18. Supraledning

Ett stort antal grundämnen och kristallina kemiska föreningar förlorar sin elektriska resistivitet och blir "supraledande" vid låga temperaturer. Kännetecknande för supraledande ämnen är att de är perfekta diamagneter - dvs de utesluter magnetiska fält fullständigt, och att supraledningsförmågan försvinner i ett tillräckligt starkt yttre magnetiskt fält.

För supraledarna gäller vidare att energifördelningen har ett ändligt tomt intervall Δ "Energy-gap" vid Fermienergin, vilket innebär att elektroner kan flyttas till ett "ledningsband" bara om de tillförs en energimängd som överstiger Δ. Laddningen transporteras i supraledare av elektronpar som beter sig som om de vore bundna till varandra med en attraktiv kraft.

Supraledningsförmåga uppträder för de flesta supraledande ämnena bara under en s.k. kritisk temperatur som är av storleksordningen $20K$. Supraledningsförmåga vid högre temperaturer uppvisas bara av ett antal komplicerade metalloxider dopade med olika lantanider.

För alla supraledare gäller att supraledningsförmågan försvinner vid ett tillräckligt starkt yttre magnetiskt fält. Vidare gäller att supraledare bara kan bära begränsade strömtätheter och att supraledningsförmågan försvinner då strömtätheten överstiger en kritisk gräns. Den kritiska strömtäthetens värde sammanhänger med den kritiska magnetiska fältstyrkan. Strömtätheten ger upphov till ett magnetiskt fält vars styrka inte får överstiga det den kritiska fältstyrkans värde på supraledarens yta.

Supraledare kan också bära växelström, sålänge dennas frekvens uppfyller villkoret

$$\hbar\omega < \Delta,$$

där Δ är det tomma energi-intervallet vid Fermiytan.

Supraledarna indelas i 2 olika typer. Den enklare typen (I) kännetecknas av förekomsten av ett väldefinierat, kritiskt magnetiskt fält $H_c(T)$, som har ett maximalt värde vid $T = 0$ och som blir 0 då $T = T_c$.

I supraledarna av typ II finns två skilda kritiska fältnivåer: $H_{c1} < H_{c2}$. För fältstyrkor som är mindre än H_{c1} utesluts det magnetiska fältet fullständigt från supraledaren. För fältstyrkor H i mellanområdet: $H_{c1} < H < H_{c2}$ genomtränger det magnetiska fältet partiellt supraledaren, medan supraledningsförmågan försvinner. I mellanområdet är det magnetiska fältet inom supraledaren koncentrerat till smalla trådartade områden som kallas vortexlinjer. Dessa bildar ett regelbundet gitter av parallella linjer.

Energinivåtomrummet ovanför Fermi-energin i supraledare kan demonstreras genom att belasta en fog mellan en supraledare och en normal ledare med en spänningsskillnad. Om fogen är ett tunnt isolerande skikt kan elektroner tränga genom fogen den p.g.a. kvantmekaniska tunneleffekten. Det visar sig att tunnelströmmen uppträder först då spänningsskillnaden över fogen överstiger värdet $\Delta V = \Delta/e$, där Δ är "energigapets" storlek.

18.2 London's ekvation

Den fenomenologiska beskrivningen av supraledare utgår från antagandet att elektronerna i en supraledare bildar två skilda elektronsystem - ett supraledande och ett normalt. Den supraledande och den normala elektrongasens densiteter n_s och n_n bildar den totala elektrontätheten n:

$$n_s + n_n = n.$$

Vid $T = 0$ är $n_s = n$ och vid $T = T_c$ är $n_s = 0$.

Den supraledande komponenten av elektrongasen, som saknar resistivitet, responderar mycket snabbare till transienta fält än den normala komponenten. Då den supraledande strömmmen saknar dissipation gäller den klassiska rörelselagen för den genomsnittliga hastigheten för de supraledande elektronerna i ett elektriskt fält:

$$m\frac{d\vec{v}_s}{dt} = -e\vec{E}$$

Den supraledande strömtätheten är

$$\vec{j} = -e\vec{v}_s n_s,$$

varigenom

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{n_s e^2}{m}\vec{E}.$$

Fouriertranformation leder till

$$\vec{j}(\omega) = i\frac{n_s e^2}{m\omega}\vec{E},$$

varigenom den frekvensberoende konduktiviteten blir

$$\sigma(\omega) = i\frac{n_s e^2}{m\omega}.$$

Enligt Faradays lag är

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Genom att ersätta $\vec{E}$ med $d\vec{j}/dt$ fås

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{j} + \frac{n_s e^2}{mc}\vec{B}) = 0.$$

Maxwells ekvation för den magnetiska induktionen är

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j},$$

ifall den dielektriska förskjutningsströmmen bortlämnas.

Ett godtyckligt statiskt magnetiskt fält $\vec{B}$ leder till en motsvarande statisk strömtäthet $\vec{j}$ genom denna ekvation. I såfall är Faraday's induktionslag automatiskt satisfierad. För beskrivningen av supraledare som inte tillåter statiska magnetiska fält måste ett ytterligare villkor tillfogas. Ett sådant är den s.k. London-ekvationen, som postuleras för supraledare:

$$\nabla \times \vec{j} + \frac{n_s e^2}{mc}\vec{B} = 0.$$

Kombination av denna ekvation och Maxwellekvationen

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

leder till Meissner-effekten:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\nabla \times \vec{j}$$
$$= \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2}\vec{B}.$$

Både magnetiska induktionen och strömtätheten satisfierar därigenom samma Helmholtz-ekvationer:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{\Lambda^2}\vec{B} = 0, \\ \nabla^2 \vec{j} - \frac{1}{\Lambda^2}\vec{j} = 0. \end{cases}$$

Här har parametern Λ definierats som

$$\Lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}} = 41.9(\frac{r_s}{a_0})^{3/2}(\frac{n}{n_s})^{1/2}.$$

Λ representerar den s.k. penetrationslängden för det magnetiska fältet i supraledaren. Om ytan för det supraledande materialet är $z = 0$, med supraledaren i området $z > 0$ och $\vec{B}(0) = \vec{B}_0$, blir Helmholtzekvationen för fältkomponenterna

$$\frac{d^2}{dz^2}\vec{B} - \frac{1}{\Lambda^2}\vec{B} = 0,$$

vars lösning är

$$\vec{B}(z) = \vec{B}_0 e^{-z/\Lambda}, \quad z \geq 0.$$

Detta resultat visar att det magnetiska fältet bara kan tränga in i supraledaren i ett ytskikt vars storleksordning är ~ 100.

18.2 Den mikroskopiska beskrivningen av supraledningsförmåga

Laddningsbärarna i supraledare är elektronpar som är bundna av en effektiv växelverkan som uppstår genom kopplingen till jonerna. Denna effektiva växelverkan kan beskrivas som en typ av avskärmad Coulomb-växelverkan.

I beskrivningen av avskärmningen av den effektiva växelverkningen i en elektrongas utgick vi från beräkningen av den effektiva dielektriska konstanten som dämpar potentialfältet kring en jon:

$$\epsilon^{el}\phi^{tot} = \phi^{ext} + \phi^{jon}.$$

På samma sätt kan man beskriva avskärmningen av en elektronisk laddning i ett jonsystem:

$$\epsilon^{jon}\phi^{tot} = \phi^{ext} + \phi^{el}.$$

Om den totala permittiviteten definieras som

$$\epsilon\phi = \phi^{ext}$$

fås

$$(\epsilon^{el} + \epsilon^{jon} - \epsilon)\phi^{tot} = \phi^{ext} + \phi^{el} + \phi^{jon},$$

och då

$$\phi^{tot} = \phi^{ext} + \phi^{el} + \phi^{jon}$$

fås

$$\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^{jon} - 1$$

Här antas jonerna beskrivna som enskilda partiklar. En annan beskrivning vore att betrakta ”klädda” joner - dvs. joner med omgivande inducerad elektronfördelning. I detta fall kan den totala permittiviteten beskrivas som en produkt:

$$\epsilon = \epsilon^{el}\epsilon_*^{jon},$$

där ϵ_*^{jon} är den dielektriska permittiviteten i ett system av ”klädda” joner. Jämförelse av de båda uttrycken för ϵ leder till

$$\epsilon_*^{jon} = 1 + \frac{1}{\epsilon^{el}}(\epsilon^{jon} - 1).$$

För en fri elektrongas i metaller gäller vid höga frekvenser att

$$\epsilon_0^{el} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

där ω_p är plasmafrekvensen

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}.$$

För en fri gas av joner gäller givetvis ett liknande uttryck:

$$\epsilon^{jon} = 1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2}.$$

Här är Ω_p jonernas plasmafrekvens:

$$\Omega_p = \frac{4\pi n^{jon} Z^2 e^2}{M},$$

där M är jonernas massa. Det är uppenbart att $\Omega_p << \omega$ då jonmassan är mycket större än elektronmassan.

Den dielektriska permittiviteten ϵ^{el} är i Thomas-Fermi approximationen

$$\epsilon = 1 + \frac{k_0^2}{q^2},$$

där $\vec{q}$ är vågvektorförändringen vid en elektronkollision.

Den totala dielektriska konstanten blir då

$$\epsilon = 1 + \frac{k_0^2}{q^2} - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2}.$$

Detta kan omskrivas i formen

$$\epsilon = (1 + \frac{k_0^2}{q^2})(1 - \frac{\omega(\vec{q})^2}{\omega^2}),$$

om $\omega(\vec{q})$ definieras som

$$\omega^2(\vec{q}) = \frac{\Omega_p^2}{1 + \frac{k_0^2}{q^2}}.$$

Med

$$\epsilon = \epsilon^{el}\epsilon_*^{jon},$$

blir då den dielektriska permittiviteten för systemet av "klädda" joner

$$\epsilon_*^{jon} = 1 - \frac{\omega^2(q)}{\omega^2}.$$

Detta innebär att $\omega(\vec{q})$ representerar plasmafrekvensen för klädda joner. Med den dielektriska permittiviteten

$$\epsilon = (1 + \frac{k_0^2}{q^2})(1 - \frac{\omega^2(\vec{q})}{\omega^2})$$

blir den effektiva avskärmade Coulomb-potentialen mellan elektronerna i en kristall

$$v(\vec{q}) = \frac{4\pi e^2}{q^2 + k_0^2}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega^2(\vec{q})}$$

Denna potential är attraktiv för spridning av elektroner med litet utbyte av energi:

$$\omega < \omega(\vec{q}).$$

Då $\omega(\vec{q})$ representerar en fonon-energi gäller att växelverkan mellan elektronerna kan vara attraktiv då

$$\hbar\omega < \hbar\omega_D,$$

där ω_D är Debye-frekvensen för jonerna. Attraktionen blir tillräckligt stark för att leda till bundna elektronpar p.g.a. effekten av Pauli-principen för mångelektronsystemet.

Detta är utgångspunkten för BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) teorin för supraledningsförmåga.

I BCS teorin beskrivs grundtillståndet som en antisymmetriderad produkt av par-vågfunktioner för $N/2$ elektronpar:

$$\psi_{BCS} = \mathcal{A}\{\phi(\vec{r}_1 s_1, \vec{r}_2, \vec{s}_2)... \quad \phi(\vec{r}_{N-1}s_{N-1}, \vec{r}_N s_N)\}.$$

Parvågfunktionen ϕ antas vara ett singlett-tillstånd. Detta innebär att den orbitala delen av vågfunktionen är symmetrisk:

$$\chi(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \chi_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}.$$

Partillståndet är då en superposition av en-elektrontillstånd med motsatt riktade lika stora vågvektorer.

Parvågfunktionen är en kombination av elektronvågfunktioner vars energier faller inom energigapet Δ ovanför Fermi-energin. Motsvarande rörelsemängdsintervall fås som

$$\Delta \sim \delta\varepsilon = \delta(\frac{p^2}{2m}) = \frac{p_F}{m}\delta p$$

Enligt obestämdhetsrelationen motsvarar detta en räckvidd

$$\xi_0 = \frac{\hbar}{\delta p} \sim \frac{\hbar p_F}{m\Delta} \sim \frac{\varepsilon_F}{k_F \Delta} \sim 10^3.$$

Detta innebär att de bundna elektronerna i ett par rör sig på långt avstånd från varandra i kristallen, vilket utvisar att deras uppträdande är ett fullständigt kollektivt fenomen.

18.3. *BCS* teorins empiriska implikationer

För praktiska beräkningar med BCS-teorin för supraledare antages att den effektiva potentialen som leder till parbildning i elektronsystemet kan beskrivas med den schematiska potentialen

$$< \vec{k}_1, \vec{k}_2 | V | \vec{k}_3, \vec{k}_4 >= -\frac{V}{\Omega}\Theta(|\varepsilon(\vec{k}_1) - \varepsilon_F| - \hbar\omega),$$

där V_0 är en konstant och Ω är systemets volym. Denna potential är 0 bortsett från elektronpar vars energier faller inom ett beränsat område ovanför Ferminivån. Energin $\hbar\omega$ väljes t.ex. som Debyeenergin $\hbar\omega_D$.

Med denna potentialmodel blir den kritiska temperaturen

$$k_B T_c = 1.13 \hbar \omega e^{-1/N_0 V_0},$$

där N_0 är energinivåtätheten för elektroner med en spinnriktning i den normala metallen. Detta resultat visar att en supraledande fas uppträder för godtyckligt små värden på potentialparametern V_0.

Energigapet vid fermiytan blir

$$\Delta(0) = 2\hbar\omega e^{-1/N_0 V_0}.$$

Förhållandet $\Delta(0)/k_B T_c$ blir oberoende av N_0 och V_0:

$$\frac{\Delta(0)}{k_B T_c} = 1.76.$$

Detta värde är i god överensstämmelse med empiriska resultat.

Energigapets temperaturberoende nära $T = T_c$ är

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = 1.74(1 - \frac{T}{T_c})^{1/2}, \quad T \approx T_c.$$

För de flesta ämnen gäller att BCS teorin ger ett temperaturberoende för det kritiska fältet som approximativt är i överensstämmelse med den empiriska "lagen"

$$\frac{H_c(T)}{H_c(0)} \simeq 1 - (\frac{T}{T_c})^2.$$