

Fysiikan valintakoe Helsingin yliopistossa v. 1984

Björn Fant, Jyrki Kurittu, Kaarle Kurki-Suonio ja Seppo Manninen

Matemaattisiin aineisiin pyrkivien kokonaismäärä osoitti pitkästä ajasta kasvun merkkejä. Luku oli nyt 2065 eli yli 300 viimevuotista suurempi. Valtaosa kasvusta kohdistui tietojenkäsittelyoppiin, fysiikkaan pyrki ensisijaisesti 286, eli heidän määränsä lisääntyi vain kahdeksalla. Fysiikan valintakokeeseen osallistui 445 pyrkijää. Kokeen keskiarvo, 12,3/36, oli kaikkien aikojen pohjanoteeraus. Valintarajat matemaattisiin aineisiin muodostuivat seuraaviksi (suluissa vuoden 1983 rajat): fysiikka 188 (160), kemia 188 (160), matematiikka 196 (160) ja tietojenkäsittelyoppi 260 (260).

Huomattakoon, että valintaperusteet (ks. MAA 46 (1982) 113) oli muutettu matematiikan osalta seuraaviksi: Pitkän oppimäärän arvosanasta laudatur annetaan 8,5 pistettä ja lisäksi kultakin ylioppilaskokeen laudaturin pisterajan ylittävältä kolmelta ylioppilastutkinnon pisteeltä puoli pistettä, kuitenkin enintään 10 pistettä. Arvosanasta magna cum laude approbatur annetaan 7,5 pistettä, arvosanasta cum laude approbatur 6, arvosanasta lubenter approbatur 4 ja arvosanasta approbatur 2 pistettä. Lyhyen oppi määrän arvosana antaa yhden pisteen vähemmän kuin vastaava pitkän oppimäärän suoritus. Jos hakija osallistuu myös matematiikan valintakokeeseen, parempi pistemäärä otetaan huomioon.

Muutoksella haluttiin saada aikaan piste-eroja pyrkijöiden parhaimmiston välille tietojenkäsittelyopin valintaa varten ja tunnustaa lopultakin matematiikan pitkän ja lyhyen oppi määrän eriarvoisuus.

Tehtävät

1. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia?

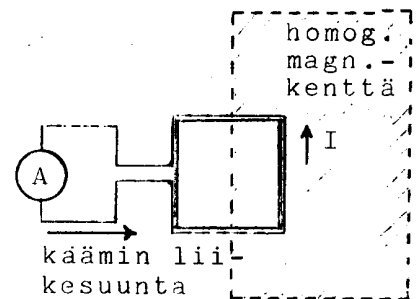
- Kappaleella voi olla vakionopeus, vaikka sen vauhti muuttuu.
- Kappaleella voi olla vakiovauhti, vaikka sen nopeus muuttuu.
- Kappaleen, jolla on vakioikihtyvyys, nopeuden suunta voi muuttua Perustele vastauksesi vaikka pa esimerkin avulla. (Sivu 1, yläosa)

2. Kappale on ripustettu ohueen lankaan oheisen kuvan mukaisesti. Kuinka suuri vaaka-suora alkunopeus kappaleelle pitää antaa, jotta se pystyisi kiertämään ympyrärataa pysty-tasossa? Piirrä kuva, josta näkyvät kappaleeseen vaikuttavat voimat radan lakipisteessä. (Sivu 1, alaosa)



3. Kalorimetrissa on 50 g vettä, jonka lämpötila on 20,0 °C. Kun lisätään 75 g, kiehuvaassa vedessä kuumennettuja kuparipaloja, lämpötila tasaantuu arvoon 29,1 °C. Mikä on kuparin ominaislämpökapasiteetti? Veden ominaislämpökapasiteetti on 4,19 J/g°C ja kalorimetrin lämpökapasiteetti on hyvin pieni. (Sivu 2)

4. Virtamittariin kytketty käämi viedään nopeudella 0,10 m/s käämin tasoa vastaan kohtisuoraan magneettikenttään kuvan osoittamalla tavalla. Kun käämi on osittain magneettikentässä, mittari osoittaa 0,40 mA:n virtaa. Mikä on a) käämiin indusoitunut smv (lähdejännite), b) magneettikentän suunta, jos virta kiertää kuten kuvassa ja c) magneettivuon tiheys? Virtapiiriin resistanssi on 0,75 Ω. Käämissä on 10 kierrosta, ja sen muodostaman neliön sivun pituus on 8,0 cm. (Sivu 3)

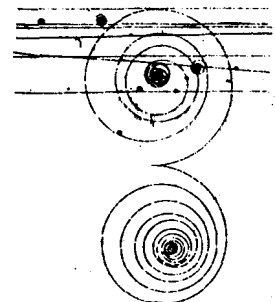


5. Yleistetty Balmerin kaava on muotoa

$$f_{mn} = RcZ^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

missä m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja. Mikä on kaavan fysikaalinen merkitys, ja miten se selitetään? (Sivu 4, yläosa)

6. Oheisessa kuvassa on "ratailmäsimella" saatu kuva parinmuodostuksesta. Ilmaisimessa on kuvatason normaalin suuntainen magneettikenttä, jonka magneettivuon tiheys on tunnettu. Tulkitse kuva ja perustele tulkintasi sekä selitä, miten kuvan perusteella voidaan määrittää parinmuodostuksessa esiintyvien hiukkasten energiat. (Sivu 4, alaosa)



Tehtävien käsittely

Tehtävä 1.

Kappaleen nopeus $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_v$ on vektorisuure. Nopeuden itseisarvo v eli vauhti ja nopeuden suunta, jonka ilmaisee yksikkövektori \mathbf{u}_v voivat muuttua toisistaan riippumatta. Nopeus on vakio vain, jos sekä vauhti v että nopeuden suunta \mathbf{u}_v ovat muuttumattomat.

a) Jos vauhti muuttuu, nopeus ei voi olla vakio. Väite on siis väärä.

b) Vauhti voi säilyä nopeuden suunnan muuttuessa. Väite on siis tosi, esimerkkinä tasainen ympyräliike.

c) Kiihtyvyys on vektorisuure, jonka nopeuden suuntainen komponentti ilmaisee vauhdin muuttumisnopeuden ja nopeutta vastaan kohtisuora komponentti nopeuden suunnan muuttumisnopeuden. Nopeuden suunta muuttuu aina, kun kiihtyvyys on eri suuntainen kuin nopeus. Väite on siis tosi. Kun kappaleen kiihtyvyys \mathbf{a} on vakio, kappaleen nopeus ajan funktiona on $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$. Jos alkunopeus \mathbf{v}_0 ja kiihtyvyys \mathbf{a} ovat eri suuntaiset, nopeuden suunta muuttuu jatkuvasti kuten esim. vinossa heittoliikkeessä.

Tehtävä 2.

Kappaleeseen vaikuttavat voimat:

– Maan painovoimasta aiheutuva *kappaleen paino* $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$, missä \mathbf{g} on painovoiman kiihtyvyys, jota voidaan pitää vakiona, ja

– *langan jännitysvoima* $\mathbf{T} = T\mathbf{u}_n$, missä \mathbf{u}_n on langan suuntainen yksikkövektori ja $T \geq 0$.

Dynamiikan peruslain $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ mukaan kappale noudattaa liikeyhtälöä

$$m\mathbf{a} = \mathbf{G} + \mathbf{T}.$$

Kiihtyvyyden normaalikomponentti voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{r} \cdot \mathbf{u}_n,$$

missä r on radan säde = langan pituus ja v kappaleen vauhti.

Lakipisteessä myös paino on radan normaalin suuntainen, $\mathbf{G} = mg\mathbf{u}_n$, joten liikeyhtälöstä seuraa hetkellinen yhtälö

$$\frac{mv_1^2}{r} = mg + T,$$

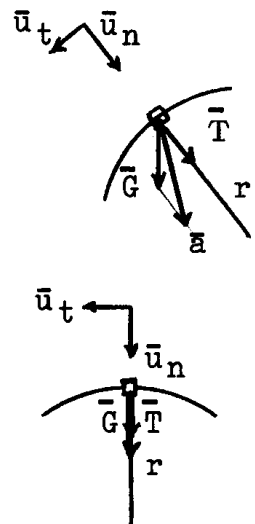
missä v_1 on vauhti lakipisteessä.

Koska langan jännitysvoima ei voi suuntautua ulospäin eli $T \geq 0$, tästä seuraa ehto

$$(1) \quad T = \frac{mv_1^2}{r} - mg \geq 0 \quad \text{eli} \quad v_1^2 \geq gr.$$

Jos vauhti v_1 on pienempi kuin tämä ehto edellyttää, kappale ei pysy ympyräradalla.

Langan jännitysvoima \mathbf{T} ei tee työtä, koska se on aina kohtisuorassa kappaleen liikesuuntaa vastaan. Energiaperiaatteesta seuraa sen tähden säilymislaki



$$(2) \quad E = E_k + E_p = \text{vakio} \quad \text{eli} \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Tässä mgh on kappaleen potentiaalienergia homogeeniseksi oletetussa ($g = \text{vakio}$) painovoimkentässä. Jos kappaleen pystykoordinaatin h 0-kohdaksi valitaan ympyrän keskipiste, on

$$\text{radan alimmassa pisteessä} \quad E = E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgr$$

$$\text{ja lakipisteessä} \quad E = E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgr.$$

Säilymislaista (2) ja ehdosta (1) seuraa $E_0 = E_1$;

$$v_0^2 = v_1^2 + 4gr \geq 5gr.$$

Kappaleelle on siis annettava alkunopeus $v_0 \geq \sqrt{5gr}$.

Tehtävä 3.

Merkitään:

- veden alkulämpötila $t_v = 2,0 \text{ }^\circ\text{C}$, massa $m_v = 50 \text{ g}$ ja ominaislämpökapasiteetti $c_v = 4,19 \text{ J/g}^\circ\text{C}$,
- kuparin alkulämpötila $t_{\text{Cu}} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, massa $m_{\text{Cu}} = 75 \text{ g}$ ja ominaislämpökapasiteetti c_{Cu}
- veden ja kuparin yhteinen loppulämpötila $t = 29,1 \text{ }^\circ\text{C}$.

Esimerkin tilanteeseen ei liity tilavuuden eikä olomuodon muutoksia. Energian säilymislaista tulee tällöin 'lämmön' (oik. sisäenergian) säilymislaki, jonka mukaan veden vastaanottama lämpömäärä $Q_v = c_v m_v (t - t_v)$: on yhtä suuri kuin kuparipalojen luovuttama lämpömäärä

$Q_{\text{Cu}} = c_{\text{Cu}} m_{\text{Cu}} (t_{\text{Cu}} - t)$. Kalorimetria voidaan pitää eristettynä systeeminä, ja kalorimetrin vastaanottama lämpömäärä on esimerkin mukaan hyvin pieni.

Yhtälöstä $Q_v = Q_{\text{Cu}}$ saadaan

$$c_{\text{Cu}} = \frac{c_v m_v (t - t_v)}{m_{\text{Cu}} (t_{\text{Cu}} - t)} \approx 0,36 \frac{\text{J}}{\text{g}^\circ\text{C}}.$$

Tehtävä 4.

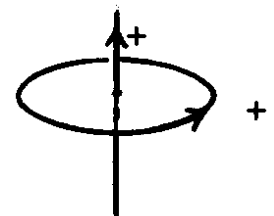
a) Kun virtapiiriin resistanssi on R ja virta I , on jännitehäviö piirissä Ohmin lain mukaan $U = RI$. Piiriin indusoituva lähdejännite E ja jännitehäviö U ovat yhtä suuret, joten

$$E = RI = (0,75 \text{ } \Omega) \cdot (0,40 \text{ mA}) = 0,30 \text{ mV}.$$

b) 1. ratkaisuvaihtoehto.

Induktiolain mukaan käämin kuhunkin silmukkaan indusoituu jännite

$$(1) \quad E = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ missä } \Phi \text{ on silmukan läpäisevä magneettivu.}$$

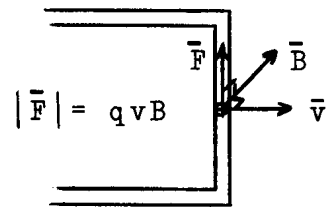


Tämä laki ilmaisee myös induktiojännitteen ja induktiovirran kiertosuunnan piirissä, kun positiivinen läpäisy-suunta ja positiivinen kiertosuunta on liitetty toisiinsa oikeakätisyyssäännön mukaisesti.

Jos kuvan tilanteessa valitaan virran suunta positiiviseksi kiertosuunnaksi, on $E > 0$ ja positiivinen läpäisy-suunta on kohti katsojaa. Lain mukaan on tällöin $d\Phi/dt < 0$. Koska kuvassa magneettivuon itseisarvo kuitenkin kasvaa $|d\Phi/dt| > 0$, on magneettikenttä siis negatiiviseen läpäisy-suuntaan eli katsojasta pois päin.

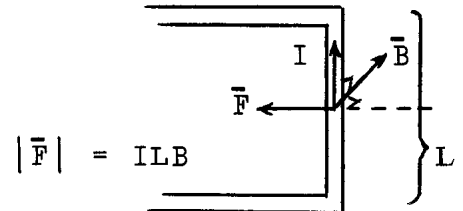
2. ratkaisuvaihtoehto.

Induktiovirran aiheuttaa johtimen mukana liikkuviin virrankuljettajiin vaikuttava magneettinen voima. Virran suunta on sama kuin positiivisiin varauksiin vaikuttavan voiman F suunta. Kentän suunnan ilmaisee tällöin sääntö, jonka mukaan nopeus v , magneettivuon tiheys B ja voima F muodostavat oikeakätisen kolmikon.



3. ratkaisuvaihtoehto.

Lentzin lain (energiaperiaatteen) mukaan induktiovirran suunta on sellainen, että johtimeen sen johdosta kohdistuva magneettinen voima vastustaa johtimen liikettä. Kentän suunnan ilmaisee tällöin suuntasääntö, jonka mukaan virran suunta, magneettivuon tiheys ja voima muodostavat oikeakätisen kolmikon.

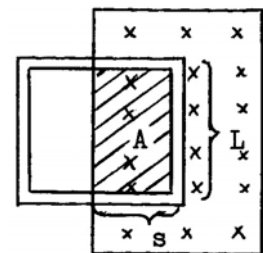


c) Kuvan tilanteessa silmukan läpäisevä magneettivuo on $\Phi = BLs$. (Nyt kentän suunta on valittu positiiviseksi läpäisy-suunnaksi, joten induktiojännite on $E = -0,30$ mV.) Induktiolain mukaan on

$$E = -N \frac{d\Phi}{dt} = -NBL \frac{ds}{dt} = -NBLv,$$

missä N on silmukoiden lukumäärä ja $v = ds/dt$ käämin nopeus. Tästä seuraa

$$B = -\frac{E}{NLv} = \frac{0,30 \text{ mV}}{10 \cdot (0,08 \text{ m}) \cdot (0,10 \text{ m/s})} = \underline{3,8 \text{ mT}}.$$



Tehtävä 5.

Yleistetty Balmerin kaava esittää hyvin tarkasti vedyn kaltaisen (yksielektronisen) atomin spektrin viivojen taajuuksia f_{mn} . Siinä on $R =$ Rydbergin vakio, $c =$ valonnopeus ja $Z =$ atomin järjestysluku, m ja n ovat eri suuria positiivisia kokonaislukuja. Samalla kaava ilmaisee spektreissä esiintyvien fotonien energiat $E_{mn} = hf_{mn}$, missä h on Planckin vakio.

$$E_n = -hRc \frac{Z^2}{n^2}, \quad n = 1, 3, \dots$$

Siirtyessään korkeammasta energiatilasta alempaan $n > m$ elektroni emittoi fotonin, jonka energia on $E_{mn} = E_n - E_m$. Näin syntyy atomin emissiospektri, jossa esiintyvät taajuudet $f_{mn} = E_{mn}/h$.

Vastaavasti perustilassa (E_1) oleva atomi voi ottaa vastaan fotonin, jonka energia on $E_{1n} = E_n - E_1$. Näin syntyy atomin absorptiospektri.

Kokonaisenergian lauseke (1) voidaan johtaa kvantti mekaanisesti (myös Bohrin atomimallia käyttäen). Näin saatu teoreettinen Rydbergin vakion arvo on hyvin tarkasti sama kuin spektrin perusteella määritetty kokeellinen arvo.

Tehtävä 6.

Kuvassa näkyy varauksellisten hiukkasten jälkiä. Suurienergiaisia hiukkasia on kulkenut kuvan poikki suoraan vasemmalta oikealle. Niiden väliaineen atomeista irrottamat elektronit ovat jättäneet pieniä kiertäisiä jälkiä. Niiden lähtösuunta ilmaisee hiukkasten kulkusuunnan. Kierteen suunta paljastaa magneettikentän suunnan: qv , B ja F muodostavat oikeakätisen kolmikon. Tässä q on hiukkasen varaus, v sen nopeus, B kentän magneettivuon tiheys ja F kentän aiheuttama voima, joka aiheuttaa radan kaareutumisen. Elektronin varaus on negatiivinen, $q = -e$, joten B osoittaa kohti katsojaa.

Parinmuodostuksessa sähkömagneettinen säteilykvantti materialisoituu (ytimen voimakentäs-

sä) elektroniksi e- ja positroniksi e+. Koska elektronin ja positronin varaukset ovat erimerkkiset, ne kiertävät magneettikentässä vastakkaisiin suuntiin. Kuvassa on yhdessä tällaisessa prosessissa syntyneiden hiukkasten jäljet. Ylempi suuri spiraali on elektronin jälki, koska sen kierto-suunta on sama kuin pienten spiraalien. Alempi on positronin jälki.

Magneettikenttä vaikuttaa kenttää vastaan kohtisuorasti liikkuvaan hiukkaseen voimalla $F_B = qvB$, joka on kohtisuorassa magneettikenttää vastaan. Normaalikiiktyvyyden lauseketta $a = v^2/r$ käyttämällä hiukkasen liikeyhtälön $ma = F$ normaalikomponentti saadaan muotoon $mv^2/r = qvB$, missä r on radan kaarevuussäde. Mittaamalla kuvasta elektronin ja positronin ratojen kaarevuussäteet spiraalien alusta saadaan siis selville niiden nopeudet ja liike-energiat E_{k+} ja E_{k-} heti parinmuodostuksen tapahduttua.

Energian säilymlain mukaan materialisoituneen fotonin energia oli $E_f = hf = 2m_0c^2 + E_{k+} + E_{k-}$, sillä elektronilla ja protonilla on sama lepomassa m_0 ja lepoenergia m_0c^2 ($c =$ valonnopeus). Parinmuodostuksella on tämän mukaan kynnyenergia $2m_0c^2$ ($\approx 1,02$ MeV), jota suurempi fotonin energian on oltava, jotta esimerkin prosessi voi tapahtua. (Parinmuodostuksessa syntyvien hiukkasten liike-energiat ovat kuitenkin yleensä niin suuret, että laskettaessa on käytettävä suhteellisuusteoreettisia lausekkeitä.)

Arvostelu

Ensimmäisen tehtävän vaikeudet liittyivät enimmäkseen käsitesekaannuksiin ja vektorisuureiden huonoon hallintaan. Parhaiten selvittiin b-kohdasta, jossa tasaisen ympyräliikkeen tapaukseen vedottiin yleisesti. Samaa esimerkkiä yritettiin tarjota myös c-kohtaan. Kiihtyvyyden suunta kuitenkin muuttuu ympyräliikkeessä jatkuvasti, eikä siten toteuta ehtoa $a =$ vakio.

Toisen tehtävän heikko osaaminen oli pettymys kokeen laatijoille. Osattiin toki odottaa mystisen keskipakovoiman esiintyvän valtaosassa voimapiirroksia, mutta tehtävän muukin käsittely oli yllättävän ala-arvoista. Yleisin vastaustyyppi oli:

$$\text{keskipakovoima} = \text{maan vetovoima} \Leftrightarrow mv^2/r = mg \Rightarrow v = \sqrt{gr},$$

ja tilanteeseen liittyi kuva, jossa voimat kumoavat toisensa. Ei siis otettu lainkaan huomioon sitä, että kysyttiin kappaleen tarvitsemää nopeutta ala-asennossa. Monet laskivat vain nopeuden, jonka turvin kappale nousee korkeudelle $2r$, käyttäen energiaperiaatetta muodossa $mv^2/2 = 2mgr$.

Yhden käden sormet riittivät laskemaan oikeiden voimakuvien lukumäärän. Mikähän olisi se keino, jolla saisi koululaiset ymmärtämään keskeisliikkeen olevan kiihtyvää liikettä, ts. sen ylläpitämiseen tarvitaan voima? Voimien kumoutuminenhan merkitsisi sitä, että kappale liikkuisi vakionopeudella suoraviivaista rataa. Yleensäkin kappaleeseen vaikuttavien voimien huolelliseen tarkasteluun kiinnitetään aivan liian vähän huomiota. Tästä johtuvia virheellisyyksiä näkyy usein ja yllättävissäkin yhteyksissä (ks. esim. MAA 48 (1984) s. 232 (kitkavoiman suunta), s. 234 (alustan hiihtäjään kohdistama tukivoima puuttuu, painovoima mukana kahdesti) ja s. 271 (taas se keskipakovoima)).

Tehtävä 3. on tyyppillinen kalorimetrilasku, jollaisia esiintyy oppikirjojen esimerkkeinä. Vastausprosentti olikin verraten korkea ja useimmat ratkaisut periaatteessa oikeita. Kuuteen pisteeseen edellytettiin perusteltua vastausta. Jos vastauksena oli pelkkä lukuarvojen sijoitus ominaislämpökapasiteetin lopulliseen lausekkeeseen, annettiin armon käydä oikeudesta ja vähennettiin vain kaksi pistettä.

Suuressa osassa 4. tehtävän vastauksia rajoitettiin a-kohtaan. Tämä johtune osittain siitä, että sähkömagneettinen induktio tulee esiin fysiikan kurssien loppupuolella, eikä sitä ehditä kaikissa kouluissa opettaa. Magneettikentän suunnaksi (b-kohta) saatiin kaikkea mahdollista - mm. ylös, alas, oikealle, vasemmalle - vaikka tehtävän sanamuotoakaan ei salli kuin kaksi mahdollisuutta. Hyvin perusteltuja vastauksia tähän kysymykseen esiintyi vain muutama prosentti. Oikean käden sääntöön vedottiin useassa paperissa, mutta päädyttiin väärään lopputulokseen. Magneettivuon tiheyttä määritettäessä (c-kohta) lähtökohtana oli useimmiten yhtälö $E = Blv$ ilman mitään perusteluja. Käämin kierrosten lukumäärän vaikutus jäi monelta huomioon ottamatta tai arvauksen varaan: kerroin lisättiin yhtälöön väärälle puolelle.

Tehtävän 5. tulos oli melko tyydyttävä, mutta tehtävän aihe kuuluukin atomifysiikan keskei-

seen alueeseen. Suurin vaikeus oli oleellisen tiedon poimiminen. Vakioiden selittäminen tuotti myös vaikeuksia. Erityisesti Z:n merkitys kaavassa oli hämärä. Arvostelussa poimittiin mallivastauksesta joukko yhden pisteen arvoisia kohtia, joita palkittiin.

Tehtävän 6. vastauksista ilmenee, että parinmuodostus on melko huonosti tunnettu lukiossa. Tehtävä on ehkä liian vaativa siinä mielessä, ettei koululaiselta vielä voi odottaa selkeää tietoa sallituista ja kielletyistä hiukkasfysiikan prosesseista. Virheellisiä vastauksia, kuten elektroni-protoniparin syntyminen, esiintyi. Täydelliseltä vastaukselta vaadittiin myös mainintaa parinmuodostuksen kynnysenergiasta.

Taulukko. Tehtävien pistejakaumat prosentteina ja tehtäväkohtaiset normitetut keskiarvot.

tehtävät	pisteet							
	0	1	2	3	4	5	6	ka./6
1	31,1	10,7	27,9	6,6	8,2	5,7	9,8	0,34
2	44,4	27,4	12,9	4,0	10,5	0,0	0,8	0,19
3	20,3	8,9	4,1	0,8	2,4	18,7	44,7	0,66
4	35,2	5,7	35,2	9,8	5,7	5,7	2,5	0,29
5	42,3	8,9	8,1	9,8	13,8	10,6	6,5	0,34
6	56,1	11,4	6,5	5,7	7,3	8,9	4,1	0,25