

# Koordinaatit, korkeus, kartat ja GPS

**Markku Poutanen**

Geodeettinen laitos

Markku.Poutanen@fgi.fi

Paikan esittämiseen tarvitaan *koordinaatit*. Vaikka koordinaattien tuottaminen onkin GPS-mittausten perustehtäviä, on se samalla myös eräs vaikeimmista GPS-mittauksiin liittyvistä asioista. Suurimmat virhelähteet piilevät koordinaatistojen käsittelyssä ja muunnoksissa; itse GPS-mittauksiin liittyvät virheet saattavat olla jopa kertaluokkaa pienempiä.

Koordinaatit ilmoitetaan jossain *koordinaatistossa*, joka puolestaan on luotu johonkin *koordinaattijärjestelmään*. Koordinaattijärjestelmä on siis eräänlainen abstraktio, joka määrittelee mm. skaalan ja orientoinnin sekä vertausellipsoidin maantieteellisiin koordinaatteihin siirtymiseksi. Koordinaatisto on tämän määrittelyn mukainen realisaatio joka on toteutettu antamalla joukolle maastossa olevia kiintopisteitä em. koordinaattijärjestelmän mukaiset koordinaatit. Koordinaattijärjestelmiä ja koordinaatistoja on lukuisia ja samalla pisteellä voi olla useita koordinaatteja siitä riippuen mihin koordinaatistoon kukin koordinaatti liittyy.

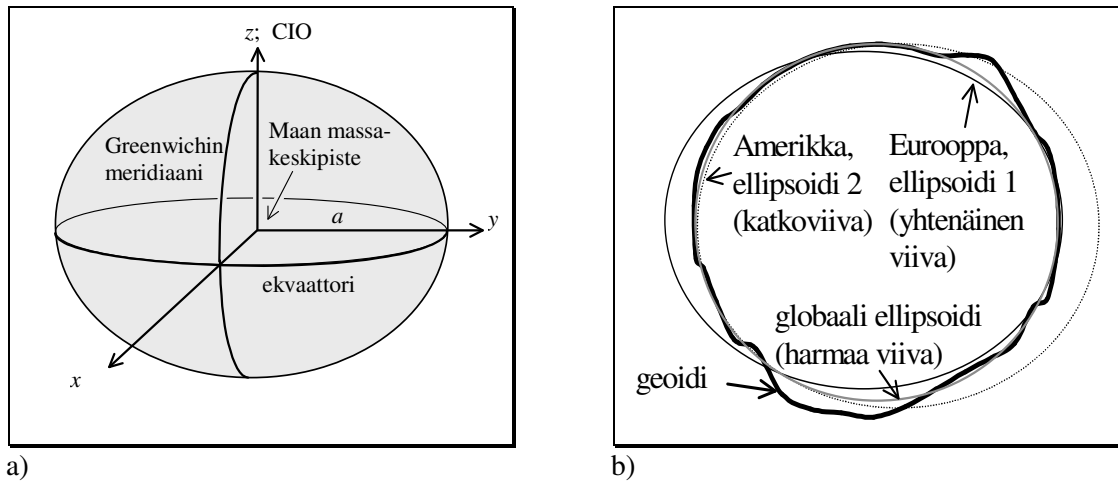
Kolmiulotteisen maailmamme koordinaatit ovat kolmiulotteisia, mutta usein paikka halutaan esittää myös (kaksiulotteisella) kartalla. Tällöin koordinaatit on muunnettava jollekin *karttaprojektiolle*. Karttaprojektion avulla kolmiulotteisen maailman koordinaatit voidaan sijoittaa kaksiulotteiselle kartalle. Karttaprojektioista riippuu, mitä tietoa on menetetty ja millaisia virheitä projektiio sisältää, sillä kolmiulotteista maailmaa ei voi virheettömästi kuvata kaksiulotteisella pinnalla.

Valitettavan usein nämä käsitteet menevät sekaisin, mutta toki myös koordinaattijärjestelmiä, koordinaatistoja ja karttaprojektioita on valtava määrä. Lisäksi GPS on tuonut mukanaan suuren joukon paikkatiedon tuottajia ja käyttäjiä, joilla aiemmin ei välttämättä ole ollut mitään tekemistä koordinaatistojen ja koordinaattien kanssa.

Vaikka kynnys paikkatiedon tuottamiseen onkin madaltunut tai käytännössä lähes poistunut, ei tarve koordinaattijärjestelmien, koordinaatistojen ja karttaprojektioiden ymmärtämiseen suinkaan ole vähentynyt. Päinvastoin. Kansainvälisten yhteyksien lisääntyessä tarve on pikemminkin kasvanut. Esimerkiksi EU:n piirissä on turha kuvitella antavansa paikkatietoa toiselle reunalle Eurooppaa suomalaisessa *kartastokoordinaattijärjestelmässä (kkj)*. Jos portugalilainen tai italialainen kumppani moisen lähetyksen hyväksyy, ei hänkään todennäköisesti tiedä mitä on tekemässä. Vaikka tieto on näennäisesti oikein, ei sillä parin tietojenvaihtokierroksen jälkeen välttämättä ole enää tekemistä todellisuuden kanssa. Koordinaatit kyllä osoittavat jonkin, mutta eivät suinkaan siihen pisteeseen, jonka paikkaa niiden oli alunperin tarkoitus kuvata.

Toinen viime aikoina ajankohtaiseksi muodostunut ongelmakenttä on reaaliaikainen GPS-mittaus, RTK (*Real Time Kinematic*), jossa "senttimetritarkkuisia" koordinaatteja voidaan tuottaa suoraan maastossa. Virhekontrollin kannalta RTK-mittaukset tekee erityisen hankalaksi se, että näennäisesti tarkkoja koordinaatteja voidaan tuottaa lennosta ilman minkäänlaista karkeiden tai systemaattisten virheiden kontrollia. Kunnollinen RTK-mittausten virhekontrolli vaatii ylimääräisiä mittauksia, joista nykyisen kustannustehokkuuden ajan mieluusti yritetään tinkiä.

Varsin paljon on puhuttu myös itse GPS-mittausten virheistä ja niiden vaikutuksesta mittausten lopulliseen tarkkuuteen. Tällä hetkellä tilanne on kuitenkin sellainen, että huolellisella mittaustajalla varsinaisten GPS-mittausten virheet ovat vain pieni osa siitä virheestä, joka voidaan tehdä koordinaattijärjestelmien huolimattomalla käytöllä. Lopputuloksen kannalta onkin oleellista ymmärtää eri koordinaattijärjestelmien perusteet, mitä GPSllä voidaan saada ja miten päästään halutuun karttaprojektioon.



a)

b)

**Kuva 1.** Maan muotoa kuvaamaan asetetaan tavallisesti pyörähdysellipsoidi; a). Aiemmin nämä sovitettiin niin, että ne kuvasivat Maata parhaiten sillä alueella, jolla niitä käytettiin; b). Nykyiset globaalit mallit käyttävät ellipsoideja, jonka keskipiste on maapallon massakeskipisteessä (harmaa viiva). Paksumpi viiva kuvaa keskimerenpintaa ja manneralueilla sen teoreettista jatketta, geoidia. Korkeusvaihtelut ovat suuresti liioiteltuja.

## Koordinaattijärjestelmät, koordinaatistot, koordinaatit

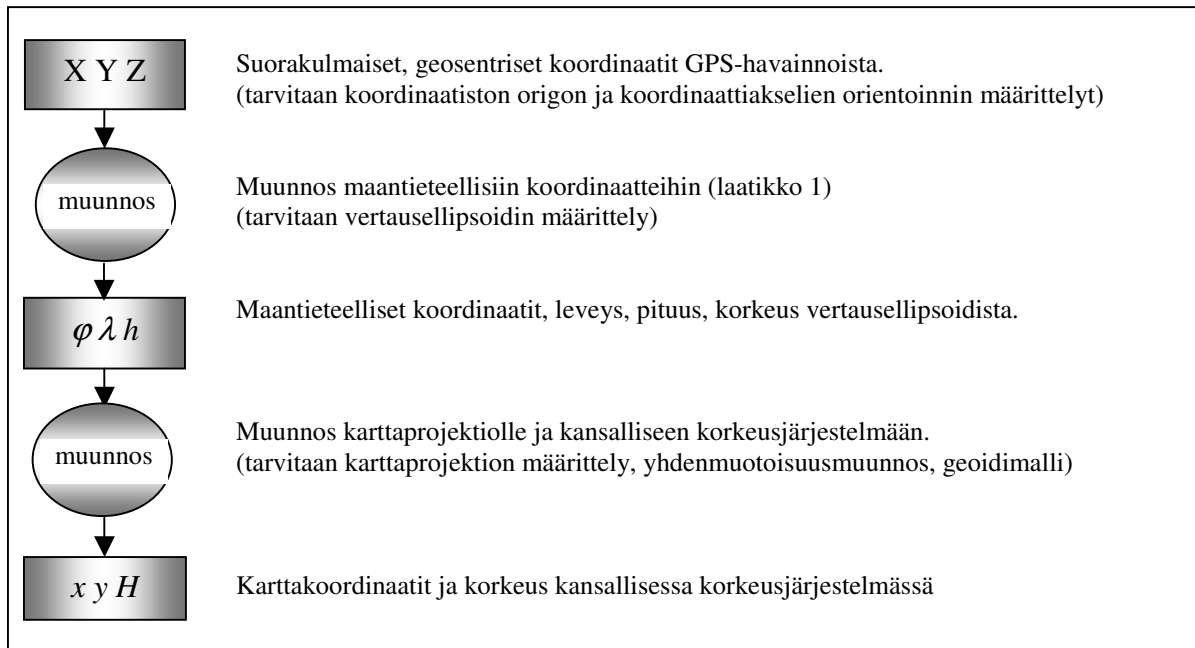
Geodeettisen vertausjärjestelmän eli *datum*in perustaminen edellyttää joitakin määrittelyjä, joiden avulla paikkaan liitettävät koordinaatit voidaan yksikäsitteisesti rekonstruoida ja tarvittaessa muuntaa jonkin toisen koordinaattijärjestelmän mukaisiksi koordinaateiksi. Nykyisin GPS:n yhteydessä käytettävät koordinaatistot ovat *globaaleja*, ts. samat määrittelyt ovat voimassa kaikkialla maapallolla.

Eri maissa on kuitenkin käytössä ennen satelliittiäikää luotuja geodeettisia järjestelmiä, jotka eivät ole globaaleja. Globaaleja koordinaatistoja onkin voitu luoda vasta avaruusgeodeettisten havaintojen myötä, kun Maan massakeskipisteen paikka pystyttiin määrittämään suhteessa mitattuun geodeettiseen verkkoon. Samalla voitiin luoda yhteys eri mantereilla olevien verkkojen välille. Vain kaikkein tarkimmissa töissä käyttäjän täytyy tehdä ero eri globaaleiden koordinaatistojen välille; sen sijaan Suomen kartoissa käytetty *kartastokoordinaattijärjestelmä* (kkj) ei sellaisenaan sovellu esimerkiksi GPS-mittausten laskentakoordinaatistoksi.

Nykyisissä globaaleissa koordinaattijärjestelmissä suorakulmaisen koordinaatiston origo asetetaan Maan massakeskipisteeseen, z-akseli osoittamaan Maan pyörimisakselin suuntaan ja x-akseli Greenwichin meridiaaniin. Näin määriteltyyn koordinaatistoon voidaan mitata kolmiulotteisia xyz-koordinaatteja. Intuitiivisesti tällainen kolmen luvun ryhmä ei kylläkään anna kuvaa siitä, missäpäin maapalloa piste sijaitsee. Perinteisesti pisteen koordinaatit ilmoitetaan antamalla sen pituus- ja leveysaste sekä korkeus.

Maan muotoa voidaan kuvata pallolla vain kaikkein epätarkimmissa töissä. Tavallisimmin Maan muotoa kuvaamaan asetetaan *pyörähdysellipsoidi*, jonka isoakselin puolikas on sama kuin Maan ekvaattorisäde ja litistyneisyys vastaa Maan litistyneisyyttä (n. 1/298). Nykyisissä globaaleissa koordinaatistoissa ellipsoidin keskipiste asetetaan Maan massakeskipisteeseen, mutta aiemmin ellipsoidin paikka ja muoto sovitettiin kuvaamaan Maan muotoa mahdollisimman hyvin ko. alueella. Niinpä esimerkiksi Euroopassa käytettiin eri ellipsoideja kuin Amerikassa. Globaaleista ellipsoideista mainittakoon GRS80 ja WGS84, joita kumpaakin voidaan käyttää GPS-mittausten yhteydessä ja jotka käytännössä ovat yhtenevät. Suomessa kkj:n yhteydessä käytettävä *Kansainvälinen ellipsoidi 1924 (Hayford)* poikkeaa sekä muodoltaan että asennoltaan WGS-ellipsoidista.

Laskussa on käytettävä aina sitä ellipsoidia, joka liittyy muunnettavaan datumiin. Muunnettaessa esimerkiksi suorakulmaisia WGS-koordinaatteja maantieteelliseksi on ellipsoidina luonnollisesti *WGS84*. Sen sijaan, jos siirrymme maantieteellisiin ED50-koordinaatteihin (esim. kkj:ään siirtymistä varten), on laskuissa käytettävä *Kansainvälistä ellipsoidia (1924)*. Väärän ellipsoidin käyttö johtaa erityisesti pohjois-eteläsuuntaiseen virheeseen; itä-länsisuunnassa virhe on tavallisesti pienempi.



### Suorakulmaiset ja maantieteelliset koordinaatit

Pisteen paikka voidaan siis ilmoittaa joko suorakulmaisina  $xyz$ -koordinaatteina tai maantieteellisinä koordinaatteina  $\varphi, \lambda$ , sekä korkeutena ellipsoidista  $h$ . Siirtyminen ellipsoidisista suorakulmisiin käy yksinkertaisesti kaavoilla

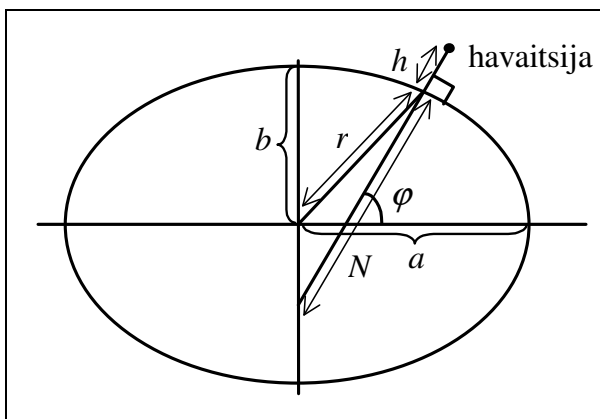
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left( \frac{b^2}{a^2} N + h \right) \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (1)$$

missä  $\varphi$  on leveys,  $\lambda$  pituus ja  $h$  korkeus ellipsoidista. Suure  $N$  on *poikittaiskaarevuussäde*,

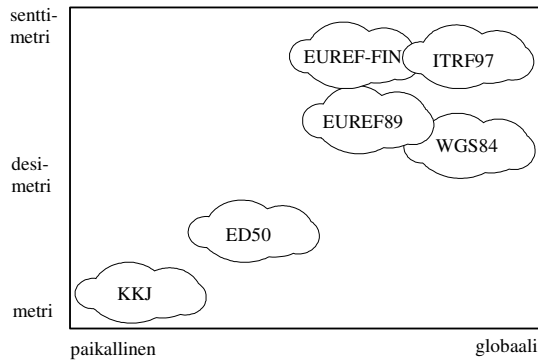
$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2)$$

missä  $a$  on *ekvaattorin säde* ja  $b$  *napasäde*.

Suorakulmaisten koordinaattien muuntaminen maantieteellisiksi on hieman monimutkaisempaa. Laskentamenetelmiä on monia. Laatikossa 1 on esitetty kaksi eri tapaa muunnoksen laskemiseksi.



**Kuva 2.** Referenssiellipsoidiin liittyvät suuret  $a, b, N$  ja  $\varphi$ .



**Kuva 3.** Koordinaatistot voidaan jaotella sen mukaan kuinka paikallisia tai globaaleja ne ovat. Esimerkkinä paikallisista koordinaatistoista on *kkj* ja globaaleista *ITRF*. Kuvan pystyakselilla on koordinaatiston tarkkuus (kuvitteelliseen ”absoluuttiseen referenssiin” nähden), sisältäen sekä sisäisen tarkkuuden että alueelliset deformaatiot ja erilaiset systemaattiset virheet. Asteikko on vain suuntaa antava.

**Laatikko 1.** Siirtyminen suorakulmaisista maantieteellisiin koordinaatteihin.

*Iterointi* on varsin nopea ja elegantti tapa käänteistehtävän laskemiseksi, koska Maan litistyneisyys on pieni. Ensimmäisessä vaiheessa saamme likiarvon havaitsijan leveysasteelle esimerkiksi kaavalla

$$\tan \varphi \approx \frac{Z}{(1 - e^2)\sqrt{X^2 + Y^2}} .$$

Näin saatua leveysastetta käyttäen lasketaan poikittaiskaarevuussäde  $N$  kaavasta (2) ja 1. eksentrisyys  $e$  laatikon lopussa olevalla kaavalla. Kaavan (1) kahdesta ensimmäisestä termistä saamme lausekkeen  $h$ :n laskemiseksi

$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi} - N ,$$

jonka jälkeen leveysasteen parannetuksi likiarvoksi

$$\tan \varphi = \frac{Z}{\left(1 - e^2 \frac{N}{N + h}\right)\sqrt{X^2 + Y^2}} .$$

Tätä käyttäen lasketaan uusi  $N$ :n likiarvo. Iterointia jatketaan, kunnes leveysaste ei halutulla tarkkuudella enää muutu. Useimmiten jo pari kierrosta on riittävä määrä. Lopuksi lasketaan havaitsijan pituusaste  $\lambda$ .

Kirjallisuudesta löytyy lukuisia sarjakehitelmiä tai likiarvokaavoja, kuten myös erilaisia iterointimenetelmiä. Eräs suhteellisen yksinkertainen ja tarkka likiarvokaava on (Hofmann-Wellenhof *et al.* 1994):

$$\varphi = \arctan \frac{Z + e^2 b \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cos^3 \theta} ; \quad \lambda = \arctan \frac{Y}{X} ; \quad h = \frac{p}{\cos \varphi} - N$$

$$\theta = \arctan \frac{Za}{pb} ; \quad p = \sqrt{X^2 + Y^2} = (N + h) \cos \varphi ; \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} ; \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

**Kartastokoordinaattijärjestelmä *kkj***

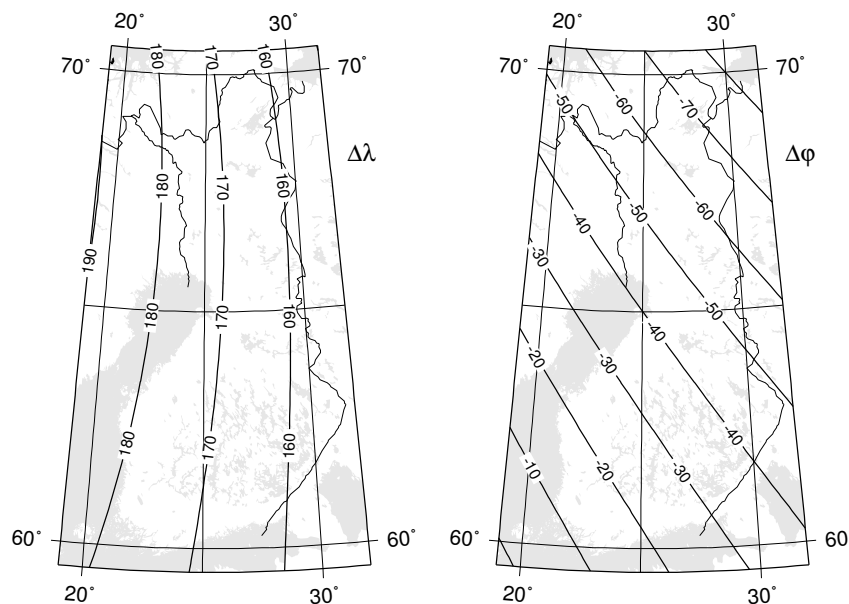
ED50 (*European Datum 1950*) on pohjana Geodeettisen laitoksen mittamaan Suomen I-luokan kolmioverkon tasoituksessa ja tätä kautta myös kartoissa käytettävässä *kartastokoordinaattijärjestelmässä*. ED50 perustuu euroopanlaajuiseen kolmioverkkojen yhteistasoitukseen, joka tehtiin 1950-luvulla. Näin saatiin aikaan koko Länsi-Euroopan kattava yhtenäinen koordinaatisto. ED50 vertausellipsoidina käytettiin *Kansainvälistä ellipsoidia* (1924, Hayford), joka ei ole geosentrinen vaan orientoitu niin, että se kuvaa Maan muotoa parhaiten Euroopan kohdalla. Ellipsoidin koon määrittelee sen isoakselin puolikas,  $a = 6378388$  m, ja muodon sen litistysuhde,  $f = 1/297$ . Suomessa käytössä oleva ED50 perustuu v. 1966 Geodeettisessä laitoksessa tehtyyn 291 I-luokan kolmiopisteen kansalliseen tasoitukseen (Korhonen, 1967), joten Suomen ED50 poikkeaa hieman yleiseurooppalaisesta kaimastaan.

Maanmittauslaitos otti v. 1970 käyttöön *kartastokoordinaattijärjestelmän* (kkj), joka saatiin aikaan siirtämällä ja kiertämällä Suomen ED50-järjestelmässä laskettua, tasolle projisoitua I-luokan kolmioverkkoa siten, että se yhtyi mahdollisimman hyvin tuolloin käytössä olleeseen *Helsingin järjestelmään* (nyk. *Vanha valtion järjestelmä*, vvj). Muunnoksen *siirtoparametrit* ratkaistiin 202 yhteisen pisteen avulla. kkj on suorakulmainen, *Gauss-Krüger* projektiioon perustuva, kolmen asteen kaistoissa oleva tasokoordinaatisto. Kaistojen keskimeridiaanit ovat 21°, 24°, 27° tai 30°. Lisäksi on luotu koko maan peittävä *yhtenäiskoordinaatisto* (yjk), jonka keskimeridiaani on 27°. kkj:ää (tai yjk:ää) käytettäessä on huomattava, että *kkj on määritelty vain Suomessa*. Maan rajojen ulkopuolella kkj:n käyttö johtaa ennakoimattoman suuruisiin virheisiin, eikä sen käyttöä voi edes perustella mitenkään, sillä kkj on puhtaasti kansallinen järjestelmä.

Kartastokoordinaattijärjestelmä poikkeaa geosentrisestä koordinaatistosta yhtä paljon kuin sitä edeltänyt Helsingin järjestelmäkin. Karttojen piirtotarkkuuteen tällä ei kuitenkaan ole vaikutusta. Vaikeudet alkoivat vasta GPS-laitteiden yleistymisen myötä, kun vastaanotinten tuottamat koordinaatit poikkesivat merkittävästi kartan ilmoittamasta paikasta. Ero on 160–180 m itä-länsisuunnassa ja 10–70 m pohjois-eteläsuunnassa (kuva 4). Em. siirto ja kierto saavat aikaan sen, että joillekin GPS-vastaanottimille ei pysty antamaan sellaisia muunnoskertoimia, että vastaanotin tuottaisi kunnollisia kkj-koordinaatteja.

Virhe esiintyy myös suhteellisessa mittauksessa. Jos GPS-mittauksissa lähtöpisteenä käytetään kkj-koordinaatteja esim. WGS84:n sijasta, koordinaattiakselien erisuuntaisuudesta ja skaalaerosta johtuu, että uuden pisteen koordinaattiin syntyy virhe, joka riippuu mitattavasta etäisyydestä ja suunnasta tunnettuun pisteeseen nähden. Jos etäisyys on alle 50 km, pysyy virhe alle desimetrin, mutta 500 km:n vektorilla virhe voi kasvaa yli metriin.

kkj on myös alueellisesti deformoitunut niin, ettei GPS:llä saatuja koordinaatteja voida minkäänlaisella yhdenmuotoisuusmuunnoksella muuntaa tarkasti kkj:ään. Pahimmillaan jäännösvirheet voivat olla useita metrejä, erityisesti I-luokan kolmioverkon silmukoiden sisään jäävillä alueilla. Polynomi-sovituksella tai paikallisilla muunnoskaavoilla voidaan jäännösvirheitä pienentää, mutta kokonaan ei ongelmista päästä eroon. Mikäli tarvitaan muutamaa metriä parempaa muunnostarkkuutta ei yksi maanlaajuinen yhdenmuotoisuusmuunnos riitä, vaan muunnoksessa käytettävät parametrit joudutaan johtamaan alueellisesti tunnettujen pisteiden koordinaattien avulla. Tässäkin tulevat vastaan omat ongelmansa, sillä tällöin ei ole mahdollista määrittää yhtä ”virallista” muunnoskertoimien sarjaa. Väistämättä kahden alueen raja tulee jossain vaiheessa vastaan, eikä tässä tapauksessa ole muuta mahdollisuutta, kuin jälleen kerran määrittää omat muunnosparametrit. Muunnosparametrien määrittäminen lisää jonkin verran sekä mittaus- että laskentatyötä. Myös RTK:n käyttö vaatii ylimääräisiä mittauksia. Jotta muunnosparametrit voitaisiin kunnolla määrittää, on alueelle mitattava joitakin ylimääräisiä tukipisteitä joille kkj-koordinaatit tunnetaan.



**Kuva 4.** WGS- ja kkj-koordinaattien välinen ero metreinä.

**Laatikko 2.** Gauss–Krüger -projektio kapealla projektiokaistalla ja muunnos kkj:ään

Pisteen maantieteelliset koordinaatit voidaan muuttaa Gauss–Krüger -projektion mukaisiksi taso-koordinaateiksi usean eri kehittelyn avulla. Projektiokaistan leveydestä ja vaadittavasta tarkkuudesta riippuu, mitä kaavoja voidaan käyttää. Seuraavassa esiteltävä varsin yksinkertainen kehitys (Brettenbauer 1995) soveltuu käytettäväksi, jos projektiokaistan leveys ei ylitä 3°:a. Leveämällä kaistoilla tämän kehittelyn virheet alkavat kasvaa nopeasti. Yhtenäiskoordinaatistossa on käytettävä esim. Hirvosen leveille projektiokaistoille johtamia kaavoja (Ollikainen 1993), joilla virhe pysyy alle millimetrin koko kaistan alueella.

Merkitään keskimeridiaanin longitudia  $\lambda_0$ :lla, pituusaste-eroa siitä  $l = \lambda - \lambda_0$ , ja olkoot ellipsoidin isoakseli  $a$  [m], pikkuakseli  $b = (1 - f) a$ , napakaarevuussäde  $c = a^2 / b$  ja 2. eksentrisyys  $e'^2 = (a^2 - b^2) / b^2$ .

Lasketaan seuraavat apusuureet ja kertoimet:

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi, \quad \varphi_F = \arctan\left(\frac{\tan \varphi}{\cos(l\sqrt{1+\eta^2})}\right)$$

$$n = \frac{a-b}{a+b}, \quad t = \frac{\tan l \cos \varphi_F}{\sqrt{1+e'^2 \cos^2 \varphi_F}}$$

$$A = a/(1+n), \quad A_1 = A\left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64}\right)$$

$$A_2 = A \frac{3n}{2} \left(1 - \frac{n^2}{8}\right), \quad A_3 = A \frac{15n^2}{16} \left(1 - \frac{n^2}{4}\right)$$

$$A_4 = A \frac{35n^3}{48}$$

minkä jälkeen  $x$  ja  $y$  voidaan laskea kaavoista ( $\varphi_F$  sijoitetaan kaavaan radiaaneina)

$$\begin{aligned} x &= A_1 \varphi_F - A_2 \sin 2\varphi_F + A_3 \sin 4\varphi_F - A_4 \sin 6\varphi_F \\ y &= c \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + 500\,000 \end{aligned} \quad (L1)$$

Kaava (L1) antaa koordinaatit mm-tarkkuudella vielä 2° (n. 100 km) päässä keskimeridiaanista, mutta 4° (n. 200 km) päässä virhe kasvaa jo noin 2 cm:iin (Ollikainen), joten yhtenäiskoordinaatistossa tätä kehitystä ei voi käyttää. Koska kkj:ää luotaessa  $y$ -koordinaatille annettiin keskimeridiaanilla arvo 500 000 m, on kaavan (L1)  $y$ -koordinaatin arvoon lisätty tuo luku.

Ellipsoidina on luonnollisesti käytettävä Kansainvälistä (1924) ellipsoidia, jos olemme projisioimassa ED50-koordinaatteja tasolle. Sen sijaan, jos kyseessä on esim. WGS84-koordinaattien projektio, on ellipsoidiksi otettava GRS80.

Tasolle projisioidusta ED50-koordinaateista (L1) pääsemme kkj:ään tekemällä Helmert-muunnoksen tasossa, ts. kierrämme, siirrämme ja muutamme koordinaatiston skaalaa

$$\begin{pmatrix} x_{KKJ} \\ y_{KKJ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{ED-50} \\ y_{ED-50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad (L2)$$

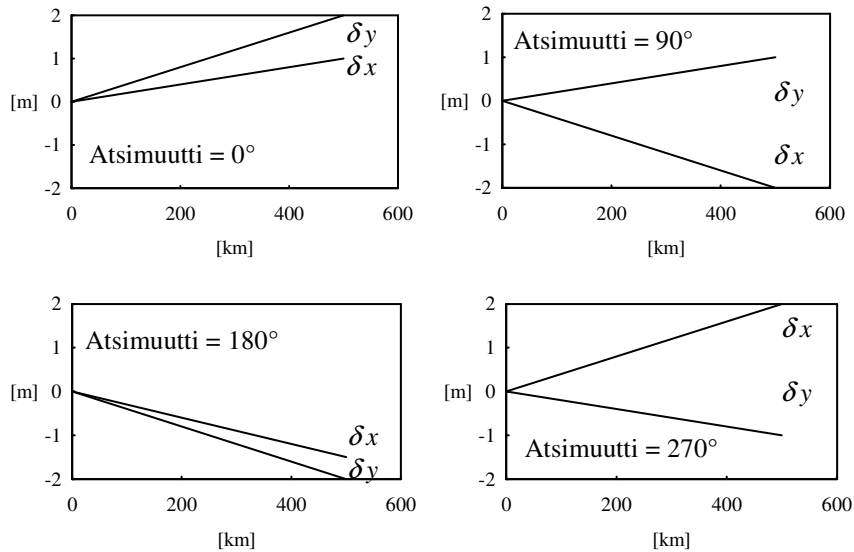
missä muunnosparametrit ovat (Ollikainen 1993):

$$\begin{aligned} a &= 1.00000075150 \\ b &= -0.00000439333 \\ \Delta x &= -61.5805 \\ \Delta y &= 95.6691. \end{aligned}$$

Käänteisen muunnoksen KKK → ED50 kertoimet ovat

$$\begin{aligned} a &= 0.99999924848 \\ b &= -0.00000439332 \\ \Delta x &= -61.5800 \\ \Delta y &= 95.6693. \end{aligned}$$

Ellei muunnoksessa tarvita muutamaa metriä suurempaa tarkkuutta, voi korjauksen katsoa esim. kuvan 4 avulla. Käytettiinpä mitä muunnosta tahansa, on koordinaatteja edestakaisin muunnettaessa käytettävä samaa muunnosta samoine parametreineen kumpaankin suuntaan. (Ks. myös Poutanen, 1998.)



**Kuva 5.** *kkj:n* käyttäminen lähtökoordinaatteina aiheuttaa suunnasta ja etäisyydestä riippuvan virheen.  $\delta x$  on  $x$ -koordinaattiin tuleva virhe,  $\delta y$  on  $y$ -koordinaatin virhe (skaala metreinä). Vaaka-akselilla on pisteiden välinen etäisyys kilometreinä. Atsimuutti tarkoittaa pisteiden välisen vektorin atsimuuttia. (Ollikainen 1993)

## WGS84, ITRF ja muut globaalit koordinaatit

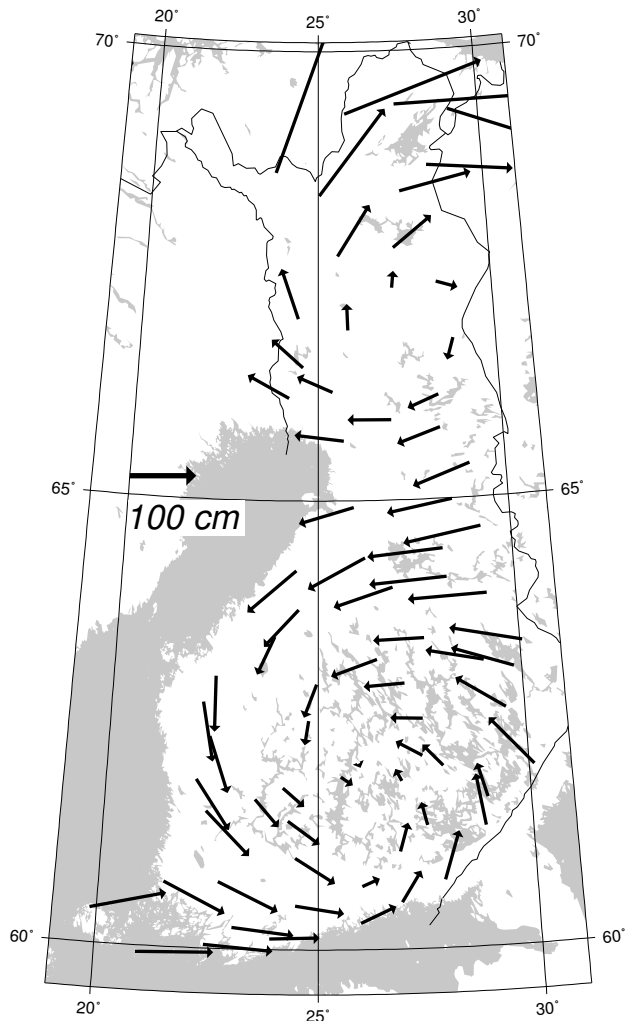
GPS-satelliitit lähettävät ratatietonsa WGS84-järjestelmässä. Järjestelmä ja sen realisaatio on määritelty Yhdysvaltain armeijan karttaviraston (*National Imagery and Mapping Agency, NIMA*, aiemmin *Defence Mapping Agency, DMA*) julkaisussa (DMA 1987). GPS-laskut tulisikin suorittaa tässä järjestelmässä. WGS84 määritelmä ja sen realisaatio on kuitenkin jo varsin vanha, joten tarkimmissa töissä käytetään uudempiä globaaleja koordinaatistoja, kuten ITRF.

Pariisissa keskuspaikkaansa pitävä, Kansainvälisen geodeettisen assosiaation IAG:n alakomissio *IERS (International Earth Rotation Service)* huolehtii tarkimpien globaalien koordinaatistojen määrittelystä ja realisoinnista. ITRF (*International Terrestrial Reference Frame*) on IERS:n ylläpitämä koordinaatisto, joka on tätä nykyä tarkin globaali koordinaatisto, ja sitä käytetään lähes yksinomaan, kun koordinaatteja tarvitaan tutkimuskäytössä (uusin saatavissa oleva on ITRF97). Koska koordinaatiston määrittelevät kiintopisteet sijaitsevat eri mantereilla, liikkuvat pisteet mannerlaattojen mukana toistensa suhteen, joten koordinaatin lisäksi on annettava myös pisteen liikenopeus ja ajanhetki, jolle koordinaatit pätevät. Koordinaattitarkkuus on senttimetriluokkaa ja koordinaatit ovat metritasolla yhtenevät WGS84:n kanssa. Suomesta ITRF-verkkoon kuuluu neljä pistettä, Geodeettisen laitoksen Metsähovin, Vaasan, Joensuun ja Sodankylän pysyvät GPS-asemat.

## Eurooppalainen koordinaattijärjestelmä ja sen suomalainen realisaatio EUREF-FIN

Ajan mukana muuttuvat ITRF-koordinaatit ovat hankalahkoja moniin käytännön tarpeisiin, esimerkiksi kartoitukseen. Niinpä vuoden 1990 Firenzen kokouksessaan IAG:n (*International Association of Geodesy*) alakomissio EUREF (*European Reference Frame of the Commission X on Continental Networks*) esitti, että Euroopassa tulisi ryhtyä käyttämään koordinaatistoa, joka on kiinnitetty Euraasian mannerlaattaan. Järjestelmää kutsutaan ETRS:ksi (*European Terrestrial Reference Frame*) ja se määriteltiin yhteneväksi ITRF:n kanssa vuonna 1989. Järjestelmän mukaiset koordinaatit eivät muutu ajan myötä.

Järjestelmän realisoimiseksi toteutettiin jo v. 1989 eurooppalaajuinen GPS-kampanja, josta laskettuja EUREF89-koordinaatteja voidaan pitää tämän eurooppalaisen koordinaatiston peruspisteinä. Suomesta mittaukseen kuului vain neljä pistettä, nimittäin Kaunispää, Nisula ja Jänhiälä, jotka ovat I luokan kolmiopisteitä, sekä Metsähovin lähellä oleva Sjökökulla, joka on myös VLBI-piste. (Pitkäkanta-interferometria, VLBI, on menetelmä, jossa radioteleskooppeja käyttäen voidaan mitata globaali verkko hyvin tarkasti ( $10^{-9}$ ). VLBI-mittauksia käytetäänkin globaalien koordinaatiston asennon ja mittakaavan kiinnittämiseen. Näin luotu ”runko” tihennetään GPS-mittauksin.)



**Kuva 6.** Suomen EUREF-FIN koordinaattien ja ED-50 -koordinaattien välisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen jälkeiset jäännösvirheet. Koska  $ckj$  perustuu ED-50 -tasoitukseen, ovat muunnosvirheet myös siihen nähden samanlaiset. (Ollikainen et al., 2000)

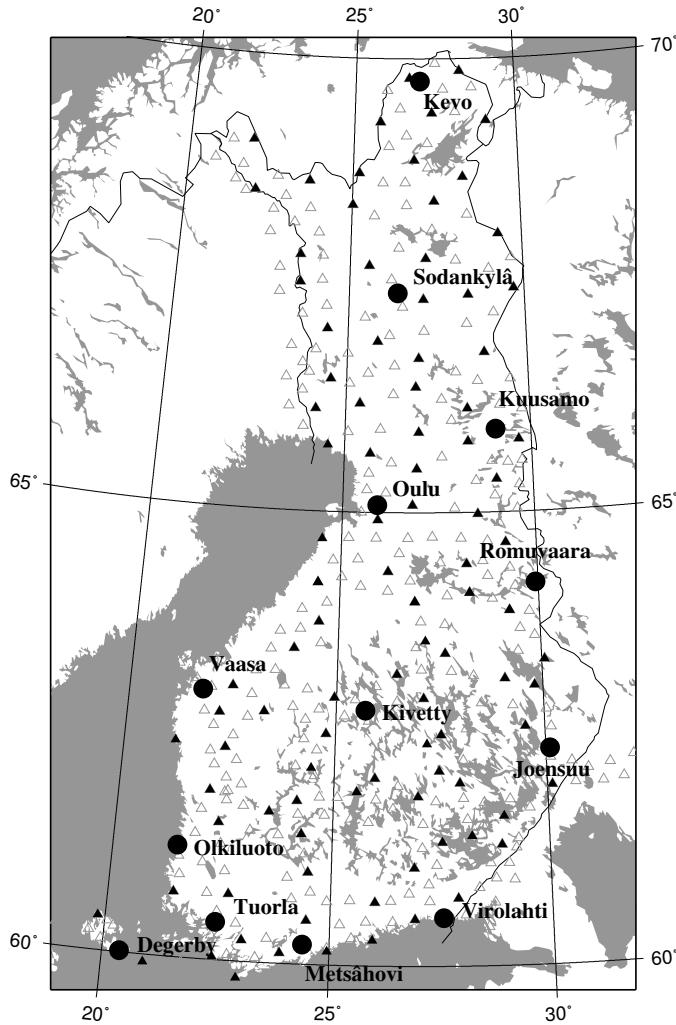
EUREF-koordinaatistoa on laajennettu ja tarkennettu lukuisissa myöhemmissä kampanjoissa. Sen pohjalle on moniin maihin luotu kansallinen koordinaatisto, näin myös Suomeen. Suomen EUREF-FIN on lähes yhtenevä, mutta ei täysin identtinen alkuperäisen EUREF-koordinaatiston kanssa. Syynä eroihin on lähinnä uuden verkon parantunut sisäinen ja ulkoinen tarkkuus, sekä EUREF-komission myöhemmin tekemät päätökset, joilla on tarkennettu ITRF:stä EUREF-koordinaatistoon tehtävää muunnosta.

Vuosina 1996-97 Geodeettinen laitos mittasi sadan I-luokan kolmiopisteen koordinaatit EUREF-vaatimusten edellyttämällä tarkkuudella. Tämä sadan pisteen verkko muodostaa yhdessä Suomen 12 asemasta koostuvan pysyvän GPS-verkon kanssa EUREF-FIN-koordinaatiston peruspisteistön (Ollikainen et al., 2000).

Suomesta yhteiseurooppalaiseen EUREF-verkkoon kuuluu nykyisin 19 pistettä, jota enempää kansallisia pisteitä ei viralliseen listaan otetakaan. Muut sadan pisteen verkkoon kuuluvat pisteet voidaan katsoa EUREF-verkon kansalliseksi tihennykseksi, vaikkakin ne on mitattu ja laskettu täysin samojen kriteerien mukaisesti ja ovat koordinaattitarkkuudeltaan samoja.

Vuosina 1998–1999 Geodeettinen laitos mittasi lisäksi n. 350 käyttöpisteen verkon. Tämä siksi, että suurin osa I-luokan kolmiopisteistä on varsin hankalasti saavutettavissa. Käyttöpisteet sijaitsevat teiden varsilla ja ne on sidottu lähimpiin EUREF-FIN-peruspisteisiin ja Suomen pysyvään GPS-verkkoon. Tämän jälkeen pisteiden tiheys on jo sellainen, että EUREF-koordinaatteja tarvitseva pystyy varsin helposti sitomaan omat mittauksensa EUREF-verkkoon. Pisteiden lopulliset koordinaatit julkaistaan vuoden 2001 alussa.





**Kuva 7.** Suomen pysyvä GPS-verkko FinnRef (mustat ympyrät), vuosina 1996-97 mitattu EUREF-tihennys (täytetyt kolmiot) sekä muut vanhat I-luokan kolmiopisteet (avoimet kolmiot).

## GPS ja korkeus

Korkeusjärjestelmämme perustuu vaaituksin määritettyihin *ortometrisiin korkeuksiin*  $H$ . Korkeuden lähtötasoksi valitaan yleensä sellainen geopotentialin tasa-arvopinta eli *geoidi*, joka likimain yhtyy vapaaseen valtameren pintaan; tosin lähtötason valinta on enemmän tai vähemmän mielivaltaisen, mikä on yksi syy siihen, että eri maiden korkeuksia ei voida suoraan verrata keskenään. Geoidia ei voida kuvata millään yksinkertaisella matemaattisella pinnalla; esimerkkinä kuvassa 10 on ellipsoidin ja geoidin välinen korkeusero Suomen alueella. Ortometrinen korkeus on siis ei-geometrinen suure.

Koska geoidi kuitenkin on vaaituksen referenssipinta, on geoidin ja ellipsoidin välinen korkeusero tunnettava, jotta GPS-havainnoista saatava korkeus  $h$  voidaan muuntaa ortometriseksi korkeudeksi  $H$ . Suomessa on käytössä *Suomen toiseen tarkkavaaitukseen* perustuva *N60-järjestelmä*, jossa korkeudet on redukoitu epookkiin 1960.0. (Myös vanhentuneita N43- ja NN-järjestelmiä näkee vielä käytettävänä, mutta niihin emme tässä sekaannu.)

GPS tuottaa kolmiulotteisia koordinaatteja. k: sen sijaan on tasokoordinaatisto. Kun koordinaatteja muunnetaan k:ään, herää kysymys, mitä tehdään korkeudelle  $h$ , joka on korkeus vertausellipsoidista. Jotta GPS:llä määritetty korkeus  $h$  voidaan muuntaa vaaitusta vastaavaksi korkeudeksi  $H$ , täytyy tuntea geoidin korkeus ellipsoidista,  $N$ . Näiden välillä on yksinkertainen yhteys:

$$H = h - N. \quad (3)$$

Geoidin korkeuden  $N$  laskemista varten tarvitsemme *geoidimallin*. Tällainen on esim. Suomen oloihin sovitettu FIN2000. Sitä käyttäen korkeus  $H$  saadaan suoraan Suomen virallisessa N60-korkeusjärjestelmässä. Tarkkuus on parempi kuin n. 10 cm koko maan alueella. Paikallisella sovituksella voidaan päästä pariin senttimetriin.

Aivan kuten koordinaatistoja, myös geoidimalleja on useita. Monet niistä ovat globaaleja, ts. ne kuvaavat koko maapallon geopotentialkenttää. Tällaiset mallit voivat paikallisesti olla virheellisiä jopa useita desimetrejä, sillä ne eivät pysty kuvaamaan painovoimakentän pieniä paikallisia vaihteluita. Toinen syy globaalin geoidimallin huonoon sopivuuteen on sen korkeustaso. Sitä ei ole sovitettu kansallisen korkeusjärjestelmämme nollassa, joka ero myös voi olla useita desimetrejä. Joidenkin GPS-vastaanotinten sisäänrakennetut korkeusmuunnokset käyttävät globaaleja geoidimalleja, joten syntyvä virhe voi olla jopa metriluokkaa. Käyttäjällä ole kontrollia virheen suuruuteen tai pahimmillaan moista havaintojen tuhoajaa ei edes voi kytkeä pois päältä. Käyttäjän ainakin tulisi tietää, että GPS:n antama korkeus voi olla virheellinen enemmän kuin mitä GPS:n koordinaattitarkkuus muutoin antaisi aiheutta olettaa.

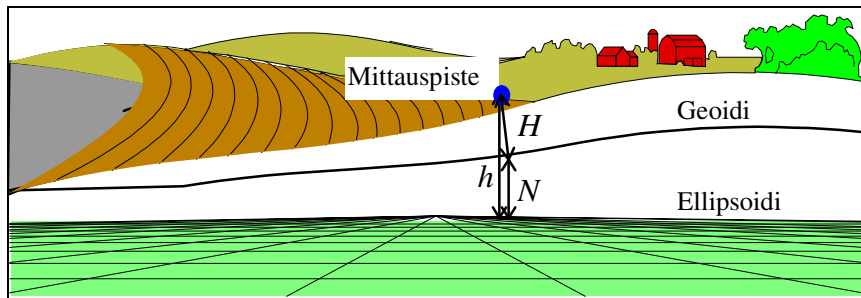
Pienellä alueella (max. muutama km) voidaan tulla toimeen ilman geoidimalliakin, mikäli tarkkuusvaatimukset eivät ole suuret. Tällöin on mitattava alueen ympäri tukipisteiden verkko, joille N60-korkeus tunnetaan ja joiden avulla muunnos  $H = h - N$  voidaan laskea. Siirryttäessä tukipisteistön ulkopuolelle tai alueen koon kasvaessa virheet kasvavat voimakkaasti.

Paikallisen, vain Suomen oloihin sovitetun luonteensa vuoksi FIN2000-mallia ei voida käyttää, mikäli GPS-havainnot ulottuvat valtakunnan rajojen yli. Esimerkiksi Ruotsin RH70-korkeudet on mitattu geoidista, jonka taso ja asento poikkeavat Suomen vaaituksen pohjana käytetystä geoidista. Lisäksi FIN2000-mallin virheet alkavat kasvaa, jos ollaan kovin kaukana alueesta, jonka pisteistöön se on sovitettu. Tällöin täytyy käyttää joko jotain globaalista mallia, tai alueellista geoidia, esim. Fennoskandiassa NKG96-geoidia. NKG96 on yhtä tarkka kuin FIN2000 kunhan sen korkeustaso on sovitettu vastaamaan paikallisen korkeusdatumin tasoa.

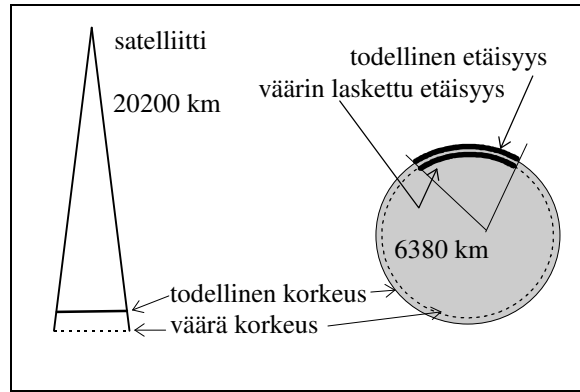
Toisaalta mikään geoidimalli ei muunna korkeuksia  $h$  samanaikaisesti suoraan usean eri maan korkeusdatumiin. Tämä johtuu mm. siitä, että kussakin maassa käytetty geoidi poikkeaa sekä asennoltaan että tasoltaan muiden maiden vastaavista geoidista. Jos korkeudet halutaan yhteiseen datumiin, on kaavaan lisättävä kutakin maata varten sekä vakiokorjaus, että korkeudesta, leveys- ja pituusasteesta riippuvat korjaukset ja mahdollinen maannousukorjaus.

*Maannousu* on Fennoskandian alueelle tyypillinen ilmiö. Pohjanlahden perukassa on maannousun maksimi; maa kohoaa merenpintaan nähden lähes senttimetrin vuodessa. Suomen korkeudet on redukoitu maannousun osalta eepokkiin 1960.0 (N60-järjestelmä). Havaintohetkeen mennessä maa on ehtinyt kohota tästä jopa desimetrikaupalla. Yleensä korkeudet mitataan lähtemällä tunnetusta korkeuskiintopisteestä ja mittaamalla uusien pisteiden korkeudet tämän suhteen. Pienellä alueella maannousu voidaan olettaa vakioksi, jolloin *korkeuserot* eivät tällä alueella muutu. Uusien pisteiden korkeudet saadaan näin suoraan N60-järjestelmään ilman sen enempiä reduktioita. Jos GPS-verkko ulottuu usean kymmenen kilometrin alueelle, on maannousu kuitenkin otettava huomioon, sillä pisteiden välinen *maannousuero* saa aikaan systemaattisen virheen.

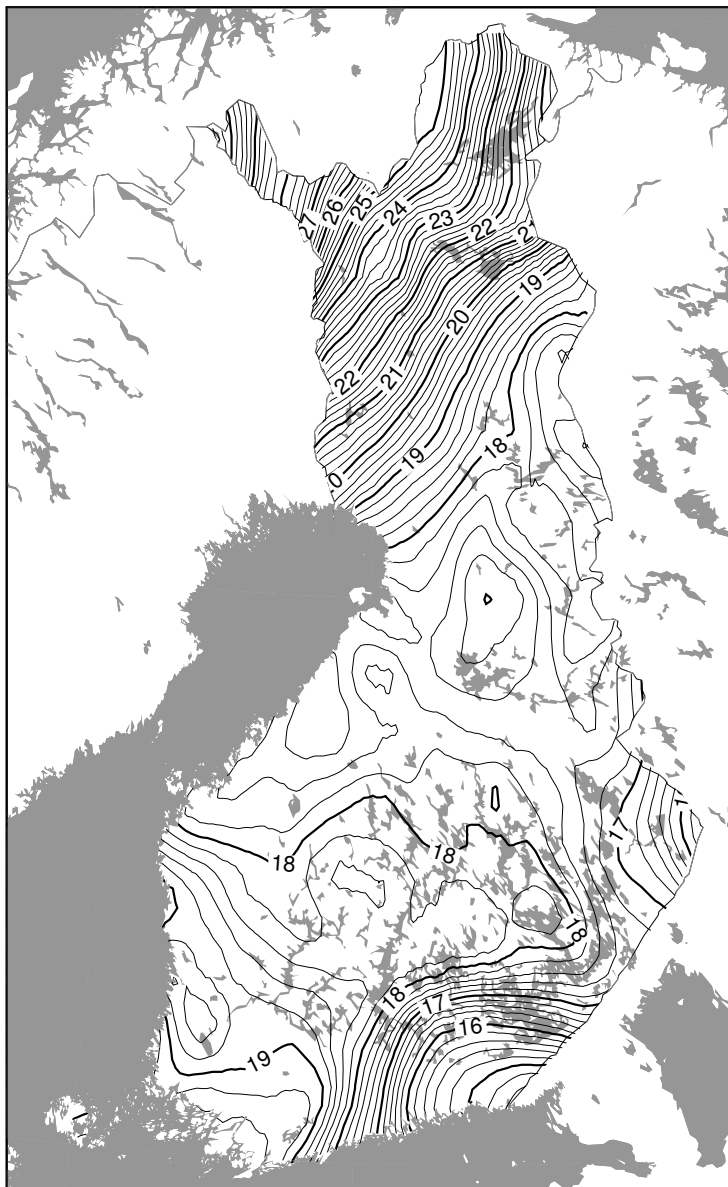
Myös FIN2000-malli on aikaan sidottu, ts. se on laskettu käyttäen GPS-havaintoja, jotka on tehty n. v. 1997. Niinpä lähivuosina malli korvataan uudemmalla, joka perustuu sekä uudempaan ja tarkempaan geoidimalliin että useampiin GPS-kontrolipisteisiin. Mitään kovin yksinkertaista ratkaisua maannousun eliminoimiseksi ei ole silloin kun GPS-havaintoja tehdään vähänkin laajemmalla alueella ja tarkkuusvaatimukset liikkuvat senttimetriluokassa.



**Kuva 8.** Havaitajan korkeus geoidista on  $H$  ja ellipsoidista  $h$ . Suure  $N$  on geoidin korkeus ellipsoidista.



**Kuva 9.** Väärän korkeuden vaikutus verkon skaalaan. GPS:llä mitatut avaruusvektorit ovat kaikki skaalavirheen verran väärin mittaisia. Tällaisen väärällä korkeudella olevan vektorin redukointi takaisin ellipsoidille aiheuttaa moninkertaisen skaalavirheen GPS-määrittämisestä tulevaan skaalavirheeseen verrattuna. Pisteelle saadaan helposti väärä korkeus käyttämällä tunnetun pisteen lähtökoordinaattina esim. N60-korkeutta todellisen ellipsoidikorkeuden sijasta. Laatikossa 3 on laskettu tällaisen, n. 20 m korkeusvirheen aiheuttavan yli 3 ppm:n skaalavirheen, joka useissa mittauksissa ylittää huomattavasti itse GPS-mittauksesta tulevan virheen.



**Kuva 10.** FIN2000-geoidmalli. Geoidin korkeudet N on ilmoitettu GRS80-ellipsoidista metreinä.

GPS-mittauksissa lähtöpisteen koordinaatteina täytyy käyttää globaalin koordinaatiston mukaisia koordinaatteja, kuten edellä näimme kkj:n yhteydessä (kuva 5). Aivan sama pätee myös korkeuden suhteen. Jos lähtöpisteen korkeutena käytetään ortometrista N60-korkeutta, poikkeaa korkeus ellipsoidisesta korkeudesta Suomen alueella likimain 20 m (ks. kuva 10), ts. suureen  $N$  verran. Tämä aiheuttaa mitattuun verkkoon skaalavirheen, jonka suuruus voi olla jopa 3 ppm (kuva 9 ja laatikko 3). Lähtöpisteelle täytyykin laskea sen todellinen korkeus ellipsoidista ennenkuin koordinaatit annetaan GPS-mittauksen lähtökoodinaateiksi. Vasta laskennan jälkeen palataan takaisin ortometrisiin korkeuksiin.

**Laatikko 3. Väärän lähtökorkeuden vaikutus verkon skaalaan (Poutanen, 1998)**

Tarkastellaan tilannetta, jossa pisteen todellisen ellipsoidikorkeuden sijasta käytetäänkin N60-korkeutta. Olkoon ero 20 m, joka kuvaa tilannetta Suomen alueella varsin hyvin. Lasketaan vektori Helsinki – Kemi (tämä on todellisesta datasta laskettua; oleellista seuraavassa kuitenkin on kahdesta identtisestä laskusta saadut erot, ei absoluuttiset arvot).

Ainoa ero lähtötilanteessa ja laskennassa on, että kiinteän pisteen (tässä Helsinki) korkeus on toisessa laskussa pantu 20 m todellista pienemmäksi, ts. vastaamaan tilannetta, jossa lähtökorkeutena käytetään N60-korkeutta ellipsoidikorkeuden sijasta. Laskujen tulokseksi saadaan:

**Tapaus 1: Lähtöpisteen korkeutena käytetty N60-korkeutta**

Station1: FIXED STATION (FI03)	Station2: UNKNOWN STATION (FI06)
Latitude: 60 9 13.23893	65 40 27.76748
Longitude: 24 57 24.23987	24 31 5.65828
E-Height: 4.8783	6.8420
X: 2885128.7341	2397062.7355
Y: 1342706.1205	1093326.0640
Z: 5509022.3494	5789091.7069
Baseline vector:	
$\Delta X$ :	-488065.9987
$\Delta Y$ :	-249380.0565
$\Delta Z$ :	280069.3575
Length:	615497.9095

**Tapaus 2: Lähtöpisteen korkeutena käytetty todellista ellipsoidikorkeutta**

Station1: FIXED STATION (FI03)	Station2: UNKNOWN STATION (FI06)
Latitude: 60 9 13.23893	65 40 27.69621
Longitude: 24 57 24.23987	24 31 5.67034
E-Height: 24.8783	26.8157
X: 2885137.7582	2397071.9873
Y: 1342710.3202	1093330.4531
Z: 5509039.6967	5789108.9980
Baseline vector:	
$\Delta X$ :	-488065.7709
$\Delta Y$ :	-249379.8671
$\Delta Z$ :	280069.3013
Length:	615497.6266

Näistä kahdesta määrittämisestä saamme Kemin maantieteellisille koordinaateille seuraavat erot:

$$\Delta\varphi (1-2) = 0.071'' = 2.1 \text{ m}$$

$$\Delta\lambda (1-2) = -0.012'' = -0.2 \text{ m}$$

Vastaavasti Helsinki–Kemi -vektorin komponenteille saamme eroiksi

$$\Delta(\Delta X) (1-2) = 0.23 \text{ m}$$

$$\Delta(\Delta Y) (1-2) = 0.19 \text{ m}$$

$$\Delta(\Delta Z) (1-2) = 0.06 \text{ m}$$

$$\Delta(\text{pituus}) (1-2) = 0.28 \text{ m}$$

Vektori on siis pidentynyt  $0.28 \text{ m} / 615497 \text{ m} = 0.45 \times 10^{-6} = 0.45 \text{ ppm}$ . Jos tyydymme pelkkiin avaruusvektoreihin, on verkon skaalaan aiheutettu vain vajaan 0.5 ppm:n virhe. Vektori myös kääntyy hieman.

Jos kuitenkin siirrymme maantieteellisiin koordinaatteihin, huomaamme Kemin latitudin muuttuneen peräti 2 m. Suhteellisena virheenä tämä on  $2 \text{ m} / 615497 \text{ m} = 3.2 \times 10^{-6} = 3.2 \text{ ppm}$ . Longitudiin vaikutus on paljon vähäisempi, koska Helsinki ja Kemi sijaitsevat lähes samalla pituusasteella. *Verkon skaala on siis yli 3 ppm virheellinen.*

Vaikka vektori onkin tässä varsin pitkä, ei tilanne muutu mihinkään lyhyillääkään vektoreilla; skaalavirhe on tuon runsaat 3 ppm, ts. 3 cm kymmenen kilometrin vektorilla. Tämä on paljon enemmän kuin GPS-määrittelyn tarkkuus. Laskentaohjelma ei luonnollisestikaan havaitse tällaista systemaattista virhettä, vaan se menee suoraan pisteiden koordinaatteihin. (Täytyy vain hiljaisesti toivoa, ettei Suomenmaahan ole kovin paljon mitattu tällä tavoin laskettuja koordinaatteja.)

Jotta skaalan oikeellisuus maan laajuisissa mittauksissa taattaisiin millimetritasolla, on lähtökoordinaatin ellipsoidikorkeus tunnettava senttimetrin tarkkuudella. Vaatimus on erittäin kova, koska Suomessa ei ole kovinkaan monta tällaista pistettä. Ortometrisen korkeuden ja geoidimallin avulla laskettu ellipsoidikorkeus on parhaimmillaankin vain desimetriluokkaa.

## Karttaprojektiot

Koordinaattien esittäminen kartalla vaatii aina jonkinlaisen projektion käyttöä. Perimmäisenä syynä on se, että todellista kolmiulotteista maailmaa ei voi väkivaltaa käyttämättä esittää kaksiulotteisella tasolla. Karttaprojektioita on valtava määrä, mutta yhteisenä piirteenä niillä kaikilla on se, etteivät ne pysty esittämään todellisuutta virheettömästi. Käyttötarkoituksesta riippuu, mitä projektiota kannattaa milloinkin käyttää, ts. pyritään valitsemaan se, jonka virheet ko. tapauksessa ovat pienimmät.

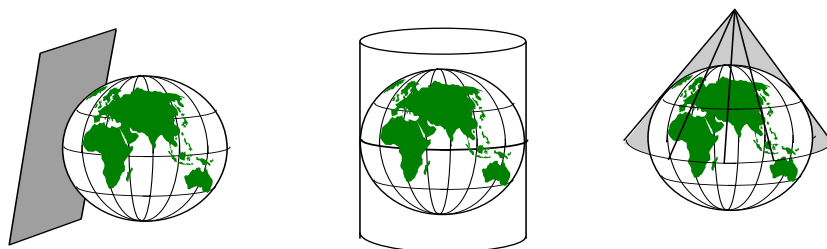
Pallo tai ellipsoidi projisoidaan pinnalle, joka on helppo muuntaa tasoksi. Vain kaikkein epätarkimmissa töissä Maata voidaan approksimoida pallolla; muissa tapauksissa käytetään datumiin liittyvää referenssiellipsoidia. Tasolle siirtyminen tehdään joko välittömästi havaintojen jälkeen, jolloin tarvittavat laskut suoritetaan projektioitasolla tai sitten laskut suoritetaan ellipsoidilla (tai suoraan 3-D:ssä) ja vasta tämän jälkeen valmiit koordinaatit projisoidaan tasolle.

Jälkimmäinen tapa on ehdottomasti suositeltavampi tarkkuuden kannalta, vaikka numeerisesti ellipsoidilla laskeminen saattaa olla huomattavasti työläämpää. Tosin nykyisin numeeriset ongelmat eivät ole enää esteenä; pikemminkin kyse tuntuu olevan käsinlaskuaikaisten traditioiden säilyttämisestä. Koordinaatteja ei tulisiakaan siirtää karttaprojektioille ennen kuin niitä todella tarvitaan pisteiden sijoittamiseksi kartalle.

## Projektioiden luokittelu

Projektiot voidaan jaotella sen mukaan, millaiselle pinnalle projisointi tehdään. Yksinkertaisin on *projisointi suoraan tasolle*. Tällöin tangenttitaso asetetaan haluttuun pinnan pisteeseen ja projisoidaan ellipsoidin pisteet tälle. Tällaista projektiota kutsutaan myös *atsimutaaliseksi projektioksi*.

*Lieriö* voidaan myös muuntaa tasoksi. *Lieriöprojektiio* saadaan asettamalla lieriö sivuamaan ellipsoidia pitkin jotain isoympyrää (tai tarkkaan ottaen isoympyrä määritellään vain pallolle; tässä tapauksessa pitäisi ehkä puhua geodeettisesta viivasta tai tason ja ellipsoidin leikkausviivasta; ympyrä tämä on vain kun leikkaava taso on ellipsoidin kahden pääakselin virittämän tason suuntainen). Jos lieriö on asetettu niin että se sivuaa ellipsoidia ekvaattorilla, on kyseessä *normaaliasentoinen lieriöprojektiio*, jos pitkin meridiaania, *poikittainen lieriöprojektiio*, muussa tapauksessa *vino lieriöprojektiio*. Kolmas helposti tasokartaksi muuntuva pinta on *kartiio*. Jos kartio asetetaan niin, että sen kärki on pyörähdysakselilla, on kyseessä *normaaliasentoinen kartioprojektiio*. Kartio joko sivuaa ellipsoidia pitkin paralleeliympyrää tai sitten se leikkaa ellipsoidin pitkin kahta paralleeliympyrää.



**Kuva 11.** Taso-, lieriö- ja kartioprojektiot

Toinen tapa luokitella projektiot on niiden kyky säilyttää tietyt alkuperäisen 3-D maailman seikat muuttumattomina. *Konformiset projektiot* säilyttävät pienten projisioitavien kuvioiden muodot. Tarkasti ottaen tällaista ei ole olemassakaan kuin infinitesimaalisen pienellä alueella; mitä suurempiin alueisiin mennään, sitä enemmän vääristymiä syntyy. Myöskään skaala ei säily muuttumattomana infinitesimaalista suuremmalla alueella. Monissa projektioidissa on vain yksi viiva, tai keskipisteestä lähtevät säteet, joilla skaala säilyy. Jos tällaisen viivan sijainti valitaan sopivasti, saadaan skaalamuutoksesta syntyvät vääristymät minimoitua kuvan alueella.

Metrin pituus siis muuttuu karttaprojektiolla ja riippuu siitä kuinka kaukana projektiokeskuksesta ollaan. Mikäli mittaukset ja laskut tehdään suoraan karttaprojektiolla, kuten varsin yleistä näyttää olevan, tarkoittaa tämä sitä, että mittaja elää maailmassa, jossa metrin pituus ei säily vakiona.

Projektiot, joissa pisteiden välimatka siirtyy oikein ovat *viivatarkkoja*. *Pintatarkka projektiio* säilyttää kuvioiden pinta-alojen suhteet. Kuvioiden muoto, kulmat ja skaala eivät sen sijaan säily. *Atsimutaalisissa projektioidissa* pisteiden väliset suunnat säilyvät vain projektiokeskuksesta nähtyinä.

## Mercator-projektiio

Tutustumme seuraavassa muutamaan tavallisimpaan projektiioon, joista ensimmäisenä olkoon *Mercatorin* jo v. 1569 esittämä normaaliasentoinen lieriöprojektiio. Se on konforminen ja meridiaanit kuvautuvat toisistaan yhtä kaukana oleviksi suoriksi. Paralleelipiirit ovat niitä vastaan kohtisuorassa, mutta niiden etäisyys toisistaan vaihtelee niin, että paralleelipiirien projektiot ovat lähimmillään ekvaattorilla ja välimatka kasvaa napoja kohti mentäessä. Navat ovat itseasiassa äärettömän kaukana, joten projektion vääristymät suurilla leveysasteilla kasvavat voimakkaasti.

Mercatorin projektiota on käytetty mm. merikorteilla syystä, että loxodromit (saman atsimuutin viivat) ovat projektiossa suoria, ts. purjehdittaessa samaan suuntaan on laivan kulkureitti kartalla suora viiva. Tämä ei ole lyhin reitti pisteestä toiseen, mutta on toisaalta helposti seurattava alkeellisillakin navigointivälineillä.

Projektion kuvausyhtälöt pallolla ovat yksinkertaisesti

$$\begin{aligned}x &= R (\lambda - \lambda_0) \\y &= R \operatorname{artanh} (\sin \varphi) \\h &= k = 1 / \cos \varphi\end{aligned}$$

Vastakkainen muunnos saadaan kaavoista

$$\begin{aligned}\varphi &= \operatorname{arctan}[\sinh(y/R)] \\ \lambda &= \lambda_0 + x/R\end{aligned}$$

Ellipsoidilla projektiokaavat ovat

$$\begin{aligned}x &= a(\lambda - \lambda_0) \\y &= a \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right] \\h &= k = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}\end{aligned}$$

missä  $a$  on ellipsoidin isoakseli ja  $e$  eksentrisyys (paitsi  $y$ :n lausekkeen  $e/2$ , jossa  $e$  on Neperin luku).

## Poikittainen Mercator, UTM, Gauss-Krüger

Meidän kannaltamme *poikittainen Mercator* tai *Gauss-Krüger* on yksi tärkeimmistä projektioidista, onhan ksj esitetty juuri tässä projektiossa. Toinen yleisesti käytetty projektiio, *Universaali poikittainen Mercator*, *UTM*, poikkeaa Gauss-Krügeristä vain siinä, että siinä skaalaa on pienennetty suhteessa 0.9996. Lähes kaikki Gauss-Krügeristä sanottu pätee siis myös UTM:iin.

Gauss-Krüger on siis konforminen poikittainen lieriöprojektiio. Siinä keskimeridiaani  $\lambda_0$  kuvautuu suoraksi viivaksi, samoin ekvaattori. Skaala on virheetön keskimeridiaanilla, mutta menee äärettömiin  $90^\circ$  päässä tästä. Muunnoksille  $(x,y)$ -tasoon ei ole olemassa suljettuja kaavoja, vaan ne joudutaan

laskemaan sarjakehitelmistä.

Gauss–Krüger ei ole kaikkein helpoimmin laskettavia projektioita. Tämä lienee ainakin yhtenä syynä siihen, että esim. kkj-tasokoordinaatteja ei ole mieluusti lähdetty muuttamaan maantieteellisiksi ED50-koordinaateiksi tms. ainakaan käsinlaskun aikakaudella. Kun monien mielessä koordinaatisto, kkj ja kartta ovat yksi ja sama asia, on varsin ymmärrettävää se sekaannus, jonka GPS:n käyttö on muassaan tuonut.

kkj lasketaan joko kolmen asteen kaistoissa (keskimeridiaanit 18°, 21°, 24°, 27° ja 30°) tai yhtenäiskoordinaatistona keskimeridiaanina 27°. Siirtyminen kaistasta toiseen käy sujuvimmin maantieteellisten koordinaattien kautta, ts. muunnetaan kkj-projektiokoordinaatit takaisin ellipsoidisiksi ja tehdään uusi Gauss–Krüger -projektiio halutulla keskimeridiaanilla.

Yhdysvaltain armeija otti 40-luvun lopulla käyttöön UTM-järjestelmän koko maailman suurikaa-vaisten sotilaskarttojen tekemiseen. Maapallo jaettiin 6° levyisiin kaistoihin leveyspiirien 84° S – 84° N välillä. Kaistat numeroitiin 1..60 pituusasteesta 180 lähtien. Koska kaikkia koordinaatteja on pienennetty suhteessa 0.9996, on suurennussuhteen maksimiarvo kaistan reunoilla 1.0001 ja keskiarvo koko kaistassa hyvin lähellä ykköstä.

UTM-koordinaatit annetaan suorakulmaisina (x, y)-koordinaatteina. Sekaannusta on varmasti aiheuttanut se seikka, että maantieteellisiä koordinaatteja laskettaessa ei koko maapallolla käytetä samaa referenssiellipsoidia, vaan esim. Yhdysvalloissa Clarken (1866) ja Euroopassa Kansainvälistä (1924) ellipsoidia. Näiden dimensiot, muoto ja keskipisteet poikkeavat toisistaan. Siirryttäessä UTM:ssä kaistasta toiseen on samalla huomattava vaihtaa tarvittaessa myös ellipsoidia. Samoin on huomattava, että siirryttäessä GPS:llä saaduista maantieteellisistä WGS84-koordinaateista kkj:ään tai UTM:oon, on ensin käytettävä WGS84-ellipsoidia ja jälkimmäisessä vaiheessa Kansainvälistä ellipsoidia (1924)!

## Lambertin projektiio

Lambertin projektiio on konforminen normaaliasentoinen karttioprojektiio, joka tavallisimmin on asetettu leikkaamaan Maata pitkin kahta standardiparalleelia. Skaala on vääristymätön näillä paralleeleilla, liian pieni niiden välissä ja liian suuri ulkopuolella. Standardiparalleelien kanssa samalla pallonpuoliskolla oleva napa kuvautuu pisteeksi, joka sijaitsee meridiaanien leikkauspisteessä.

Meridiaanit ovat tasavälein sijaitsevia paralleeliympyröiden säteitä, jotka ovat kohtisuorassa paralleeliympyröitä vastaan. Näiden välimatka puolestaan vaihtelee ollen lähimpänä toisiaan projektiion keskellä. Jos käytetään kahta standardiparalleelia, joiden leveysasteet ovat  $\varphi_1$  ja  $\varphi_2$  ja origon koordinaatit  $\lambda_0$ ,  $\varphi_0$ , saadaan kuvausyhtälöt pallolle

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \Theta \\y &= \rho_0 - \rho \cos \Theta\end{aligned}$$

missä

$$\rho = \frac{RF}{\tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}; \quad \rho_0 = \frac{RF}{\tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right)}; \quad \Theta = n(\lambda - \lambda_0)$$

$$F = \frac{\cos \varphi_1 \tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)}{n}; \quad n = \frac{\ln \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}}{\ln \left[ \frac{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right)}{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)} \right]}$$

Suurennussuhteet ovat

$$h = k = \frac{\cos \varphi_1 \tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)}{\cos \varphi \tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

Käänteinen muunnos saadaan kaavoilla

$$\begin{aligned}\varphi &= 2 \arctan(RF / \rho)^{1/n} - \pi / 2 \\ \lambda &= \lambda_0 + \Theta / n\end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned}\rho &= \pm \sqrt{x^2 + (\rho_0 - y)^2} \\ \Theta &= \arctan(x / (\rho_0 - y))\end{aligned}$$

Ellipsoidille kaavat ovat vain hieman monimutkaisemmat.

## Tulevaisuuden haasteet

Käytännön töitä varten joudumme yleensä tekemään joukon *koordinaattimuunnoksia* päästäksemme GPS:n avulla saadusta järjestelmästä johonkin paikalliseen koordinaatistoon tai saadaksemme lähtöpisteen koordinaatit paikallisesta globaaliin koordinaatistoon. Tarkkuusvaatimuksesta ja mitattavan verkon koosta riippuu kuinka paljon töitä joudumme muunnosten kanssa tekemään.

Siirtyminen kahden eri koordinaatiston välillä suoritetaan usein yleisen *yhdenmuotoisuusmuunnoksen* (Helmert-muunnoksen) avulla, ts. käytämme kiertoja, origon siirtoa ja mahdollista mittakaavan muutosta (oletamme skaalan siis muuttuvan samalla tavalla eri koordinaattiakselien suunnassa):

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \mu \mathbf{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (4)$$

missä  $\mu = 1 + m$  on koordinaatistojen välinen mittakaavakerroin ( $m$  annetaan taulukoissa yleensä miljoonasosina (ppm,  $10^{-6}$ ), joskus myös miljardisosina (ppb,  $10^{-9}$ )),  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  ovat origojen väliset koordinaattierot ja  $\mathbf{R}$  on kiertomatriisi, jossa  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$  ovat kiertokulmia (huom. laskuissa kulmat oltava radiaaneina, vaikka taulukoissa ne yleensä annetaan kaarisekunteina!),

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & e_z & -e_y \\ -e_z & 1 & e_x \\ e_y & -e_x & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Paikallisissa mittauksissa joudutaan usein tekemään tasoitus, jossa kolme tai useampia vanhoja lähtöpisteitä pidetään kiinteinä ja GPS-havainnoista saadut vektorit pakotetaan tähän verkkoon. Näin saadun uuden verkon koordinaattitarkkuus ei ole sen parempi kuin vanhan verkon tarkkuus siitäkään huolimatta, että GPS:llä saadut vektorit ovat yleensä vanhaa terrestristä mittausta huomattavasti tarkempia. Tälläkin tavalla saadaan moniin käytännön tarkoituksiin riittävän hyviä koordinaatteja lähtöpisteiden koordinaatistossa, kunhan mitattava verkko pidetään tarpeeksi paikallisena.

Mikäli vanhan verkon koordinaattivirheet tiedetään suuriksi tai on aihetta epäillä deformaatioita vanhassa verkossa, on GPS-mittaukset parasta laskea vapaassa verkossa, ts. pidetään vain yksi lähtöpisteistä kiinteänä. Vasta lopullisessa verkkotasoituksessa kiinnitetään sitten muut tunnetut pisteet ja pakotetaan GPS-verkko tätä kautta vanhaan järjestelmään. Vaikka tämä ei poistakaan vanhan verkon deformaatioista aiheutuneita ongelmia, voidaan GPS-ratkaisu laskea vanhan verkon virheistä riippumatta. Joka tapauksessa GPS-ratkaisu kannattaa tallettaa tulevaisuuden varalle semmoiseen, vaikka laskentakoordinaatiston koordinaatteja ei tällä hetkellä vielä tarvitsisikaan.

Laskennassa ei pidä käyttää kkj-koordinaatteja, vaan ne on ensin muunnettava esim. EUREF-koordinaatistoon, suoritettava laskut tässä koordinaatistossa, jonka jälkeen koordinaatit muunnetaan alkuperäiseen koordinaatiston *samaa muunnosta käyttäen*. Muunnoksen ei tarvitse edes olla kovin tarkka; riittää että samaa muunnosta samoine virheineen käytetään kumpaankin suuntaan. Eri asia on, jos lähtöpiste alunperin on esim. EUREF-FIN –järjestelmässä ja lopulliset tulokset on tarkoitus esittää kkj:ssä. Tällöin muunnoksen kkj:ään on oltava mahdollisimman tarkka, koska muunnosvirheet jäävät semmoiseen pisteiden koordinaattivirheisiin.

Koska kkj on paikallisesti deformoitunut, ei koordinaatteja voida yhdenmuotoisuusmuunnoksella



muuntaa tarkasti kkj:ään. Jos käytetään yhtä, koko maan kattavaa muunnosta, voivat jäännösvirheet olla metrejä, joita tosin voidaan polynomisovituksella tai paikallisella muunnoksella pienentää huomattavasti. Jos kertoimet johdetaan alueellisesti, ongelmaksi jäävät alueiden väliset rajat. Usein kertoimet joudutaan johtamaan mittauskohtaisesti ottamalla riittävä määrä tunnettuja lähtöpisteitä.

Kyse ei siis ole siitä, etteikö muunnosparametreja voitaisi johtaa, vaan siitä, että “tarkkaa” konformista (tai edes affiinista) muunnosta ei ole olemassa. Muunnoksen jälkeisiä jäännösvirheitä tarkasteltaessa paljastuvat vanhan koordinaatiston skaala- ja orientointivirheet, jotka voivat olla hyvinkin paikallisia. Tapauskohtaisesti joudutaan tutkimaan pysyvätkö jäännösvirheet sallituissa rajoissa.

Ongelma tulee erityisesti vastaan muunnettaessa jo olemassa olevia satojen tuhansien kkj-pisteiden koordinaatteja jos ja kun Suomessa ennen pitkää siirrytään käyttämään EUREF-pohjaisia koordinaatteja. Paineet siirtymisen puolesta ovat kasvamassa, vaikka siirtyminen aiheuttaakin monille huomattavia kustannuksia ja hyöty saattaa näyttää vähäiseltä. Toisaalta myös nykyisen järjestelmän käyttö yhdessä GPS:n kanssa aiheuttaa kustannuksia ylimääräisten pisteiden mittauksena, laskentana ja lukuisten mahdollisten virhelähteiden kautta. Vuosina 1998-1999 asiaa pohti laajapohjainen työryhmä, jonka mietintö päättyi yksimielisesti siirtymisen kannalle.

Koordinaatiston lisäksi on kyse myös karttaprojektion valinnasta, joka monille voi olla merkittävämpikin muutos. Esimerkiksi Pohjoismaisen Geodeettisen Komission v. 1998 yleiskokouksen päätöslauselmassa suositetaan, että tutkittaisiin mahdollisuutta siirtyä käyttämään UTM-projektiota. Koko Suomi olisi yhdessä kaistassa. Suomen tapauksessa muutos tietäisi esim. peruskarttalehtijaon täydellistä uusimista. Kritiikkiä on myös esitetty siitä, että kaistan reunalla projektiovirheet kasvavat häiritsevän suuriksi.

Toki nykyisinkin on käytössä koko maan kattava yhtenäiskoordinaatisto, jota käytetään silloin kun se sopii, kkj:ää siihen sopiviin tarpeisiin ja mahdollisesti jotain paikallista projektiota erikoistarkoitukseen. Mikään ei luonnollisesti estä tulevaisuudessakaan käyttämästä sitä projektiota joka tehtävään parhaiten sopii. Karttaprojektio ja pisteen koordinaatit ovat kaksi eri asiaa, eikä nykyisissä tietokannoissa näiden asioiden erottaminen liene mitenkään ylivoimainen tehtävä. Tulevaisuuteen kannattaa varautua tallettamalla myös alkuperäiset mittaukset ja niistä saadut koordinaatit. Siirryttiinpä tulevaisuudessa mihin tahansa koordinaattijärjestelmään tai karttaprojektioon, on tällaisen aineiston muuntaminen uuteen järjestelmään varsin yksinkertainen toimenpide.

RTK on tulossa yhä voimakkaammin GPS-mittauksiin ja on jo syrjäyttänyt monet perinteiset mittausmoodit. Samalla on lisääntynyt tarve siirtyä globaaliin koordinaatistoon, jossa kkj:n ongelmat poistuvat. RTK-mittausten kontrolli jää helposti puutteelliseksi. Erityisesti, jos mittaukset tehdään suoraan projektiotasolla, voivat virheet oltaessa kaukana keskimeridiaanista kasvaa häiritsevän suuriksi. Reaaliaikaisten mittausten luotettava laatukontrolli lieneekin eräs lähiaikojen suurimmista haasteista.

## Lähdeviitteet ja muuta kirjallisuutta

- Brettenbauer K. (1995): Die Gauß-Krüger Abbildung einfach dargestellt. *Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation*. Heft **3/1995**, 146–150.
- DMA (1987): *Department of Defence World Geodetic System 1984: Its definition and relationship with local geodetic systems*. DMA Technical Report 8350.2. (Including supplement).
- Hofmann-Wellenhoff B., H. Lichtenegger and J. Collins (1994): *GPS – Theory and practice*. Springer Verlag, Wien. 355 p.
- Korhonen J. (1967): Coordinates of the stations in the first order triangulation of Finland. *Publications of the Finnish Geodetic Institute*, **64**.
- Ollikainen M. (1993): GPS-koordinaattien muuttaminen kartastokoordinaateiksi. Geodeettinen laitos, tiedote 8.
- Ollikainen, M. (1997): Determination of orthometric heights using GPS levelling. *Publications of the Finnish Geodetic Institute*, N:o **127**.
- Ollikainen M., H. Koivula, M. Poutanen ja R. Chen (1997): Suomen kiinteiden GPS-asemien verkko. *Geodeettisen laitoksen tiedote* **16**.
- Ollikainen M., H. Koivula and M. Poutanen (2000): The densification of the EUREF network in Finland. *Publications of the Finnish Geodetic Institute*, **129**.
- Poutanen M. (1998): *GPS-paikanmääritys*. Ursa, Helsinki, 269 s.
- Poutanen M. (2000): Sea surface topography and vertical datums using space geodetic techniques. *Publications of the Finnish Geodetic Institute*, **128**.
- Strang G., and K. Borre (1997): *Linear algebra, geodesy and GPS*. Wellesley-Cambridge Press. 624 p.
- Vermeer M., 1995: Two new geoids determined at the FGI. *Reports of the Finnish Geodetic Institute*, **95:5**.