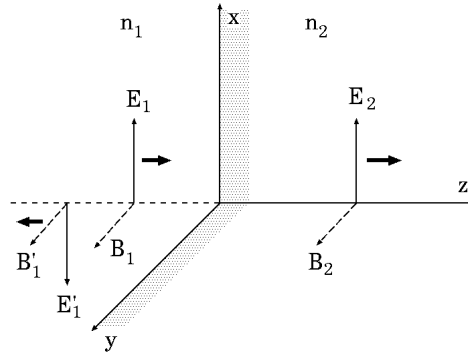


13. Plana vågors reflektion och brytning

[RMC]

13.1. Reflektion och brytning av vågor mellan icke-ledande media

13.1.1. Normal infallsvinkel



Låt färdriktningen för den inkommande vågen vara $\hat{\mathbf{z}}$. Planet vid vilket reflektion och brytning sker är xy -planet vid $z = 0$.

De inkommande, reflekterade och transmitterade vågorna är nu

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{x}} E_{1x} e^{-i(\omega t - \kappa_1 z)} \quad (13.1)$$

$$\mathbf{E}'_1 = -\hat{\mathbf{x}} E'_{1x} e^{-i(\omega t + \kappa_1 z)} \quad (13.2)$$

$$\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{x}} E_{2x} e^{-i(\omega t - \kappa_2 z)} \quad (13.3)$$

med

$$\kappa_1 = \omega n_1 / c \quad (13.4)$$

$$\kappa_2 = \omega n_2 / c \quad (13.5)$$

Magnetfältet är

$$\mathbf{B} = \frac{n}{c} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E} \quad (13.6)$$

med $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{z}}$ för vågorna 1 och 2, och $\hat{\mathbf{u}} = -\hat{\mathbf{z}}$ för vågen 1'. Vi får

$$\mathbf{B}_1 = \frac{n_1}{c} \hat{\mathbf{y}} E_{1x} e^{-i(\omega t - \kappa_1 z)} \quad (13.7)$$

$$\mathbf{B}'_1 = \frac{n_1}{c} \hat{\mathbf{y}} E'_{1x} e^{-i(\omega t + \kappa_1 z)} \quad (13.8)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{n_2}{c} \hat{\mathbf{y}} E_{2x} e^{-i(\omega t - \kappa_2 z)} \quad (13.9)$$

De tangentiella komponenterna för $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ är kontinuerliga vid gränsen $z = 0$. Om permeabiliteten är samma för både medierna:

$$E_{1x} - E'_{1x} = E_{2x} \quad (13.10)$$

$$n_1 E_{1x} + n_1 E'_{1x} = n_2 E_{2x} \quad (13.11)$$

Detta ger

$$E'_{1x} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{1x} \quad (13.12)$$

$$E_{2x} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_{1x} \quad (13.13)$$

Om $n_2 > n_1$ så är E_{1x} och E'_{1x} i fas och har samma tecken. Om $n_2 < n_1$ så är den inkommande och reflekterade vågorna fasförskjutna, eftersom då gäller

$$E'_{1x} \propto -E_{1x} = e^{i\pi} E_{1x} \quad (13.14)$$

med fasvinkeln $\pi = 180^\circ$.

Definiera **Fresnel-koefficienterna** för normal reflektion och transmission:

$$r_{12} = \frac{E'_{1x}}{E_{1x}} \quad (13.15)$$

$$t_{12} = \frac{E_{2x}}{E_{1x}} \quad (13.16)$$

Tidsmedelvärdet av Poynting-vektorn är

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \frac{n}{\mu_0 c} (E_{0p}^2 + E_{0s}^2) \quad (13.17)$$

enligt tidigare. Nu gäller $E_{0p} = E_x$ och $E_{0s} = 0$ så att

$$\langle S_1 \rangle = \frac{1}{2} \frac{n_1}{\mu_0 c} E_{1x}^2 \quad (13.18)$$

$$\langle S'_1 \rangle = \frac{1}{2} \frac{n_1}{\mu_0 c} E_{1x}'^2 \quad (13.19)$$

$$\langle S_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{n_2}{\mu_0 c} E_{2x}^2 \quad (13.20)$$

Definiera **reflektansen**

$$R = \frac{\langle S'_1 \rangle}{\langle S_1 \rangle} \quad (13.21)$$

och **transmittansen**

$$T = \frac{\langle S_2 \rangle}{\langle S_1 \rangle} \quad (13.22)$$

Dessa blir nu för normal reflektion och transmission

$$R_n = r_{12}^2 \quad (13.23)$$

$$T_n = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2 \quad (13.24)$$

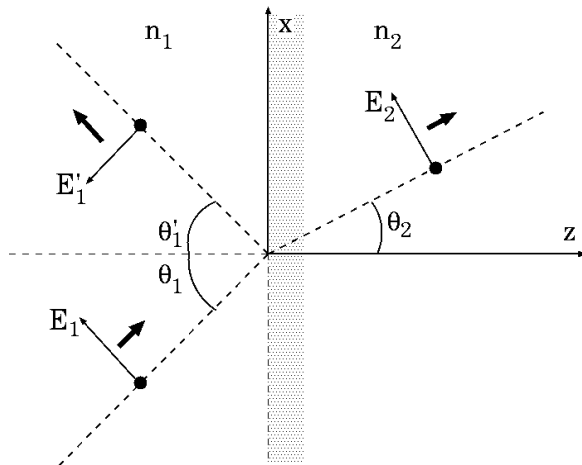
Villkoret

$$R + T = 1 \quad (13.25)$$

är satisfierat, vilket innebär att energin bevaras.

Exempel : Luft har $n_1 \approx 1$ och glas $n_2 = 1,5$. Detta ger $R_n = 0,04$ och $T_n = 0,96$ för en våg i luft som träffar gränsytan luft-glas med en normal infallsvinkel.

13.1.2. Icke-normal infallsvinkel



De inkommande, reflekterade och transmittade vågorna är nu

$$\mathbf{E}_1 = \tilde{\mathbf{E}}_1 e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \mathbf{r})} \quad (13.26)$$

$$\mathbf{E}'_1 = \tilde{\mathbf{E}}'_1 e^{-i(\omega t + \boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \mathbf{r})} \quad (13.27)$$

$$\mathbf{E}_2 = \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \mathbf{r})} \quad (13.28)$$

Gränsplanets normalvektor betecknas $\hat{\mathbf{n}}$, och är med dessa beteckningar lika med $\hat{\mathbf{z}}$ -vektorn.

Planet som bildas av $\boldsymbol{\kappa}_1$ och $\hat{\mathbf{n}}$ kallas **infallspanet** (eng. *plane of incidence*). I detta fall motsvaras det av xz -planet, eftersom $\boldsymbol{\kappa}_1$, $\hat{\mathbf{n}}$ båda bara har komponenter i xz -planet. Infallspanet motsvarar alltså papperets plan.

Elfältens $\hat{\mathbf{p}}$ -komponenter är **per definition** de komponenter som är parallella med infallspanet.

Detta gör att $\hat{\mathbf{s}}$ -komponenterna är **vinkelräta** (ty. *senkrecht*) mot infallspanet.

De tangentiella komponenterna av $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ -fälten är kontinuerliga vid randytan $\mathbf{r}_0 = (x, y, 0)$. Detta ger att faserna och speciellt vågvektor-komponenterna måste vara kontinuerliga där:

$$\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \boldsymbol{\kappa}'_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \mathbf{r}_0 \quad (13.29)$$

Detta medför att alla vågvektorer ligger i ett plan.

Bevis: Använd identiteten

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}) = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}) - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}) - \mathbf{F} \quad (13.30)$$

Med $\mathbf{r}_0 = \mathbf{F}$ och $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ (planets ytnormal) fås

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_0) = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{z}} \cdot (x, y, 0)) - \mathbf{r}_0 = -\mathbf{r}_0 \quad (13.31)$$

Multiplitera nu med t.ex. $\boldsymbol{\kappa}_1$. Vi får:

$$\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_0)) = (\boldsymbol{\kappa}_1 \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_0) = -\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \mathbf{r}_0 \quad (13.32)$$

Gör samma sak med $\boldsymbol{\kappa}_2$ och $\boldsymbol{\kappa}_3$, och använd ekv. (13.29). Vi får:

$$(\boldsymbol{\kappa}_1 \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_0) = (\boldsymbol{\kappa}'_1 \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_0) = (\boldsymbol{\kappa}_2 \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_0) \quad (13.33)$$

Detta ger

$$\boldsymbol{\kappa}_1 \times \hat{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\kappa}'_1 \times \hat{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\kappa}_2 \times \hat{\mathbf{n}} \quad (13.34)$$

Multiplikation med t.ex. $\boldsymbol{\kappa}_1$ ger

$$0 = (\boldsymbol{\kappa}_1 \times \boldsymbol{\kappa}'_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (13.35)$$

som indikerar att $\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}'_1, \hat{\mathbf{n}}$ alla ligger i samma plan. Motsvarande för $\boldsymbol{\kappa}_2$. $\square$

(i) Eftersom $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ får vi nu att

$$|\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\kappa}_1| = \kappa_1 \sin \theta_1 \quad (13.36)$$

$$= |\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\kappa}'_1| = \kappa'_1 \sin \theta'_1 \quad (13.37)$$

$$= |\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\kappa}_2| = \kappa_2 \sin \theta_2 \quad (13.38)$$

Men $\kappa = \omega/(c/n)$ så att $\kappa'_1 = \kappa_1$ och

$$\sin \theta_1 = \sin \theta'_1 \quad (13.39)$$

Infalls- och reflektionsvinklarna är samma!

(ii) Vi får också

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (13.40)$$

som är **Snells lag**.

För att komma vidare måste randvillkoren tillämpas på de olika fälten. I detta fall räcker det med att fokusera på de tangentiella komponenterna. Villkoren för normalkomponenterna ger inga extra villkor.

Normalkomponenten av t.ex. elfältet vid gränssytan är

$$\mathbf{E}_n = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E})\hat{\mathbf{n}} \quad (13.41)$$

Vilken är den tangentiella komponenten E_t ?

Vi vet att fältet är en summa av normala och tangentiella komponenter, så att

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_t = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E})\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{E}_t \equiv \mathbf{E}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad (13.42)$$

En titt på vektoridentiteterna ger oss att

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E})\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{E}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad (13.43)$$

Jämförelse av dessa två uttryck ger oss genast att den tangentiella komponenten måste vara

$$\mathbf{E}_t = -\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) \quad (13.44)$$

Kontinuitetsvillkoret tillämpat på randen $(x, y, 0)$ ger nu

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (\tilde{\mathbf{E}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}'_1)) = \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{E}}_2) \quad (13.45)$$

Plocka bort den gemensamma faktorn $\hat{\mathbf{n}} \times$:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\tilde{\mathbf{E}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}'_1) = \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{E}}_2 \quad (13.46)$$

Motsvarande villkor har vi för magnetfältet:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\tilde{\mathbf{B}}_1 + \tilde{\mathbf{B}}'_1) = \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{B}}_2 \quad (13.47)$$

Detta kan skrivas om med hjälp av

$$\mathbf{B} = \frac{n}{c} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E} \quad (13.48)$$

så att vi får ett nytt villkor för elfältet:

$$n_1 \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{u}}_1 \times \tilde{\mathbf{E}}_1 + \hat{\mathbf{u}}'_1 \times \tilde{\mathbf{E}}'_1) = n_2 \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{u}}_2 \times \tilde{\mathbf{E}}_2) \quad (13.49)$$

Å andra sidan gäller

$$\mathbf{E} = -\frac{c}{n} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{B} \quad (13.50)$$

så att

$$\frac{1}{n_1} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{u}}_1 \times \tilde{\mathbf{B}}_1 + \hat{\mathbf{u}}'_1 \times \tilde{\mathbf{B}}'_1) = \frac{1}{n_2} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{u}}_2 \times \tilde{\mathbf{B}}_2) \quad (13.51)$$

Expandera trippelprodukten med regeln

$$\mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{H}) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) \quad (13.52)$$

så att

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{E}}) = \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) - \tilde{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \quad (13.53)$$

$$= -\tilde{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \quad (13.54)$$

för elfälten i $\hat{\mathbf{s}}$ -riktningen och motsvarande för magnetfälten $\tilde{\mathbf{B}}_p$ i $\hat{\mathbf{s}}$ -riktningen.

Observera att p.g.a.

$$\mathbf{B}_p = \frac{n}{c} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_p \quad (13.55)$$

så ligger $\mathbf{B}_p$ i $\hat{\mathbf{s}}$ -riktningen.

Detta ger

$$n_1(\tilde{\mathbf{E}}_{1s}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_1) + \tilde{\mathbf{E}}'_{1s}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}'_1)) = n_2\tilde{\mathbf{E}}_{2s}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_2) \quad (13.56)$$

$$\frac{1}{n_1}(\tilde{\mathbf{B}}_{1p}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_1) + \tilde{\mathbf{B}}'_{1p}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}'_1)) = \frac{1}{n_2}\tilde{\mathbf{B}}_{2p}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_2) \quad (13.57)$$

Obs:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 = \cos \theta_1 \quad (13.58)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}'_1 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{u}}'_1 = \cos(\theta'_1 - \pi) = -\cos \theta'_1 \quad (13.59)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 = \cos \theta_2 \quad (13.60)$$

Detta ger

$$n_1(\tilde{\mathbf{E}}_{1s} \cos \theta_1 - \tilde{\mathbf{E}}'_{1s} \cos \theta'_1) = n_2\tilde{\mathbf{E}}_{2s} \cos \theta_2 \quad (13.61)$$

$$\frac{1}{n_1}(\tilde{\mathbf{B}}_{1p} \cos \theta_1 - \tilde{\mathbf{B}}'_{1p} \cos \theta'_1) = \frac{1}{n_2}\tilde{\mathbf{B}}_{2p} \cos \theta_2 \quad (13.62)$$

Vi bestämmer nu Fresnel-koefficienterna för reflektionen och brytningen.

p-polarisering

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\tilde{\mathbf{B}}_{1p} + \tilde{\mathbf{B}}'_{1p}) = \hat{\mathbf{n}} \times (\tilde{B}_{1p}\hat{\mathbf{s}} + \tilde{B}'_{1p}\hat{\mathbf{s}}) \quad (13.63)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{B}}_{2p} = \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{B}_{2p}\hat{\mathbf{s}} \quad (13.64)$$

Eftersom $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ och $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{y}}$ fås

$$\tilde{B}_{1p} + \tilde{B}'_{1p} = \tilde{B}_{2p} \quad (13.65)$$

Också:

$$\frac{1}{n_1}(\tilde{B}_{1p} \cos \theta_1 - \tilde{B}'_{1p} \cos \theta'_1) = \frac{1}{n_2} \tilde{B}_{2p} \cos \theta_2 \quad (13.66)$$

Med

$$r_{12p} = \frac{E'_{1p}}{E_{1p}} = \frac{c/n_1 B'_{1p}}{c/n_1 B_{1p}} = \frac{B'_{1p}}{B_{1p}} \quad (13.67)$$

$$t_{12p} = \frac{E_{2p}}{E_{1p}} = \frac{c/n_2 B_{2p}}{c/n_1 B_{1p}} = \frac{n_1 B_{2p}}{n_2 B_{1p}} \quad (13.68)$$

fås nu

$$r_{12p} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (13.69)$$

$$= \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad (13.70)$$

$$t_{12p} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (13.71)$$

$$= \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (13.72)$$

De sista leden följer med hjälp av Snells lag och några trigonometriska identiteter.

s-polarisering

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\tilde{\mathbf{E}}_{1s} + \tilde{\mathbf{E}}'_{1s}) = \hat{\mathbf{n}} \times (\tilde{E}_{1s}\hat{\mathbf{s}} + \tilde{E}'_{1s}\hat{\mathbf{s}}) \quad (13.73)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{E}}_{2s} = \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{E}_{2s}\hat{\mathbf{s}} \quad (13.74)$$

Detta ger

$$\tilde{E}_{1s} + \tilde{E}'_{1s} = \tilde{E}_{2s} \quad (13.75)$$

Också:

$$n_1(\tilde{E}_{1s} \cos \theta_1 - \tilde{E}'_{1s} \cos \theta'_1) = n_2 \tilde{E}_{2s} \cos \theta_2 \quad (13.76)$$

Notera att ekv. (13.75) och (13.76) också gäller för fälten i vektoriell form. Detta betyder att

$$\tilde{\mathbf{E}}'_{1s} = r_{12s} \tilde{\mathbf{E}}_{1s} \quad (13.77)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{2s} = t_{12s} \tilde{\mathbf{E}}_{1s} \quad (13.78)$$

så att Fresnelkoefficienternas tecken berättar om fälten har samma riktning eller är motsatt riktade.

De skalära uttrycken ovan är samma som ovan för magnetfältet, men med n_1 och n_2 på ombytta platser. Lösningen av ekvationssystemet ger, med beteckningarna $E'_{1s} = r_{12s}E_{1s}$ och $E_{2s} = t_{12s}E_{1s}$ att

$$r_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (13.79)$$

$$= \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (13.80)$$

$$t_{12s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (13.81)$$

$$= \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (13.82)$$

Reflektanserna och transmittanserna definieras nu som projektionen av Poynting-vektorns tidsmedelvärde på gränsytans normal:

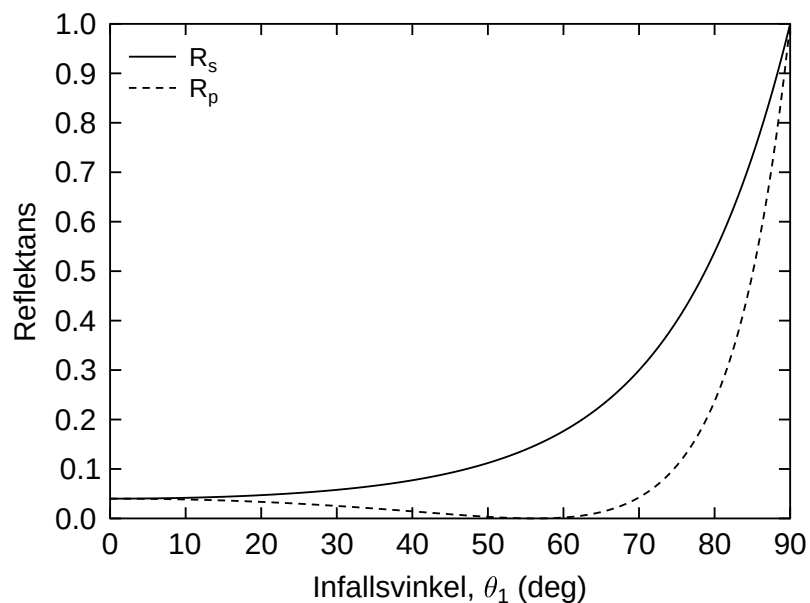
$$R_s = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}'_{1s} \rangle}{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} = r_{12s}^2 \quad (13.83)$$

$$T_s = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}_{2s} \rangle}{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12s}^2 \quad (13.84)$$

$$R_p = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}'_{1p} \rangle}{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}_{1p} \rangle} = r_{12p}^2 \quad (13.85)$$

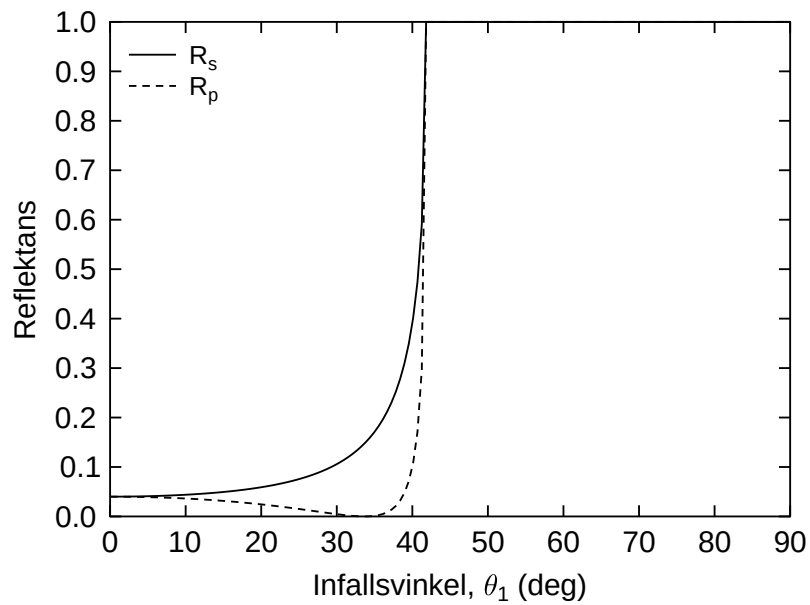
$$T_p = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}_{2p} \rangle}{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}_{1p} \rangle} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12p}^2 \quad (13.86)$$

Exempel 1: Ljusstråle i luft som träffar en gränsyta mot glas, $n_1 = 1$ och $n_2 = 1,5$.



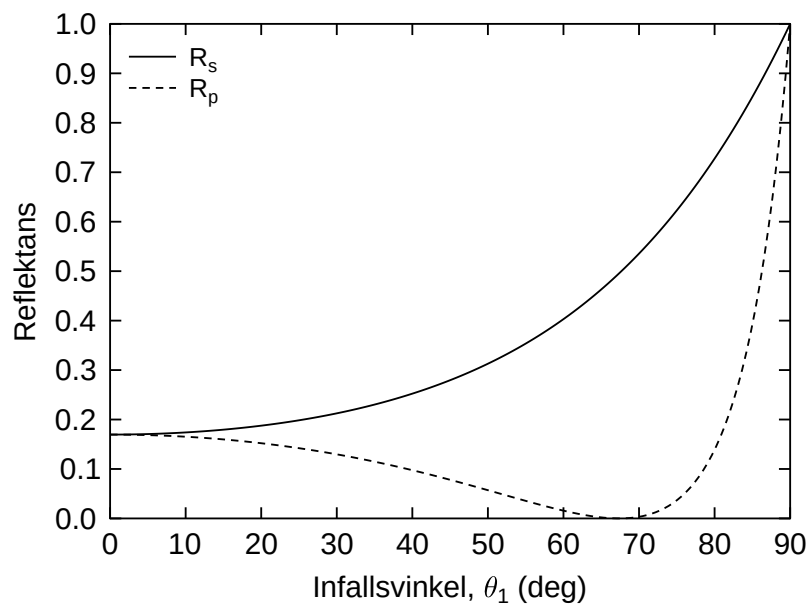
□

Exempel 2: Ljusstråle i glas som träffar en gränsyta mot luften, $n_1 = 1,5$ och $n_2 = 1$.



□

Exempel 3: En gul ljusstråle i luft som träffar en gränsyta mot diamant, $n_1 = 1$ och $n_2 = 2,4$.



□

13.1.3. Speciella vinklar

Tangentiellt inkommande våg

$\theta_1 = \pi/2$ ger $\sin \theta_2 = n_1/n_2$. Om $n_1 < n_2$ så existerar en reell brytningsvinkel. Från uttrycken för reflektansen och transmittansen ser vi dock att $R_s = R_p = 1$ för $\theta_1 = \pi/2$, d.v.s. allt ljus reflekteras medan inget bryts. Detta kan iakttas i de föregående exemplens grafer.

Brewsters vinkel

Det finns en vinkel θ_B kallad **Brewsters vinkel**, vid vilken den ena polarisationskomponenterna inte alls reflekteras, men nog den andra.

Genom att kräva t.ex. $R_p = 0$ för $n_1 \neq n_2$ fås att $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ ger $R_s \neq 0$. Den motsvarande infallsvinkeln θ_1 fås med hjälp av Snells lag:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin(\pi/2 - \theta_1) = n_2 \cos \theta_1 \quad (13.87)$$

Detta ger

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (13.88)$$

I och med detta fenomen har man en enkel metod att polarisera ljus!

Exempel : För en ljusstråle som rör sig i luft och träffar en glasyta gäller $n_1 = 1$ och $n_2 = 1,5$, så att Brewsters vinkel är $\theta_B = 56^\circ$. Om ljusstrålen istället rör sig i glas och träffar en yta mot luften fås $\theta_B = 34^\circ$. □

Total intern reflektion

Ytterligare en speciell vinkel (förutom $\theta_1 = \pi/2$) satisfierar villkoret att allt ljus reflekteras och inget bryts, d.v.s. $R = 1$ och $T = 0$. Detta ger att brytningsvinkeln måste uppfylla villkoret $\cos \theta_2 = 0$, vilket ger $\theta_2 = \pi/2$. Den motsvarande infallsvinkeln kallas **kritisk vinkel** och betecknas θ_c .

Snells lag ger

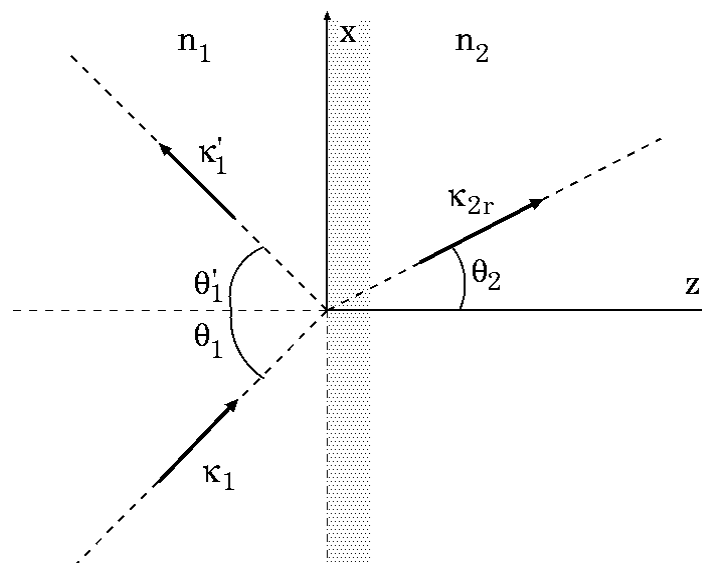
$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (13.89)$$

Den kritiska vinkeln existerar om $n_2 < n_1$!

Fenomenet total intern reflektion utnyttjas t.ex. för att sända ljussignaler genom en optisk fiber.

Exempel : För en ljusstråle som rör sig i glas och träffar en gränsyta mot luften gäller $n_1 = 1,5$ och $n_2 = 1$, så att $\theta_c = 42^\circ$. För en stråle i luft som träffar en glasyta existerar ingen dylik vinkel, eftersom det då gäller att $n_2 > n_1$. Dock har vi fortfarande vinkeln $\theta_1 = \pi/2$ som gör att allt ljus reflekteras. $\square$

13.2. Reflektion och brytning av vågor mellan icke-ledande och ledande media



Om medium 2 är ledande har vi

$$\tilde{\kappa}_2 = \kappa_{2r} + i\kappa_{2i} \quad (13.90)$$

Detta ger

$$\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\kappa}_1 = \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_2 = \hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\kappa}_{2r} + i\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\kappa}_{2i} \quad (13.91)$$

Vänstra ledet är i $\hat{\mathbf{y}}$ -riktningen, så högra ledets första term måste också vara det. Vänstra ledet innehåller ingen imaginär term, så vi måste ha $\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\kappa}_{2i} = 0$, d.v.s. $\boldsymbol{\kappa}_{2i}$ är parallell med $\hat{\mathbf{n}}$.

Vi har nu

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{2r} = \kappa_{2r} \cos \theta_2 \quad (13.92)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{2i} = \kappa_{2i} \cos 0 = \kappa_{2i} \quad (13.93)$$

så att

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_2 &= \kappa_{2r} \cos \theta_2 + i\kappa_{2i} \\ &\equiv \tilde{\kappa}_2 \cos \tilde{\theta}_2 \end{aligned} \quad (13.94)$$

Detta definierar den komplexa vinkeln $\tilde{\theta}_2$ med hjälp av de reella storheterna θ_2 , κ_{2r} och κ_{2i} .

Ekvationen

$$\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\kappa}_1 = \hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\kappa}_{2r} \quad (13.95)$$

ger

$$\kappa_1 \sin \theta_1 = \kappa_{2r} \sin \theta_2 = \kappa_{2r} \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} \quad (13.96)$$

$$\begin{aligned} &= \kappa_{2r} \left[1 - \left(\frac{\tilde{\kappa}_2 \cos \tilde{\theta}_2 - i\kappa_{2i}}{\kappa_{2r}} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[\kappa_{2r}^2 - (\tilde{\kappa}_2^2 \cos^2 \tilde{\theta}_2 - \kappa_{2i}^2 - 2i\tilde{\kappa}_2 \cos \tilde{\theta}_2 \kappa_{2i}) \right]^{1/2} \\ &= \left[\kappa_{2r}^2 + \kappa_{2i}^2 - \tilde{\kappa}_2^2 \cos^2 \tilde{\theta}_2 + 2i\tilde{\kappa}_2 \kappa_{2i} \cos \tilde{\theta}_2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (13.97)$$

Observera:

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_2^2 &= (\kappa_{2r} + i\kappa_{2i})^2 \\ &= \kappa_{2r}^2 - \kappa_{2i}^2 + 2i\kappa_{2r} \cdot \kappa_{2i} \\ &= \kappa_{2r}^2 - \kappa_{2i}^2 + 2i\kappa_{2r}\kappa_{2i} \cos \theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \kappa_{2r}^2 - \kappa_{2i}^2 + 2i\kappa_{2r}\kappa_{2i} \frac{\tilde{\kappa}_2 \cos \tilde{\theta}_2 - i\kappa_{2i}}{\kappa_{2r}} \\
&= \kappa_{2r}^2 - \kappa_{2i}^2 + 2i\kappa_{2i}\tilde{\kappa}_2 \cos \tilde{\theta}_2 + 2\kappa_{2i}^2 \\
&= \kappa_{2r}^2 + \kappa_{2i}^2 + 2i\kappa_{2i}\tilde{\kappa}_2 \cos \tilde{\theta}_2
\end{aligned} \tag{13.98}$$

Vi får nu

$$\kappa_1 \sin \theta_1 = \kappa_{2r} \sin \theta_2 \tag{13.99}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\tilde{\kappa}_2^2 - \kappa_{2i}^2 \cos \tilde{\theta}_2 \right]^{1/2} \\
&= \tilde{\kappa}_2 \sin \tilde{\theta}_2
\end{aligned} \tag{13.100}$$

Resultatet av detta är likheten

$$\kappa_1 \sin \theta_1 = \kappa_{2r} \sin \theta_2 = \tilde{\kappa}_2 \sin \tilde{\theta}_2 \tag{13.101}$$

Vi kan nu skriva om uttrycken för r_{12} och t_{12} för ett ledande medium 2.

(1) Först ersätter vi n_2 med $\tilde{n}_2 = n_2 + ik_2$.

(2) Sedan noterar vi att med

$$\tilde{\kappa}_2 = \frac{\omega}{c} \tilde{n}_2 = \frac{\omega}{c} (n_2 + ik_2) \tag{13.102}$$

fås

$$\sin \tilde{\theta}_2 = \frac{c \kappa_{2r} \sin \theta_2}{\omega n_2 + ik_2} \tag{13.103}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n_2 \sin \theta_2}{n_2 + ik_2} \\
&= \frac{c \kappa_1 \sin \theta_1}{\omega n_2 + ik_2} \\
&= \frac{n_1 \sin \theta_1}{n_2 + ik_2} \\
&= \frac{n_1 n_2 \sin \theta_1 - in_1 k_2 \sin \theta_1}{n_2^2 + k_2^2}
\end{aligned} \tag{13.104}$$

$$\cos \tilde{\theta}_2 = \frac{c \kappa_{2r} \cos \theta_2 + i\kappa_{2i}}{\omega n_2 + ik_2} \tag{13.105}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n_2 \cos \theta_2 + ik_2}{n_2 + ik_2} \\
&= \frac{n_2^2 \cos \theta_2 + k_2^2 + in_2 k_2 (1 - \cos \theta_2)}{n_2^2 + k_2^2}
\end{aligned} \tag{13.106}$$

Dessa ersätter $\sin \theta_2$ och $\cos \theta_2$ i uttrycken för r_{12} och t_{12} . Dessa blir nu komplexa, så att

$$\tilde{r}_{12s} \equiv |\tilde{r}_{12s}| e^{i\alpha_s} \quad (13.107)$$

$$\tilde{r}_{12p} \equiv |\tilde{r}_{12p}| e^{i\alpha_p} \quad (13.108)$$

och

$$\tilde{\mathbf{E}}'_{12s} = \tilde{r}_{12s} \mathbf{E}_{1s} \quad (13.109)$$

$$\tilde{E}'_{12p} = \tilde{r}_{12s} E_{1p} \quad (13.110)$$

Reflektanserna blir $R_s = |\tilde{r}_{12s}|^2$ och $R_p = |\tilde{r}_{12p}|^2$.

Observera: För ledande media talar man inte om transmittans utan kallar samma storhet för **absorptans**:

$$A = 1 - R \quad (13.111)$$

Uttrycken för absorptanserna blir mera komplicerade. Istället för att ta reda på dessa konstaterar vi att $A = 1 - R$, så att det räcker med att bestämma R , vilket vi gjort.

Användbara identiteter är nu

$$\tilde{r}_{12} = -\tilde{r}_{21} \quad (13.112)$$

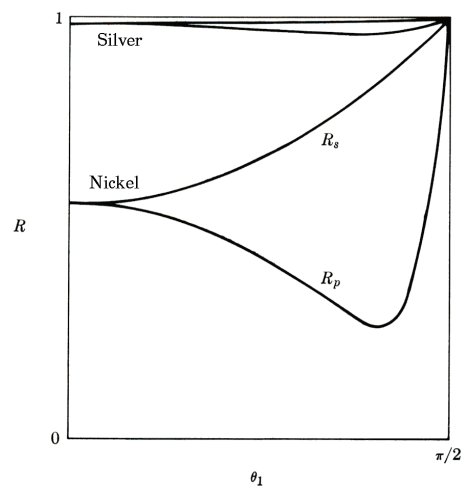
$$\tilde{r}_{12}^2 + \tilde{t}_{12}\tilde{t}_{21} = 1 \quad (13.113)$$

för både s och p .

Vi får

$$\tilde{r}_{12p} = \frac{\tilde{n}_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \tilde{\theta}_2}{\tilde{n}_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \tilde{\theta}_2} \quad (13.114)$$

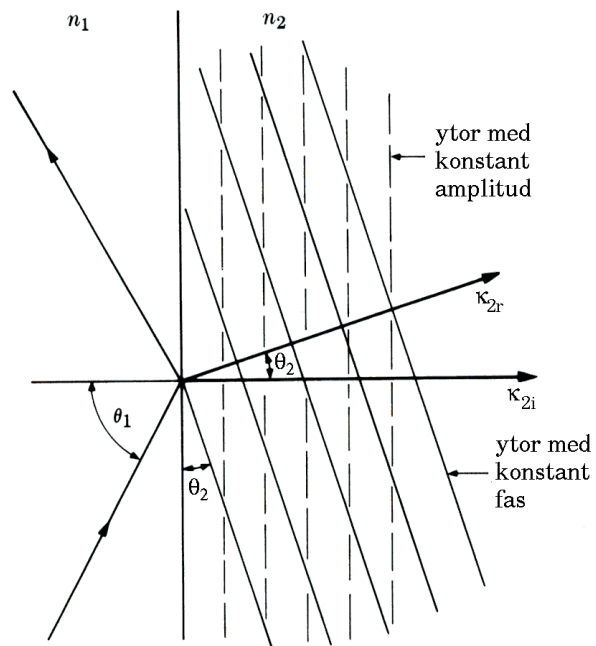
$$\tilde{r}_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2}{n_1 \cos \theta_1 + \tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2} \quad (13.115)$$



Vågen som går genom gränssytan in i medium 2 beskrivs av

$$\tilde{\mathbf{E}}_{2p} = \tilde{t}_{12p} \tilde{\mathbf{E}}_{1p} = \tilde{\mathbf{E}}_{2p,0} e^{-\kappa_{2i} \cdot \mathbf{r}} e^{-i(\omega t - \kappa_{2r} \cdot \mathbf{r})} \quad (13.116)$$

Denna våg har konstant fas i κ_{2r} -riktningen, och konstant amplitud i κ_{2i} -riktningen ($\hat{\mathbf{z}}$ -riktningen).



Normal infallsvinkel: $\theta_1 = 0$

Det gäller nu att $\sin \theta_1 = 0$, $\cos \theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$ p.g.a. Snells lag, $\sin \theta_2 = 0$, $\cos \theta_2 = 1$.

Detta ger $\cos \tilde{\theta}_2 = 1$, så att

$$\tilde{\kappa}_2 \cos \tilde{\theta}_2 = \tilde{\kappa}_2 = \kappa_{2r} + i\kappa_{2i} = \frac{\omega}{c}(n_2 + ik_2) \quad (13.117)$$

och $\sin \tilde{\theta}_2 = 0$.

Reflektansen blir

$$R_n = \left| \frac{1 - (n_2 + ik_2)}{1 + (n_2 + ik_2)} \right|^2 = \frac{(1 - n_2)^2 + k_2^2}{(1 + n_2)^2 + k_2^2} \quad (13.118)$$

Absorptansen är nu

$$A_n = \frac{4n_2}{(1 + n_2)^2 + k_2^2} \quad (13.119)$$

Då $g_2 \gg \varepsilon_0 \omega$ gäller

$$n_2 \approx k_2 \approx \sqrt{\frac{K_{2i}}{2}} = \sqrt{\frac{g_2}{2\varepsilon_0 \omega}} \gg 1 \quad (13.120)$$

så att

$$A_n = \frac{4n_2}{(1+n_2)^2 + k_2^2} \approx \frac{4n}{n^2 + n^2} = \frac{2}{n} \approx \frac{2}{k} = 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \omega}{g_2}} \quad (13.121)$$

Detta kallas **Hagen-Rubens-relationen**.

Denna håller för goda ledare utsatta för mikrovågor och vågor med lägre frekvenser, och metaller utsatta för vågor med frekvenser upp till infrarött, förutsatt att g tas som likströms-konduktiviteten, d.v.s. $g(\omega = 0)$.

Exempel 1: Silver, mikrovågor: $\nu = 10^{10}$ Hz. Hagens-Rubens-ekvationen ger $R_n = 0,9996$ och $A_n = 3,9 \times 10^{-4}$.

Exempel 2: Sjövattnen, långa radiovågor: $\nu = 6 \times 10^4$ Hz. Hagens-Rubens-ekvationen ger $R_n = 0,9975$ och $A_n = 25 \times 10^{-4}$.

Om vi inte känner g_2 men nog har tillgång till en lista med inträngningsdjup har vi nytta av den alternativa formeln

$$\begin{aligned} A_n &= 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \omega}{g_2}} = \delta \sqrt{\frac{\mu_0 \omega g}{2}} 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \omega}{g_2}} \\ &= 2\delta \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \omega} = 2\delta \frac{2\pi \nu}{c} \\ &= 4\pi \frac{\delta}{\lambda_0} \end{aligned} \quad (13.122)$$

där λ_0 är våglängden i vakuum.

13.3. Vågledare

13.3.1. Vågors fortskridande mellan parallella ledande plan

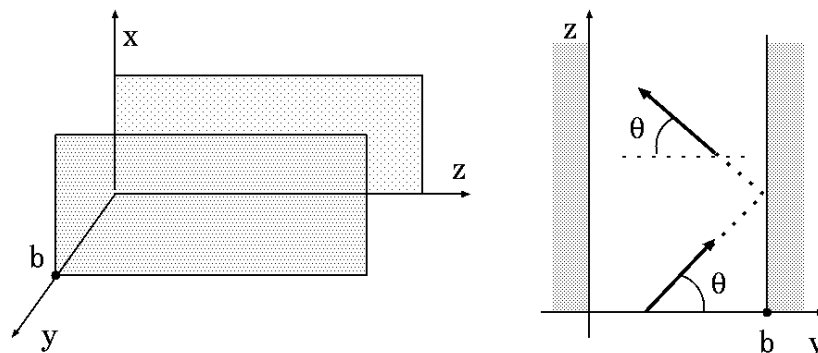
Vi kommer nu att se hur elektromagnetiska vågor kan transporteras genom ihåliga ledare. Detta är ett alternativ till att skicka ut och ta emot dem via antenner.

Vi antar att det ledande materialet har en oändlig konduktivitet så att vågen inte attenueras vid reflektion.

Då $g = \infty$ gäller att $K_i = \infty$ och $\delta = 0$, så att $\exp[-u/\delta] = \exp[-\infty] = 0$ och brytning in i ledaren förekommer därför inte.

Vi granskar först fallet att vågorna reflekteras mellan två parallella plan. Senare inkluderas ytterligare ett par av plan, så att vi får en **rektangulär vågledare**.

Låt transportriktningen vara $\hat{z}$. Situationen ser nu ut som i figuren.



Man definierar två sorters transportmoder: (1) **transversell elektrisk (TE)** mod, och (2) **transversell magnetisk (TM)** mod.

För **TE-moden** gäller det att **elfältet** är parallellt med de reflekterande ytorna ($\hat{x}$ -riktningen) och vinkelrätt mot fortskridningsriktningen ($\hat{z}$ -riktningen).

För TM-moden gäller motsvarande villkor, men för magnetfältet.

I det följande behandlar vi bara TE-moden.

Låt den infallande vågen — alternativt vågen som reflekteras från väggen vid $y = 0$ — ha fasen

$$-\omega t + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} = -\omega t + \kappa y \cos \theta + \kappa z \sin \theta \quad (13.123)$$

Vågen som reflekteras från planet vid $y = b$ har då fasen

$$-\omega t + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} = -\omega t - \kappa y \cos \theta + \kappa z \sin \theta \quad (13.124)$$

Vågens elfält är

$$\tilde{\mathbf{E}}(y, z, t) = \hat{x} \left(\tilde{E}_1 e^{i(-\omega t + \kappa(y \cos \theta + z \sin \theta))} + \tilde{E}'_1 e^{i(-\omega t + \kappa(-y \cos \theta + z \sin \theta))} \right) \quad (13.125)$$

Randvillkoret vid ytan mot det oändligt ledande materialet är $\tilde{\mathbf{E}} = 0$.

(i) För randen $y = 0$ fås

$$0 = \tilde{E}_1 e^{i(-\omega t + \kappa z \sin \theta)} + \tilde{E}'_1 e^{i(-\omega t + \kappa z \sin \theta)} \quad (13.126)$$

Detta skall gälla för alla t och z , så att vi måste ha $\tilde{E}'_1 = -\tilde{E}_1$.

(ii) För randen $y = b$ fås

$$0 = \tilde{E}_1 e^{i(-\omega t + \kappa(b \cos \theta + z \sin \theta))} - \tilde{E}_1 e^{i(-\omega t + \kappa(-b \cos \theta + z \sin \theta))} \quad (13.127)$$

som ger

$$e^{i\kappa b \cos \theta} = e^{-i\kappa b \cos \theta} \quad (13.128)$$

så att vi måste ha

$$\sin(\kappa b \cos \theta) = 0 \quad (13.129)$$

eller

$$\kappa b \cos \theta = m\pi \quad (13.130)$$

där m är ett heltal.

Detta ger

$$\kappa = \frac{m\pi}{b \cos \theta} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (13.131)$$

där λ_0 är den motsvarande **våglängden i vakuum**.

Vi kan också definiera

$$\kappa_y = \kappa \cos \theta \equiv \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad (13.132)$$

$$\kappa_z = \kappa \sin \theta \equiv \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad (13.133)$$

Elfältet blir nu

$$\tilde{\mathbf{E}}(y, z, t) = \hat{\mathbf{x}} \tilde{E}_1 (e^{i\kappa y \cos \theta} - e^{-i\kappa y \cos \theta}) e^{-i\omega t + i\kappa z \sin \theta} \quad (13.134)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{\mathbf{x}} \tilde{E}_1 2i \sin(\kappa y \cos \theta) e^{-i\omega t + i\kappa z \sin \theta} \\ &\equiv \hat{\mathbf{x}} \tilde{E}_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) e^{i2\pi z/\lambda_g - i\omega t} \end{aligned} \quad (13.135)$$

Observera:

$$\kappa b \cos \theta = m\pi = \frac{2\pi b}{\lambda_c} \quad (13.136)$$

ger

$$\frac{b}{\lambda_c} = \frac{m}{2} \quad (13.137)$$

Men:

$$\kappa^2 = \kappa_y^2 + \kappa_z^2 \quad (13.138)$$

Detta ger

$$\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{\lambda_g^2} \quad (13.139)$$

så att

$$\lambda_g^2 = \frac{\lambda_0^2 \lambda_c^2}{\lambda_c^2 - \lambda_0^2} \quad (13.140)$$

Om $\lambda_c \leq \lambda_0$ blir λ_g och κ_z noll eller imaginär, d.v.s. vågen existerar inte eller attenueras istället för att fortskrida.

Vi måste alltså kräva att

$$\lambda_0 < \frac{2b}{m} = \lambda_c \quad (13.141)$$

λ_c kan kallas **bryt-våglängd** (eng. *cutoff wavelength*) och motsvarar den längsta våglängd som kan skickas mellan de parallella planen. Denna våglängd motsvarar ett bestämt värde på m , och kallas för **mod**.

Alternativt, med $\nu_0 = c/\lambda_0$, fås

$$\nu_0 > \frac{mc}{2b} \quad (13.142)$$

Elfältet blir nu

$$\tilde{E}(y, z, t) = \tilde{E}_0 \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i2\pi z/\lambda_g - i\omega t} \quad (13.143)$$

i x -riktningen, där

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (m\lambda_0/(2b))^2}} \quad (13.144)$$

Exempel 1: Om $m = 0$ fås $\lambda_c = \infty$ så att alla vågor med godtycklig våglängd borde kunna fortskrida. Men å andra sidan, $m = 0$ ger $\tilde{E} \equiv 0$, så att inga vågor förekommer. $\square$

Exempel 2: Om $m = 1$ fås $\nu_0 > c/(2b)$. Om mikrovågor ($\nu_0 = 10^{10}$ Hz) ska fortskrida så måste vi ha $b > c/(2\nu_0) = \lambda_0/2 \approx 1,5$ cm. $\square$

Hastigheter

Vågornas fashastighet i $\hat{\mathbf{z}}$ -riktningen ges av

$$\kappa_z = \kappa \sin \theta = \frac{\omega}{v_z} \quad (13.145)$$

så att

$$v_z = \frac{\omega}{\kappa \sin \theta} = \frac{\omega}{(\omega/c) \sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} \quad (13.146)$$

vars storlek är $\geq c$.

Som vi vet från tidigare är denna allmänna fashastighet inte relaterad till hastigheten med vilken information färdas, så resultatet att ljushastigheten överskrids har inte så stor betydelse i det här fallet.

Signalhastigheten är hastigheten med vilken energin transporteras. Vi såg tidigare att

$$\mathbf{S} = u_{\text{EM}} \mathbf{v}_f \quad (13.147)$$

där $\mathbf{v}_f$ är fashastigheten i vågens riktning.

P.g.a. reflektionen ändrar riktningen hela tiden, så det lönar sig inte att räkna ut den momentana Poyntingvektorn utan tidsmedelvärdet av denna. Det lönar sig också att integrera Poyntingvektorn och energitätheten över avståndet mellan planen, för att få ett rums-medelvärde av energin mellan planen.

För hastigheten v_E i $\hat{\mathbf{z}}$ -riktningen har vi nu att

$$\langle S_z \rangle = \langle u_{\text{EM}} \rangle v_E \quad (13.148)$$

Vi känner redan elfältet. Magnetfältet fås via

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} = i\omega \mathbf{B} \quad (13.149)$$

med den sedvanliga *Ansatz* $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}$.

Detta ger

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z, t) = & \hat{\mathbf{y}} E_0 \frac{2\pi}{\omega \lambda_g} \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) e^{i2\pi z/\lambda_g - i\omega t} \\ & + \hat{\mathbf{z}} i E_0 \frac{2\pi}{\omega \lambda_c} \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) e^{i2\pi z/\lambda_g - i\omega t} \end{aligned} \quad (13.150)$$

Energitätheten är

$$u_{\text{EM}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_P \cdot \mathbf{D}_P + \mathbf{B}_P \cdot \mathbf{H}_P) = \frac{1}{2}(\varepsilon E_P^2 + \frac{1}{\mu} B_P^2) \quad (13.151)$$

Tidsmedelvärdet med hjälp av teoremet i föregående kapitel är

$$\begin{aligned} \langle u_{\text{EM}} \rangle &= \frac{1}{4}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{H})_r \\ &= \frac{1}{4}(\varepsilon |\tilde{\mathbf{E}}|^2 + \frac{1}{\mu} |\tilde{\mathbf{B}}|^2)_r \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_0 |\tilde{E}_0|^2 \sin^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{\mu_0} |\tilde{E}_0|^2 \left(\frac{2\pi}{\omega \lambda_g}\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) \\ &\quad + \frac{1}{4}\frac{1}{\mu_0} |\tilde{E}_0|^2 \left(\frac{2\pi}{\omega \lambda_c}\right)^2 \cos^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) \end{aligned} \quad (13.152)$$

Integralen över y :

$$\int_0^b dy \langle u_{\text{EM}} \rangle = \frac{1}{4} |\tilde{E}_0|^2 \frac{b}{2} \left(\varepsilon_0 + \frac{1}{\mu_0} \frac{4\pi^2}{\omega^2} \left(\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} \right) \right) = \frac{1}{4} |\tilde{E}_0|^2 \varepsilon_0 b \quad (13.153)$$

Poyntingvektorn är

$$S_z = (\mathbf{E}_P \times \mathbf{H}_P)_z = E_{Px} H_{Py} - H_{Px} E_{Py} = E_{Px} H_{Py} \quad (13.154)$$

Tidsmedelvärdet är

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2}(\tilde{E}_x^* \tilde{H}_y)_r = \frac{1}{2} |\tilde{E}_0|^2 \frac{1}{\mu_0 \omega \lambda_g} \sin^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) \quad (13.155)$$

Integralen över y :

$$\int_0^b dy \langle S_z \rangle = \frac{1}{4} |\tilde{E}_0|^2 \frac{2\pi}{\mu_0 \omega \lambda_g} b \quad (13.156)$$

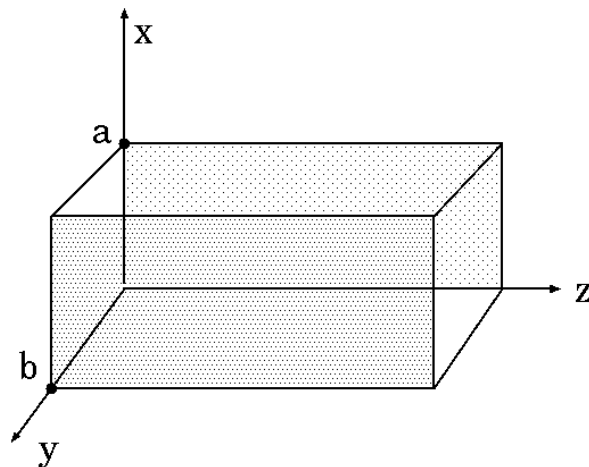
Hastighet med vilken energin fortskrider är

$$\begin{aligned}
 v_E &= \frac{\int_0^b dy \langle S_z \rangle}{\int_0^b dy \langle u_{EM} \rangle} \\
 &= \frac{2\pi}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega \lambda_g} = \frac{2\pi c^2}{\omega \lambda_g} = c \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \\
 &= c \frac{\lambda_0}{\lambda_0 / \sin \theta} = c \sin \theta
 \end{aligned} \tag{13.157}$$

$$= c \sqrt{1 - \left(\frac{m \lambda_0}{2b} \right)^2} \tag{13.158}$$

som är maximalt lika stor ljushastigheten.

13.3.2. Rektangulära vågledare



Med $\tilde{\mathbf{E}}'(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ och $\tilde{\mathbf{H}}'(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ har vi vågekvationerna

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}} = 0 \tag{13.159}$$

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{H}} + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{H}} = 0 \tag{13.160}$$

Förutom dessa skall fälten uppfylla alla Maxwells ekvationer.

Vi fokuserar nu på TE-moderna. För dessa gäller att $\tilde{E}_z \equiv 0$.

Från behandlingen av vågor mellan parallella ledande plan vet vi att vågorna skall ha en fasfaktor $\exp[-i(\omega t - 2\pi z/\lambda_g)]$.

Vi förenklar nu notationen genom att plocka bort tilde-symbolen från de komplexa el- och magnetfälts-amplituderna.

Rotorekvationen för elfältet,

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\mu_0\omega\mathbf{H} = 0 \quad (13.161)$$

ger att

$$(1) \quad x : \quad \partial_y E_z - \partial_z E_y = -i\frac{2\pi}{\lambda_g} E_y = i\mu_0\omega H_x \quad (13.162)$$

$$(2) \quad y : \quad \partial_z E_x - \partial_x E_z = i\frac{2\pi}{\lambda_g} E_x = i\mu_0\omega H_y \quad (13.163)$$

$$(3) \quad z : \quad \partial_x E_y - \partial_y E_x = i\mu_0\omega H_z \quad (13.164)$$

Magnetfältet propagerar i z -riktningen, så $\mathbf{H} \propto \exp[i2\pi z/\lambda_g]$.

Rotorekvationen för magnetfältet,

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} + i\varepsilon_0\omega\tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (13.165)$$

ger att

$$(4) \quad x : \quad \partial_y H_z - \partial_z H_y = \partial_y H_z - i\frac{2\pi}{\lambda_g} H_y = -i\varepsilon_0\omega E_x \quad (13.166)$$

$$(5) \quad y : \quad \partial_z H_x - \partial_x H_z = i\frac{2\pi}{\lambda_g} H_x - \partial_x H_z = -i\varepsilon_0\omega E_y \quad (13.167)$$

$$(6) \quad z : \quad \partial_x H_y - \partial_y H_x = 0 \quad (13.168)$$

Om nu H_z är känd fås H_y från (2) och (4). H_x fås sedan från (1) och (5). Elfälten fås i sin tur från (2) och (1).

H_z fås från vågekvationen, med observationen att H_z skall bero på z endast via fasen:

$$\nabla^2 \tilde{H}_z - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 H_z = (\partial_x^2 + \partial_y^2) H_z + \left[- \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \right] H_z \quad (13.169)$$

$$= 0 \quad (13.170)$$

Gör nu *Ansätzen*

$$H_z(x, y, z) = F(x)G(y)e^{i2\pi z/\lambda_g} \quad (13.171)$$

Insättning i vågekvationen ger

$$F''(x)G(y)e^{i2\pi z/\lambda_g} + F(x)G''(y)e^{i2\pi z/\lambda_g} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 \right] F(x)G(y)e^{i2\pi z/\lambda_g} = 0 \quad (13.172)$$

Med beteckningen $W \equiv \omega^2/c^2 - (2\pi/\lambda_g)^2$, och efter division med $F(x)G(y)e^{i2\pi z/\lambda_g}$ får vi

$$\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} + W = 0 \quad (13.173)$$

Detta ger systemet

$$\frac{F''}{F} = -W' \quad (13.174)$$

$$\frac{G''}{G} = W' - W \quad (13.175)$$

Lösningen till F är summan $A' \sin(\sqrt{W'}x) + B' \cos(\sqrt{W'}x)$.

Lösningen till G är summan $C' \sin(\sqrt{W - W'}y) + D' \cos(\sqrt{W - W'}y)$.

Med identifikationen

$$\kappa_x = \sqrt{W'} \quad (13.176)$$

$$\kappa_y = \sqrt{W - W'} \quad (13.177)$$

fås

$$\kappa_x^2 + \kappa_y^2 - W = \kappa_x^2 + \kappa_y^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 \right) = 0 \quad (13.178)$$

och den allmänna lösningen

$$\begin{aligned} H_z(x, y, z) = & (A \cos \kappa_x x \cos \kappa_y y \\ & + B \cos \kappa_x x \sin \kappa_y y \\ & + C \sin \kappa_x x \cos \kappa_y y \\ & + D \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y) e^{i2\pi z/\lambda_g} \end{aligned} \quad (13.179)$$

(i) Enligt det tidigare receptet får vi nu

$$\partial_y H_z = \frac{2\pi}{\mu_0 \omega \lambda_g} \left[i \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\lambda_g}{2\pi} - i \frac{2\pi}{\lambda_g} \right] E_x = \frac{i}{\mu_0 \omega} \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 \right] E_x \quad (13.180)$$

som ger

$$E_x = -i\mu_0 \omega \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 \right]^{-1} \partial_y H_z \quad (13.181)$$

eller att

$$\begin{aligned} E_x \propto & -\kappa_y (A \cos \kappa_x x \sin \kappa_y y \\ & - B \cos \kappa_x x \cos \kappa_y y \\ & + C \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y \\ & - D \sin \kappa_x x \cos \kappa_y y) e^{i2\pi z/\lambda_g} \end{aligned} \quad (13.182)$$

Det tangentiella elfältet skall vara noll på ytorna, så att vi måste kräva $E_x = 0$ då $y = 0$ och $y = b$.

Detta ger $\sin(\kappa_y b) = 0$ och $B = D = 0$, så att $\kappa_y b = m\pi$, där m är ett heltal.

(ii) Enligt det tidigare receptet får vi också att

$$\partial_x H_z = \left(i\varepsilon_0 \omega - i \frac{2\pi}{\lambda_g} \frac{2\pi}{\mu_0 \omega \lambda_g} \right) E_y = \frac{i}{\mu_0 \omega} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 \right) E_y \quad (13.183)$$

eller att

$$\begin{aligned} E_y \propto & -\kappa_x (A \sin \kappa_x x \cos \kappa_y y \\ & + B \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y \\ & - C \cos \kappa_x x \cos \kappa_y y \\ & - D \cos \kappa_x x \sin \kappa_y y) e^{i2\pi z/\lambda_g} \end{aligned} \quad (13.184)$$

Det tangentiella elfältet skall vara noll på ytorna, så att vi måste kräva $E_y = 0$ då $x = 0$ och $x = a$.

Detta ger $\sin(\kappa_x a) = 0$ och $C = D = 0$, så att $\kappa_x a = l\pi$, där l är ett heltal.

Magnetfältet i z -riktningen är alltså

$$H_z(x, y, z) = A \cos\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i2\pi z/\lambda_g} \quad (13.185)$$

De motsvarande elfälten kallas **TE_{lm}-moder**.

Konventionen är att indexet l motsvarar den bredare dimensionen (x , om $a > b$), och m den smalare dimensionen (y , om $a < b$).

Obs:

$$\kappa_x^2 + \kappa_y^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 \right) = 0 \quad (13.186)$$

$$\kappa_x = \frac{l\pi}{a} \quad (13.187)$$

$$\kappa_y = \frac{m\pi}{b} \quad (13.188)$$

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (13.189)$$

ger oss nu

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad (13.190)$$

Energins eller signalens hastighet är

$$v_g = \frac{c\lambda_0}{\lambda_g} \quad (13.191)$$

för en monokromatisk våg.

En fortskridande våg förekommer nu om

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 > \left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \equiv \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 \quad (13.192)$$

Detta ger

$$\frac{1}{\lambda_0^2} > \left(\frac{l}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m}{2b}\right)^2 \quad (13.193)$$

För fixerade kantlängder a, b och en viss mod (l, m) kan bara vågor med våglängden λ_0 uppfyllande ekvationen ovan fortskrida.

Alternativt, med hjälp av frekvensen $\nu_0 = c/\lambda_0$, fås

$$\nu_0 > \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2} = \nu_{\min} = \frac{c}{\lambda_{\max}} \quad (13.194)$$

Vanligtvis väljs vågledarens dimensioner så att endast TE₁₀-moden av den sökta frekvensen eller våglängden fortskrider.

l	m	$\nu_{\min}$ (Hz)	$\lambda_{\max}$ (m)
0	0	0	∞
1	0	$c/(2a)$	$2a$
0	1	$c/(2b)$	$2b$
2	0	c/a	a
0	2	c/b	b

Exempel : Mikrovågor har frekvensen $\nu = 10^{10}$ Hz. TE₁₀-moden motsvarar $\nu_{\min} = c/(2a)$, så om mikrovågor och vågor med högre frekvens skall fortskrida, men inte vågor med lägre frekvens (radio), måste vi ha $a > c/(2\nu) = 1,5$ cm.

Vågledare har en standardstorlek given av $a = 0,9 \text{ tum} = 2,28 \text{ cm}$ och $b = 0,4 \text{ tum} = 1,01 \text{ cm}$. En tum motsvarar 2,54 cm.

Minimumfrekvensen för TE_{10} -moden är nu $\nu_{\min} = c/(2a) = 6,56 \times 10^9 \text{ Hz}$ så att maximumvåglängden är $\lambda_{\max} = c/\nu_{\min} = 2a = 4,57 \text{ cm}$. Detta betyder att mikrovågor och högfrekventare strålning kan fortskrida.

P.g.a. starka förluster för frekvenser nära bryt-frekvensen höjer man lite på det teoretiska standardvärdet för a så att det är mellan 2,42 cm och 4,35 cm.

13.4. Kavitetsresonatorer

Vi behandlade tidigare en RLC -krets och såg att strömmen i denna hade två tidsberoenden. För det första förekom en faktor med harmoniskt tidsberoende, och för det andra förekom också en faktor med exponentiellt dämpat tidsberoende. Dämpningen var orsakad av resistorn i kretsen.

Om resistorn avlägsnas kan man visa att strömmen blir harmonisk, så att energin i kretsen pendlar mellan fullständigt elektrisk (kondensatorn fulladdad) och fullständigt magnetisk (spolens magnetfält har maximal styrka).

Ett annat sätt att lagra elektromagnetisk energi är att generera EM-fält inne i en kavitet med starkt ledande väggar. Dyliga kallas **kavitetsresonatorer**.

Dessa är bättre än LC -kretsar, av två anledningar:

- (1) Relativ energiförlust per oskillation i en resonator är endast ca $1/20 = 5 \%$ av vad den är i en LC -krets.
- (2) LC -kretsar mer eller mindre omöjliga att konstruera för frekvenser av storleksordningen 100 MHz och större.

Låt resonatorns väggar vara i $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ och $z = d$. På dessa plan gäller att elfältets tangentiella komponent och den magnetiska flödestäthetens normalkomponent båda skall vara noll.

Beteckna elfältet med

$$\mathbf{E}'(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y, z)e^{-i\omega t} \quad (13.195)$$

Vågekvationen

$$\nabla^2 \mathbf{E}' - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \mathbf{E}' = 0 \quad (13.196)$$

skall vara uppfylld för varje komponent. Detta ger t.ex.

$$\nabla^2 E_x + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 E_x = \nabla^2 E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = 0 \quad (13.197)$$

E_x är tangenten av elfältet på väggarna i $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ och $z = d$.

En enkel lösning som uppfyller detta är

$$E_x = E_1 f_1(x) \sin \kappa_y y \sin \kappa_z z \quad (13.198)$$

där

$$\kappa_y b = m\pi \quad (13.199)$$

$$\kappa_z d = n\pi \quad (13.200)$$

med m, n heltal.

Motsvarande för E_y och E_z ger att elfältets komponenter är

$$E_x = E_1 f_1(x) \sin \kappa_y y \sin \kappa_z z \quad (13.201)$$

$$E_y = E_2 f_2(y) \sin \kappa_x x \sin \kappa_z z \quad (13.202)$$

$$E_z = E_3 f_3(z) \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y \quad (13.203)$$

där

$$\kappa_x a = l\pi \quad (13.204)$$

med l ett heltal, så att t.ex. $E_y = 0$ då $x = 0$ eller $x = a$.

I vakuum gäller ännu att $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$:

$$\begin{aligned} & E_1 f_1'(x) \sin \kappa_y y \sin \kappa_z z + E_2 f_2'(y) \sin \kappa_x x \sin \kappa_z z \\ & + E_3 f_3'(z) \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y \\ = & 0 \end{aligned} \quad (13.205)$$

Med

$$f_1(x) = \cos \kappa_x x \quad (13.206)$$

$$f_2(y) = \cos \kappa_y y \quad (13.207)$$

$$f_3(z) = \cos \kappa_z z \quad (13.208)$$

fås

$$-(\kappa_x E_1 + \kappa_y E_2 + \kappa_z E_3) \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y \sin \kappa_z z = 0 \quad (13.209)$$

så att vi får villkoret

$$\kappa_x E_1 + \kappa_y E_2 + \kappa_z E_3 = 0 \quad (13.210)$$

eller

$$\frac{lE_1}{a} + \frac{mE_2}{b} + \frac{nE_3}{d} = 0 \quad (13.211)$$

Detta binder samman elfältsamplituderna för en viss **$\mathbf{TE}_{lmn}$ -mod.**

Ett mera användbart villkor fås med ekv. (13.197), som ger

$$-\kappa_x^2 - \kappa_y^2 - \kappa_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (13.212)$$

Med uttrycken för vågvektorerna och relationen $\omega = 2\pi\nu$ fås

$$\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 = \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2} \quad (13.213)$$

eller förenklat

$$\nu = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{d}\right)^2} \quad (13.214)$$

Varje kombination av l, m, n ger en bestämd **resonansfrekvens** ν för det elfält som kan existera inne i kaviteten.

Det associerade magnetfältet fås med hjälp av Maxwells IV lag

$$\nabla \times \mathbf{E}'(x, y, z, t) = -\partial_t \mathbf{B}'(x, y, z, t) \quad (13.215)$$

som ger

$$\mathbf{B}(x, y, z) = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E}(x, y, z) \quad (13.216)$$

Elfälten kan nu skrivas

$$E_x = E_1 \cos\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \quad (13.217)$$

$$E_y = E_2 \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \quad (13.218)$$

$$E_z = E_3 \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \quad (13.219)$$

Om en standard-vågledare används för att konstruera kaviteten, så är dimensionerna i x och y fixerade till $a = 0,9 \text{ tum} = 2,28 \text{ cm}$ och $b = 0,4 \text{ tum} = 1,01 \text{ cm}$. Genom att spela med olika längder d och index l, m, n kan kaviteten skräddarsys för önskad frekvens.

Exempel : En standardkonfiguration av TE-moder i en kavititet är $(l, m, n) = (1, 0, 2)$. Om mikrovågor vill lagras i denna gäller att $\nu = 10^{10} \text{ Hz}$. Bestäm d .

Ekvationen ovan ger

$$d = \frac{a}{\sqrt{\nu^2 a^2 / c^2 - 1/4}} \approx 3,00 \text{ cm} \quad (13.220)$$

□