

11. Maxwells ekvationer

[RMC]

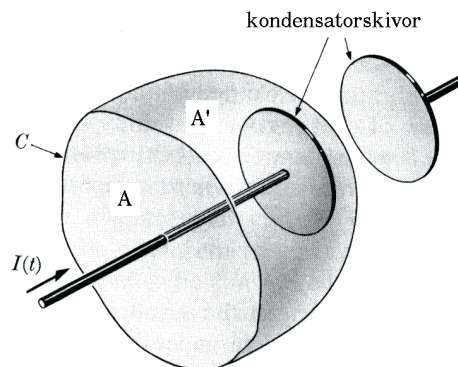
11.1. Förskjutningsströmmen

Skotten James Clerk Maxwell (1831-1879) noterade år 1864 att Ampères lag

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = \int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = I \quad (11.1)$$

inte är fullständig. Denna bristfällighet kan man notera genom följande resonemang.

Betrakta kretsdelen i figuren.



Integralen över ytan A av fältekvationen

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (11.2)$$

ger

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = \int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = I \quad (11.3)$$

Å andra sidan kan vi lika gärna använda ytan A' , som också avgränsas av samma kontur C :

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = \int_{A'} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (11.4)$$

Uppenbarligen saknas nåt från fältekvationen ovan !

En annan underlighet: Divergensen av fältekvationen ger

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \equiv 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (11.5)$$

Men enligt kontinuitetsekvationen gäller

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial_t \rho \quad (11.6)$$

och detta är i allmänhet inte noll!

Vi ska nu korrigera fältekvationen för $\mathbf{H}$. Vi börjar med att notera att

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (11.7)$$

så att tidsderivatan är

$$\nabla \cdot \partial_t \mathbf{D} = \partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad (11.8)$$

Observera att vi antog att byte av deriveringsordningen kan göras, d.v.s. vi antog att $\nabla^2 \partial_t \mathbf{D}$ och $\partial_t \nabla^2 \mathbf{D}$ båda existerar och är kontinuerliga. Om detta är uppfyllt kan byte av differentieringsordningen göras.

Vi får nu identiteten

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}) = 0 \quad (11.9)$$

Kombinera detta med identiteten

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 \quad (11.10)$$

Vi får

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}) \quad (11.11)$$

Integrera detta över en volym V . Med Gauss' teorem fås

$$\oint_A d\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \oint_A d\mathbf{A} \cdot (\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}) \quad (11.12)$$

Ytan är godtycklig så identiteten måste gälla för alla ytor, så att integranderna måste vara samma. Vi får nu den **korrigerade Ampères lag**

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D} \equiv \mathbf{J} + \mathbf{J}_D \quad (11.13)$$

där $\mathbf{J}_D = \partial_t \mathbf{D}$ kallas **förskjutningsströmmen**.

Förskjutningsströmmen behövdes inte i våra tidigare beräkningar, för då behandlades för det mesta statiska eller stationära el- och magnetfält.

11.2. Maxwells ekvationer

[http://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell's_equations]

Vi har nu erhållit fyra grundläggande lagar eller ekvationer som beskriver elektriska och magnetiska fält. Dessa ekvationer är:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (11.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (11.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (11.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (11.17)$$

Första ekvationen är Gauss' lag, som följer från Coulombs experimentella lag om kraften mellan laddningar.

Andra ekvationen följer från Biot-Savarts experimentella lag för hur flödestätheten kan bestämmas från givna strömmar.

Tredje ekvationen är Faradays lag, d.v.s. den experimentella observationen att föränderliga magnetiska flöden genererar elfält.

Fjärde ekvationen är en generaliserad form av Ampères lag, som följer från Biot-Savarts experimentella lag.

James Clerk Maxwell var den första att sammanställa de grundläggande ekvationerna för elektriska och magnetiska fenomen år 1864, och korrigera Ampères lag med förskjutningsströmmen. I och med denna ses att tidsföränderliga magnetfält **såväl som tidsföränderliga elektriska fält** genererar elektriska respektive magnetiska fält. Av denna anledning kallas systemet ovan Maxwells ekvationer istället för Gauss-Coulomb-Biot-Savart-Faraday-Ampère-ekvationerna . . .

Maxwell visade att elektromagnetiska fält rör sig med hastigheten $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ i vakuum. Detta följer från lösningen av Maxwells ekvationer.

Maxwell formulerade ursprungligen sina ekvationer i komponentform. Dagens moderna formulering med fyra vektorekvationer kommer från Oliver Heaviside och Willard Gibbs.

Tillsammans med de konstitutiva ekvationerna

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}) \quad (11.18)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B}) \quad (11.19)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}) \quad (11.20)$$

för allmänna icke-linjära, anisotropiska material och Lorentzkraften

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (11.21)$$

ger Maxwells ekvationer en fullständig klassisk beskrivning av växelverkande elektromagnetiska partiklar.

Kontinuitetsekvationen finns inbakad i dessa ekvationer, så den behöver inte räknas upp separat.

11.3. Elektromagnetisk energi och Poynting-vektorn

Vi visade tidigare att i statiska eller stationära system ges den elektriska och magnetiska energin av uttrycken

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (11.22)$$

$$U_M = \frac{1}{2} \int_V dV \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (11.23)$$

Låt oss ta tidsderivatan av energitätheterna. För ett allmänt anisotropiskt medium gäller

$$\mathbf{D} = \sum_{ij} \varepsilon_{ij} \hat{\mathbf{x}}_i E_j \quad (11.24)$$

$$\mathbf{B} = \sum_{ij} \mu_{ij} \hat{\mathbf{x}}_i H_j \quad (11.25)$$

d.v.s.

$$D_i = \sum_{ij} \varepsilon_{ij} E_j \quad (11.26)$$

$$B_i = \sum_{ij} \mu_{ij} H_j \quad (11.27)$$

så att

$$\begin{aligned} \partial_t u_E &= \frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \partial_t (\varepsilon_{ij} E_i E_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \varepsilon_{ij} (E_j \partial_t E_i + E_i \partial_t E_j) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{ij} \varepsilon_{ij} E_j \partial_t E_i + \sum_{ji} \varepsilon_{ji} E_j \partial_t E_i \right) \\ &= \sum_{ij} \varepsilon_{ij} E_j \partial_t E_i \\ &= \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D} \end{aligned} \quad (11.28)$$

Motsvarande:

$$\begin{aligned}\partial_t u_M &= \frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B}\end{aligned}\quad (11.29)$$

Observera att vi antog att ε, μ inte beror på tiden. De media för vilka detta gäller kallas **icke-dispersiva**.

Å andra sidan, multiplikation av Maxwells rotorekvationer med $\mathbf{E}$ eller $\mathbf{H}$ ger

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B} \quad (11.30)$$

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D} \quad (11.31)$$

Multipluera den andra ekvationen med -1 och addera dem:

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D} \quad (11.32)$$

Använd nu regeln

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \quad (11.33)$$

så att

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (11.34)$$

$$= -\frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (11.35)$$

Flytta om termer:

$$-\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (11.36)$$

Volymintegralen av detta är

$$-\int_V dV \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \int_V dV \frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) + \oint_A d\mathbf{A} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (11.37)$$

Detta är **lagen om energins bevarande i en fixerad volym** V som är utsatt för elektriska och magnetiska fält. Lagen omfattar mekanisk och elektromagnetiskt energi.

De elektromagnetiska krafterna utför följande effekt på laddningarna i volymen V :

$$\begin{aligned} \sum_i n_i \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_i &= \sum_i n_i q_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}_i \\ &= \sum_i n_i q_i \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_i \\ &= \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E} \\ &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (11.38)$$

Förändringen i laddningarnas mekaniska energi är då

$$\frac{dU_{\text{mek}}}{dt} = \int_V dV \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (11.39)$$

Förändringen i EM-fältets energi är

$$\frac{dU_{\text{EM}}}{dt} = \int_V dV \frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (11.40)$$

Energilagen blir

$$\frac{dU_{\text{mek}}}{dt} + \frac{dU_{\text{EM}}}{dt} = - \oint_A d\mathbf{A} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (11.41)$$

Exempel : Om regionen innehåller en resistor så genereras värme. Om ytan A är på resistorns yta och vi inte har någon strålning ut ur denna region, så gäller

$$\frac{dU_{\text{mek}}}{dt} + \frac{dU_{\text{EM}}}{dt} = 0 \quad (11.42)$$

Fältet har fört laddningarna över spänningsfallet i resistorn, så fältets energiinnehåll har sjunkit. Laddningarnas mekaniska energi — deras rörelseenergi — har ökat, vilket överensstämmer med ekvationen ovan. $\square$

Den differentiella formen av lagen för energins bevarande är

$$\begin{aligned} -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\ &= \partial_t u_{\text{EM}} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (11.43)$$

eller

$$-\partial_t u_{\text{mek}} = \partial_t u_{\text{EM}} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (11.44)$$

Man definierar **Poynting-vektorn**

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (11.45)$$

så att man får uttrycket

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \partial_t u_{\text{EM}} = -\partial_t u_{\text{mek}} \quad (11.46)$$

Energilagen kan nu skrivas

$$\frac{dU_{\text{mek}}}{dt} + \frac{dU_{\text{EM}}}{dt} = - \oint_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \quad (11.47)$$

Om $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0$, d.v.s. inga fria laddningar är närvarande, så gäller

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \partial_t u_{\text{EM}} = 0 \quad (11.48)$$

Detta är **energitäthetens kontinuitetslag**. Detta betyder att $\mathbf{S}$ måste representera en **energi-strömtäthet**.

Enheten för $\mathbf{S}$ är $\text{m s}^{-1} \text{ J m}^{-3} = \text{J} / (\text{m}^2 \text{ s}) = \text{W} / \text{m}^2$. Notera att detta är enheten för en **intensitet**.

Exempel 1: En rak metalltråd med konduktiviteten g och tvärsnittsarean A bär en ström I . Bestäm Poyntingvektorn på trådens yta. Integrera Poyntingvektorns normalkomponent på ytan över längden L . Jämför med värmeförlusten i samma trådsegment.

Elfältet är i trådens riktning, säg $\hat{z}$, eftersom det driver laddningarna genom denna. Magnetfältet på ytan är bekant från Ampères lag:

$$2\pi a H = I \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi a} \hat{\psi} \quad (11.49)$$

där a är trådens radie. Med $A = \pi a^2$ fås

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\sqrt{\pi A}} \hat{\psi} \quad (11.50)$$

Poyntingvektorn:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E \frac{I}{2\sqrt{\pi A}} \hat{z} \times \hat{\psi} = -E \frac{I}{2\sqrt{\pi A}} \hat{\rho} \quad (11.51)$$

Yt-integralen:

$$\int d\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = 2\pi a \int_0^L dz \left(-E \frac{I}{2\sqrt{\pi A}} \right) = -2\sqrt{\pi A} E \frac{I}{2\sqrt{\pi A}} \int_0^L dz = -EIL \quad (11.52)$$

Vi har nu att

$$\frac{dU_{\text{mek}}}{dt} + \frac{dU_{\text{EM}}}{dt} = - \int d\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = EIL \quad (11.53)$$

Om el- och magnetfälten är konstanta i tiden gäller

$$\frac{dU_{\text{mek}}}{dt} = - \int d\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = EIL \quad (11.54)$$

d.v.s. laddningarnas kinetiska energi har ökat då de har accelererats av elfältet i resistorn. Detta motsvarar Joule-uppvärmning, som ges av

$$P_R = |V|I = RI^2 = EIL \quad (11.55)$$

Värmeenergin konverteras helt allmänt till fononer och fotoner då laddningarna kolliderar med atomerna och jonerna i ledningsmaterialet. Fononer är samma som vibrationer i ledningsmaterialet. Fotonerna däremot motsvarar värmestrålning, vilket medför att det elektromagnetiska fältets energi-innehåll förändras. Om detta beaktas bör också Poynting-vektorn korrigeras med ett strålningstillägg.

□

11.4. Vågekvationen

Vi vill nu bevisa att Maxwells ekvationer förutsäger existensen av elektromagnetiska vågor.

En vågekvation innehåller en term i ∇^2 . En sådan term får man om man har ett uttryck av formen

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) \quad (11.56)$$

för detta är samma sak som

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad (11.57)$$

Vi tar alltså rotorn av Maxwells rotorekvationer. Ekvationen för $\mathbf{H}$ ger:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} \\ &= \mu \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{H} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{H} \\ = \nabla \times \mathbf{J} + \partial_t \nabla \times \mathbf{D} &= g \nabla \times \mathbf{E} + \varepsilon \partial_t \nabla \times \mathbf{E} \\ &= -g \partial_t \mathbf{B} - \varepsilon \partial_t^2 \mathbf{B} \\ &= -g \mu \partial_t \mathbf{H} - \varepsilon \mu \partial_t^2 \mathbf{H} \end{aligned} \quad (11.58)$$

Vi antog nu att g, ε, μ är oberoende av tiden och platsen, och att materialen är linjära. Vi antog också att tids- och plats-derivatornas ordning kan bytas utan att det påverkar slutresultatet.

Vi har nu härlett **vågekvationen för magnetfältet**

$$\nabla^2 \mathbf{H} - g \mu \partial_t \mathbf{H} - \varepsilon \mu \partial_t^2 \mathbf{H} = 0 \quad (11.59)$$

Motsvarande för $\mathbf{E}$:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho - \nabla^2 \mathbf{E} \\ = -\partial_t \nabla \times \mathbf{B} &= -\mu \partial_t \nabla \times \mathbf{H} \\ &= -\mu \partial_t (\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}) \\ &= -\mu g \partial_t \mathbf{E} - \mu \varepsilon \partial_t^2 \mathbf{E} \end{aligned} \quad (11.60)$$

Vi får:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho - \mu \partial_t g \mathbf{E} - \mu \varepsilon \partial_t^2 \mathbf{E} = 0 \quad (11.61)$$

Om mediet inte innehåller extra laddningar förutom de som gör mediet neutralt, så fås **vågekvationen för elfältet**

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \partial_t g \mathbf{E} - \mu \varepsilon \partial_t^2 \mathbf{E} = 0 \quad (11.62)$$

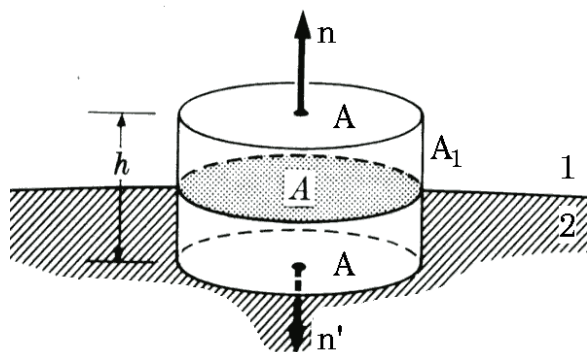
Vågekvationerna gäller för linjära, ledande eller icke-ledande neutrala media.

De vågor som erhålls efter lösning av dessa vågekvationer måste fortfarande uppfylla Maxwells lagar. Eftersom vi tog rotern av Maxwells lagar för att få vågekvationerna är dessa ekvationsgrupper alltså inte ekvivalenta.

11.5. Randvillkor

Lättast är att utgå från Maxwells II lag:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (11.63)$$



Volymintegrera denna över pillerburken i figuren:

$$\int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \int_A d\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} + \int_{A_1} d\mathbf{A}'' \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (11.64)$$

Integralen över mantelytan A_1 försvinner då burken tillåts bli infinitesimalt tunn. Eftersom $d\mathbf{A}'$ är motsatt $d\mathbf{A}$ fås nu

$$AB_{1,n} - AB_{2,n} = 0 \quad (11.65)$$

så att

$$B_{1,n} = B_{2,n} \quad (11.66)$$

Låt oss nu behandla Maxwells I lag:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (11.67)$$

Volymintegrera denna över pillerburken i figuren:

$$AD_{1n} - AD_{2n} = \rho Ah \quad (11.68)$$

så att

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho h \equiv \sigma \quad (11.69)$$

där σ är yt-tätheten av laddning på gränssytan.

Vi kan ännu granska kontinuitetsekvationen för laddning i denna behandling:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial_t \rho \quad (11.70)$$

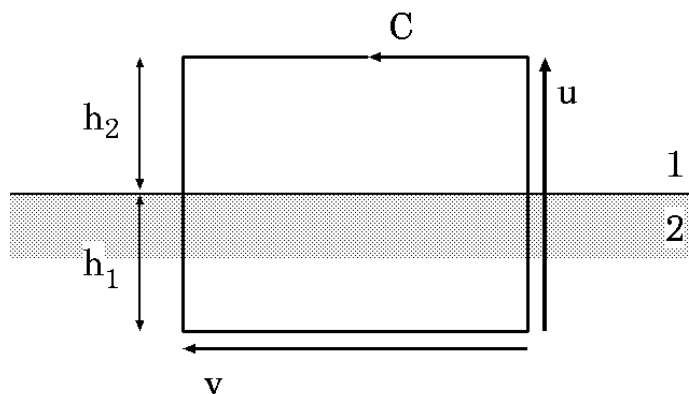
Volymintegrera denna över pillerburken i figuren. Vi får

$$J_{1n} - J_{2n} = -\partial_t \sigma \quad (11.71)$$

eller

$$g_1 E_{1n} - g_2 E_{2n} = -\partial_t \sigma \quad (11.72)$$

För att integrera rotorekvationerna behöver vi en sluten kontur:



Ytintegralen av Maxwells III lag över den fixerade konturen:

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -\partial_t \int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (11.73)$$

Detta ger

$$vE_{1t} - vE_{2t} = -uv(\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}) \cdot \partial_t \mathbf{B} \quad (11.74)$$

Högre ledet går mot noll då u går mot noll, förutsatt att $\partial_t \mathbf{B}$ inte divergerar, i vilket fall vi behöver en noggrannare analys. Efter division med v fås

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (11.75)$$

Ytintegralen av Maxwells IV lag över den fixerade konturen:

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = \int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} + \partial_t \int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \quad (11.76)$$

Detta ger

$$vH_{1t} - vH_{2t} = uv(\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{J} + uv(\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}) \cdot \partial_t \mathbf{D} \quad (11.77)$$

För media med oändlig konduktivitet försvinner inte $\mathbf{J}$ -termen. Antag nu att $\partial_t \mathbf{D}$ är ändlig. Vi får då

$$H_{1t} - H_{2t} = u(\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{J} \equiv \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j} \equiv j_{\perp} \quad (11.78)$$

där $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}$, d.v.s. ytans normalvektor, och $\mathbf{j} = u\mathbf{J}$ är en sorts linjär strömtäthet, och $j_{\perp}$ är komponenten som ligger i gränsyttans plan.

Vi har alltså för en oändlig konduktivitet att

$$H_{1t} - H_{2t} = j_{\perp}, \quad g = \infty \quad (11.79)$$

För ändlig konduktivitet fås

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (11.80)$$

Randvillkoren är alltså:

$$E_{1t} - E_{2t} = 0 \quad (11.81)$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \quad (11.82)$$

$$J_{1n} - J_{2n} = -\partial_t \sigma \quad (11.83)$$

$$B_{1n} - B_{2n} = 0 \quad (11.84)$$

$$H_{1t} - H_{2t} = j_{\perp}, \quad g = \infty \quad (11.85)$$

$$H_{1t} - H_{2t} = 0, \quad g \neq \infty \quad (11.86)$$

eller

$$E_{1t} - E_{2t} = 0 \quad (11.87)$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma \quad (11.88)$$

$$g_1 E_{1n} - g_2 E_{2n} = -\partial_t \sigma \quad (11.89)$$

$$\mu_1 H_{1n} - \mu_2 H_{2n} = 0 \quad (11.90)$$

$$H_{1t} - H_{2t} = j_\perp, \quad g = \infty \quad (11.91)$$

$$H_{1t} - H_{2t} = 0, \quad g \neq \infty \quad (11.92)$$

11.6. Monokromatiska vågor

Om vi har monokromatiska vågor betyder detta att endast en vinkelfrekvens ω förekommer. Elfältet skrivs nu som

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (11.93)$$

där den reella eller imaginära delen representerar det fysikaliskt verkliga fältet.

Vågekvationen ger nu

$$e^{-i\omega t}(\nabla^2 \mathbf{E} + ig\mu\omega \mathbf{E} - \varepsilon\mu\omega^2 \mathbf{E}) = 0 \quad (11.94)$$

Lösning av detta ger $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ så att det fullständiga fältet $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t)$ blir känt.

Vakuum

I vakuum gäller $g = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ och $\mu = \mu_0$. Vågekvationen blir

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \mathbf{E} = 0 \quad (11.95)$$

Detta kan skrivas

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}, \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (11.96)$$

c är vågens hastighet. Insättning av värdena för ε_0 och μ_0 ger att c är ljusets hastighet, vilket bevisar att ljus är en elektromagnetisk vågrörelse.

Lösningen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{\pm i \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (11.97)$$

motsvarar plana vågor, som diskuteras mer ingående i nästa kapitel. I denna ekvation är $\mathbf{E}_0$ en konstant, $\boldsymbol{\kappa} = \kappa \hat{\mathbf{u}}$ och

$$\kappa = \omega / c \quad (11.98)$$

Totala fältet är nu

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{\pm i \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} e^{-i \omega t} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t \mp \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})} \quad (11.99)$$

Imaginärdelen (för att få en sinus-funktion) ger nu det fysikaliskt verkliga fältet

$$\mathbf{E}'_P(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{P,0} \sin(\omega t \mp \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \quad (11.100)$$

där vi plockade bort minustecknet.

En plan vågfront har en konstant fas. Detta ger att

$$\omega t \mp \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} = \omega t \mp \kappa \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} \quad (11.101)$$

måste vara konstant. Sätt denna till noll. Vi får:

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} = \pm \omega t \frac{1}{\kappa} = \pm \omega t \frac{c}{\omega} = \pm c t \quad (11.102)$$

Vågen rör sig alltså i riktningen $\pm \hat{\mathbf{u}}$ med hastigheten c !

Observera att den sista termen i den ursprungliga vågekvationen kommer från förskjutningsströmmen. Om denna inte vore med skulle vågekvationen för vakuum lyda

$$\nabla^2 \mathbf{E} = 0 \quad (11.103)$$

och vi skulle inte få någon vågrörelse!

Låt oss sammanfatta några grundläggande ekvationer för **monokromatiska plana vågor i vakuum**:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad (11.104)$$

$$\kappa = \frac{\omega}{c} \quad (11.105)$$

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} \quad (11.106)$$

$$= \frac{c2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\kappa} \quad (11.107)$$

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (11.108)$$

Icke-ledande dielektrikum

Vi har nu $g = 0$, $\mu = \mu_r \mu_0$ och $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$.

$$0 = \nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \mathbf{E} = \nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_r \mu_r (\omega/c)^2 \mathbf{E} \quad (11.109)$$

Ansätzen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{\pm i\kappa \cdot \mathbf{r}} \quad (11.110)$$

ger nu att

$$\kappa = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \omega / c \equiv n \omega / c \quad (11.111)$$

så att hastigheten är c/n istället för c . Storheten n kallas **brytningsindex** och behandlas i ett senare kapitel.

Svagt ledande material

Med "svagt" ledande menas att $g\mu\omega \ll \varepsilon\mu\omega^2$ i vågekvationen

$$\nabla^2 \mathbf{E} + ig\mu\omega \mathbf{E} - \varepsilon\mu\omega^2 \mathbf{E} = 0 \quad (11.112)$$

d.v.s. att $g \ll \omega\varepsilon$. Detta ger

$$0 = \nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu\omega^2 \mathbf{E} = \nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_r\mu_r(\omega/c)^2 \mathbf{E} \quad (11.113)$$

så att vågvektorn i en planvågslösning är

$$\kappa = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}\omega/c \quad (11.114)$$

Starkt ledande material

Med "starkt" ledande menas att $g\mu\omega \gg \varepsilon\mu\omega^2$ i vågekvationen

$$\nabla^2 \mathbf{E} + ig\mu\omega \mathbf{E} - \varepsilon\mu\omega^2 \mathbf{E} = 0 \quad (11.115)$$

d.v.s. att $g \gg \omega\varepsilon$. Detta ger

$$\nabla^2 \mathbf{E} + ig\mu\omega \mathbf{E} = 0 \quad (11.116)$$

Ansätzen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\kappa \cdot \mathbf{r}} \quad (11.117)$$

ger

$$-\kappa^2 + ig\mu\omega = 0 \quad (11.118)$$

Detta måste vi skriva som

$$-\kappa^2 + g\mu\omega' = 0 \quad (11.119)$$

där $\omega' = i\omega$ är den reella frekvensen och ω är komplex, så att

$$\kappa = \pm \sqrt{\omega' g \mu} \quad (11.120)$$

och

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t \pm i\kappa \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{-\omega' t \pm i\kappa \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{-\omega' t} e^{\pm i\kappa \cdot \mathbf{r}} \quad (11.121)$$

Detta motsvarar ett dämpat fält och inte en våg.

I senare kapitel kommer vi att ha att vinkelfrekvensen är reell, och att vågvektorn kan vara komplex. Med dessa antagande måste ovanstående behandling korrigeras enligt följande. Vågekvationen ger nu villkoret

$$-\tilde{\kappa}^2 + ig\mu\omega = 0 \quad (11.122)$$

där $\tilde{\kappa} \equiv \kappa_r + i\kappa_i$ där κ_r, κ_i är reella. Villkoret ger

$$-(\kappa_r^2 - \kappa_i^2 + i2\kappa_r \cdot \kappa_i) + ig\mu\omega = 0 \quad (11.123)$$

Från detta följer

$$\kappa_r^2 - \kappa_i^2 = 0 \quad (11.124)$$

$$2\kappa_r \cdot \kappa_i = g\mu\omega \quad (11.125)$$

Detta ger ju $|\kappa_r| = |\kappa_i|$.

Planvågslösningen är nu

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t \pm i\kappa_r \cdot \mathbf{r}} e^{\mp \kappa_i \cdot \mathbf{r}} \quad (11.126)$$

Sista faktorn gör denna "våg" dämpad.

Dämpningen börjar dominera över vågenbeteendet (oskilleringen) då mediet går från svagt ledande till starkt ledande, d.v.s. då $g = \omega\epsilon$, d.v.s. då vågens frekvens är

$$|\omega'| = |\omega| = \left| \frac{g}{\epsilon} \right| \equiv \frac{1}{t_c} \quad (11.127)$$

Detta är samma tidskonstant som då vi behandlade hur snabbt en laddningsfördelning uppnår elektrostatisk jämvikt.

11.7. Randvillkor för monokromatiska vågor

För monokromatiska vågor kan vi förenkla några av de tidigare randvillkoren. Med

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (11.128)$$

ger ekvationerna

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \quad (11.129)$$

$$J_{1n} - J_{2n} = -\partial_t \sigma \quad (11.130)$$

att

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma \quad (11.131)$$

$$g_1 E_{1n} - g_2 E_{2n} = -(-i\omega)\sigma = i\omega\sigma \quad (11.132)$$

där σ är amplituden för laddningstätheten

$$\sigma'(\mathbf{r}, t) = \sigma(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (11.133)$$

evaluerad på gränsytan $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{rand}}$.

Villkoren kan genast kombineras till

$$\left(\varepsilon_1 + i\frac{g_1}{\omega}\right) E_{1n} - \left(\varepsilon_2 + i\frac{g_2}{\omega}\right) E_{2n} = 0 \quad (11.134)$$

så att alla randvillkor lyder

$$E_{1t} - E_{2t} = 0 \quad (11.135)$$

$$\left(\varepsilon_1 + i\frac{g_1}{\omega}\right) E_{1n} - \left(\varepsilon_2 + i\frac{g_2}{\omega}\right) E_{2n} = 0 \quad (11.136)$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma \quad (11.137)$$

$$\mu_1 H_{1n} - \mu_2 H_{2n} = 0 \quad (11.138)$$

$$H_{1t} - H_{2t} = j_{\perp}, \quad g = \infty \quad (11.139)$$

$$H_{1t} - H_{2t} = 0, \quad g \neq \infty \quad (11.140)$$

Specialfall 1: $g_1 = g_2 = 0$

Om båda konduktiviteterna försvinner, d.v.s. $g_1 = g_2 = 0$, så fås $\sigma = 0$. Randvillkoren blir nu

$$E_{1t} - E_{2t} = 0 \quad (11.141)$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = 0 \quad (11.142)$$

$$\mu_1 H_{1n} - \mu_2 H_{2n} = 0 \quad (11.143)$$

$$H_{1t} - H_{2t} = 0 \quad (11.144)$$

Specialfall 2: $g_2 = \infty$

Maxwells ekvation

$$\nabla \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_2 + \partial_t \mathbf{D}_2 \quad (11.145)$$

ger

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\nabla \times \mathbf{H}_2}{g_2 - i\omega\varepsilon_2} = 0 \quad (11.146)$$

då $g_2 = \infty$. Detta betyder då att $E_{2n} = E_{2t} = 0$ och $E_{1t} = 0$.

Enligt

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 \cdot E_{2n} = \sigma \quad (11.147)$$

måste vi nu ha $E_{1n} = \sigma/\varepsilon_1$.

Maxwells ekvation

$$\nabla \times \mathbf{E}_2 = -\partial_t \mathbf{B}_2 = i\omega \mathbf{B}_2 \quad (11.148)$$

ger att $\mathbf{B}_2 = 0$

Detta ger också att $B_{1n} = 0$ och $H_{1t} = j_\perp - H_{2t} = j_\perp$.

$$E_{1t} = E_{2t} = 0 \quad (11.149)$$

$$D_{1n} = \sigma \quad (11.150)$$

$$D_{2n} = 0 \quad (11.151)$$

$$B_{1n} = B_{2n} = 0 \quad (11.152)$$

$$H_{1t} = j_\perp \quad (11.153)$$

$$H_{2t} = 0 \quad (11.154)$$

11.8. Vågekvationen då källor är närvarande

Tidigare antog vi att mediet där vågorna rörde sig var tomt på laddning. Vi kommer nu att granska den motsatta situationen, d.v.s. att mediet innehåller en laddningsfördelning $\rho(\mathbf{r}, t)$ och en extern ström $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$.

En granskning baserad på vektor- och skalärpotentialer erbjuder en lättare analys, så vi återintroducerar först den magnetiska vektorpotentialen:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (11.155)$$

Maxwells III lag ger

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \partial_t \mathbf{A} \quad (11.156)$$

så att

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = 0 \quad (11.157)$$

Uttrycket innanför parentesen är m.a.o. gradienten av en skalärfunktion. Beteckna denna skalärfunktion $-\varphi$, så att vi i den statiska situationer återfår den elektrostatiska potentialen:

$$\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A} = -\nabla \varphi \quad (11.158)$$

Vi kan nu omskriva alla Maxwells ekvationer med $\mathbf{A}$ och φ .

Maxwells I och IV lag ger

$$\nabla^2 \varphi + \partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (11.159)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mu \varepsilon \partial_t \nabla \varphi - \mu \varepsilon \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (11.160)$$

Enligt tidigare kan vi addera gradienten av en godtycklig skalärfunktion Ψ till $\mathbf{A}$ utan att det ändrar på $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Denna egenskap hos $\mathbf{A}$ kallades måttinvarians. Välj nu $\nabla \Psi$ så att

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla^2 \Psi = -\mu \varepsilon \partial_t \varphi \quad (11.161)$$

Detta kallas **Lorentz-måttet**.

Ekvationerna ovan ger nu att

$$\nabla^2 \varphi - \mu \varepsilon \partial_t^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (11.162)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (11.163)$$

Vi har nu fått att φ och $\mathbf{A}$ satisfierar (inhomogena) vågekvationer.

Lösningarna till dylika ekvationer består av en summa av **allmänna funktioner** som satisfierar de allmänna homogena ekvationerna

$$\nabla^2 \varphi - \mu \varepsilon \partial_t^2 \varphi = 0 \quad (11.164)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \partial_t^2 \mathbf{A} = 0 \quad (11.165)$$

vilka gäller oberoende av hur ρ , $\mathbf{J}$ ser ut, och **specifika funktioner** till de fullständiga ekvationerna. De specifika lösningarna är helt beroende av hur ρ , $\mathbf{J}$ råkar se ut i ett visst fall.

Om vi inte har nåt tidsberoende så blir ekvationen för skalärpotentialen

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (11.166)$$

Detta är Poisson-ekvationen, vars specifika lösning är

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (11.167)$$

i vakuum. De allmänna lösningar får vi ju från Laplace-ekvationen $\nabla^2 \varphi = 0$.

Fokusera nu på endast en laddning q i origo. Låt dess storlek vara tidsberoende, så att $q = q(t)$. Detta ger $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = q(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ med $\mathbf{r}' = 0$. Om vi nu plockar bort tidsberoendet skall det gälla att

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{q\delta(\mathbf{r} - 0)}{|\mathbf{r} - 0|} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r} \quad (11.168)$$

För $\mathbf{r}$ utanför origo har vi nu

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \varphi = 0 \quad (11.169)$$

där $\epsilon\mu = \epsilon_r\mu_r/c^2 = (n/c)^2$, med $n = 1$ då vi är i vakuum, är vågens hastighet. För en liten volym som omfattar origo så gäller

$$\int_{dV} \left(\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \varphi \right) = -\frac{q(t)}{\epsilon_0} \quad (11.170)$$

Med sfärisk symmetri fås

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \varphi) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \varphi = 0 \quad (11.171)$$

Ansätzen

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} \chi(r, t) \quad (11.172)$$

ger

$$\partial_r^2 \chi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \chi = 0 \quad (11.173)$$

Detta är vågekvationen i en dimension. Den allmänna lösningen är

$$\chi(r, t) = f(r - ct) + g(r + ct) \quad (11.174)$$

där den senare allmänna funktionen representerar en våg som rör sig in i origo. Vi är nu intresserade av vågor bort från origo, så vi kastar bort denna term. Skalarpotentialen blir nu

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} f(r - ct) \quad (11.175)$$

Då vi inte har nåt tidsberoende ska detta reduceras till

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} q \quad (11.176)$$

Då tidsberoendet återinförs får vi

$$f(r - ct) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q(t') \quad (11.177)$$

där t' är nån funktion i r, t så att $t' \propto r - ct$. Vi har alltså ersatt t med t' för att kunna ta hand om faktumet att högre ledet ska vara en funktion i $r - ct$.

Vi får

$$t' = A \times (r - ct) = -Act + Ar \quad (11.178)$$

Vi ser att Ac måste vara en konstant utan enhet, och om tidsderivatorna skall ha samma tecken och ge upphov till samma derivata av tiden så måste vi ha $-Ac = 1$. Vi får då att

$$t' = t - r/c \quad (11.179)$$

Vi har nu för en laddning i origo att

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} q(t') \quad (11.180)$$

För en grupp av laddningar har vi då den så kallade **retarderade skalärpotentialen**

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (11.181)$$

där

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \quad (11.182)$$

kallas **retarderad tid**.

På motsvarande sätt fås den **retarderade vektorpotentialen**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (11.183)$$

Vi ser att potentialerna i en punkt $\mathbf{r}, t$ beror på laddningar och strömmar i punkterna $\mathbf{r}'$ **vid en tidigare tidpunkt** $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$. Tidsskillnaden motsvarar den tid som går åt för en våg att tillryggalägga sträckan $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

De elektriska och magnetiska fälten ges nu som

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) - \partial_t\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (11.184)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (11.185)$$

Dessa potentialer används för att analysera strålning och dess uppkomst. Vi återkommer till dem i ett senare kapitel.