13. Fasta ämnen i magnetiska fält

Tätheten av magnetiska dipolmoment i ett fast ämne kallas ämnets magnetisering, och betecknas M. Magnetiseringen är en funktion av det pålagda fältet H. Då magnetiseringen beror av i vilket kvanttillstånd $|n>$ ämnet befinner sig blir den genomsnittliga eller termodynamiska magnetiseringen vid en temperatur T

$$M(H,T) = \frac{\sum_n M_n(H) e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}},$$

där $\beta = 1/k_B T$. E_n är här energin i tillståndet $|n>$ under pålagt yttre fält så att

$$M_n = -\frac{1}{V} \frac{\partial E_n(H)}{\partial H}.$$

Då partitionsfunktionen är

$$Z = \sum_n e^{-E_n/k_B T}$$

definieras den fria energin i ämnet som

$$F = -k_B T \; log Z.$$

Magnetiseringen kan därför också uttryckas som

$$M = -\frac{1}{V} \frac{\partial F}{\partial H}.$$

Den magnetiska suskeptibiliteten i ett fast ämne definieras som

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H}.$$

För en atom med N_e elektroner är elektronernas kinetiska energi då atomen befinner sig i ett magnetiskt fält

$$T_e = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{N_e} (p_i + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_i))^2$$

Ifall fältet $\vec{H}$ är konstant gäller att

$$\vec{A}(\vec{r}_i) = -\frac{1}{2}\vec{r}_i \times \vec{H}$$

så att

$$T_e = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{N_e}(\vec{p}_i - \frac{e}{2c}\vec{r}_i \times \vec{H})^2.$$

Elektronernas spin bidrar en potentialenergi

$$\Delta H = -\sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{H},$$

där de magnetiska momenten definieras som

$$\begin{aligned}\vec{\mu} &= \frac{1}{2c}\vec{r} \times \vec{j} = \frac{1}{2c}\vec{r} \times (-e\vec{v}) \\ &= -\frac{e}{2mc}\vec{l}\end{aligned}$$

För en elektron gäller att banimpulsmomentet $\vec{l}$ ersätts med dess spinnvektor

$$\vec{l} = g_0\vec{S}$$

där $\vec{S}$ är spinnvektorn och g_0 den gyromagnetiska faktorn vars värde är

$$g_0 = 2[1 + \frac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2)] = 2.0023.$$

Därigenom blir

$$\Delta H = g_0\mu_B\vec{H} \cdot \vec{S} = g_0\mu_B\vec{H} \cdot \vec{S} = g_0\mu_B H S_Z$$

om $\vec{H}$ väljs i Z-riktningen och μ_B är Bohr-magnetonen

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} = 0.579 \cdot 10^{-8} eV/G.$$

Den totala elektroniska energin i det magnetiska fältet blir

$$T = \sum_i \frac{\vec{P}_i^2}{2m} + \mu_B(\vec{L} + g_0\vec{S}) \cdot \vec{H}$$

$$+\frac{e^2}{8mc^2}H^2\sum_i(x_i^2+y_i^2).$$

Här är $\vec{L}$ och $\vec{S}$ de totala banimpulsmoment- och spinnvektorerna respektive:

$$\hbar\vec{L}\equiv\sum_i\vec{r}_i\times\vec{p}_i,$$

$$\vec{S}=\sum_i\vec{S}_i.$$

Beteckna

$$T=T_0+\Delta H,$$

där

$$T_0=\sum_i\frac{\vec{p}_i^2}{2m}$$

I andra ordningens störningsteori blir korrektionen till en elektrons energi i ett tillstånd $|n>$ i ett magnetiskt fält

$$E_n\Rightarrow E_n+\Delta E_n;$$

$$\Delta E_n=<n|\Delta H|n>+\sum_{n'\neq n}\frac{|<n|\Delta H|n'>|^2}{E_n-E_{n'}}.$$

Om termer av ordningen H^2 medtas fås då explicit

$$\Delta E_n=\mu_B\vec{H}\cdot<n|\vec{L}+g_0\vec{S}|n>$$

$$+\sum_{n\neq n'}\frac{<n|\mu_N\vec{H}\cdot(\vec{L}+g_0\vec{S})|n'>|^2}{E_n-E_n'}$$

$$+\frac{e^2}{8mc^2}H^2<n|\sum_i(x_i^2+y_i^2)|n>.$$

Den lineära termen i H är i allmänhet den dominerande ävenom också den är liten för små fält:

$$\mu_BH\sim\frac{\hbar eH}{mc}\sim\hbar\omega_c\sim10^{-8}eVH/G.$$

Den sista termen i ΔE_n har en mycket mindre storleksordning som kan uppskattas som

$$\frac{e^2}{8mc^2}H^2a_0^2 \approx \hbar\omega_c(\frac{\hbar\omega_c}{e^2/a_0}).$$

Då $e^2/a_0 \simeq 27eV$ blir hela termen ca. 10^{-5} ggr den lineära termen då $H \sim 10^4G$.

Larmor-diamagnetism

För atomer eller joner med fullständiga elektronskal gäller att $\vec{S} = \vec{L} = 0$ i grundtillståndet. Detta innebär att energikorrektionen i ett konstant magnetiskt fält $\vec{H}$ för sådana blir

$$\begin{aligned}\Delta E_0 &= \frac{e^2}{8mc^2}H^2 < 0|\sum_i(x_i^2 + y_i^2)|0 > \\ &= \frac{e^2}{12mc^2}H^2 < 0|\sum r_i^2|0 >\end{aligned}$$

Vid låga temperaturer är jonerna i en kristall av sådana ämnen i sina grundtillstånd så att suskeptibiliteten blir

$$\chi = -n\frac{\partial^2}{\partial H^2}\Delta E_0 = -\frac{e^2}{6mc^2}n < 0|\sum r_i^2|0 > .$$

Detta innebär att systemet är diamagnetiskt och därigenom att magnetiseringen är riktad mot det pålagda yttre magnetiska fältets riktning. Detta fenomen kallas Larmor-diamagnetism.

Den kvadratiska genomsnittsnadien för en jon definieras som

$$< r^2 >= \frac{1}{Z} < 0|r_i^2|0 >,$$

där Z är jonens totala antal elektroner. Vidare definieras den molära suskeptibiliteten χ^{mol} som χ ggr volymen för en mol nN_A (N_A=Avogadros tal). Härigenom fås

$$\chi^{mol} = -ZN_A \frac{e^2}{6mc^2} < r^2 >$$

$$= -Z(\frac{e^2}{\hbar c})^2 \frac{N_A a_0^3}{6} < (\frac{r}{a_0})^2 > .$$

$$-0.79Z < (\frac{r}{a_0})^2 > \cdot 10^{-6} cm^3/mol.$$

Detta innebär att $\chi^{mol} \sim -10^{-5} cm^3/mol$. De empiriska värdena för ädelgaskristallerna är

	$\chi^{mol}(10^{-6}cm^3/mol)$
He	-1.9
Ne	-7.2
A	-19.4
Kr	-28
Xe	-43 .

Värdena för alkalihalider är av samma storleksordning.

Suspektibiliteten för system av joner med ofullständiga elektronskal

Ifall jonernas elekronskal är ofullständiga men $J = 0$ i grundtillståndet för elektronerna är

$$< 0|\mu_B \vec{H} \cdot (\vec{L} + g_0 \vec{S})|n > \neq 0,$$

och båda termerna av ordningen H^2 bidrar till energiförändringen:

$$\Delta E_0 = \frac{e^2}{8mc^2} H^2 < 0| \sum_i (x_i^2 + y_i^2)|0 >$$

$$- \sum_n \frac{| < 0|\mu_B \vec{H} \cdot (\vec{l} + g_0 \vec{S})|0 > |^2}{E_n - E_0}$$

Suskeptibiliteten blir då

$$\chi = -n\frac{\partial^2 \Delta E_0}{\partial H^2}$$
$$= -n\{\frac{e^2}{4mc^2} < 0|\sum(x_i^2 + y_i^2)|0 >$$
$$-2\mu_B^2 \sum_n \frac{| < 0|L_z + g_0 S_z|0 > |^2}{E_n - E_0}\}$$

Den första termen är den diamagnetiska Larmor-termen. Den andra termen vars tecken är motsatt leder till paramagnetiskt beteende. Denna kallas Van Vleck paramagnetism. Systemets beteende är diamagnetiskt eller paramagnetiskt beroende på vilkendera termen är den dominerande. Detta avhänger av elektronskalets detaljer.

Ifall $J \neq 0$ i elektronskalets grundtillstånd uppträder $2J+1$ - nivåer med J_Z-värdena $-J, -J+1, ... + J$ för vilka energiskillnadena är små i jämförelse med $k_B T$. Ett statistiskt medelvärde över dessa bör då beräknas.

För beräkningen av detta kan man utnyttja det s.k. Wigner-Eckart-teoremet enligt vilket

$$< LSJJ_Z|\vec{L} + g_0\vec{S}|LSJJ'_Z >$$
$$= g_{LSJ} < LSJJ_Z|\vec{J}|LSJJ'_Z > .$$

Proportionalitetsfaktorn g_{LSJ} kallas Landé-faktorn. Denna kan beräknas på följande sätt.

Ifall

$$< LSJJ_Z|\vec{L} + g_0\vec{S}|LSJJ'_Z >= g_{LSJ} < LSJJ_Z|\vec{J}|LSJJ'_Z >$$

så gäller också att

$$< LSJJ_Z|\vec{L}\cdot\vec{J} + g_0\vec{S}\cdot\vec{J}|LSJJ'_Z >= g_{LSJ}J(J+1).$$

Vidare gäller att

$$\vec{L}\cdot\vec{J} = \frac{1}{2}[\vec{J}^2 + \vec{L}^2 - \vec{S}^2],$$
$$\vec{S}\cdot\vec{J} = \frac{1}{2}[\vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \vec{S}^2].$$

Genom att uttnyttja dessa kvadratiska operatorrelationer i ekvationen ovan är det lätt att härleda uttrycket

$$g_{LSJ} = \frac{1}{2}[1 + g_0 - (g_0 - 1)\frac{L(L+1) - S(S+1)}{J(J+1)}]$$

för Landé-faktorn.

För joner med $J \neq 0$ blir energiförändringen till lägsta ordningen i $\vec{H}$:

$$\Delta E_0 = \simeq_B g_{LSJ} H < LSJJ_Z|J_Z|LSJJ_Z >$$
$$= \mu_B g_{LSJ} H J_Z.$$

Partitionsfunktionen blir

$$Z = \sum_{J_Z=-J}^{J} e^{-\beta\gamma H J_Z},$$

där

$$\gamma \equiv g(LSJ)\mu_B.$$

Då Z har formen av en ändlig geometrisk serie kan summan över J_Z utföras med resultatet

$$Z = \frac{e^{\beta\gamma H(J+1/2)} - e^{-\beta\gamma H(J+1/2}}{e^{\beta\gamma H/2} - e^{-\beta\gamma H/2}}$$
$$= \frac{sinh\{\beta\gamma H(J+1/2\}}{sinh\{\beta\gamma H/2\}}.$$

Motsvarande fria energi är

$$F = -k_B T\, log Z.$$

Magnetiseringen är

$$M = -n\frac{\partial F}{\partial H} = nk_BT\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial H}$$
$$\equiv n\gamma JB_g(\beta\gamma JH)$$

Här har den s.k. Brillouin-funktionen $B_J(x)$ definierats som

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J}coth\frac{2J+1}{2J}x - \frac{1}{2J}coth\frac{x}{2J}$$

Vid låga temperaturer (eller mycket stora fältsstyrkor) är

$$B_J(x) \sim 1$$

så att magnetiseringen är fullständig:

$$M = n\gamma J.$$

Vid höga temperaturer och svaga magnetiska fält blir däremot

$$B_j(x) \approx \frac{J+1}{3J}x,$$

så att

$$M \simeq \frac{n\gamma}{3}(J+1)\gamma\beta H.$$

Suskeptibiliteten blir

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = n\frac{(g_{LSJ}\mu_B)^2}{3}\frac{J(J+1)}{k_BT}.$$

Suskeptibilitetens inversa temperaturberoende kallas Curie's lag. Denna gäller i allmänhet då

$$k_BT >> \mu_BH.$$

Ett vanligt sätt att parametrisera Curie-lagen är att skriva den i formen

$$\chi = \frac{1}{3}n\frac{\mu_B^2p^2}{k_BT},$$

där

$$p \equiv g_{LSJ}\sqrt{J(J+1)}.$$

Empiriska resultat ges då för koefficienten p. Det teoretiska värdet ovan är i god överensstämmelse med data för lantanider.

	P teori	P_{EXP}	
Ce	2.54	2.4	
Pr	3.58	3.5	
Nd	3.62	3.5	
Sm	0.84	1.5	
Ev	0.00	3.4	$(J = 0)$
Gd	7.94	8.0	
Tb	9.72	9.5	
Dy	10.63	10.6	
Ho	10.60	10.4	
Er	9.59	9.5	
Tm	7.57	7.3	
Yb	4.54	4.5	

Elektrongasens paramagnetism

Om elektronerna i en metall växelverkar med ett pålagt yttre magnetiskt fält enbart genom spinnets koppling till fältet är deras potentialenergi i ett magnetiskt fält

$$\vec{E} = -g_o \mu_B \vec{H} \cdot \vec{S},$$

där $\vec{S}$ är spinnvektorn. Om $g_0 \approx 2$ är energin för elektroner i fältets riktning $-\mu_B H$ och $\mu_B H$ för de som är motsatt riktade. Magnetiseringen blir då

$$M = -\mu_B (n_+ - n_-),$$

om n_+ betecknar densiteten av elektroner med ”spinn upp” och n_- densiteten av elektroner med ”spinn ned” (dvs riktat mot fältet).

Låt $g(\varepsilon)$ beteckna elektronernas energinivåtäthet så att $g(\varepsilon)d\varepsilon$ är antalet energitillstånd i energiintervallet $d\varepsilon$.

I frånvaron av ett yttre fält är

$$g_{\pm}(\varepsilon) = \frac{1}{2} g(\varepsilon).$$

I ett yttre fält blir däremot

$$g_{+}(\varepsilon) = \frac{1}{2} g(\varepsilon - \mu_B H),$$

$$g_{-}(\varepsilon) = \frac{1}{2} g(\varepsilon + \mu_B H).$$

Motsvarande elektrontätheter blir

$$n_{\pm} = \int d\varepsilon g_{\pm}(\varepsilon) f(\varepsilon),$$

där $f(\varepsilon)$ är Fermi-Dirac distributionen

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}.$$

Den totala elektrondensiteten är

$$n = n_{+} + n_{-}.$$

Denna ekvation kan användas till att bestämma den kemiska potentialen μ som funktion av T och n.

Då den magnetiska energin $\mu_B H$ är mycket mindre än Fermienergin ε_F kan man utnyttja följande approximation:

$$g_{\pm}(\varepsilon) = \frac{1}{2} g(\varepsilon \mp \frac{1}{2} \mu_B H g'(\varepsilon)).$$

Detta leder till att

$$n_{\pm} = \frac{1}{2} \int d\varepsilon g(\varepsilon) f(\varepsilon) \mp \frac{1}{2} \mu_B H \int d\varepsilon g'(\varepsilon) f(\varepsilon).$$

Addition av n_{+} och n_{-} ger då

$$n = \int d\varepsilon f(\varepsilon) g(\varepsilon).$$

Då detta är samma uttryck för n som gäller i frånvaron av ett magnetiskt fält kan man använda samma uttryck för den kemiska potentialen som i frånvaron av ett magnetiskt fält:

$$\mu \simeq \varepsilon_F \{1 + 0(\frac{k_B T}{\varepsilon_F})^2\}.$$

Magnetiseringen blir

$$M = -\mu_B(n_+ - n_-) = \mu_B^2 H \int d\varepsilon g'(\varepsilon) f(\varepsilon)_q$$
$$= \mu_B^2 H \int d\varepsilon g(\varepsilon) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}.$$

Vid $T = 0$ är

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F),$$

så att

$$M = \mu_B^2 H g(\varepsilon_F).$$

Suskeptibiliteten blir

$$\chi = \mu_B^2 g(\varepsilon_F)$$

Denna paramagnetiska elektriska suskeptibilitet kallas Pauli paramagnetism.

För en fri elektrongas gäller att

$$g(\varepsilon_F) = \frac{m k_F}{\hbar^2 \pi^2}.$$

Med detta uttryck kan den elektroniska paramagnetiska suskeptibiliteten skrivas i formen

$$\chi_{Pauli} = (\frac{\alpha}{2\pi})^2 (a_0 k_F),$$

där α är finstrukturkonstanten

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$$

och a_0 är Bohr-radien för väteatomen:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \sim 0.53 \dot{A} .$$

Elektronernas paramagnetiska suskeptibilitet är mycket mindre än det joniska bidraget till suskeptibiliteten.

Landau-diamagnetism

Energinivåerna för en eletrongas i ett yttre magnetiskt fält är

$$E = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m},$$

där oskillatorfrekvensen ω är

$$\omega = \frac{eH}{mc}.$$

Varje oskillatornivå är degenererad och motsvarar

$$\frac{L^2 eH}{2\pi\hbar c}$$

kvanttillstånd med samma energi.

Omfördelningen av elektrongasens rörelsemängdstillstånd i ett yttre fält leder till diamagnetiskt beteende, vilket kallas Landau diamagnetism. För beräkningen av motsvarande diamagnetiska suskeptibilitet kan man utnyttja uttrycket för den s.k. stora potentialen för ett fermionsystem:

$$\Omega = -k_B T \sum_k log(1 + e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}).$$

Partikelantalet ges då som

$$N = -(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu})_H.$$

Relationen mellan den stora potentialen Ω och den fria energin är

$$F = N\mu + \Omega.$$

Magnetiseringen ges av

$$M = -\frac{1}{V}(\frac{\partial \Omega}{\partial H})_\mu.$$

Det explicita uttrycket för Ω blir

$$\Omega = -\frac{2}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{L}{2\pi}(\frac{L^2 eH}{2\pi\hbar c})$$
$$log\{1 + ze^{-\hbar^2 k_z^2 \beta/2m} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)}\},$$

där z är fugaciteten:

$$z = e^{\beta\mu}.$$

Härav fås

$$\Omega = -\frac{VeH}{2\pi^2\hbar c\beta}\int_{-\infty}^{\infty} dk_z \sum_{n=0}^{\infty} log\{1 + ze^{-\hbar^2 k_z^2 \beta/2m} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)}\}.$$

Det är naturligt att approximera summan över n med en integral:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n + \frac{1}{2}) \simeq \int_0^{\infty} dx f(x).$$

Å andra sidan ger $n = 0$ termen det största bidraget, som inte blir väl approximerat i integralapproximationen. Den första biten av integralen över intervallet [0,1] bör approximera $f(1/2)$:

$$\int_0^1 dx f(x) = f(\frac{1}{2}) + \delta$$

Felternen δ kan utvecklas som

$$\delta = \int_0^1 dx[f(1/2) + (x - \frac{1}{2})f'(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 f''(\frac{1}{2})] - f(1/2)$$

$$\simeq \frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})\int_0^1 dx(x - \frac{1}{2})^2 \simeq \frac{1}{24}f''(\frac{1}{2}).$$

Detta kan utnyttjas till en förbättrad approximation:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n + \frac{1}{2}) \simeq \int_0^{\infty} dx f(x) - \frac{1}{24}f''(\frac{1}{2}).$$

Vidare är

$$f''(\frac{1}{2}) \simeq f'(1) - f'(0) \simeq -f'(0)$$

ifall funktionen $f(n + \frac{1}{2})$ faller snabbt med ökande n. Detta leder till Eulers summeringsregel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n + \frac{1}{2}) \simeq \int_0^{\infty} dx f(x) + \frac{1}{24}f'(0).$$

Med hjälp av Eulers formel kan den stora potentialen Ω uttryckas som

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$$

där

$$\Omega_1 = -\frac{VeH}{2\pi^2\hbar c\beta}\int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_0^{\infty} dx\, log\{1 + ze^{-\hbar^2 k_z^2\beta/2m}e^{-\hbar\omega x\beta}\},$$

$$\Omega_2 = -\frac{VeH}{48\pi^2\hbar c\beta}\int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{-\beta\hbar\omega z e^{-\hbar^2 k_z^2\beta/2m}}{1 + ze^{-\hbar^2 k_z^2\beta/2m}}$$

I den första termen är det naturligt att byta integrationsvariabler till ϵ och k_z:

$$\epsilon = \hbar\omega x + \hbar^2 k_z^2/2m$$

Notera att integralen över k_z kan begränsas till halvlinjen $[0, +\infty]$ ifall den multipliceras med 2.

Vidare är

$$dx = \frac{d\epsilon}{\hbar\omega},$$

så att

$$\Omega_1 = -\frac{VeH}{\pi^2\hbar c\beta}\int_0^\infty dk_z \int_{\hbar^2 k_z^2/2m}^\infty d\epsilon(\frac{1}{\hbar\omega}) log[1 + ze^{-\beta\epsilon}]$$

Då $\omega = eH/mc$ blir

$$\Omega_1 = -\frac{Vmc}{\pi^2\hbar^2 c\beta}\int_0^\infty dk_z \int_{\hbar^2 k_z^2/2m}^\infty d\epsilon\, log[1 + ze^{-\beta\epsilon}]$$

Det enda beroendet av H i detta uttryck uppträder genom den kemiska potentialen μ i fugaciteten. Då den kemiska potentialen är oberoende av H vid låga temperaturer kommer Ω_1 därför inte att bidra till elektrongasens magnetisering.

I termen Ω_2 kan integrationsvariabeln k_z bytas till ϵ:

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m},$$

så att

$$\Omega_2 = \frac{Ve^2H^2}{24\pi^2\hbar c^2 m}\sqrt{\frac{m}{2}}\underbrace{\int_0^\infty de \frac{ze^{-\beta\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}(1 + ze^{-\beta\epsilon})}}_{\int_0^\infty d\epsilon \frac{1}{\sqrt{\epsilon}(1+\frac{1}{z}e^{+\beta\epsilon})}}$$

Integralen i detta uttryck är

$$I = \int_0^\infty d\epsilon \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \frac{1}{1 + e^{\beta\epsilon - \beta\mu}}$$

Den andra faktorn är Fermi-Dirac-distributionsfunktionen som vid $T = 0$ är en stegfunktion:

$$\frac{1}{1 + e^{\beta\epsilon - \beta\mu}} \simeq \theta(\epsilon_F - \epsilon),$$

med $\mu(0) = \epsilon_F$. Integralen kan därför vid låga temperaturer approximeras som

$$I \simeq \int_0^\mu \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} = 2\sqrt{\mu} = 2\sqrt{\epsilon_F}.$$

Vid låga temperaturer blir därför

$$\Omega_2 \simeq \frac{Ve^2H^2}{12\pi^2\hbar c^2 m}\sqrt{\frac{m\epsilon_F}{2}}.$$

Med $\mu_B \equiv \frac{\hbar e}{2mc}$ blir

$$\Omega_2 \simeq \frac{V\mu_B^2 H^2}{3\pi^2\hbar^3} m^{3/2}\sqrt{\frac{\epsilon_F}{2}}.$$

Magnetiseringen vid låga temperaturer blir

$$M = -\frac{1}{V}(\frac{\partial\Omega}{\partial H}) = -\frac{2\mu_B^2 H}{3\pi^2\hbar^3} m^{3/2}\sqrt{\frac{\epsilon_F}{2}}.$$

Relationen mellan Fermienergin och partikeltätheten är

$$\epsilon_F^{3/2} = \frac{\hbar^3}{m^{3/2}}\frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}}n.$$

Detta kan utnyttjas till att uttrycka magnetiseringen som

$$M = -\frac{n\mu_B^2}{2\epsilon_F}H.$$

Elektrongasens diamagnetiska suskeptibilitet blir

$$\chi_{diamagn} = -\frac{n\mu_B^2}{2\epsilon_F}.$$

Denna diamagnetiska suskeptibilitet bör adderas till den paramagnetiska Pauli-suskeptibiliteten

$$\chi_{para} = +\frac{3}{2}\frac{n\mu_B^2}{\epsilon_F}.$$

Under normala omständigheter är den paramagnetiska suskeptibiliteten den dominerande termen. Den diamagnetiska suskeptibiliteten kan dominera i sådana situationer där elektronernas effektiva massa i kristallen är mycket mindre än den fria elektronens massa. Ett exempel på en sådan situation är vismut som har en mycket stor diamagnetisk suskeptibilitet.