

12. Plana vågors fortskridande i oändliga media

[RMC]

12.1. Introduktion

Ny notation för den relativa permittiviteten

I detta kapitel granskas hur monokromatiska elektromagnetiska vågor rör sig i ledande och icke-ledande media.

Vi kommer att granska enbart icke-magnetiska media, så att $\mu \approx \mu_0$ till en god approximation. Vi använder nu en modifierad notation för permittiviteten,

$$\varepsilon \equiv K\varepsilon_0 \quad (12.1)$$

så att den relativa permittiviteten (dielektricitetskonstanten) nu betecknas K istället för ε_r som tidigare. Orsaken till denna nya notation är att den reella komponenten av permittiviteten inte skall förväxlas med den relativa permittiviteten.

Permittivitetsens frekvensberoende

Då en elektromagnetisk våg passerar ett medium är responsen på vågen i allmänhet beroende på dess vinkelfrekvens ω . Detta ger upphov till ett frekvensberoende i permittiviteten och konduktiviteten: $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ och $g = g(\omega)$.

Frekvensberoendet är lätt att förstå ur ett kvantmekaniskt perspektiv. En elektromagnetisk våg motsvarar ju en ström av fotoner. En fotonens energi är $h\nu = \hbar\omega$ där h är Plancks konstant och $\hbar = h/(2\pi)$.

Ett material består av atomer och molekyler med diskreta energinivåer, och om materialet är en kristall så har det en elektronisk bandstruktur. Om fotonens energi motsvarar skillnaden $\Delta E = E_n - E_{n-1}$ mellan energinivåerna $n - 1$ och n går fotonens energi åt till att excitera elektronen från den ena nivån till den andra.

En ändlig tid går åt för excitationen och de-excitationen, vilket gör att dessa fotoner transporteras långsammare genom mediet. De motsvarande elementarvågorna saktas alltså ner.

Dyliga frekvensberoende fenomen går under namnet **dispersiva effekter**.

Dispersionen är kanske mest synbar om vågen är en puls bestående av en summa av delvågor med olika frekvenser. I detta fall påverkas delarna olika mycket, så att vågens form kan förvridas avsevärt.

Å andra sidan, de-exciteringen kan ske via mellannivåer, så att flera fotoner med olika lägre energier avges. Denna förlust av energi medför att några elementarvågors amplituder sjunker.

Vågen förlorar energi också då den orsakar polarisation av molekyler i mediet, t.ex. vattenmolekyler, då den driver fria laddningar, och då den sprids från och bryts genom interna mikroskopiska ytor.

Material i vilka vågen förlorar energi kallas **dissipativa media** (eng. *lossy media*).

Vi återkommer till dispersion i slutet av kapitlet. I det följande räcker det att komma ihåg att ε och g — och de storheter där dessa ingår — är frekvensberoende. Detta leder till att t.ex. synligt ljus och radiovågor bryts eller dämpas olika mycket vid gränssytor och i ledande media.

12.2. Vågor

[Griffiths]

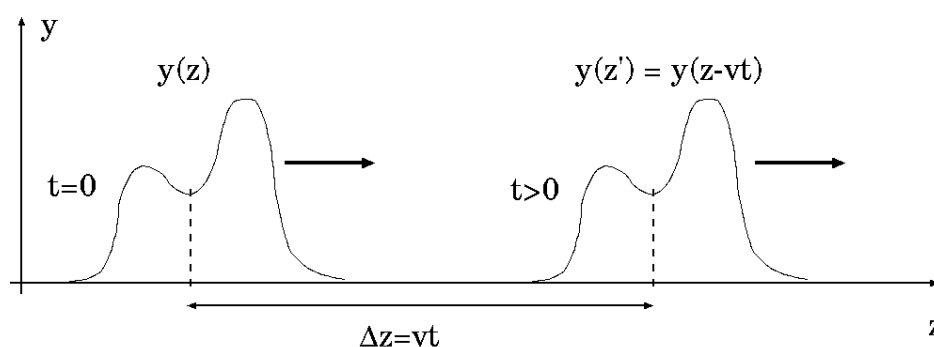
12.2.1. Definition

En våg är en störning som rör sig med en konstant hastighet i ett kontinuerligt medium utan att ändra sin form.

Kravet att vågen skall ha fixerad form är inte alltid uppfyllt. Om vågen är en summa av elementarvågor så bidrar **dispersiva** effekter till att ändra på formen. Detta inträffar p.g.a. mediet gör att olika elementarvågor rör sig olika snabbt.

Kravet att amplituden ska vara konstant bryts i **dissipativa** media. I dessa material förlorar vågen energi då den driver laddningar.

Om dessa effekter inte behöver beaktas, d.v.s. vi har ett **icke-dissipativt och icke-dispersivt medium**, så kommer en våg att bete sig som i figuren:



Vågens form vid tidpunkten $t = 0$ ges av $y_1(z)$.

Vid tidpunkten $t > 0$ har vågen flyttat sig med avståndet $\Delta z = vt$, så att dess form nu ges av $y_2(z) = y_1(z') = y_1(z - vt)$. Samma uttryck gäller vid $t = 0$, eftersom $y_1(z - vt) = y_1(z)$ då.

Om vågen rör sig åt andra hållet ändrar vi $-v$ till $+v$.

Slutsats: **En endimensionell våg längs med z -axeln beskrivs av en form $f(z, t)$ som är en summa av funktioner i $z - vt$ och $z + vt$, där v är vågens hastighet längs med z -axeln:**

$$f(z, t) = g(z - vt) + h(z + vt) \quad (12.2)$$

I fortsättningen granskar vi endast vågor som rör sig i positiva z -axelns riktning, så att $f(z, t) = g(z - vt)$.

Möjliga vågor är

$$f_1 = z - vt \quad (12.3)$$

$$f_2 = \sin(z - vt) \quad (12.4)$$

$$f_3 = \cosh(az - bt) = \cosh(a(z - (b/a)t)) \quad (12.5)$$

$$f_4 = \exp[(z - vt)^2] \quad (12.6)$$

$$f_5 = \exp[z^2] \quad (12.7)$$

Vågen f_3 har hastigheten $v = b/a$.

Vågen f_5 är en **stående våg**, eftersom $v = 0$.

Följande är **inte** vågor:

$$g_1 = z^2 - vt \quad (12.8)$$

$$g_2 = \sin(z - vt^2) \quad (12.9)$$

$$g_3 = \cosh(az) \sin(vt) \quad (12.10)$$

g_3 är dock ett gränsfall. Om v sägs vara vågens hastighet så är g_3 inte en våg. Men om v bara är någon konstant kan g_3 sägas vara en stående våg vars amplitud är tidsmodulerad.

12.2.2. Harmoniska vågor

Den vanligaste formerna av vågor är de **harmoniska**, d.v.s. vågor med de sinusoidala funktionerna

$$\sin(\kappa(z - vt) + \phi_0), \quad \cos(\kappa(z - vt) + \phi_0) \quad (12.11)$$

Faktorn κ har införts för att göra de trigonometriska funktionernas argument dimensionslösa.

Vi fokuserar i det följande på sinusformen. Denna kan skrivas

$$\begin{aligned} f(z, t) &= A \sin(\kappa(z - vt) + \phi_0) \\ &= A \sin(\kappa z - \kappa vt + \phi_0) \\ &\equiv A \sin(\kappa z - \omega t + \phi_0) \end{aligned} \quad (12.12)$$

Vågens maximala värde, A , kallas dess **amplitud**.

Sinus-funktionens argument kallas för vågens **fas**.

ϕ_0 är **faskonstanten**, och ges av

$$f(0, 0) = A \sin(\phi_0) \quad (12.13)$$

Hastigheten v har ett eget namn, **fashastigheten**, och brukar betecknas v_f för tydlighetens skull.

Vid en fixerad tid, t.ex. $t = 0$, gäller

$$f(z, 0) = \sin(\kappa z + \phi_0) \quad (12.14)$$

Vågen upprepar sig då z har växt med $\Delta z = 2\pi/\kappa \equiv \lambda$, vilket motsvarar vågens **våglängd**.

Konstanten κ kallas **vågvektor**.

Om positionen är fixerad och tiden växer, så upprepar vågen sig då t växt med $\Delta t = 2\pi/\omega \equiv T$, som kallas vågens **period**.

Inversen av perioden, $\nu = 1/T = \omega/(2\pi)$, är vågens **frekvens**.

Konstanten ω kallas **vinkelfrekvens**.

Eftersom $\kappa v = \omega$ får vi för fashastigheten att $v = \omega/\kappa = \lambda\omega/(2\pi)$.

12.2.3. Komplex notation

I praktiken är sinus- och cosinus-funktionerna svåra att räkna med, så man använder för det mesta följande komplexa form för sinusoidala vågor:

$$\tilde{f}(z, t) = A e^{i(kz - \omega t + \phi_0)} = \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)} \quad (12.15)$$

där faskonstanten inkluderas i den komplexa amplituden.

Den verkliga vågen motsvarar

$$\text{Re}(\tilde{f}(z, t)) \quad (12.16)$$

eller

$$\text{Im}(\tilde{f}(z, t)) \quad (12.17)$$

beroende på om man söker cosinus- eller sinus-formen.

12.2.4. Superposition

En godtycklig våg kan alltid skrivas som en summa eller **superposition** av de sinusoidala elementarvågorna

$$\tilde{A}(\kappa)e^{i(\kappa z - \omega t)} \quad (12.18)$$

Vågen blir då

$$\tilde{f}(z, t) = \sum_{\kappa} \tilde{A}(\kappa)e^{i(\kappa z - \omega t)} \quad (12.19)$$

eller mera allmänt

$$\tilde{f}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \tilde{A}(\kappa)e^{-i\omega t} e^{i\kappa z} \quad (12.20)$$

Detta är **Fouriertransformen** av $\tilde{A}(\kappa)e^{-i\omega t}$.

Den **inversa Fouriertransformen** är

$$\tilde{A}(\kappa)e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \tilde{f}(z, t)e^{-i\kappa z} \quad (12.21)$$

Genom att kombinera dessa får vi följande uttryck för Diracs delta-funktion:

$$\delta(z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa e^{i\kappa(z - z')} \quad (12.22)$$

I tre dimensioner:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dV_{\kappa} e^{i\kappa \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (12.23)$$

12.2.5. Tredimensionella vågor

En harmonisk elementarvåg i tre dimensioner skrivs som

$$\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa})e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (12.24)$$

där $\boldsymbol{\kappa} = \kappa \hat{\mathbf{u}}$ och $\hat{\mathbf{u}}$ anger vågens fortskridningsriktning.

Vi har nu att

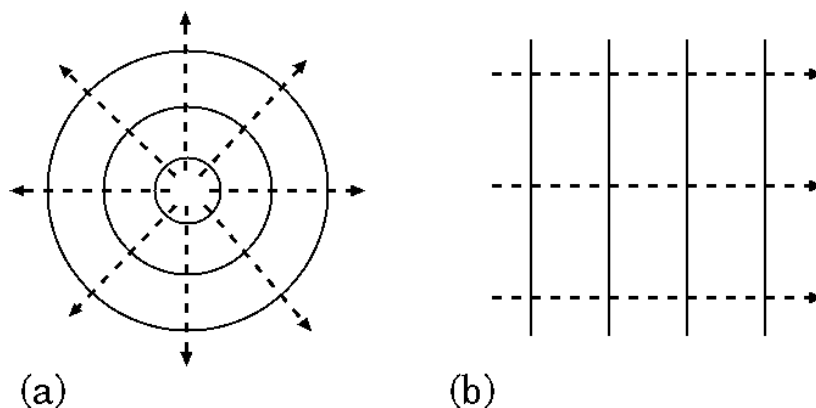
$$\omega = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{v} = \kappa v \quad (12.25)$$

så att **fashastigheten** är som tidigare

$$v_f = \frac{du}{dt} = \frac{\omega}{\kappa} \equiv \frac{c}{n} \quad (12.26)$$

Vektorn är $\mathbf{v}_f = v \hat{\mathbf{u}}$.

Två viktiga specialfall av tredimensionella vågor är **plana vågor** och **sfäriska vågor**. Vi återkommer eventuellt i ett senare skede till sfäriska vågor, tills dess fokuserar vi uteslutande på plana vågor.

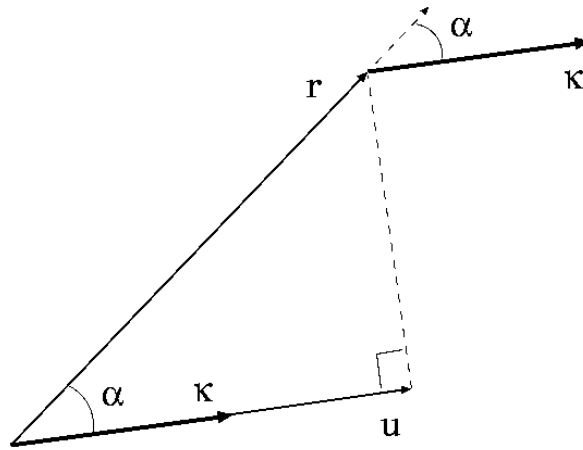


Plana vågor är vågor vars fas är konstant på varje plan som är vinkelrätt mot vågens fortskridningsriktning.

Om exempelvis $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{z}}$ så får vi

$$\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa})e^{i(\kappa z - \omega t)} \quad (12.27)$$

och κ måste vara oberoende av x och y .



Produkten av våvektorn och positionen kan skrivas

$$\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} = \kappa r \cos \alpha \equiv \kappa u \quad (12.28)$$

där $u = r \cos \alpha$ är **koordinaten längs med riktningen κ** .

Elementarvågen kan vi nu skriva som

$$\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i(\kappa u - \omega t)} \quad (12.29)$$

Storleken av en godtycklig komplex-värd våg — utan riktningsvektorn — ges av integralen

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\kappa} \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (12.30)$$

Detta motsvarar den **tredimensionella Fouriertransformen**.

Observera att dispersiva effekter har inkluderats i och med att $\omega = \omega(\boldsymbol{\kappa})$.

Amplituden ges av

$$\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \int dV_r \tilde{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (12.31)$$

Det fysikaliska fältet eller den fysikaliska amplituden fås med hjälp av följande regler. Antag $z = a + ib$ där a, b är reella. Då gäller

$$a = \mathbf{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad (12.32)$$

$$b = \mathbf{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*) \quad (12.33)$$

där z^* betyder komplexkonjugering.

12.2.6. Initialvillkor

Om vågens form $\mathbf{Re}(\tilde{E}(\mathbf{r}, 0)) = E_r(\mathbf{r}, 0)$ och dess tidsderivata är kända vid $t = 0$ kan amplituden bestämmas enligt följande.

Vi börjar med att notera att

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, t) = E_r(\mathbf{r}, t) + iE_i(\mathbf{r}, t) \quad (12.34)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (12.35)$$

$$\partial_t \tilde{E}(\mathbf{r}, t) = \partial_t E_r(\mathbf{r}, t) + i\partial_t E_i(\mathbf{r}, t) \quad (12.36)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa (-i\omega(\boldsymbol{\kappa}) \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (12.37)$$

Insättning av $t = 0$ och tillbakatransformation ger oss

$$\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_r [E_r(\mathbf{r}, 0) + iE_i(\mathbf{r}, 0)] e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (12.38)$$

$$-i\omega(\boldsymbol{\kappa})\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_r [\partial_t E_r(\mathbf{r}, 0) + i\partial_t E_i(\mathbf{r}, 0)] e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (12.39)$$

Detta system ger att

$$E_i(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{\omega(\boldsymbol{\kappa})} \partial_t E_r(\mathbf{r}, 0) \quad (12.40)$$

så att vi får

$$\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_r \left[E_r(\mathbf{r}, 0) + \frac{i}{\omega(\boldsymbol{\kappa})} \partial_t E_r(\mathbf{r}, 0) \right] e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (12.41)$$

Exempel 1: Vi har genererat en sinusvåg som rör sig i z -riktningen, och som består av N våglängder, $L = N\lambda_0$. Bestäm frekvensspektret $\tilde{A}(\kappa)$.

Låt vågen vara $E_r(z, t) = \sin(kz - \omega t)$. Vågen och dess tidsderivata är

$$E_r(z, 0) = \sin(\kappa_0 z), \quad 0 < z < L \quad (12.42)$$

$$\partial_t E_r(z, 0) = -\omega \cos(\kappa_0 z), \quad 0 < z < L \quad (12.43)$$

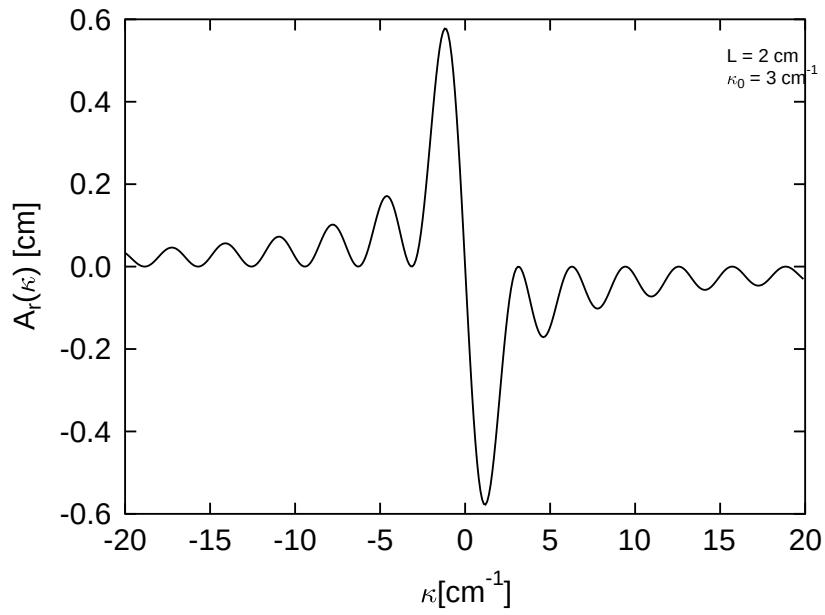
Amplituden:

$$\tilde{A}(\kappa) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^L dz [\sin(\kappa_0 z) - i \cos(\kappa_0 z)] e^{-i\kappa z} \quad (12.44)$$

$$= -i \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^L dz [\cos(\kappa_0 z) + i \sin(\kappa_0 z)] e^{-i\kappa z} \quad (12.45)$$

$$= -i \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^L dz e^{-i(\kappa - \kappa_0)z} \quad (12.46)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\kappa - \kappa_0} (e^{i(\kappa_0 - \kappa)L} - 1) \quad (12.47)$$



Check: Får vi tillbaka samma fält som vi startade med ?

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \tilde{A}(\kappa) e^{-i\omega(\kappa)t} e^{i\kappa z} \quad (12.48)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{1}{\kappa - \kappa_0} e^{i(\kappa_0 - \kappa)L} e^{-i\omega(\kappa)t + i\kappa z} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{1}{\kappa - \kappa_0} e^{-i\omega(\kappa)t + i\kappa z} \quad (12.49)$$

$$(12.50)$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 L} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{1}{\kappa - \kappa_0} e^{-i\omega(\kappa)t} e^{i\kappa(z-L)} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{1}{\kappa - \kappa_0} e^{-i\omega(\kappa)t + i\kappa z} \quad (12.51)$$

$$(12.52)$$

Vid $t = 0$:

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 L} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{e^{i\kappa(z-L)}}{\kappa - \kappa_0} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{e^{i\kappa z}}{\kappa - \kappa_0}\end{aligned}\quad (12.53)$$

Från residykalkyl har vi följande regel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{e^{ia\kappa}}{\kappa - \kappa_0} = \text{sgn}(a) \pi i e^{ia\kappa_0} \quad (12.54)$$

där $\text{sgn}(a) = a/|a|$ ger tecknet på a .

Då $z < 0$ och $z > L$ fås

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, 0) = \pm \pi i \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 L} e^{i\kappa_0(z-L)} - (\pm) \pi i \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 z} = 0 \quad (12.55)$$

Då $0 < z < L$:

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, 0) = -\pi i \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 L} e^{i\kappa_0(z-L)} - \pi i \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 z} \quad (12.56)$$

$$= -\pi i \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 z} - \pi i \frac{1}{2\pi} e^{i\kappa_0 z} \quad (12.57)$$

$$= -i e^{i\kappa_0 z} = -i \cos(\kappa_0 z) + \sin(\kappa_0 z) \quad (12.58)$$

så att $E_r(\mathbf{r}, 0) = \sin(\kappa_0 z)$, $0 < z < L$, exakt som väntat ! $\square$

12.2.7. Det elektromagnetiska spektret

[Griffiths]

The Electromagnetic Spectrum		
Frequency (Hz)	Type	Wavelength (m)
10^{22}		10^{-13}
10^{21}	gamma rays	10^{-12}
10^{20}		10^{-11}
10^{19}		10^{-10}
10^{18}	x rays	10^{-9}
10^{17}		10^{-8}
10^{16}	ultraviolet	10^{-7}
10^{15}	visible	10^{-6}
10^{14}	infrared	10^{-5}
10^{13}		10^{-4}
10^{12}		10^{-3}
10^{11}		10^{-2}
10^{10}	microwave	10^{-1}
10^9		1
10^8	TV, FM	10
10^7		10^2
10^6	AM	10^3
10^5		10^4
10^4	RF	10^5
10^3		10^6

The Visible Range		
Frequency (Hz)	Color	Wavelength (m)
1.0×10^{15}	near ultraviolet	3.0×10^{-7}
7.5×10^{14}	shortest visible blue	4.0×10^{-7}
6.5×10^{14}	blue	4.6×10^{-7}
5.6×10^{14}	green	5.4×10^{-7}
5.1×10^{14}	yellow	5.9×10^{-7}
4.9×10^{14}	orange	6.1×10^{-7}
3.9×10^{14}	longest visible red	7.6×10^{-7}
3.0×10^{14}	near infrared	1.0×10^{-6}

12.3. Monokromatiska plana vågor i icke-ledande media

Vi kommer nu att granska fortskridningen av monokromatiska plana vågor i oändliga media, d.v.s. media som inte innehåller några randytor.

För ett laddningsfritt icke-ledande medium gäller $\rho = \mathbf{J} = \mathbf{g} = 0$ så att Maxwells ekvationer är

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (12.59)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (12.60)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (12.61)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (12.62)$$

El- och magnetfälten ska nu vara monokromatiska, plana vågor:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (12.63)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (12.64)$$

Tidsderivatan betyder nu multiplikation med $-i\omega$.

Platsderivatan ger en faktor $i\kappa$.

Vi får:

$$\kappa \cdot \tilde{\mathbf{D}}_0 = 0 \quad (12.65)$$

$$\kappa \cdot \tilde{\mathbf{B}}_0 = 0 \quad (12.66)$$

$$\kappa \times \tilde{\mathbf{E}}_0 = \omega \tilde{\mathbf{B}}_0 \quad (12.67)$$

$$\kappa \times \tilde{\mathbf{H}}_0 = -\omega \tilde{\mathbf{D}}_0 \quad (12.68)$$

För linjära media: $\tilde{\mathbf{B}} = \mu \tilde{\mathbf{H}}$, $\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}$.

De flesta icke-ferromagnetiska media har små magnetiska susceptibiliteter, vilket gör att $\mu \approx \mu_0$ för dessa. Denna approximation kan vi inte göra för de ferromagnetiska medierna, som dessutom är olinjära. Ersättandet av μ med μ_0 gör att vi får

$$\mu\varepsilon \approx \mu_0\varepsilon = K\mu_0\varepsilon_0 = \frac{K}{c^2} \quad (12.69)$$

Vi har nu

$$\kappa \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0 = 0 \quad (12.70)$$

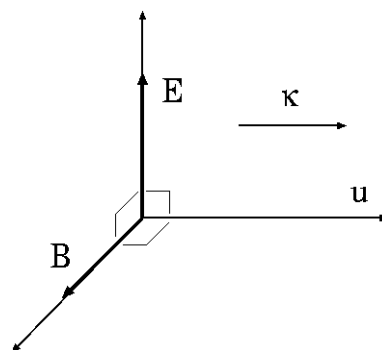
$$\kappa \cdot \tilde{\mathbf{B}}_0 = 0 \quad (12.71)$$

$$\kappa \times \tilde{\mathbf{E}}_0 = \omega \tilde{\mathbf{B}}_0 \quad (12.72)$$

$$\kappa \times \tilde{\mathbf{B}}_0 = -\omega\mu\varepsilon\tilde{\mathbf{E}}_0 = -\frac{\omega K}{c^2}\tilde{\mathbf{E}}_0 \quad (12.73)$$

Från första och andra ekvationerna ser vi att $\mathbf{E}$ och $\mathbf{B}$ alltid är vinkelräta mot färdriktningen, som anges av κ . Dyliga vågor kallas **transversella**.

Från tredje eller fjärde ekvationen ser vi att $\kappa, \tilde{\mathbf{E}}_0, \tilde{\mathbf{B}}_0$ bildar ett högerhandssystem.



Fjärde ekvationen ger

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\kappa} \times \tilde{\mathbf{B}}_0 &= \boldsymbol{\kappa} \times \left(\frac{\boldsymbol{\kappa} \times \tilde{\mathbf{E}}_0}{\omega} \right) \\
 &= \frac{1}{\omega} ((\boldsymbol{\kappa} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0) \boldsymbol{\kappa} - \kappa^2 \mathbf{E}_0) \\
 &= -\frac{1}{\omega} \kappa^2 \tilde{\mathbf{E}}_0 \\
 &= -\frac{\omega}{c^2} K \tilde{\mathbf{E}}_0
 \end{aligned} \tag{12.74}$$

så att

$$\kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{K} = \frac{\omega}{c/n} = \frac{\omega}{c} n \tag{12.75}$$

enligt fashastighets-uttrycket, och

$$\kappa = \frac{\omega}{c/n} = \frac{\omega}{v_f} \tag{12.76}$$

Detta är **dispersionsrelationen** för dessa monokromatiska, plana vågor i icke-ledande, icke-magnetiska ($\mu = \mu_0$) media med den relativa permittiviteten K .

Observera att magnetfältet ges av elfältet som

$$\mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\omega} \times \mathbf{E} = \frac{n}{c} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E} \tag{12.77}$$

Exempel : Visa att

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377 \quad \Omega \tag{12.78}$$

gäller för vakuum. Detta kallas också **vakuum's impedans**.

Antag vi har en plan våg. Maxwells III ekvation ger

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} = -\partial_t \mathbf{B}_0 e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})} = i\omega \mathbf{B} \tag{12.79}$$

Å andra sidan gäller

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})} = i\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{E} \tag{12.80}$$

så att

$$\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \tag{12.81}$$

Eftersom

$$\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (12.82)$$

gäller ju $\boldsymbol{\kappa} \perp \mathbf{D}$ och

$$|\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{E}| = \kappa E = \omega B = \omega \mu H \quad (12.83)$$

så att

$$\frac{E}{H} = \frac{\omega \mu}{\kappa} = \frac{\omega \mu}{\omega/v} = \mu v = \mu \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (12.84)$$

eftersom mediet är vakuum. $\square$

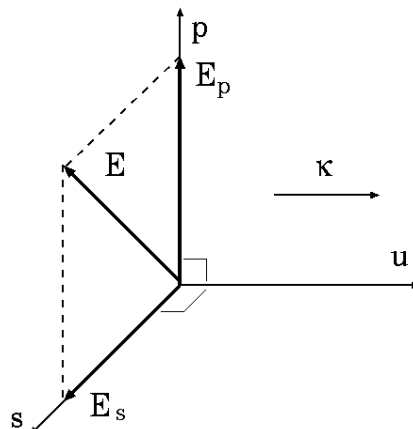
12.4. Polarisation

Den komplexvärda amplituden för t.ex. elfältet kan delas upp i två komponenter, båda vinkelräta mot vågens färdriktning:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_0 &= \tilde{E}_{0p} \hat{\mathbf{p}} + \tilde{E}_{0s} \hat{\mathbf{s}} \\ &= E_{0p} e^{i\phi} \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} \hat{\mathbf{s}} \end{aligned} \quad (12.85)$$

där vi summerade fasskillnaden i den första termen.

Systemet är orienterat som $\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{u}}$.



Det totala elfältet är nu

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})} \\ &= E_{0p} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi)} \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})} \hat{\mathbf{s}}\end{aligned}\quad (12.86)$$

Det fysikaliska fältet är

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}, t) = E_{0p} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi) \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{s}} \quad (12.87)$$

Detta ger i det allmänna fallet upphov till en amplitud som ändrar riktning med tiden, istället för att oskillera fram och tillbaka i samma riktning.

(i) Om $\phi = 0$:

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}, t) = (E_{0p} \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} \hat{\mathbf{s}}) \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \quad (12.88)$$

Vågen oskillerar alltid längs med samma linje, och amplituden varierar mellan $\pm \sqrt{E_{0p}^2 + E_{0s}^2}$. Detta kallas **linjär polarisation**.

Om $\phi = \pi$:

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}, t) = (-E_{0p} \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} \hat{\mathbf{s}}) \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \quad (12.89)$$

Detta är också linjär polarisation.

(ii) Om $\phi = \pi/2$:

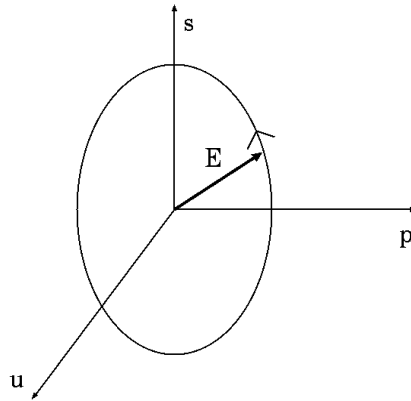
$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}, t) = E_{0p} \hat{\mathbf{p}} \cos(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) + E_{0s} \hat{\mathbf{s}} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \quad (12.90)$$

Om nu t.ex. $\mathbf{r} = 0$ så

$$\mathbf{E}_P(0, t) = E_{0p}\hat{\mathbf{p}} \cos(\omega t) + E_{0s}\hat{\mathbf{s}} \sin(\omega t) \quad (12.91)$$

En observatör som ser vågen komma emot sig ser att elfältsvektorn roterar moturs, se bilden. En dylik våg är **vänsterhands-polariserad** i optiken, och sägs ha **positiv helicitet**.

Polarisationens natur bedöms alltid utifrån en fixerad punkt, och hur elfältsvektorn beter sig i tiden i denna punkt.



I detta fall ritar elfältsvektorn ut en ellips, så denna våg har en **elliptisk polarisation**.

Om $E_{0p} = E_{0s}$ har vi **cirkulär polarisation**.

Magnetfältet är

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_P &= \frac{n}{c} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_P \\ &= \frac{n}{c} (E_{0p} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi) \hat{\mathbf{s}} - E_{0s} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}}) \end{aligned} \quad (12.92)$$

eftersom koordinatsystemet är orienterat som $\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{u}}$.

Observera:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P \cdot \mathbf{B}_P &= -\frac{n}{c} E_{0p} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi) E_{0s} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \\ &\quad + \frac{n}{c} E_{0s} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) E_{0p} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12.93)$$

så de verkliga el- och magnetfälten är ortogonala.

12.5. Energitäthet och -ström

Vi har upp tills nu kunnat använda komplexvärda fält i Maxwells ekvationer. Detta har möjliggjorts av det att ekvationerna är linjära, och reella och imaginära delarna av ett komplext fält därför var för sig uppfyller ekvationerna. Vi kommer nu att granska energitätheten u_{EM} och Poynting-vektorn $\mathbf{S}$, som båda innehåller produkter av fälten. I dessa sammanhang måste vi använda de reella eller imaginära fälten, och inte den komplexa versionen.

De fysikaliska fälten är ju

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}, t) = E_{0p} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi) \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{s}} \quad (12.94)$$

$$\mathbf{B}_P(\mathbf{r}, t) = \frac{n}{c} (E_{0p} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi) \hat{\mathbf{s}} - E_{0s} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}}) \quad (12.95)$$

Välj $\mathbf{r} = 0$ för att förenkla uttrycken.

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}, t) = E_{0p} \sin(\omega t - \phi) \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} \sin(\omega t) \hat{\mathbf{s}} \quad (12.96)$$

$$\mathbf{B}_P(\mathbf{r}, t) = \frac{n}{c} E_{0p} \sin(\omega t - \phi) \hat{\mathbf{s}} - \frac{n}{c} E_{0s} \sin(\omega t) \hat{\mathbf{p}} \quad (12.97)$$

Kvadraterna är

$$E_P^2 = E_{0p}^2 \sin^2(\omega t - \phi) + E_{0s}^2 \sin^2(\omega t) \quad (12.98)$$

$$B_P^2 = \frac{n^2}{c^2} E_{0p}^2 \sin^2(\omega t - \phi) + \frac{n^2}{c^2} E_{0s}^2 \sin^2(\omega t) \quad (12.99)$$

$$= \frac{n^2}{c^2} E_P^2 = \varepsilon \mu E_P^2 \quad (12.100)$$

Energitätheten:

$$\begin{aligned} u_{\text{EM}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_P \cdot \mathbf{D}_P + \mathbf{B}_P \cdot \mathbf{H}_P) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon E_P^2 + \mu^{-1} B_P^2) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon E_P^2 + \varepsilon E_P^2) \\ &= \varepsilon E_P^2 = \frac{1}{\mu} B_P^2 \end{aligned} \quad (12.101)$$

Poyntingvektorn:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{E}_P \times \mathbf{H}_P = \frac{1}{\mu} \mathbf{E}_P \times \mathbf{B}_P = \frac{1}{\mu} E_P B_P \hat{\mathbf{u}} \\ &= \frac{1}{\mu} E_P \sqrt{\varepsilon \mu} E_P \hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \varepsilon \sqrt{\varepsilon \mu} E_P^2 \hat{\mathbf{u}} \\ &= \frac{1}{\mu c} E_P^2 \hat{\mathbf{u}} \\ &= \frac{1}{\mu n} B_P^2 \hat{\mathbf{u}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} u_{\text{EM}} \hat{\mathbf{u}} = \frac{c}{n} u_{\text{EM}} \hat{\mathbf{u}} \\ &= u_{\text{EM}} \mathbf{v}_f\end{aligned}\tag{12.102}$$

där $\mathbf{v}_f$ är vågens fas-hastighet.

Observera att enheten för $\mathbf{S}$ är $\text{J}/(\text{m}^2 \text{ s}) = \text{W}/\text{m}^2$, d.v.s. energi per area och tid, eller effekt per area. Detta är ju enheten för **intensitet**.

Jämför:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}\tag{12.103}$$

Vågen transporterar alltså energi i.o.m. Poyntingvektorn.

Vid höga frekvenser går det inte alltid att mäta den momentana intensiteten $\mathbf{S}$, så man bestämmer istället tidsmedelvärdet $\langle \mathbf{S} \rangle$.

Vi bevisar nu ett teorem med vilket dylika tidsmedelvärden fås snabbare från de komplexa ursprungsuttrycken.

Teorem

Låt

$$f = f_0 e^{i\omega t} = (f_{0r} + i f_{0i}) e^{i\omega t} \quad (12.104)$$

$$g = g_0 e^{i\omega t} = (g_{0r} + i g_{0i}) e^{i\omega t} \quad (12.105)$$

Realdelarna är

$$f_r = f_{0r} \cos(\omega t) - f_{0i} \sin(\omega t) \quad (12.106)$$

$$g_r = g_{0r} \cos(\omega t) - g_{0i} \sin(\omega t) \quad (12.107)$$

medan imaginärdelarna är

$$f_i = f_{0r} \sin(\omega t) + f_{0i} \cos(\omega t) \quad (12.108)$$

$$g_i = g_{0r} \sin(\omega t) + g_{0i} \cos(\omega t) \quad (12.109)$$

Följande gäller:

$$\langle f_r g_r \rangle = \langle f_i g_i \rangle = \frac{1}{2} (f^* g)_r = \frac{1}{2} (f g^*)_r \quad (12.110)$$

Bevis:

$$\begin{aligned} f_r g_r &= f_{0r} g_{0r} \cos^2(\omega t) - f_{0r} \cos(\omega t) g_{0i} \sin(\omega t) \\ &\quad - f_{0i} \sin(\omega t) g_{0r} \cos(\omega t) + f_{0i} g_{0i} \sin^2(\omega t) \end{aligned} \quad (12.111)$$

så att

$$\langle f_r g_r \rangle = \frac{1}{2} f_{0r} g_{0r} + \frac{1}{2} f_{0i} g_{0i} \quad (12.112)$$

$$\begin{aligned} f_i g_i &= f_{0r} g_{0r} \sin^2(\omega t) + f_{0r} \sin(\omega t) g_{0i} \cos(\omega t) \\ &\quad + f_{0i} \cos(\omega t) g_{0r} \sin(\omega t) + f_{0i} g_{0i} \cos^2(\omega t) \end{aligned} \quad (12.113)$$

så att

$$\langle f_i g_i \rangle = \frac{1}{2} f_{0r} g_{0r} + \frac{1}{2} f_{0i} g_{0i} \quad (12.114)$$

$$\begin{aligned} (f^* g)_r &= [(f_{0r} + i f_{0i})^* (g_{0r} + i g_{0i})]_r \\ &= [(f_{0r} - i f_{0i})(g_{0r} + i g_{0i})]_r \\ &= f_{0r} g_{0r} + f_{0i} g_{0i} \end{aligned} \quad (12.115)$$

eftersom $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ så att vi kan plocka bort exponentialfunktionerna direkt.

$$\begin{aligned} (f g^*)_r &= [(f_{0r} + i f_{0i})(g_{0r} + i g_{0i})^*]_r \\ &= [(f_{0r} + i f_{0i})(g_{0r} - i g_{0i})]_r \\ &= f_{0r} g_{0r} + f_{0i} g_{0i} \end{aligned} \quad (12.116)$$

□

Vi kan nu enkelt bestämma tidsmedelvärdet för E_P^2 :

$$\begin{aligned} \langle E_P^2 \rangle &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E})_r \\ &= \frac{1}{2} ((E_{0p} e^{-i(-\phi)} \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} \hat{\mathbf{s}})^* \cdot (E_{0p} e^{-i(-\phi)} \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} \hat{\mathbf{s}}))_r \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{E_{0p}^2 + E_{0s}^2} \end{aligned} \quad (12.117)$$

Detta ger tidsmedelvärdet av Poynting-vektorn som

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{\mu} \frac{n}{c} \frac{1}{2} \sqrt{E_{0p}^2 + E_{0s}^2} \hat{\mathbf{u}} \quad (12.118)$$

12.6. Monokromatiska plana vågor i ledande media

En elektromagnetisk våg i ledande media driver laddningar och förlorar därmed energi. Detta ger upphov till en komplex vågvektor i dispersionsrelationen. Dessutom leder detta till att diverse andra storheter blir komplexa.

Uttrycken för polarisation och energitäthet måste modifieras för att beakta dessa förändringar. I det följande tas detta dock inte upp till behandling.

12.6.1. Dispersionsrelationen

Vågekvationen är nu

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu\partial_t^2 \mathbf{E} - g\mu\partial_t \mathbf{E} = 0 \quad (12.119)$$

eftersom $g \neq 0$. Gör följande *Ansatz*:

$$E(\mathbf{r}, t) = R(\mathbf{r})T(t) \quad (12.120)$$

för varje komponent av elfältet.

Vågekvationen blir nu separabel. Beteckna separationskonstanten med $\tilde{A}$. Vi har:

$$\epsilon\mu T'' + g\mu T' + \tilde{A}T = 0 \quad (12.121)$$

$$\nabla^2 R + \tilde{A}R = 0 \quad (12.122)$$

Lösningen till första ekvationen är

$$T(t) = \tilde{T}_1 e^{-i\tilde{\omega}_1 t} + \tilde{T}_2 e^{-i\tilde{\omega}_2 t} \quad (12.123)$$

där de komplexa vinkelfrekvenserna är lösningar till ekvationen

$$\varepsilon\mu\tilde{\omega}^2 + ig\mu\tilde{\omega} - \tilde{A} = 0 \quad (12.124)$$

Lösningen till andra ekvationen är

$$R(\mathbf{r}) = \tilde{R}_1 e^{i\tilde{\kappa}\cdot\mathbf{r}} + \tilde{R}_2 e^{-i\tilde{\kappa}\cdot\mathbf{r}} \quad (12.125)$$

där $\tilde{\kappa}$ satisfierar

$$\tilde{\kappa}^2 - \tilde{A} = 0 \quad (12.126)$$

Vi har nu villkoret

$$\varepsilon\mu\omega^2 + ig\mu\omega - \tilde{\kappa}^2 = 0 \quad (12.127)$$

Detta är den mest allmänna **dispersionsrelationen** för monokromatiska vågor i linjära, homogena, isotropiska media.

Konventionellt låter man ω vara reellt, så att endast vågvektorn κ är komplexvärd. Denna modifikation har redan utförts i ekvationen ovan.

12.6.2. Komplex permittivitet och de optiska konstanterna

Med de monokromatiska vågorna

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{\kappa}\cdot\mathbf{r})} \quad (12.128)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{\kappa}\cdot\mathbf{r})} \quad (12.129)$$

blir Maxwells ekvationer

$$\tilde{\kappa} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0 = 0 \quad (12.130)$$

$$\tilde{\kappa} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_0 = 0 \quad (12.131)$$

$$\tilde{\kappa} \times \tilde{\mathbf{E}}_0 = \omega \tilde{\mathbf{B}}_0 \quad (12.132)$$

$$\tilde{\kappa} \times \tilde{\mathbf{B}}_0 = -\omega\varepsilon\mu\tilde{\mathbf{E}}_0 - ig\mu\tilde{\mathbf{E}}_0 = -\frac{\omega}{c^2}K\tilde{\mathbf{E}}_0 - ig\mu\tilde{\mathbf{E}}_0 \quad (12.133)$$

$$\equiv -\frac{\omega}{c^2}\tilde{K}\tilde{\mathbf{E}}_0 \quad (12.134)$$

där vi definierade en komplex relativ permittivitet:

$$\tilde{K} \equiv K_r + i \frac{g}{\varepsilon_0 \omega} \equiv K + iK_i \quad (12.135)$$

för att få en **formell likhet** med det motsvarande uttrycket för vågor i icke-ledande media.

Observera: De (komplexa) elektriska och magnetiska flödestätheterna är fortfarande

$$\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}} = K \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}} \quad (12.136)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mu \tilde{\mathbf{H}} \approx \mu_0 \tilde{\mathbf{H}} \quad (12.137)$$

eftersom vi använde dessa relationer, med reella materialegenskaper, i Maxwells ekvationer.

Tidigare hade vi

$$\kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{K} = \frac{\omega}{c} n \quad (12.138)$$

Eftersom den relativa permittiviteten nu är komplexvärd, så måste vi definiera ett komplexvärt brytningsindex:

$$\tilde{n} \equiv n + ik \quad (12.139)$$

där n, k kallas **optiska konstanter**.

Dispersionsrelationen ger nu

$$\tilde{\kappa}^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \left(K + i \frac{g}{\varepsilon_0 \omega} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{K} = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{n}^2 \quad (12.140)$$

Den komplexvärda relativa permittiviteten gör att vi måste skriva

$$\tilde{\kappa} = \kappa_r + i\kappa_i \quad (12.141)$$

där κ_r, κ_i är reella vektorer.

Vi får nu den allmänna dispersionsrelationen för ett dissipativt/ledande medium:

$$\tilde{\kappa} = \sqrt{\kappa_r^2 - \kappa_i^2 + i2\kappa_r \cdot \kappa_i} = \frac{\omega}{c} \tilde{n} = \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 - k^2 + i2nk} \quad (12.142)$$

Obs: Om $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ är en komplex vektor, så gäller

$$\tilde{\mathbf{z}}^2 = a^2 - b^2 + 2i\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (12.143)$$

$$\tilde{z} = \sqrt{\tilde{\mathbf{z}}^2} = \sqrt{a^2 - b^2 + 2i\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \quad (12.144)$$

$$|\tilde{z}| = \sqrt{\tilde{z}\tilde{z}^*} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (12.145)$$

Elfältet blir nu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{\kappa} \cdot \mathbf{r})} \\ &= \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\kappa_i \cdot \mathbf{r}} e^{-i(\omega t - \kappa_r \cdot \mathbf{r})} \\ &= \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega t - \kappa_r \cdot \mathbf{r})} \end{aligned} \quad (12.146)$$

Detta är en plan våg som fortskrider i riktningen κ_r , men med avtagande amplitud $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$. Avtagandet är snabbast i riktningen κ_i .

Vågens fashastighet ges av tidsderivatan av

$$\omega t - \kappa_r \cdot \mathbf{r} = \omega t - \kappa_r u = \text{konstant} \quad (12.147)$$

och är

$$v_f = \frac{\omega}{\kappa_r} = \frac{c}{n} \quad (12.148)$$

Eftersom

$$\tilde{K} = K_r + iK_i = K + i\frac{g}{\varepsilon_0\omega} = \tilde{n}^2 = (n + ik)^2 = n^2 - k^2 + i2nk \quad (12.149)$$

fås systemet

$$K_r = n^2 - k^2 \quad (12.150)$$

$$K_i = \frac{g}{\varepsilon_0\omega} = 2nk \quad (12.151)$$

Lösningen till detta system är

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}(K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2})} \quad (12.152)$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}(-K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2})} \quad (12.153)$$

De reella och imaginära optiska konstanterna n och k fås alltså från de reella och imaginära permittiviteterna $K_r \varepsilon_0 = K \varepsilon_0$ och K_i , av vilka den senare innehåller konduktiviteten g .

Medier är i allmänhet **dispersiva**, d.v.s. g och ε beror på ω . Detta gör att K_r , K_i och n , k också beror på vågens vinkelfrekvens.

Obs: Permittiviteten kan skrivas

$$\tilde{K} = K + i \frac{g}{\varepsilon_0 \omega} = K \left(1 + i \frac{g}{\varepsilon \omega} \right) \quad (12.154)$$

Vi har nu två extremfall.

Fall 1: $g/(\varepsilon \omega) \ll 1$ d.v.s. $g \ll \varepsilon \omega$.

Fall 2: $g/(\varepsilon \omega) \gg 1$ d.v.s. $g \gg \varepsilon \omega$.

Fall 1a: $g \ll \varepsilon \omega$ med $K_r > 0$.

Detta gäller för **bra isolatorer**, ner till låga värden på ω .

Detta ger $n \approx \sqrt{K_r}$, och $k = K_i/(2n) \ll n$.

Fall 1b: $g \ll |\varepsilon| \omega$ med $K_r < 0$.

Detta gäller för **metaller** i det övre infraröda bandet.

Detta ger $k \approx \sqrt{|K_r|}$, och $n = K_i/(2k) \ll k$.

Fall 2: $g \gg |\varepsilon| \omega$.

Detta gäller för mikrovågor i **metaller** och vågor med lägre frekvenser.

Detta ger $n \approx k \approx \sqrt{K_i/2}$.

★ ★ ★

Gränsen mellan fall 2 och 3 ges av frekvensen $\omega \approx 1/\tau$, där τ är tiden mellan kollisioner för fria elektroner. För rena metaller gäller $\omega \approx 10^{14} \text{ s}^{-1}$.

12.6.3. Mediets impedans

Vi granskar nu hur magnet- och elfältens amplituder förhåller sig till varandra.

Maxwells IV ekvation ger

$$|\tilde{\kappa} \times \tilde{\mathbf{B}}_0| = \frac{\omega}{c^2} |\tilde{K}| |\tilde{\mathbf{E}}_0| \quad (12.155)$$

Från detta får vi kvoten

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Z|} = \frac{|\mathbf{H}|}{|\mathbf{E}|} &= \frac{\omega}{c^2 \mu} \frac{|\tilde{K}|}{|\tilde{\kappa}|} = \frac{\omega}{c^2 \mu} \frac{|\tilde{K}|}{|\tilde{\kappa}|} = \frac{\omega}{c^2 \mu} \frac{|\tilde{n}|^2}{\omega |\tilde{n}|/c} = \frac{1}{c \mu} |\tilde{n}| \\ &= \frac{1}{c \mu} \sqrt{|\tilde{K}|} = \frac{1}{c \mu} \sqrt{c^2 \varepsilon_0 \mu_0 K_r \left| 1 + i \frac{g}{\varepsilon \omega} \right|} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\varepsilon \mu_0} \left(1 + \frac{g^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/4} \\ &\approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(1 + \frac{g^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/4} \end{aligned} \quad (12.156)$$

för icke-magnetiska media: $\mu \approx \mu_0$.

För vakuum har vi $g = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ så att vi får tillbaka vårt tidigare uttryck för vakuums impedans.

I goda ledare, då $g \gg \varepsilon \omega$, är magnetfältet mycket starkare än elfältet.

12.6.4. Likformiga vågor

Vi tittar nu närmare på specialfallet $\tilde{\kappa}_r \parallel \tilde{\kappa}_i$. Dylka vågor kallas **likformiga** eller **homogena**. Ett konkret exempel då detta gäller är plana vågor som träffar en ledande, plan yta, så att vågfronterna är parallella med planet.

Vi har nu

$$\tilde{\kappa} = (\kappa_r + i\kappa_i)\hat{\mathbf{u}} = \tilde{\kappa}\hat{\mathbf{u}} \quad (12.157)$$

Om inga källor finns i mediet:

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0 = \hat{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \quad (12.158)$$

så att $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{B}}$ är vinkelräta mot vågens färdriktning $\hat{\mathbf{u}}$.

Maxwells IV lag ger

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}} &= \frac{1}{\omega} \tilde{\kappa} \times \tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\omega} (\kappa_r + i\kappa_i) \hat{\mathbf{u}} \times (\mathbf{E}_r + i\mathbf{E}_i) \\ &= \frac{1}{\omega} (\kappa_r \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_r - \kappa_i \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_i) + i \frac{1}{\omega} (\kappa_r \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_i + \kappa_i \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_r) \\ &= \mathbf{B}_r + i\mathbf{B}_i \end{aligned} \quad (12.159)$$

Produkten $\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{B}_r$ blir nu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r \cdot \mathbf{B}_r &= \mathbf{E}_r \cdot \frac{1}{\omega} (\kappa_r \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_r - \kappa_i \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_i) \\ &= \frac{1}{\omega} (\kappa_r \mathbf{E}_r \cdot (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_r) - \kappa_i \mathbf{E}_r \cdot (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_i)) \\ &= -\frac{1}{\omega} \kappa_i \mathbf{E}_r \cdot (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_i) \end{aligned} \quad (12.160)$$

El - och magnetfälten är alltså i detta fall inte ortogonala !

12.6.5. Inträngningsdjupet för likformiga vågor

Eftersom

$$\tilde{n} = n + ik \quad (12.161)$$

gäller för likformiga vågor med $\kappa_r = \kappa_r \hat{\mathbf{u}}$, $\kappa_i = \kappa_i \hat{\mathbf{u}}$ att

$$\kappa_r = \frac{\omega}{c} n \quad (12.162)$$

$$\kappa_i = \frac{\omega}{c} k \quad (12.163)$$

och elfältet blir

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{\kappa} \cdot \mathbf{r})} \quad (12.164)$$

$$= \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\kappa_i \cdot \mathbf{r}} e^{-i(\omega t - \kappa_r \cdot \mathbf{r})} \quad (12.165)$$

$$= \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-k\omega u/c} e^{-i(\omega t - n\omega u/c)} \quad (12.166)$$

där $u = \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}$.

Genom att definiera **inträngningsdjupet**

$$\delta = \frac{1}{\kappa_i} = \frac{c}{k\omega} \quad (12.167)$$

fås

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-u/\delta} e^{-i(\omega t - n\omega u/c)} \quad (12.168)$$

$$= \tilde{\mathbf{E}}'(u) e^{-i(\omega t - n\omega u/c)} \quad (12.169)$$

d.v.s. en våg vars amplitud avtar i vågens fortskridningsriktning. Detta betyder ju att vågen attenueras eller dämpas i denna riktning, därav namnet inträngningsdjup.

Inträngning i enheter av δ	Relativ dämpning i procent
1	36,8
2	13,5
3	5,0
4	2,8
5	0,7

Vi har också att

$$\delta = \frac{1}{k} c \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{k} c \frac{1}{\nu} \frac{1}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi k} \quad (12.170)$$

(i) Om mediet är icke-ledande har vi $g = 0$, så att $K_i = 0$ och $k = 0$. Detta betyder att elektromagnetiska vågor inte dämpas i dessa material, utan att deras inträngningsdjup är oändligt. Mediet är alltså **genomskinligt** eller **transparent**.

(ii) Om $g \neq 0$ och $k \ll n$ — så att dämpningen är mycket svagare än vågens fortskridning — har vi ett imperfekt dielektrikum. Inträngningsdjupet är då stort, och materialet är delvis genomskinligt.

(iii) Om mediet är en god ledare (vid frekvensen ω) så gäller $g \gg |\epsilon|\omega$. Detta ger $n \approx k = \sqrt{K_i/2}$, så att

$$\delta = \frac{c}{n} \omega = \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{2}{K_i}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \omega}} \frac{\sqrt{2} \sqrt{\epsilon_0 \omega}}{\sqrt{g}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 g \omega}} \quad (12.171)$$

(iv) Om mediet är en mycket god ledare, d.v.s. $g = \infty$ fås $\delta = 0$ och $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-u/\delta} e^{-i(\omega t - n\omega u/c)} = 0$, d.v.s. fältet fortplantas inte alls.

En storhet som är nära besläktad med inträngningsdjupet är **absorptionskoefficienten** (som också kan kallas **attenuationskonstanten**):

$$\alpha = \frac{2}{\delta} \quad (12.172)$$

Denna kommer från intensiteten av fälten:

$$I_E \propto |\mathbf{E}|^2 = |\tilde{\mathbf{E}}_0| e^{-2\kappa_i \cdot \mathbf{r}} = |\tilde{\mathbf{E}}_0| e^{-2\kappa_i u} \equiv |\tilde{\mathbf{E}}_0| e^{-\alpha u} \quad (12.173)$$

Exempel 1: Inträngningsdjupet i silver.

Rent silver har en konduktivitet $g = 3 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ för mikrovågsfrekvenser.

För en frekvens på 10^{10} Hz fås då

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 g \omega}} = 9,2 \times 10^{-5} \text{ cm} \quad (12.174)$$

För silverytor som skall absorbera mikrovågor gäller alltså att det inte är någon skillnad om hela materialet är av silver eller om det bara har en tunn plätering (t.ex. några millimeter). □

Exempel 2: Inträngningsdjupet i koppar.

Färg	Våglängd (Å)	Energi (eV)	k	δ (nm)
Rött	7610	1,63	4,67	26
Gult	5893	2,10	2,70	35
Blått	4308	2,88	2,31	30

De optiska konstanterna är från P. B. Johnson, R. W. Christy, *Phys. Rev. B* **6** (1972) 4370-4379.

□

Exempel 3: Inträngningsdjupet i sjövattnet. Konduktiviteten är $g = 4,3 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Använd formeln ovan.

Radiovågor: $\nu = 10^8 \text{ Hz}$ ger $\delta = 2 \text{ cm}$.

Synligt ljus: $\nu = 10^{14} \text{ Hz}$ ger $\delta = 0,00002 \text{ m}$???

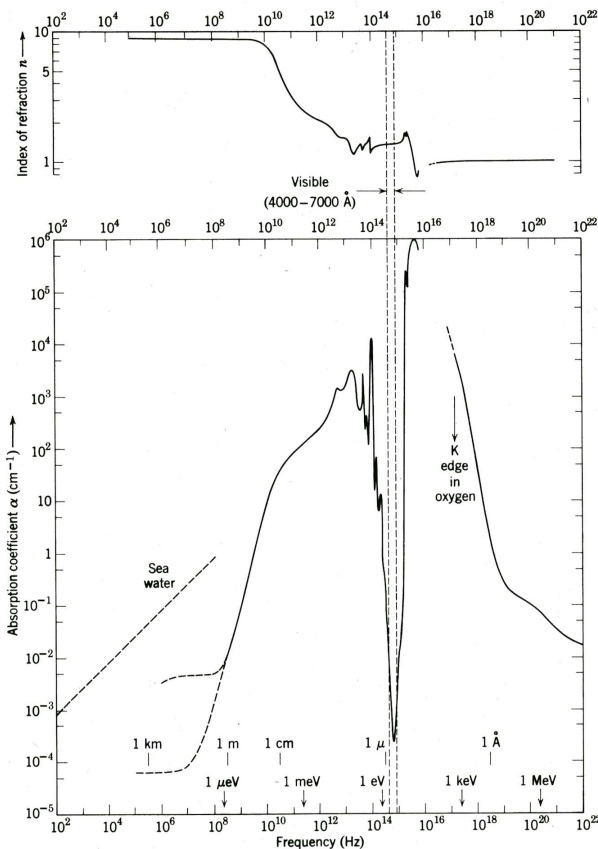
Orimligt svar. Felet finns i antagandet att sjövattnet är en god ledare med $g \gg |\epsilon|\omega$. Faktorn $\epsilon_0\omega \approx 140 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ för synligt ljus, vilket inte är mycket mindre än konduktiviteten !

En noggrannare utredning kräver att vi använder den ursprungliga definitionen av δ :

$$\delta = \frac{c}{k\omega} = \frac{2\pi c}{\nu} \sqrt{\frac{2}{-K + \sqrt{K^2 + (2\pi g/(\epsilon_0\nu))^2}}} \quad (12.175)$$

Men nu måste vi veta K för synligt ljus i sjövattnet!

Denna — eller alternativt absorptionskoefficienten — kan vi uppskatta från följande graf, som dock är för vanligt vatten:



Från figuren fås $\alpha \sim 10^{-3} \text{ cm}^{-1} = 10^{-1} \text{ m}^{-1}$
så att $\delta = 2/\alpha \approx 2/(10^{-1} \text{ m}^{-1}) = 20 \text{ m}$. $\square$

12.7. Hastighetsbegrepp

Det existerar ett flertal olika hastighetsbegrepp angående elektromagnetisk strålning:

- Fashastighet i vågens fortskridningsriktning, v_f , och $|v_f| \leq c$.
- Fashastighet i annan riktning, v'_f , $|v'_f| \leq c$ eller $|v'_f| \geq c$.
- Grupphastighet
- Hastigheten från väntevärdet av vågens position
- Energins transporthastighet
- . . .

Då man frågar efter en "vågs eller signals hastighet" bör man ha klart för sig vad för slags hastighet man egentligen är intresserad av.

12.7.1. Fashastighet

[J. Weber, *Am. J. Phys.* **22** (1954) 618; R. L. Smith, *Am. J. Phys.* **38** (1970) 978; A. M. Steinberg, "No thing goes faster than light", *Phys. World*, September (2000)]

Fashastigheten i vågens färdriktning ges av kravet att argumentet $\kappa \cdot \mathbf{r} - \omega t$ ska vara konstant.

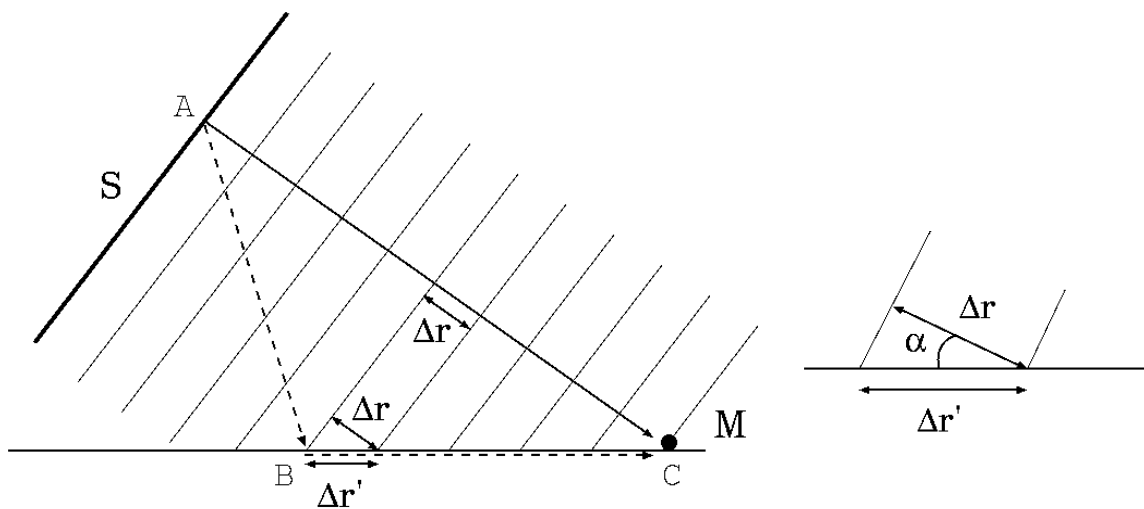
Om vi rör oss i vågens färdriktning gäller att $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\hat{\mathbf{u}}$ och

$$\kappa \cdot \mathbf{r} = \kappa \cdot \mathbf{r}_0 + \kappa s \quad (12.176)$$

så att

$$\frac{d}{dt} \kappa \cdot \mathbf{r} = \kappa \frac{ds}{dt} = \kappa v_f = \omega \quad (12.177)$$

och $v_f = \omega/\kappa$.



Låt en signal — bestående av t.ex. N st sinusoidala våglängder — sändas ut från A . Signalen anländer till mottagaren i C , efter att ha rört sig den kortaste möjliga sträckan mellan A och C . Om mediet är icke-dispersivt är signalens hastighet c .

Enligt bilden sammanfaller detta med fashastigheten i signalens fortskridningsriktning, så att $v = \Delta r / \Delta t = c$.

Å andra sidan, om sträckan BC består av en ljuskänslig vägg så kommer ljuspulsen som faller in på väggen att röra sig längs väggen mot mottagaren i C , eftersom vågfronten utanför gör det. Hastigheten för denna ljusspalt längs med väggen rör sig med en hastighet $\Delta r'/\Delta t$.

Eftersom

$$\cos \alpha = \frac{\Delta r}{\Delta r'} \quad (12.178)$$

ger

$$v'_f = \frac{\Delta r'}{\Delta t} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{1}{\cos \alpha} v_f \quad (12.179)$$

vars storlek är $\geq |v_f| = c$!

Strider inte detta mot lagen att ingen signal kan röra sig snabbare än ljuset ?!

Förklaringen är att det som rör sig längs med väggen inte är en signal.

Ljusspalten är en sekundär effekt till signalen, och består egentligen av **skärningspunkten** mellan väggen och vågfronterna i den riktiga signalen.

Endast om vi har en mottagare och sändare i B , som skickar signalen från A vidare till C , så kommer en riktig signal att gå längs med sträckan ABC , med maximalt ljusets hastighet.

Observera, att mottagaren i C tar emot signalen längs med linjen AB och "signalen" längs med ACB vid samma tillfälle. För att mäta signalens hastighet dividerar mottagaren sträckan AC mellan sig själv och sändaren med den tid som gått åt för att signalen att anlända. Detta ger c som största möjliga hastighet för information att passera mellan A och C .

12.7.2. Grupphastighet

[Jackson; J. Weber, *Am. J. Phys.* **22** (1954) 618; H. M. Bradford, *Am. J. Phys.* **44** (1976) 1058; P. C. Peters, *Am. J. Phys.* **56** (1988) 129; K. T. McDonald, *Am. J. Phys.* **66**(8) (1998) 656-658]

En vågs eller ett vågpakets **grupphastighet** definieras som

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_0} \quad (12.180)$$

evaluerat i nåt värde κ_0 av vågvektorn κ .

Denna definition kan motiveras med följande resonemang.

Låt ett vågpakets amplitudfunktion vara $\tilde{A}(\kappa)$.

Antag att $\tilde{A}(\kappa)$ är stor då $\kappa = \kappa_0$ och liten för övriga värden. Detta betyder att vågpaketet innehåller många vågor med vågtalet exakt lika med eller mycket nära κ_0 .

Låt vågen röra sig längs med z -axeln, så att $\kappa = \kappa \hat{z}$ och $\kappa_0 = \kappa_0 \hat{z}$.

Expandera vinkelfrekvensen kring vågtalet κ_0 enligt

$$\omega(\kappa) \approx \omega(\kappa_0) + (\kappa - \kappa_0) \partial_{\kappa} \omega(\kappa) \Big|_{\kappa=\kappa_0} \equiv \omega_0 + \omega'_0 (\kappa - \kappa_0) \quad (12.181)$$

Elfältet blir

$$\begin{aligned} \tilde{E}(z, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\kappa} \tilde{A}(\kappa) e^{i\kappa \cdot z} e^{-i\omega(\kappa)t} \\ &\approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\kappa} \tilde{A}(\kappa) e^{i\kappa \cdot z} e^{-i\omega_0 t} e^{-i\omega'_0 t (\kappa - \kappa_0)} \\ &= e^{-i\omega_0 t + i\omega'_0 t \kappa_0} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\kappa} \tilde{A}(\kappa) e^{i(z - \omega'_0 t) \kappa} \\ &= e^{-it(\omega_0 - \omega'_0 \kappa_0)} E(z - \omega'_0 t, 0) \end{aligned} \quad (12.182)$$

Detta är en funktion i $z - \omega'_0 t$. Detta motsvarar en våg som rör sig med hastigheten ω'_0 . Amplituden varierar periodiskt med tiden, p.g.a. exponentialfaktorn.

Vågens hastighet är alltså

$$v_g = \omega'_0 = \left. \frac{d\omega}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_0} \quad (12.183)$$

och kallas **grupphastighet**.

I allmänhet gäller

$$v_f = \frac{c}{n(\kappa)} \quad (12.184)$$

så att

$$\kappa = \frac{\omega(\kappa)}{v_f} = \frac{\omega(\kappa)n(\kappa)}{c} \quad (12.185)$$

Detta ger

$$\frac{1}{v_g} = \frac{d\kappa}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} = \frac{n + \omega dn/d\omega}{c} \quad (12.186)$$

och

$$v_g = \frac{c}{n + \omega dn/d\omega} \quad (12.187)$$

För **normal dispersion** gäller $n \geq 1$ och $dn/d\omega > 0$ så att $v_g < c$.

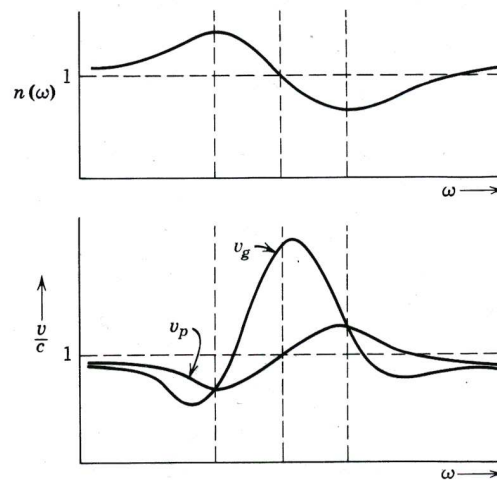


Fig. 7.13 Index of refraction $n(\omega)$ as a function of frequency ω at a region of anomalous dispersion; phase velocity v_p and group velocity v_g as functions of ω .

[Jackson]

I vissa frekvensområden med anomalisk/abnormal (eng. *anomalous*) dispersion kan dock gälla att $dn/d\omega \ll 0$, så att man rentav kan få $v_g > c$, så att vågen tycks röra sig snabbare än ljuset !

Denna paradox är snabbt löst genom att inse att en snabb variation i $n = n(\omega)$ innebär en snabb variation i $\kappa = \kappa(\omega)$ så kan vi inte längre göra expansionen

$$\omega(\kappa) \approx \omega(\kappa_0) + \left. \frac{d\omega}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_0} (\kappa - \kappa_0) \quad (12.188)$$

Detta betyder att

$$v_g = \omega'_0 = \left. \frac{d\omega}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_0} \quad (12.189)$$

inte längre duger som definition av vågens hastighet.

12.7.3. Hastigheten från väntevärdet av vågens position

[E. E. Bergmann, *Am. J. Phys.* **44**(9) (1976) 890-891, H. M. Bradford, *Am. J. Phys.* **44**(11) (1976) 1058-1063]

En möjlig definition av ett vågpakets hastighet får vi från väntevärdet av vågens position. Väntevärdet är

$$\langle \mathbf{r}(t) \rangle_r \quad (12.190)$$

$$= \int dV_r \tilde{E}^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \tilde{E}(\mathbf{r}, t) \quad (12.191)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dV_r \int dV_\kappa \int dV_{\kappa'} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{r} \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}') e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa}')t} e^{i\boldsymbol{\kappa}' \cdot \mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \int dV_{\kappa'} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_r \mathbf{r} e^{i\boldsymbol{\kappa}' \cdot \mathbf{r}} e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \right] \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}') e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa}')t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \int dV_{\kappa'} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} F \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}') e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa}')t} \end{aligned} \quad (12.192)$$

där F är Fouriertransformen av $\mathbf{r} e^{i\boldsymbol{\kappa}' \cdot \mathbf{r}}$:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_r \mathbf{r} e^{i\boldsymbol{\kappa}' \cdot \mathbf{r}} e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_r \mathbf{r} e^{i(\boldsymbol{\kappa}' - \boldsymbol{\kappa}) \cdot \mathbf{r}} \\
&= \frac{1}{i} \nabla_{\boldsymbol{\kappa}'} \delta(\boldsymbol{\kappa}' - \boldsymbol{\kappa})
\end{aligned} \tag{12.193}$$

Detta ger

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{r}(t) \rangle_r \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\boldsymbol{\kappa}} \int dV_{\boldsymbol{\kappa}'} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \frac{1}{i} \nabla_{\boldsymbol{\kappa}'} \delta(\boldsymbol{\kappa}' - \boldsymbol{\kappa}) \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}') e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa}')t}
\end{aligned} \tag{12.194}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \left[\int dV_{\boldsymbol{\kappa}'} \nabla_{\boldsymbol{\kappa}'} \delta(\boldsymbol{\kappa}' - \boldsymbol{\kappa}) \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}') e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa}')t} \right] \\
&= -\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})t}
\end{aligned} \tag{12.195}$$

där vi använde regeln

$$\int dV_r f(\mathbf{r}) \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = - \int dV_r (\nabla f(\mathbf{r})) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = - \nabla f(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \tag{12.196}$$

Vi får nu

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{r}(t) \rangle_r \\
&= -\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})t}
\end{aligned} \tag{12.197}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) \\
&\quad + i \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})t} \\
&= -\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) i \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) + t \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\boldsymbol{\kappa}} |\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa})|^2 \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \omega(\boldsymbol{\kappa}) \\
&= -\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) + t \langle \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \omega(\boldsymbol{\kappa}) \rangle_r
\end{aligned} \tag{12.198}$$

Jämför:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}(t=0) \rangle_r &= -\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega(\boldsymbol{\kappa})0} \nabla_\kappa \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\omega(\boldsymbol{\kappa})0} \\ &= -\frac{1}{i(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa \tilde{A}^*(\boldsymbol{\kappa}) \nabla_\kappa \tilde{A}(\boldsymbol{\kappa})\end{aligned}\quad (12.199)$$

Vi får alltså:

$$\langle \mathbf{r}(t) \rangle_r = \langle \mathbf{r}(0) \rangle_r + t \langle \nabla_\kappa \omega(\boldsymbol{\kappa}) \rangle_r \quad (12.200)$$

$$\equiv \langle \mathbf{r}(0) \rangle_r + t \mathbf{V} \quad (12.201)$$

där $\mathbf{V}$ kan kallas vågpaketets medelhastighet:

$$\mathbf{V} = \langle \nabla_\kappa \omega(\boldsymbol{\kappa}) \rangle_r \quad (12.202)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dV_\kappa |\tilde{A}(\boldsymbol{\kappa})|^2 \nabla_\kappa \omega(\boldsymbol{\kappa}) \quad (12.203)$$

Konsistens-check: Om vinkelfrekvensen kan approximeras som

$$\omega \approx \omega(\boldsymbol{\kappa}_0) + (\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0) \cdot \nabla_\kappa \omega|_{\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}_0} \quad (12.204)$$

får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &\approx \left\langle \nabla_\kappa \left(\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla_\kappa \omega|_{\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}_0} \right) \right\rangle_r \\ &= \left\langle \left(\nabla_\kappa \omega|_{\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}_0} \cdot \nabla_\kappa \right) \boldsymbol{\kappa} \right\rangle_r \\ &= \left\langle \nabla_\kappa \omega|_{\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}_0} \right\rangle_r \\ &= \nabla_\kappa \omega|_{\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}_0}\end{aligned}\quad (12.205)$$

som är samma svar som tidigare.

12.7.4. Energins transporthastighet

[R. L. Smith, *Am. J. Phys.* **38** (1970) 978; F. S. Johnson, *Am. J. Phys.* **58** (1990) 1044; A. Bers, *Am. J. Phys.* **68** (2000) 482]

Då man i praktiken vill mäta en signals hastighet genom ett medium använder man en detektor. Denna ger utslag då den träffas av en puls med en styrka över ett visst gränsvärde.

Antag att signalen som sänds ut har den maximala intensiteten $I_m = E_{r,m}^2$.

Som villkor för att signalen skall anses ha anlänt till detektorn kan man ha att den uppmätta intensiteten skall vara $\geq I_m/\alpha$, där $\alpha \geq 1$.

Då dispersiva eller dissipativa effekter inte spelar någon större roll kommer detta villkor att ge korrekt uppskattning av vågpaketets hastighet.

Då dispersion och dissipation förekommer, kommer utgångssignalen att dämpas. Om t.ex. hela pulsen dämpas med faktorn $\beta > \alpha$, där $\beta = I_m/I'_m$ och I'_m är den mottagna signalens maximala intensitet, så kommer $I'_m < I_m/\alpha$ och detektorn mäter inte alls upp den anlända pulsen. Signalens hastighet kan då tyckas vara 0.

Man kan visa att för media med normal dispersion och svag absorption vid de frekvenser som förekommer i vågpaketet så gäller att

$$\langle S \rangle = \langle u_{EM} \rangle v_f = \langle u_t \rangle v_g \quad (12.206)$$

där

$$\langle u_t \rangle = \langle u_{EM} \rangle + \langle u_{abs} \rangle \quad (12.207)$$

där u_{abs} är den energitäthet som absorberas av mediet.

Detta visar att energin – och en elektromagnetisk signal — färdas med gruppshastigheten i ett medium utan dissipation och då vågpaketet är koncentrerat omkring en bestämd vågvektor κ_0 (som ger v_g).