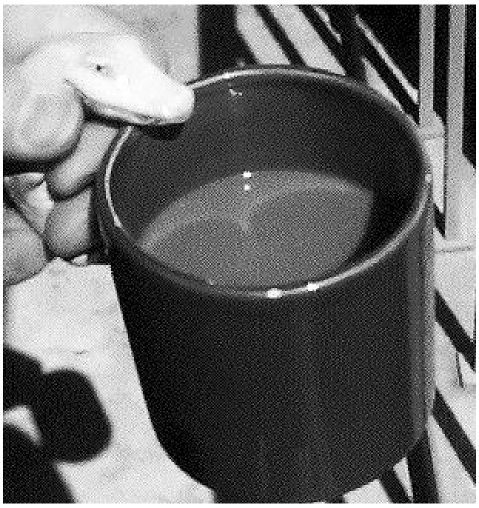
# Kahvikupista kirurgiaan – matematiikan sovelluksia tutkimassa

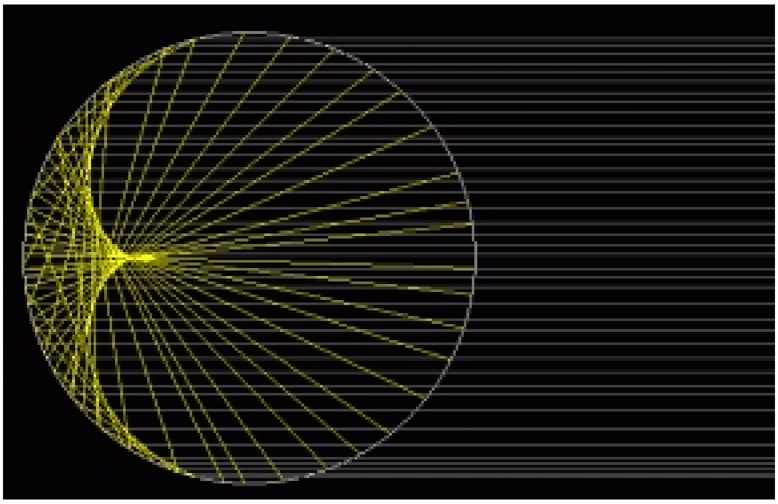
Tehdäänkö tutkimusta puhtaan totuuden tavoittelun vai sen tuottaman hyödyn takia? Vastaukset tähän kysymykseen ovat vaihdelleet ajan kuluessa. Kun Suomen yliopistojärjestelmä perustettiin, olivat koulutukselliset hyötynäkökohdat tärkeimpiä. Esimerkiksi perustettaessa Turun Akatemiaan ensimmäistä matematiikan professuuria, ei itsenäisen tutkimuksen tekemistä rohkaistu. Päinvastoin, oli tarkkaan määrätty, kenen oppeja oli noudatettava, sillä kaikki itse keksityt tai muuten uudet ajatukset katsottiin vanhoja tietoja halventaviksi. Myöhemmin yliopistot omaksuivat humboldtilaisen sivistysyliopistoihanteen ja yliopistot käsitettiin sivistyslaitoksiksi, joiden tehtäviin kuuluu perustutkimuksen edistäminen. Tämä näkyy Suomen matematiikan historiassa puhtaan matematiikan voittokulkuna ja merkittävien koulukuntien syntymisenä. Viime vuosisadan aikana yliopistot ovat kasvaneet huomattavan suuriksi tutkimus- ja koulutuslaitoksiksi ja kasvaneen koon myötä yliopistojen tehtävät ovat laajentuneet. Sivistyksen kotina toimimisen lisäksi yliopistoilta edellytetään kasvavaa yhteiskuntaa hyödyttävää toimintaa. Suomen matemaattisessa kentässä tämä on korostanut sovelletun matematiikan roolia.

Hyötynäkökulmasta tiedettä tarkastellen voidaankin provosoivasti kysyä: ”Mihin Suomi yleensä tarvitsee perustutkimusta, löytyväthän kaikki tutkimuksen tulokset nykyään internetistä?” Tämänkaltainen suhtautuminen tietoon sivuuttaa tieteen tärkeän sosiaalisen komponentin: Yhteiskunta ei voi hyödyntää uusimpia tutkimustuloksia ilman tutkimusyhteisöä, joka aktiivisesti harjoittaa tutkimusta. Samalla tavoin kuin kirjastolaitos on hyödytön ilman kirjojen lukijoita, ei uusin tutkimustieto voi olla käytettävissä ilman ihmisiä, jotka aktiivisesti sitä käyttävät.

Tarkastellaan seuraavaksi, kuinka matemaattinen tutkimus auttaa yhteiskuntaa, jossa elämme, sekä ihmiskuntaa yleensä. Siis – kuinka tutkimuksen tulokset siirtyvät yhteiskunnan voimavaroiksi? Tähän liittyy läheisesti kysymys siitä, pitäisikö meidän tutkia matematiikkaa sovelluksista lähtien vai pyrkiä ennemmin kehittämään abstraktia teoriaa, jolle saattaa myöhemmin löytyä tällä hetkellä tuntemattomia sovelluksia. Ennen näiden kysymysten käsittelyä, tarkastelemme ensin lyhyesti mitä matematiikka on.

Matematiikkaa on usein verrattu kieleen, ja **Galileo Galilei** onkin sanonut: Luonnon lait on kirjoitettu matematiikan kielellä. Tässä vertauksessa on myös se osuva piirre, että





Kuva 1: Valon heijastus kahvikupissa. Kahvikupissa esiintyy kaustikki, eli käyrä, jota valonsäteet sivuavat.

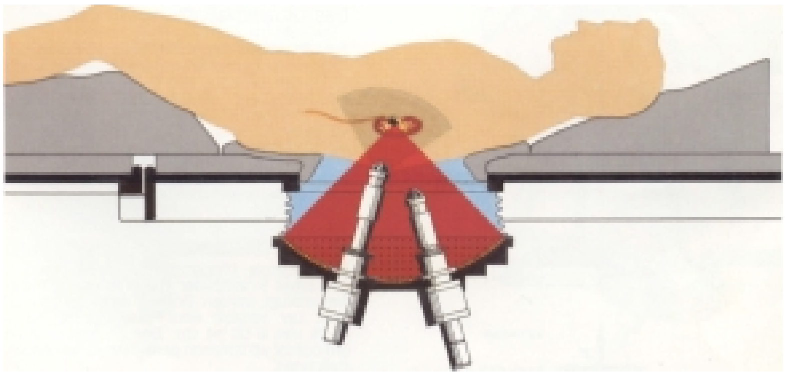
kielen avulla kykenemme tekemään oivalluksia, jotka ilman kieltä olisivat saavuttamattomissa. Joskus matemaattinen kuvaus luonnon ilmiöistä on oikeampi kuin kuvauksen tekijä on aavistanutkaan. Esimerkiksi **James Clerk Maxwell** johti 1800-luvulla sähkömagnetismia koskevan teoriansa todistaakseen eetterin olemassaolon. Tässä yhteydessä eetterillä tarkoitettiin oletettua väliainetta, joka täyttäisi kaiken avaruuden, ja jonka liikettä valo olisi. Tutkimuksissaan Maxwell havaitsi valoa koskevien matemaattisten laskelmien johtavan aaltoliikkeen malliin, ja olettaen, että aallot voivat edetä vain väliaineessa, Maxwell veti sen johtopäätöksen, että eetteriksi kutsutun väliaineen olisi oltava olemassa. Myöhemmin suhteellisuusteoria kumosi tämän tulkinnan, mutta tiedeyhteisö on yhä vakuuttunut siitä, että Maxwellin valon aaltoliikkemalli on oikea, vaikkei mitään eetterin kaltaista väliainetta olekaan. Tämä esimerkki osoittaa, kuinka matematiikan kieli mahdollistaa oikean ja kauniin mallin löytämisen, jopa huolimatta tulosten väärästä tulkinnasta.

Esteettisyyden tavoittelu tutkimuksessa voi paljastaa todellisuuden olemusta yllättävän tehokkaasti. Eräs 1900-luvun merkittävistä matemaatikoista, **Alfred N. Whitehead** totesikin: "Usein olemme lähimpänä käytäntöä ollessamme teoreettisimmillamme." Valoittaaksemme tätä yllättävältä kuulostavaa lausetta tarkastelemme seuraavassa esimerkkejä tämänhetkisestä tutkimuksesta.

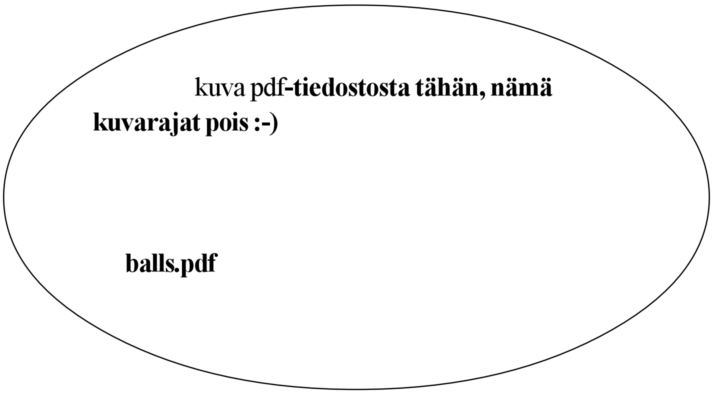
Tarkastellaan valon välkettä kahvikupissa (kuva 1). Kupissa esiintyy kaarien rajaama valoalue. Heijastumiskuvio voidaan selittää tarkastelemalla sitä, miten yhdensuuntaiset valonsäteet heijastuvat puoliympyrästä. Havaitaan, että heijastumiskuviot syntyvät samaan tapaan kuin suurennuslasissa – valo keskittyy pienelle alueelle, ikäänkuin polttopisteeksi. Koska kahvikuppi ei toimi virheettömänä suurennuslasina, valo ei keskity yhteen pisteeseen, vaan pinnalle. Tätä kirkasta pintaa, jota valonsäteet sivuavat tangentiaalisesti kutsutaan kaustikiksi. Matemaatikkoja on kiinnostanut näiden polttopintojen muoto, ja modernissa geometriassa onkin kyetty luokittelemaan kaikki mahdolliset polttopinnat, jotka valo voi synnyttää. Tällainen luokittelutulos, joka tunnetaan **Rene Thomin** luokittelulauseena, on tyypillinen esimerkki kauniista tuloksesta. Entä kuinka tällaistä tulosta voidaan sitten soveltaa? (kuva 2)

Lääketieteellisiä sovelluksia kaustikkien luokittelulle löytyy muun muuassa kehitteillä olevasta hoitomuodosta, niin kutsutusta verettömästä kirurgiasta. Tässä esimerkiksi Kuopion yliopiston inversioryhmässä tutkitussa tekniikassa potilasta pyritään kirurgisesti leikkaamaan korkeataajuisen äänen, ultraäänen avulla. (kuva 2)

Potilaan sisään muodostetaan



Kuva 2. Ultraääniterapiassa ääniaallot fokusoituvat ja tuottavat lämpöä. Vasemmalla: Skemaattinen kuva Richard Wolf yhtymän ultraääniaaltojen fokusoijasta. Oikealla: Kuopion yliopiston inversioryhmän simulaatioita fokusoituvan aallon amplitudista.




Kuva 3: Reunamittauksien avulla pallojen ulkopuolista aluetta *A*, jossa aalto on nollasta poikkeava, pienennetään kunnes se kutistuu yhdeksi pisteeksi.

## Tietopaketti: Miten aaltoja fokusoidaan tuntemattomassa kappaleessa.

Mallitetaan aaltoja yhtälöllä

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum_{j,k=1}^{3} a^{jk}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial k^k}\right)u(x,t)=0 \quad \text{kun } \Omega\times\mathbb{R}_+,$$

$$u(x,t)=f(x,t) \quad \text{kun } x\in\partial\Omega,$$

$$u(x,t)\big|_{t=0}=0, \qquad \partial_t u(x,t)\big|_{t=0}=0$$

alueessa $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. Funktio $f$ vastaa reunalla olevaa lähdettä, jota voimme kontrolloida. Aallot etenevät äärellisellä nopeudella, ja aaltojen lyhin mahdollinen kulkuaika pisteestä $x$ pisteeseen $y$ määrittelee epäeuklidisen metriikan eli etäisyyden $d(x,y)$ näiden pisteiden välille. Olettakaamme, että voimme mitata reunalähteen $f$ syntynyttämän aallon $u$ derivaatat reunalla $\partial\Omega\times\mathbb{R}_+$.

Seuraavaksi pyrimme fokusoimaan aallon $u(x,t)$ yhteen pisteeseen ajan hetkellä $T>0$. Jos aalto $u$ ja sen derivaatat häviävät reunapisteen $z\in\partial\Omega$ ympäristössä kaikilla ajan hetkillä $t, T-r<t<T+r$, niin Tatarun teoreeman nojalla aalto häviää hetkellä $T$ metriikan $d$ määräämässä pallossa

$$B(z,r)=\{x\in\Omega : d(x,z)<r\}.$$

Siispä mittaamalla aaltojen derivaattoja reunalla voimme valikoida kaikki ne reunalähteet $f$, joiden tuottamat allot häviävät hetkellä $T$ pallossa $B(z,r)$. Käyttämällä monia palloja voimme löytää kaikki ne aallot, jotka hetkellä $T$ ovat kannatettuja joukossa

$$A=\Omega\setminus(B(z_1,r_1)\cup B(z_2,r_2)\cup\ldots\cup B(z_k,r_k)),$$

toisin sanoen, voimme löytää aallot, jotka ovat nollasta poikkeavia vain pallojen $B(z_j,r_j)$ ulkopuolella. Reunamittauksien avulla on mahdollista myös havaita, onko joukko $A$ tyhjä vai ei. Suurentamalla palloja niin, että alue $A$ pysyy epätyhjänä, päästään tilanteeseen, jossa joukko $A$ koostuu vain yhdestä pisteestä $y$ (kuva 3).

Tällöin joukossa $A$ kannatetut aaltot $u(x,T)$ poikkeavat nollasta vain pisteessä $y$. Tällainen aalto $u(x,t)$ voi esimerkiksi olla hetkellä $T$ Diracin delta-funktio pisteessä $y$.

alue, jossa äänen voimakkuuus on erittäin iso. Voitaisiin sanoa, että kudoksen sisään muodostetaan äänestä aineeton ultraääniveitsi, joka kykenee leikkaamaan kudosta. Tarkemmin sanottuna, potilaaseen suunnataan ääniaaltoja siten, että aaltojen energia keskittyy pienelle alueelle. Voimakkaat äänet tuottavat lämpöä, joka tappaa valitun kohdealueen solut. Tämä mahdollistaisi esimerkiksi aivokasvainten hoidon ilman, että instrumentteja tarvitsee työntää potilaan pään sisään.

Tällainen hoitomuoto yleistyessään saisi varmasti nykyisen kirurgian vaikuttamaan yhtä historialliselta kuin miltä kallojen poraaminen meistä nykyään vaikuttaa. Kuten äsken Maxwellin valoteoriaa käsiteltäessä todettiin, valo ja aaltoliike noudattavat samaa matemaattista mallia. Siispä tulos, joka luokittelee kaikki mahdolliset valon polttopintakuviot, luokittelee samalla kaikki mahdolliset pinnat, joille ääniaalto voi keskittyä. Kuvainnollisesti puhuen, polttopintojen luokittelutulos kertoo kaikkien mahdollisten ultraääniveisten muodon eli kaikki ne instrumentit, jotka leikkaavalla lääkärillä voi olla käytössään.

Jotta potilaan pään sisään voitaisiin äänellä muodostaa ultraääniveitsi, on tietenkin tärkeää tietää tarkasti potilaan pään rakenne. Muutenhan ääniveitsi voitaisiin muodostaa väärään paikkaan, ja sen käyttäminen voisi olla kohtalokasta potilaalle. Kohtaamme siis kuvantamisongelman: äänen nopeuden vaihtelut pään sisällä pitäisi selvittää ulkopuolelta tehtävin mittauksin.

Kuvantamistehtävä on tyypillinen esimerkki käänteisestä eli inversio-ongelmasta, jotka ovat myös Suomessa aktiivisen tutkimuksen kohteina. Tämän alueen matematiikassa tehtävänä on muodostaa kuvia annetun kappaleen, esimerkisi potilaan pään, sisäisestä rakenteesta luotaamalla sitä ulkopuolelta erilaisilla aalloilla, säteilyllä tai lämmöllä. Matemaattisesti muotoiltuna inversio-ongelmilla tarkoitetaan esimerkiksi seuraavan kaltaisia ongelmia: Annettua tyyppiä olevan osittaisdifferentiaaliyhtälön tuntemattomat kerroinfunktiot halutaan määrittää, kun yhtälön ratkaisujen arvot alueen reunalla tai jotkin niihin liittyvät tunnusluvut tunnetaan. Myös alue, jossa kerroinfunktiot halutaan selvittää, voi olla tuntematon. Tällaiset ongelmat palautuvat usein geometrisiin ongelmiin, joissa tuntematon monisto halutaan selvittää moniston reunalla tehtävistä mittauksista.

Palatkaamme kuitenkin monistojen yleisistä inversio-ongelmista takaisin konkreettiseen lääketieteelliseen kuvantamiseen, erityisesti ääniaaltojen avulla. Yllättäen, edelliset ultraäänikirurgissa käytetyt menetelmät löytävät sovelluksia myös kuvantamisessa. Aaltojen fokusoiminen kappaleen sisällä on osoittautunut teoreettisesti hyvin tehokkaaksi työkaluksi rakenteiden luotaamisessa. Mittauksista on matemaattista analyysin avulla mahdollista päätellä, fokusoituuko vaikkapa pään ulkopuolelta lähetetty aalto yhteen pisteeseen, vai ei.

Tämänhetkisen teoreettisen tutkimuksen mukaan fokusointipisteistä voidaan muodostaa kolmiulotteinen kartta pään rakenteesta. Tulevaisuuden tutkimus yhteistyössä fyysikoiden ja insinööritieteiden edustajien kanssa tulee toivottavasti osoittamaan näiden matemaatikkojen kehittämien menetelmien olevan tehokkaita myös käytännössä entistä tarkemman ultraäänikuvauksen kehittämisessä.

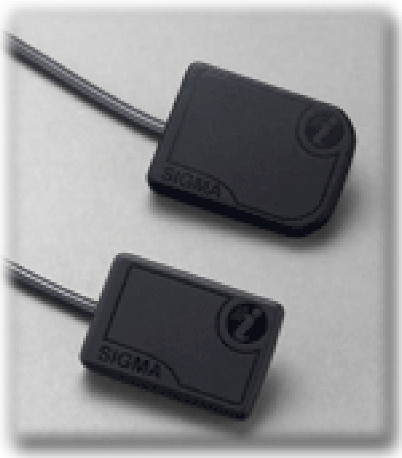
Edelliset esimerkit havainnollistavat sitä, kuinka matematiikan käyttö voi kytkeä yhteen eri aloja. Edellinen kahvikupissa esiintyvien polttopintojen luokittelu, joka varmasti tehtiin tavoittelematta yhteiskunnallista hyötyä, on käyttökelpoinen myös verettömän kirurgian ja lääketieteellisen kuvantamisen kehittämisessä. Usein pyrkimys todistaa mahdollisimman kauniita tuloksia johtaa tehokkaisiin ajatuksiin, jotka sovelluksissa osoittavat voimansa, aivan kuten Alfred Whitehead totesikin.

Näiden esimerkkien valossa voimmekin nyt palata kysymykseen matematiikan ja sovellusten suhteesta. Mitään ristiriitaa hyödyllisten sovellusten tavoittelun ja puhtaan totuuden metsästyksen välillä ei välttämättä ole, vaan kysymys on pikemminkin tutkimustyön kahdesta eri puolesta. Ensinnäkin, luovan ajattelun ja mielikuvituksen lennon synnyttämiä puhtaan matematiikan tuloksia voidaan soveltaa yllättävillä aloilla, kunhan tutkimuksen yhteydet käytäntöön havaitaan. Toisaalta, matematiikka on edistynyt huomattavia askelia tutkiessaan muiden tieteiden herättämiä kysymyksiä. Esimerkkinä tästä voidaan mainita solitoniaaltojen tutkimuksen synnyttämä integroituvien systeemien teoria, jolla on ollut merkittävä vaikutus inversio-ongelmien teoriaan.

On kuitenkin todettava, että toimiminen yhtä aikaa monien sovellusalojen ja puhtaan matematiikan parissa on vaikeaa yksittäiselle tutkijalle. Onneksi laaja-alaisuus, joka voi olla mahdotonta yksilölle, on mahdollista ryhmälle. Kehitys onkin kulkemassa suuntaan, jossa matemaatikot toimivat yhä enemmän ryhmissä. Tämä näkyy julkaisukulttuurissa: aiemmin tutkimuksia julkaistiin yleensä yksin, nyt yhä enemmän ryhmissä. Tämä tutkimustoiminnan kasvava ryhmätoiminta tulee varmasti nopeuttamaan ja lisäämään tutkimustyön vaikutusta sovelluksissa. Tutkimusryhmien jäsenet voivat toimia linkkeinä ketjuissa, jotka kytkevät teoreettisen tutkimuksen käytännön ongelmiin. Koska tällaisessa ketjuissa tutkimuksen virikkeet syntyvät sekä sovelluksista että abstraktista teoriasta, havaitsemme, että tulevaisuuden sovellusorientoituneissa matematiikan tutkimusryhmissä on tilaa, ja jopa välttämätöntä tarvetta, sekä soveltajille että puhtaan matematiikan tutkijoille. Voimme siis nähdäkseni parhaiten hyödyttää yhteiskuntaa tutkimuksellamme muodostamalla laaja-alaisia ja tehokkaasti kommunikoivia ryhmiä.

Koska yliopistojen opetuksen tulee perustua tutkimukselle, voidaan edellisten tutkimusta koskevien kysymysten valossa tarkastella matematiikan opetuksen merkitystä nykyisille ja tuleville opiskelijoille, erityisesti Teknillisessä korkeakoulussa. Suoraan kysyttynä: Mihin opiskelijamme tarvitsevat matematiikkaa? Harva kyseenalaistaa korkeakoulussa opiskelevien tulevien diplomi-insinöörien tarvetta vieraiden kielten osaamiseen – kuinka he voisivat kommunikoida ilman niiden osaamista? Samoin voimme kysyä: Kuinka opiskelijamme voisivat lukea luonnon kieltä ilman matematiikan tuntemusta? Tarjoamalla kasaantuvaa tietoa, joka ei ajan kuluessa muutu, annamme opiskelijoille pohjan, jolle rakentaa koko elämänsämittaisen tekniikan opiskelun ja kehittämisen.

On selvästi havaittavissa, että tulevaisuuden diplomi-insinöörit tarvitsevat yhä enemmän matematiikkaa, sillä monet tekniikan alat ovat voimakkaasti matematisoitumassa. Esimerkkinä tällaisesta alasta on röntgentomografia, jolla digitaaliset mittauslaitteet ovat kehittyneet aikaisemmin röntgenkuvauksesa käytettyjen filmien veroisiksi (kuva 4). Nyt insinöörit saavat käyttöönsä numeromuotoista dataa filmikuvien sijasta. Tämä on merkittävä muutos, sillä filmikuvia ei tietenkään voinut käsitellä matemaattisesti kuten digitaalisia eli numerosarjoina esitettyjä kuvia. Tämän muutoksen aikana filmitekniikkaan erikoistuneet insinöörit äkisti totesivat olevansa alalla, jolla numeeriset menetelmät ovat merkittävä osa valmistettavasta tuot-




Kuva 4: Röntgenkuvausta Instrumentarium Imaging:ssa, jossa filmit (vasemmalla) korvataan digitaalisilla sensoreilla (oikealla).

teesta. Onneksi teknillisten korkeakoulujen koulutus oli antanut heille matemaattiset valmiudet tällä muuttuneella alueella työskentelyyn. Tarve uusien algoritmien kehittämiseen sai heidät aloittamaan yhteistyön matemaatikkojen kanssa, ja tämän uuden alan ongelmat ovat osoittautuneet erittäin kiintoisiksi myös meille matemaatikoille. Vastaavanlaista laskentamenetelmien merkityksen kasvua on odotettavissa myös useilla muilla tekniikan aloilla, ja tähän muutokseen opiskelijoidemme on oltava valmiina.

Yhteenvetona matematiikan merkityksestä voi todeta, että tietoa, joka ei muutu, voidaan jatkuvasti käyttää uudelleen yhä uusin tavoin. Myös matematiikka ammentaa sovellusten kanssa tapahtuvasta vuorovaikutuksesta uusia kysymyksiä, jotka voivat muuttaa koko tieteenalaa. Toivoakseni voimme Teknillisessä korkeakoulussa luoda matematiikan ja muiden tieteiden kohtaamisareenan, jossa kaikki, fukseista professoreihin, osallistuvat tieteiden vuorovaikutukseen.

## Viitteet

[1] M.V. Berry: Waves and Thom's theorem. Advan. Phys. 25:1–26. 1976.

[2] C. Boyer: Tieteiden kuningatar. Osa 2: matematiikan historia, Art House, 1994.

[3] I. Ekeland: Ennakoimattoman matematiikka. Art House, 2001.

[4] J. Gravesen: Catastrophe theory and caustics. SIAM Rev. 25 (1983), no. 2, 239–247.

[5] J. Grossman and P. Ion: On a portion of the well-known collaboration graph (1995). *Congressus Numerantium* 108 (1995) 129–131.

[6] M. Klinge, R. Knapas, A. Leikola, J. Strömberg: Helsingin yliopisto 1640–1990. 1. osa : Kuninkaallinen Turun akatemia 1640–1808, Otava, 1987.

[7] Y. Kurylev, M. Lassas, E. Somersalo: Focusing waves in elctromagnetic inverse problems. Proceedings of Inverse problems and spectral theory, Ed. H. Isozaki, *Contemporary Mathematics* 348 (2004) 11–22.

[8] J. Laari: Sivistysyliopisto – huomioita fraasin mielekkyydestä, Genesis-lehti 1/1998.

[9] M. Leinonen: Matematiikka vanhassa Turun akatemiassa. Arkhimedes N:o 2. 1952.

[10] M. Malinen, T. Huttunen and J. P. Kaipio: Thermal dose optimization method for ultrasound surgery, *Physics in Medicine and Biology* 48:745–762, 2003.

[11] Tataru, Daniel The $X^s_\theta$ spaces and unique continuation for solutions to the semilinear wave equation. *Comm. Partial Differential Equations* 21 (1996), no. 5–6, 841–887

**Matti Lassas**

Artikkeli perustuu kirjoittajan virkaanastujaisesitelmään Teknillisessä korkeakoulussa 14.9.2004.