

## Massa opetuksen näkökulmasta

### Kaarle Kurki-Suonio

prof. emer. Helsingin yliopisto  
Fysikaalisten tieteiden laitos

### Suureet

Massan käsite näyttää ikuisuusongelmalta. Painon ja massan sekoittumisen pelosta lapsia opetetaan koulussa kankeisiin "oikeisiin" puheenparsiin, kuten "massani on 38 kg", puhekielen luontevan "virheellisen" sanonnan "painan 38 kg" sijasta. Fysiikan juhluvuoden läheisyys lienee inspiroinut myös kansainvälisen verkkokeskustelun ja kirjoittelun liikemassan käsitteen oikeutuksesta ja yhtälön  $E = mc^2$  merkityksestä. Tämäkin kytkeytyy opetukseen, kuten ilmenee **Martti Pekkasen** ja **Jukka Maalammen** vuorokirjoittelusta, ks. [1]. JM pahoittelee liikemassan käsitteen käyttöä lukion oppikirjoissa sanoen, että se "pitäisi viimeinkin heittää historian roskakoriin". Olen näin itsekkin syytettyjen penkillä. Tämä kirjoitus ei kuitenkaan ole pelkkä puolustuspuheenvuoro. Tarjoan näkökulmaa, joka on jäänyt keskustelussa sivuosaan, vaikka se mielestäni on kysymyksen pääasia. Se on käsitteenmuodostuksen ja empiiristen merkitysten ja samalla mielekkään oppimisen näkökulma.

"Historian roskakori" viittaa ajatukseen, ettei käsitteiden synty- ja kehitysvaiheilla olisi merkitystä niiden ymmärtämisen kannalta. Näkökulmani on vastakkainen. *Fysiikan tehtävä on hahmottaa empiirisiä merkityksiä ja käsitteistä niitä, jolloin käsitteet syntyvät empiiristen merkitystensä esityksinä* [2]. Ymmärtämisen peruskysymys on, miten merkitykset syntyvät, miten ne käsitteistetään ja miten ne kehittyvät. *Empiirinen merkitys* on suureen primaarinen ja pysyvä merkitys, *teoreettinen merkitys*, jonka määrittää suureen rakenteellinen asema teoriassa, riippuu teoriasta, sillä jokainen teoria on oma rakenteensa.

Massan ja **Einsteinin** relaation ymmärtämisen perusta on se yksinkertainen seikka, että *massa ja energia ovat suureita*. Standardin mukaan *"Suure on ominaisuus, joka voidaan laadultaan tunnistaa ja määrältään mitata. Luonnonilmiöiden mitattavat ominaisuudet ovat suureita."* Suureen ymmärtämiseksi on ensin *tunnistettava* ominaisuus, jonka esittämiseen sitä tarvitaan. Tämä on suureen merkityksen ydin. Toiseksi on oivallettava, miten tunnistettu ominaisuus voidaan *kvantifioida*, miten kvaliteetista saadaan kvantiteetti.

Tunnistuksen ja kvantifioinnin tulisi olla opetuksen lähtökohta. Ne eivät ole itsestäänselvyksiä vaan empiirisesti oikeutettujen mielikuvien rakentamista, hahmotusta, jota on ohjattava "oikeiden" hahmojen tunnistamiseksi. Olen huomannut, että opiskelijoiden käsitys suureiden merkityksistä rajoittuu standarditunnusten tietämiseen. Lisäksi tunnetaan joukko kaavoja, joissa näitä tunnuksia esiintyy, viitteenä suureiden teoreettisista merkityksistä. Suureen esittämän ominaisuuden tunnistus on yllättävän vaikeaa, eikä kvantifioinnin ideasta ole mielikuvaa. Suureiden empiiriset merkitykset ovat hämärän peitossa.

Jotta ominaisuus olisi kvantifioituva, sillä on oltava eri asteita. Tunnistukseen liittyy tällöin *esikvantifioiva* havainto: miten ominaisuuden eri asteet ilmenevät. Vain tästä voi herätä *kvantifioivan kokeen* idea. Kvantifioinnin periaatteen tarkastelu pysähtyy koulussa pituuden ja ajan mittaamisesta tehtyyn näennäiseen yleistykseen: tutkitaan, kuinka monta suureen yksikköä mitattavaan suureeseen mahtuu. Mitähän oppilaat tämän perusteella ajattelevat esimerkiksi nopeuden, sähkövirran tai lämpötilan mittaamisesta? Jokaisen ominaisuuden kvantifiointi on oma ongelmansa. On keksittävä, miten ominaisuuden asteita voidaan verrata niin, että on ilmeistä, milloin ominaisuus on esimerkiksi kaksinkertainen.

Massan ongelmat alkavat siitä, että sille annetaan päällekkäin kolme eri merkitystä: kappaleen *hitaus*, *gravitaatiokyky* ja *aineen määrä*. Massasta puhutaan ensin aineen määränä. Sillä ilmaistaan, miten paljon ainetta on kappaleessa - ostoksissa tai oppilaassa. Se kuitenkin mitataan gravitaatiokyvyn perusteella, punnitsemalla. Oikea merkitys, hitaus, kohdataan vasta mekaniikan laeissa. Kun aineen määrän ja painon mielikuvat dominoivat, mekaniikan ymmärtäminen on vaikeaa. Epäselväksi jää myös, millä perusteella painojen vertailu on massan määrittämistä.

### Hitaus

*Kappaleen hitaus ilmaisee, miten vaikeaa on kappaleen liiketilan muuttaminen*. Ominaisuuden eriaisteisuus on helppo havaita. Hitauksia voidaan verrata saattamalla kappaleet vuorovaikutukseen, esimerkiksi törmäyttämällä. Sillä kappaleella, jonka nopeus muuttuu vähemmän, on suurempi hitaus. Idea toimii testattaessa: Jos yhdessä törmäyksessä nopeuden muutosten suhde on 2 : 1, se on 2 : 1 samojen kappaleiden kaikissa törmäyksissä. Näin kappaleiden hitauksien mittaaminen mielivaltaisesti valitun yksikkökappaleen hitaudella tulee mahdolliseksi.

Tämä on hitauden kvantifiointi, massan empiirinen perusmääritelmä. Mittausmenetelmänä se on karkea ja epäkäytännöllinen, mutta se perustuu kappaleiden tunnistetun ominaisuuden eri asteiden vertailuun. Ajatuksen isä on **Ernst Mach**, jonka mukaan massa määritellään vertaamalla vuorovaikuttavien kappaleiden kiihtyvyyksiä [3].

Kvantifiointi perustuu vuorovaikutuksen ideaan, **Newtonin** ydinoivallukseen, jonka vaikutus kantaa läpi fysiikan koko kehityksen ja josta ensin seurasi mekaniikan perusrakenne:

- Vuorovaikutuksettomien kappaleiden liiketilä ei muutu.
- Idea vuorovaikutuksesta syylimönä, joka vaikuttaa samalla tavalla kumpaankin kappaleeseen, toteutuu massan määritelmän mukaan, kun kappaleen liiketilä esitetään sen liikemäärällä  $p = mv$ .
- Liikemäärien yhtä suuret muuttumisnopeudet  $dp/dt$  ilmaisevat vuorovaikutuksen voimakkuuden.
- Mittaamalla kiihtyvyyksiä on mahdollista tutkia erilaisten vuorovaikutusten lakeja ja tunnistaa niiden lajeja. Näin avautuu tie kappaleen liikeytälön määrittämiseen sen vuorovaikutusten perusteella.

### Gravitaatiokyky

*Gravitaatiokyky on kappaleen kyky osallistua gravitaatiovuorovaikutukseen.* Sen tunnistaminen kappaleen ominaisuudeksi edellyttää vuorovaikutuksen mielikuvaa ja siihen perustuvia massan ja voiman käsitteitä. Sitä esittävä suure, *painava massa*, on spesifinen, yhden vuorovaikutuslajin lain parametri. Vuorovaikutuksen voimakkuuden ilmaisee voima, jolla se vaikuttaa kumpaankin osapuoleen ja joka ilmenee osapuolten kiihtyvyyksinä. Kappaleen gravitaatiokyvyn kvantifiointi voidaan perustaa sen tutkimiseen, miten tämä voima riippuu kappaleesta itsestään, kun toinen kappale ja kappaleiden keskinäinen sijainti vakioidaan. Gravitaatiokyky tulee mitattavaksi valitun yksikkökappaleen gravitaatiokyvyllä, kun se määritellään verrannolliseksi tähän voimaan.

Pudotuskokeet, joissa ilmanvastus eliminoidaan, ovat juuri tällaisia kahden kappaleen ja yhden vuorovaikutuksen kokeita, joissa toinen kappale on aina sama. Massan ohella kappaleen koko, muoto ja sen aineen laji ovat mahdollisia varioitavia tekijöitä. Käsitteiden oikeaa hahmotusta vaikeuttaa tilanteen epäsymmetria, jonka vuoksi koe ei ilman opastusta valkene oppilaille vuorovaikutuskokeena. Kun Maahan vaikuttavaa voimaa ei havaita, vuorovaikutuksen voimakkuus ilmenee vain "kappaleen painona". Paino hahmottuu väärin kappaleen ominaisuudeksi eikä erotu gravitaatiokyvystä. Niin kauan kuin Maata ei vaihdeta vaikkapa Kuuksi, painon havainnoista ei päästä "käsiksi" Maan gravitaatiokykyyn.

Oikeiden mielikuvien rakentamiseksi opetuksessa voidaan tukeutua symmetrisempien tilanteiden kuten kaksoistähtien käyttäytymisen ja **Cavendishin** kokeen esittelyyn. Erilaisten kappaleiden putoamiskiihtyvyyksien vertailu on kuitenkin periaatteessa riittävä perusta gravitaatiokyvyn kvantifiointille. Koska putoamiskiihtyvyys osoittautuu siinä kappaleesta riippumattomaksi, painava massa on massaan verrannollinen, ja massojen mittaaminen jää tarpeettomaksi. *Tähän verrannollisuuteen perustuu mahdollisuus määrittää kappaleiden massoja vertaamalla niiden painoja.* Se on sittemmin osoitettu hyvin tarkasti kokeilla, joissa verrataan suoraan kappaleiden gravitaatiokykyä ja hitautta ja joita kutsutaan yhteisellä nimellä Eötvös-kokeiksi niiden ensimmäisen suorittajan mukaan. Koska massa ja painava massa esittävät kappaleen kahta eri ominaisuutta, ne ovat eri suureita, joille olisi oikeastaan valittava omat yksikkönsä ja tunnuksensa. Niiden verrannollisuus kuitenkin mahdollistaa niiden laskennallisen samastuksen. Vasta yleinen suhteellisuusteoria oikeuttaa pitämään niitä saman ominaisuuden eri ilmenemismuotoina ja käyttämään niille yhteistä tunnusta.

### Aineen määrä

*Aineen määrä* on ongelmallisin ominaisuuksista, joita massan ajatellaan esittävän. Aine ymmärretään kappaleiden olemukseksi, ja sen määrä mielletään kappaleen perusinvariantiksi. Punnitus on ikaikainen tapa verrata aineiden määriä. Maalampi puhuu "varsinaisesta massasta" joka "kuvaa kappaletta itseään, sen luonnetta ..." [1]. Newton itsekin piti massaa aineen määränä.

"Varsinaisella massalla" ei kuitenkaan ole fyysikaalista merkitystä. Aineen käsite on fyysikoiden ponnisteluista huolimatta yhä pelkkä intuitiivinen idea vailla operationaalista perustaa. Aineen määrällä ei ole tunnistettavaa merkitystä kappaleen ominaisuutena eikä sitä sen tähden voi kvantifioida aidosti vertaamalla ominaisuuden asteita. Punnitus on *ad hoc* -kvantifiointi: On intuitiivisesti välttämätöntä, että aineen määrän kasvaessa paino kasvaa. Mutta tämä ei vetoa mihinkään, mitä voitaisiin pitää aineen määräksi hahmottuvana ominaisuutena. *Ad hoc* -kvantifiointeja esiintyy fysiikassa suureiden määrittelyn esivaiheina. Sellainen on esimerkiksi lämpötilan mittaaminen elohopeapatsaan pituudella. Mutta, niin kuin tämä ei mitenkään kuvasta lämpötilaa itseään aineen ominaisuutena, ei painokaan kuvasta aineen määrää.

Massaa käytetään *ad hoc* -kvantifiointin varassa aineen määrän merkityksessä, erityisesti aineen ominaisuuksia

tarkasteltaessa. Kappaleen tiheys mielletään "aineen tiivyyden" mitaksi mieluummin kuin hitauden ja tilavuuden suhteeksi. Merkityksen vaihtuminen tiivyydestä hitaustiheydeksi aineen dynamiikassa jää helposti huomaamatta. Kemia tuo uuden näkökulman. Kemiallisia reaktioita koskevat massasuhteiden lait tarjoavat mahdollisuuden vastata mielekkäästi kysymykseen: kuinka paljon ainetta A on yhtä paljon kuin esimerkiksi 1 g ainetta B. Ne johtavat aineen määrän aitoon kvantifioitumiseen *ainemääräksi*, jonka yksikkö on mooli. Aineen termiset ominaisuudet vahvistavat ajatusta ainemäärästä aineen määrän "oikeana" mittana. Ainemäärään suhteutettuina niitä esittävät suureet saavat aineille yhteisiä arvoja, kuten moolinen kaasuvakio ja mooliset lämpökapasiteetit. Niiden lait saadaan aineita yleisemmin kattavaan muotoon tavalla, joka avaa tietä moderniin fysiikkaan. Aineen määrä kappaleen ominaisuutena saa näin empiirisesti oikeutetun merkityksen mutta erkanee massan käsitteestä.

Atomifysiikka johtaa tulkintaan: tietty ainemäärä ainetta sisältää tietyn lukumäärän tämän aineen perushiukkasia. Aineen määrän intuitiivinen mielikuva palautuu näin rakenneosasten laskemiseen ja aineen säilyminen hiukkasten lukumäärän säilymiseen. Aineen arvoituksesta tulee hiukkasten perusolemuksen ongelma. Jos kappaleen aineen määräksi tulkitaan sen nukleonien lukumäärä, palataan lähemmäs verrannollisuutta kappaleen massaan, mutta energian ja massan relaatio mitätöi viimeisenkin toivon massan mahdollisuuksista aineen olemuksen avaimena. Jos aineen määrää esitetään säilyvillä baryoni- ja leptoniluvulla, intuition vaatima "perusolemuksen" invarianssi toteutuu, mutta pesäero massaan korostuu ja aineen arvoitus kärjistyy monestakin syystä:

- Baryoneilla - tai kvarkeilla - kuten leptoneillakin on eri suuria massoja. Olisiko kuitenkin esimerkiksi elektronissa, neutriinossa ja myonissa yhtä paljon ainetta?
- Antihiuksilla on negatiiviset baryoni- ja leptoniluvut, mutta samat massat kuin hiuksilla. Olisiko niiden ainetta pidettävä negatiivisena?
- Lukumääriltään vapaasti vaihtelevien bosonien massat jäävät laskennan ulkopuolelle. Ehkä niissä onkin yhtä paljon positiivista ja negatiivista ainetta.

### Liikemassa

Klassisessa mekaniikassa massalla on keskeinen *teoreettinen merkitys*. Se on kappaleen invariantti määrittelyominaisuus, joka esittää kappaleen hitautta etenemisliikkeessä. Valonnopeuden saavuttamattomuus merkitsee, että kappaleen nopeuden kasvaessa nopeuden lisääminen tulee yhä vaikeammaksi. Kappaleen hitaus siis kasvaa, vieläpä rajattomasti nopeuden lähestyessä valonnopeutta. Joudutaan kysymään, *voidaanko massan käsitettä yleistää* esittämään tällaista nopeudesta riippuvaa hitautta.

Hitaus voidaan ymmärtää kahdella, klassisesti yhtäpitävällä tavalla:

(1) Jos hitaus ajatellaan kappaleen pysäyttämisen vaikeudeksi, massaa esittää lauseke  $p/v$ .

(2) Jos se tulkitaan hidastamisen tai kiihdyttämisen vaikeudeksi, massaksi on kirjattava  $dp/dv = F/a$ .

Kumpaankin mahdollisuuteen voidaan tarttua.

Vaihtoehto (2) voi tuntua koulussa luontevalta, koska oppilaat tuntevat dynamiikan peruslain  $F = ma$ . Se johtaa kuitenkin hankalaan tulokseen. Massasta tulee tensorisuure, kappaleella olisi esimerkiksi erilaiset pitkittäinen ja poikittainen hitaus.

*Tolmanin ajatuskoe* toteuttaa vaihtoehdon (1). Siinä tarkastellaan kahden samanlaisen kappaleen kimmoisaa törmäystä kahdessa eri koordinaatistossa **Lorenzin** muunnoksen mukaisesti. Se on alkuperäisen kvantifioivan kokeen relativistinen tarkastelu ja siten massan empiirisen merkityksen aito yleistys. Se johtaa yleistettyyn nopeudesta riippuvaan massa

$$m = \frac{p}{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

Massasta tulee suhteellinen, havaitsijan liikkeestä riippuva suure, jota on perusteltua sanoa liikemassaksi. Se menettää teoreettisen merkityksensä kappaletta määrittelevänä perusinvarianttina.

### Massan ja energian samastus

Einsteinin lain  $E = mc^2$  yhteydessä puhutaan usein aineen tai massan muuttumisesta energiaksi taikka päinvastoin. Väitetään esimerkiksi, että ydinreaktorissa ja Auringossa ainetta muuttuu energiaksi. Energiaksi muuttuvat aineet voidaan jopa nimetä esimerkiksi uraaniksi ja vedyksi. Sanotaan myös, että yhtälö esittää aineeseen sisältyvän energian määrää.

Paitsi että nämä kuvaukset ohjaavat harhaan sekoittamalla aineen ja massan, ne banalisoivat lain merkityksen. Laki ei esitä minkään muuttumista miksikään, vaan se on *massan ja energian samastus*. Se pitäisikin kirjoittaa

muotoon  $E = c^2 m$ , jotta tekijän  $c^2$  asema ekvivalenttien suureiden  $E$  ja  $m$  välisenä verrannollisuuskertoimena tulisi ilmi. Laki kattaa kummankin kaikki empiiriset merkitykset, massan osalta hitauden ja gravitaatiokyvyn, energian osalta kaikki energian lajit, jotka ovat energian primaarisia merkityksiä. Energia on "kattosuure", joka yhdistää kaikki energian lajit saman säilymlain alle. Einsteinin laki merkitsee siis,

1. että *kaikki energian lajit ovat samalla hitautta ja gravitaatiokykyä ja*
2. että käänteisesti *kaikki hitaus ja gravitaatiokyky ovat energiaa.*

Niin kuin kaikkia oivalluksia, Einsteininkin suurta yhtenäistävä oivallusta edelsi hapuiluvaihe, jossa lakia esittävään yhtälöön päädyttiin eri yhteyksissä. Uusia tapoja lain päättelemiseksi yksittäisissä tapauksissa esitetään silloin tällöin vieläkin. Nämä yksittäiset johdot ovat kuitenkin vain palapelin osia. Lain perusta on vasta se kokonaisuus, joka kertyy kaikkien merkitysvastaavuuksien todennuksista.

Hapuiluvaiheen palasten tarkastelu ei ole välttämättä hedelmällistä opetuksessa, jossa tarvitaan pelkistettyjä kehityksen linjoja. Massan osalta gravitaatiokyky voidaan ensin sivuuttaa sillä perusteella, että yleisessä suhteellisuusteoriassa se samastuu hitauteen. Sen osuus sopii käsiteltäväksi suhteellisuusteorian testihavaintoina, joissa energian gravitaatiokyky ilmenee. Energian osalta riittää huomion kiinnittäminen (1) säteilyenergiaan sekä (2) hiukkasten liike-energiaan ja (3) vuorovaikutusten potentiaalienergiaan, joiksi kaikki aineellisten systeemien energian lajit pelkistyvät.

(1) Massan määrittely suhteena  $p/v$  sallii, toisin kuin vaihtoehto  $dp/dv$ , yleistyksen sähkömagneettiseen säteilyyn, jossa energiaan  $E$  liittyy liikemäärä  $p = E/c$  ja yleistyksen myötä massa  $m = p/c = E/c^2$ . *Säteilyenergia* toteuttaa siis jo klassisen fysiikan puitteissa Einsteinin relaation.

(2) *Liike-energian massa* ilmenee suoraan mekaniikan energiaperiaatteen mukaisesta liike-energian määritelmästä liikemäärän muuttumisnopeuden reitti-integraalina  $\Delta E_k = \int (d\mathbf{p}/dt) \cdot d\mathbf{r}$ . Invariantti massa johtaa klassiseen lausekkeeseen  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ , yleistetty nopeudesta riippuva massa tulokseen  $E_k = (m - m_0)c^2$ , jonka mukaan liike-energia ilmenee massan lisäyksenä.

(3) *Potentiaalienergian massa* näkyy siitä, että sitoutuneen systeemin massa on sidosenergiaa vastaavan massan verran pienempi kuin vapaiden rakenneosien yhteenlaskettu massa. Gravitaatio ja sähkömagneettinen vuorovaikutus ovat liian heikkoja tämän todentamiseksi. Sidosenergian osuus on esimerkiksi Auringon ja Jupiterin muodostamassa systeemissä luokkaa  $10^{-12}$  ja vetyatomissa  $10^{-8}$ . Ydinvuorovaikutusten voimakkuus jo riittää. Esimerkiksi deutronin sidosenergia on 0,12 % massasta. Massaspektrografia, jossa massoja määritetään suoraan vertaamalla ionien hitauksia, ja ydinreaktiot, joissa mitataan sitoutuvia ja vapautuvia energioita, ovat tuottaneet vakuuttavan todennuksen.

Lain käänteinen merkitys, jonka mukaan *kaikki massa on energiaa*, johtaa takaisin aineen arvoitukseen, joka fokusoituu kysymykseen, miten kappaleen aine muodostuu rakenneosien aineista. Mekaanisen systeemin klassinen idea on luonnollinen rakenteellisen hiukkasen malli. Vapaan systeemin energia jakautuu sisäiseen ja ulkoiseen. Einsteinin relaation valossa sisäinen energia, systeemin kokonaisenergia nolliikemäärän koordinaatistossa, on samalla systeemin (lepo)massa  $m_0$ , jossa voidaan ajatella erottuvan rakenneosien liike-energiaa ja niiden vuorovaikutusten potentiaalienergiaa vastaavat massat sekä rakenneosien "varsinaiset massat". Mielikuva sallii sisäiset prosessit, ja kattaa siten myös hiukkasreaktiot. Niissä voi esimerkiksi syntyä tai hävitä hiukkasia ja vapautua tai sitoutua säteilyenergiaa, joka voidaan tulkita fotonien liike-energiaksi. Massan jakautuminen osuuksiin muuttuu, mutta niiden summa säilyy. Jaolla ei kuitenkaan ole fysikaalista perustaa, koska mitään tietoa "varsinaisen" massan osuudesta ei ole. Selvältä tuntuu vain fotonin aineettomuus. Niinpä parin synty ja annihilaatio, joissa joko alku- tai lopputilassa ei ole ainetta, oikeuttavat Einsteinin lakia täydentävän tulkinnan: *ainetta voidaan pitää energian lajina* - huolimatta siitä, ettemme tiedä, mitä aine on ja onko sitä lopulta edes olemassa.

### Terminologinen ongelma

Massan ja energian samastuminen kattosuureeksi luo terminologisen ongelman: *Yhdelle suurelle on kaksi vakiintunutta suurenimeä.*

Klassisessa fysiikassa termeillä massa ja energia on vakiintuneet empiiriset ja teoreettiset merkitykset. Kattosuurelle ei ole sijaa. Ei massasta voi puhua energiana eikä energiasta massana.

Relativistisessa mekaniikassa tilanne on toinen. Niinpä hiukkasfysiikassa *kattosuure nimetään energiaksi, joka*

*jää yksin kantamaan myös hitauden ja gravitaatiokyvyn merkityksiä.* Hiukkasen massa määritellään uudelleen siksi, mikä hitauden merkityksessä tarkoitti lepomassaa. Sille jää empiirinen merkitys, joka voidaan nimetä vaikkapa itseishitaudeksi, samalla, kun se palaa alkuperäiseen teoreettiseen merkitykseensä hiukkasen invarianttina määrittelysuureena. Invarianssinsa vuoksi se saa helposti taas rasitteeseen myös mystisen "varsinaisen massan" mielikuvan, josta massan tarina alkoi.

*Summa summarum:* Liikemassan käsite on tarpeeton hiukkasfysiikassa mutta välttämätön massan käsitteen ja Einsteinin relaation ymmärtämiselle.

**Viitteet**

[1] J. Maalampi: *Tieteessä tapahtuu* 2/2002, 54.

[2] K. Kurki-Suonio: *Tuotteet ja prosessit*. Arkhimedes 2/2005, 21 - 25.

[3] Ernst Mach: *The Science of Mechanics*. Open Court Publishing Co., Chicago (1893).