

7. Magnetostatik II: Materiens magnetiska egenskaper

[RMC]

7.1. Magnetisering

I föregående kapitel granskades magnetfältet som tidsberoende **konventionella strömmar**, d.v.s. strömmar i elektriska ledningar, ger upphov till. Eftersom dessa strömmar transporterar laddning över en makroskopisk region kan de också kallas **transport-strömmar**.

Laddningar i rörelse förekommer också inne i alla slags av materie, p.g.a. elektronernas rörelse i atomer och molekyler. Dylika strömmar kallas **atomära strömmar**, för att särskilja dem från de konventionella. Det bör noteras att dessa strömmar *inte* kan transportera laddning över en makroskopisk region, utan åstadkommer istället en kontinuerlig "cirkulation" av laddning inom en atom eller molekyl. Därför kan dessa strömmar också kallas **cirkulations-strömmar**.

I detta kapitel undersöker vi de magnetiska effekter de atomära strömmarna ger upphov till.

De atomära strömmarna bildar en mikroskopisk sluten krets, så man kan approximera dessa som magnetiska dipoler då man bestämmer den flödestäthet de ger upphov till på stora avstånd.

Dipolerna kännetecknas ju av det magnetiska dipolmomentet $\mathbf{m}$. Ett materials **dipolmoments-täthet** kallas **magnetisering**, och definieras som

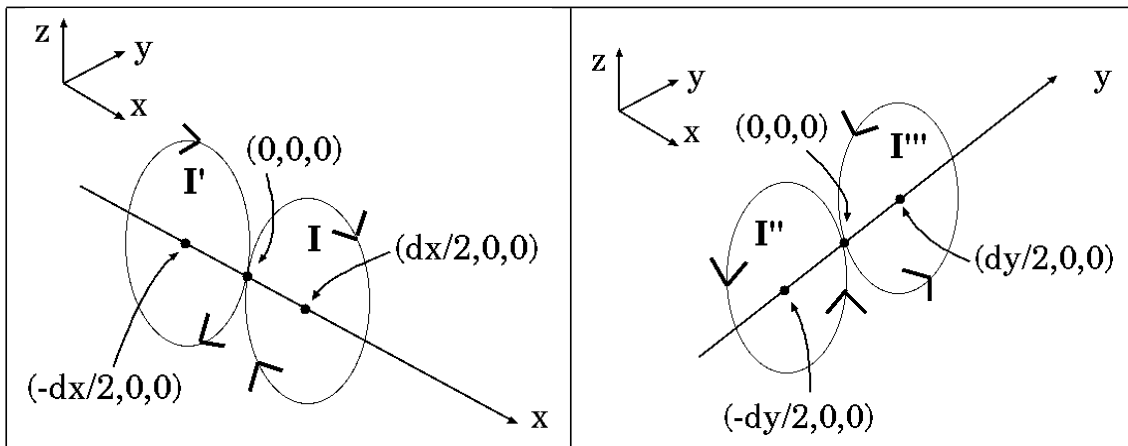
$$\mathbf{M} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{m}_i}{V} = \frac{d\mathbf{m}}{dV} \quad (7.1)$$

där summeringen löper över alla dipoler $\mathbf{m}_i$ i volymen V . Denna måste inkludera ett stort antal atomer så att $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r})$ är en tillräckligt jämn funktion av positionen.

Om ett material är magnetiserat gäller att $\mathbf{M} \neq 0$.

För de flesta material gäller att de enskilda dipolmomenten pekar i en slumpmässig riktning, så att $\mathbf{M} = 0$.

De atomära strömmar som ger upphov till magnetiseringen kan bestämmas med följande betraktelse.



Nettostrommen I_z i z -led i mittpunkten $(0, 0, 0)$ mellan två volymelement ges av uttrycket

$$I_z = I - I' + I'' - I''' \quad (7.2)$$

Med

$$I d\mathbf{A} = d\mathbf{m} = \mathbf{M} dV \quad (7.3)$$

kan vi för $I - I'$ skriva

$$\begin{aligned} (I - I') dx dz &= \left(M_y\left(\frac{dx}{2}, 0, 0\right) - M_y\left(-\frac{dx}{2}, 0, 0\right) \right) dx dy dz \\ &\approx \left(M_y(0, 0, 0) + \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{dx}{2} - \left(M_y(0, 0, 0) - \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \right) dx dy dz \\ &= \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} dx \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (7.4)$$

så att

$$I - I' = \frac{\partial M_y}{\partial x} dx dy \quad (7.5)$$

För $I'' - I'''$ gäller

$$\begin{aligned}
 (I'' - I''')dydz &= \left(M_x(0, -\frac{dy}{2}, 0) - M_x(0, \frac{dy}{2}, 0) \right) dxdydz \\
 &\approx \left(M_x(0, 0, 0) - \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{dy}{2} - (M_x(0, 0, 0)) + \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dxdydz \\
 &= - \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} dy \right) dxdydz
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

så att

$$I'' - I''' = -\frac{\partial M_x}{\partial y} dxdy \tag{7.7}$$

Vi har nu att

$$J_z = \frac{I_z}{dxdy} = \frac{I - I' + I'' - I'''}{dxdy} = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \tag{7.8}$$

Detta motsvarar z -komponenten av uttrycket $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{M}$. Motsvarande härledning för de övriga strömtäthetskomponenterna bekräftar att detta gäller. Vi har alltså visat att

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$$
(7.9)

där $\mathbf{J}_M$ kallas **magnetiseringens strömtäthet**, Vi har alltså nu relaterat cirkulationsströmmarna inne i materialet till dess magnetisering.

7.2. Flödestätheten från ett magnetiserat material

Vi kom tidigare fram till att magnetiska vektorpotentialen för en avlägsen krets med dipolmomentet $\mathbf{m}$ är

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (7.10)$$

där $\mathbf{r}$ är vektorn från origo till observationspunkten.

Eftersom $d\mathbf{m} = \mathbf{M}dV$ får vi nu att

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} dV' \frac{\mathbf{M} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (7.11)$$

där V_0 löper över det magnetiserade materialet.

Ekvationen kan skrivas

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} dV' \mathbf{M} \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.12)$$

Med relationerna

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f \nabla \times \mathbf{F} \quad (7.13)$$

$$- \int dV \nabla \times (f\mathbf{F}) = \int f \mathbf{F} \times d\mathbf{A} \quad (7.14)$$

fås

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} dV' \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{A_0} \frac{\mathbf{M} \times d\mathbf{A}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.15)$$

Detta kan alternativt skrivas som

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} dV' \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{A_0} dA' \frac{\mathbf{j}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.16)$$

med hjälp av $\mathbf{J}_M$ och det magnetiska materialets yt-strömtäthet:

$$\mathbf{j}_M = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (7.17)$$

För att erhålla $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ måste vi utföra $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} dV' \nabla \times \left(\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \quad (7.18)$$

Med hjälp av regeln

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \quad (7.19)$$

får vi då andra och tredje termerna faller bort, att

$$\nabla \times \left(\mathbf{M} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = \mathbf{M} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) - (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (7.20)$$

Den första termen ger integralen

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} dV' \mathbf{M} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} dV' \mathbf{M} 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (7.21)$$

Med regeln

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) \quad (7.22)$$

ger integralen av den andra termen

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left[\int_{V_0} dV' \mathbf{M} \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \right] + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} dV' \mathbf{M} \times \left[\nabla \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \right] \quad (7.23)$$

Den senare termen:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} dV' \mathbf{M} \times \left[\nabla \times \left(\nabla \frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] = 0 \quad (7.24)$$

Den tidigare termen:

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left[\int_{V_0} dV' \mathbf{M} \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \right] \equiv -\mu_0 \nabla \varphi_M \quad (7.25)$$

Vi har nu erhållit

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \varphi_M + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (7.26)$$

där

$$\varphi_M(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} dV' \mathbf{M} \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \quad (7.27)$$

är skalärpotentialen för ett magnetiserat material.

Utanför materialet gäller ju $\mathbf{M} = 0$.

Med regeln

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\text{grad} f) \cdot \mathbf{F} + f \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (7.28)$$

kan skalärpotentialen kan modifieras enligt följande:

$$\mathbf{M} \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = \mathbf{M} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla' \cdot \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{M} \quad (7.29)$$

Vi får nu

$$\varphi_M(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{A_0} \frac{d\mathbf{A}' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} dV' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.30)$$

Jämförelse med potentialen från ett polariserat dielektrikum indikerar att integrandernas täljare är tätheter av magnetiska källor.

Man definierar **volymtätheten av magnetisk polstyrka** $\rho_M(\mathbf{r}')$ och **yttätheten av magnetisk polstyrka** $\sigma_M(\mathbf{r}')$:

$$\rho_M(\mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') \quad (7.31)$$

$$\sigma_M(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (7.32)$$

7.3. Total flödestäthet

Den totala flödestätheten är en summa av flödestäthet från (i) konventionella strömmar, och (ii) magnetisering (d.v.s. atomära strömmar). Summan är

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) - \mu_0 \nabla \varphi_M(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (7.33)$$

där

$$\varphi_M(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_A \frac{d\mathbf{A}' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.34)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\rho_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_A \frac{dA' \sigma_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.35)$$

Volymen V omfattar alla strömförande regioner och magnetiserade material i systemet. Ytan A omfattar alla (gräns)ytor (inne) i systemet.

Strömtätheten $\mathbf{J}$ innehåller enbart de konventionella strömmarna. Magnetiseringsströmmarna är beaktade i $\mathbf{M}$, ρ_M och σ_M .

För att underlätta lösningen av magnetiska problem, speciellt då $\mathbf{J}$ är känd men $\mathbf{M}$ okänd, och man vill veta $\mathbf{B}$, inför vi ett nytt begrepp. Man definierar den **magnetiska intensiteten** eller det **magnetiska fältet** som

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (7.36)$$

Med $\mathbf{B}$ enligt tidigare,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi_M(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (7.37)$$

Obs: φ_M innehåller fortfarande $\mathbf{M}$ via ρ_M , σ_M , så detta uttryck är ännu inte klart för användning då $\mathbf{M}$ är okänt och $\mathbf{J}$ specificerad.

7.4. Magnetostatikens fältekvationer

Vi såg tidigare att

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (7.38)$$

Vi måste nu inkludera bidraget från magnetiseringsströmmen:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_M) \quad (7.39)$$

Men detta kan ju skrivas

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \nabla \times \mathbf{M} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{H} \quad (7.40)$$

så att

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (7.41)$$

De fundamentala ekvationerna för magnetostatiska problem är

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.42)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (7.43)$$

Ekvationernas motsvarande integraler är

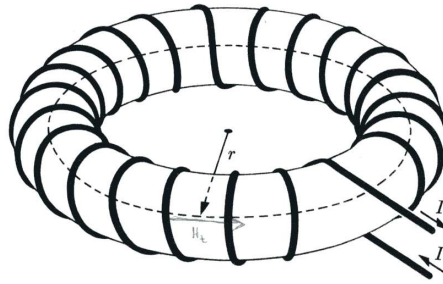
$$\oint_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.44)$$

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = \oint_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = I \quad (7.45)$$

där I är totala konventionella strömmen genom det område som stängs in av den slutna kurvan C .

Den andra ekvationen följer från Stokes' teorem, med vilket ytintegralen kan skrivas som en kurvintegral. Denna ekvation är **Ampères lag för strömkretsar och magnetiska media** och alltså en generalisering av den tidigare formen.

Exempel : Låt en ledning bära strömmen I och vara lindad N st varv runt ett torusformat magnetiskt material, så att vi får en toroid. Bestäm magnetfältet på den streckade linjen i figuren.



Längs med den streckade vägen är magnetfältet tangentiellt med vägen. Ampères lag ger genast att

$$2\pi r H = NI \quad (7.46)$$

Vi får

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi r} \hat{\psi} \quad (7.47)$$

där $\hat{\psi}$ är enhetsvektorn i den tangentiella riktningen.

□

7.5. Magnetisk susceptibilitet och permeabilitet

Man kan skriva om magnetiseringen för isotropiska material enligt

$$\mathbf{M} \equiv \chi_M \mathbf{H} \quad (7.48)$$

där χ_M är materialets **magnetiska susceptibilitet**.

Från detta följer att

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_M \mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi_M)\mathbf{H} \quad (7.49)$$

Man definierar ett materials **magnetiska permeabilitet** μ med hjälp av ekvationen

$$\mathbf{B} \equiv \mu \mathbf{H} \quad (7.50)$$

Vi får alltså att

$$\mu = (1 + \chi_M)\mu_0 \equiv \mu_r \mu_0 \quad (7.51)$$

där μ_r är den **relativa permeabiliteten**.

7.6. Magnetiska material

7.6.1. Para- och diamagnetiska material

För **para- och diamagnetiska** material gäller att χ_M, μ är konstanter, förutsatt att det påverkande magnetfältet inte är för starkt.

För **paramagnetiska** material gäller att $\chi_M > 0$, så att $\mathbf{B} > \mu_0 \mathbf{H}$, d.v.s. magnetfältet **förstärks** inne i materialet. Detta ger att $\mu > 1$. Materialets dipoler vill alltså ordna sig med de externa fältet.

För **diamagnetiska** material har man att $\chi_M < 0$ och $\mathbf{B} < \mu_0 \mathbf{H}$, d.v.s. magnetfältet **försvagas** inne i materialet. Vi har då att $\mu < 1$. Materialets dipoler ordnar sig motsatt fältet, så att detta försvagas inne i materialet.

I allmänhet gäller att $|\chi_M| \ll 1$ för dessa material.

Paramagnetiska material	χ_M
Aluminium	$2,1 \times 10^{-5}$
Magnesium	$1,2 \times 10^{-5}$
Natrium	$0,84 \times 10^{-5}$
Titan	$18,0 \times 10^{-5}$
Wolfram	$7,6 \times 10^{-5}$
Syre (1 atm)	$0,1935 \times 10^{-5}$

Diamagnetiska material	χ_M
koppar	$-0,98 \times 10^{-5}$
guld	$-3,5 \times 10^{-5}$
silver	$-2,4 \times 10^{-5}$
koldioxid (1 atm)	$-1,19 \times 10^{-8}$
väte (1 atm)	$-0,22 \times 10^{-8}$
kväve (1 atm)	$-0,67 \times 10^{-8}$

7.6.2. Ferromagnetiska material

[RMC, <http://en.wikipedia.org/wiki/>]

Ferromagnetiska material har *inte* en konstant susceptibilitet eller permeabilitet, utan dessa varierar med det externa magnetfältet.

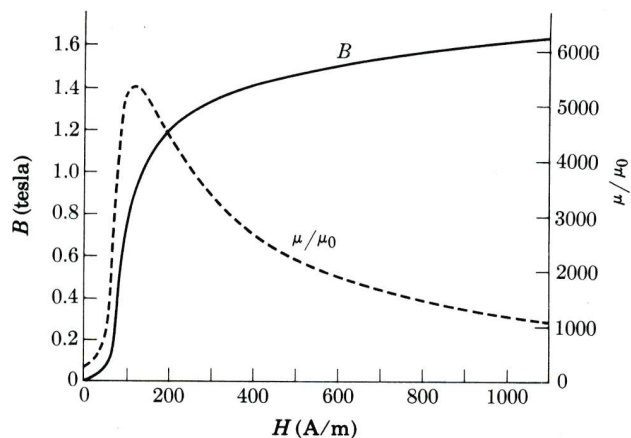
För isotropiska ferromagnetiska material gäller fortfarande $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, men så att

$$\mathbf{B} = \mu(H) \mathbf{H} \quad (7.52)$$

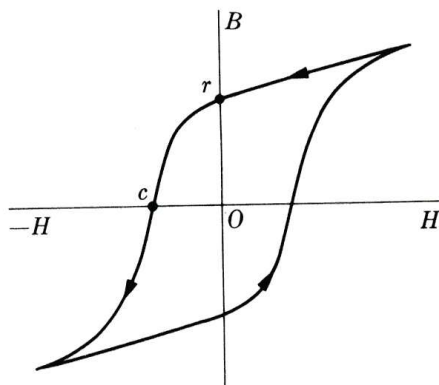
Ferromagneter uppvisar en **permanent magnetisering**, d.v.s. de är **magneter**. För dylika material fås ett speciellt beteende i ett $H - B$ -diagram, d.v.s. då man ritar ut hur flödestätheten $\mathbf{B} = \mu(H) \mathbf{H}$ inne i materialet beror på det externa fältet $\mathbf{H}$.

Om man tar en icke-magnetiserad ferromagnet och utsätter den för ett magnetfält kommer flödestätheten $\mathbf{B}$ i materialet att först öka snabbt, men sedan långsammare. Se figur.

Den avtagande tillväxten beror på att $\mathbf{M}$ når ett mättnadsvärde M_s , **saturation-magnetiseringen**, så att tillväxten i $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_s$ efter detta bara beror på termen $\mu_0\mathbf{H}$.



Om en ferromagnet har magnetiserats av ett fält till en punkt $H_{\max}, B_{\max}$, och man sedan minskar på det yttre fältet, så kommer (H, B) -punkterna inte att ligga på den kurva man fick då materialet magnetiserades. Detta beteende kallas **hysteresis**, och betyder att materialet har ett "minne" av sin tidigare historia. Se figur.



I $H - B$ -diagrammet definierar man följande speciella punkter. Värdet för B då $H = 0$ kallas materialets *retentivitet* eller *remanens*.

Värdet för H ($H < 0$) då $B = 0$ kallas materialets *koerciva kraft* eller *koercivitet*.

Ferromagnetiska element	$\mu_0 M_s$ (T)	H_s (A/m)
järn	2,15	$1,6 \times 10^5$
kobolt	1,79	$7,0 \times 10^5$
nickel	0,61	$5,5 \times 10^5$
Ferromagnetiska material	$\mu_0 M_s$ (T)	H_c (A/m)
Fe _{0.96} Si _{0.04}	1,97	56
Perm-legering, Fe _{0.55} Ni _{0.45}	1,60	5,6
Mu-metal, Cu _{0.05} Cr _{0.02} Ni _{0.77} Fe _{0.16}	0,75	1,2
Permendur, Co _{0.50} Fe _{0.50}	2,45	159
Ferromagnetiska material	B_r (T)	H_c (A/m)
Koboltstål, Fe _{0.52} Co _{0.36} W _{0.04} Cr _{0.06} C _{0.008}	0,97	19×10^3
Pt _{0.77} Co _{0.23}	0,6	$3,4 \times 10^5$
Sm _{0.50} Co _{0.50}	0,84	$6,7 \times 10^5$
Nd _{0.13} Fe _{0.81} B _{0.06}	0,80	$1,2 \times 10^6$

Ferromagneter används för att (i) öka det magnetiska flödet genom en strömkrets, eller (ii) som (permanenta) magneter.

Ferromagneter har en kritisk temperatur, **Curie-temperaturen**, vid vilken de genomgår en fastransition. Över denna temperatur förlorar ferromagneterna sin permanenta magnetisering och deras beteende blir paramagnetiskt.

Ferromagnetiska element	T_C (K)
kobolt	1388
järn	1043
nickel	627
CrO ₂	386
gadolinium	292
dysprosium	88

7.7. Fältvektorernas randvillkor

Lagen om monopolars icke-existens

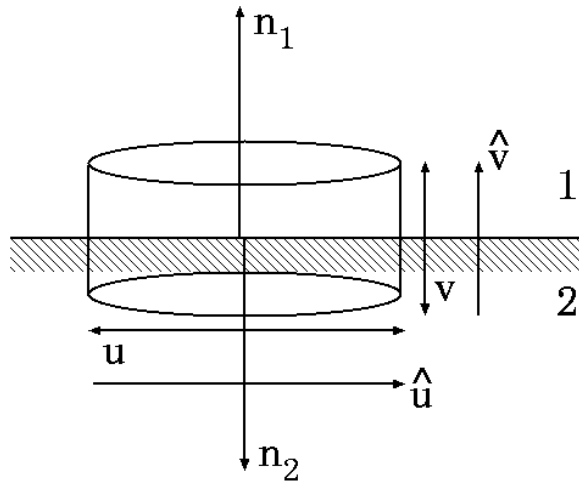
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.53)$$

ger då den yt-integreras över en tunn pillerburk centrerad på gränssytan mellan två media:

$$B_{2,n} = B_{1,n} \quad (7.54)$$

eller med vektorer:

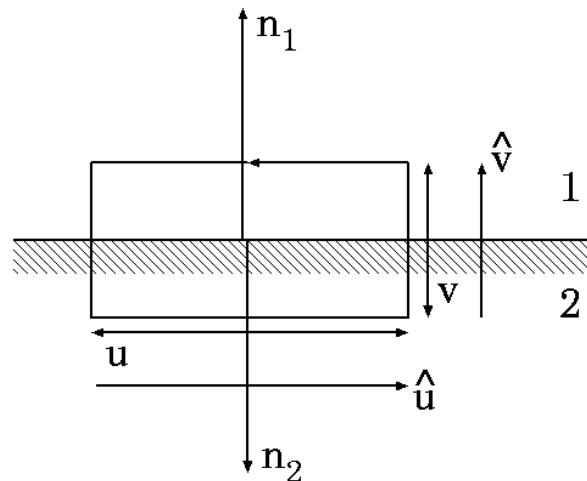
$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = 0 \quad (7.55)$$



Flödestäthetens normal-komponent är alltså **kontinuerlig** över gränssytan.

Ampères kretslag på en rektangulär kurva över gränssytan ger:

$$\begin{aligned} & H_{2,t}u - H_{1,t}u \\ &= \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \\ &= \mathbf{J} \cdot (u\hat{\mathbf{u}} \times v\hat{\mathbf{v}}) \\ &= -\mathbf{J} \cdot (v\hat{\mathbf{v}} \times u\hat{\mathbf{u}}) \\ &= -(\mathbf{J} \times v\hat{\mathbf{v}}) \cdot u\hat{\mathbf{u}} \quad (7.56) \end{aligned}$$



Division med u ger

$$H_{2,t} - H_{1,t} = -(\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\mathbf{u}} = (v\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{n}}_2) \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (7.57)$$

Detta kan omskrivas som

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \hat{\mathbf{u}} = (v\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{n}}_2) \cdot \hat{\mathbf{u}} \equiv (\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{n}}_2) \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (7.58)$$

där $\mathbf{j} \equiv v\mathbf{J} = uv\mathbf{J}/u = A\mathbf{J}/u$ som har enheten A/m, och därför är en linjär strömtäthet.

Observera att $\hat{\mathbf{u}}$ inte kan plockas bort från båda leden i ekvationen ovan.

I skalärform har vi

$$H_{2,t} - H_{1,t} = (\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{n}}_2)_t \quad (7.59)$$

Antag vi har medierna 1 och 2, så att ingen ström flyter över gränssytan. Vi får:

$$B_{1,n} = B_{2,n} \quad (7.60)$$

$$H_{1,t} = H_{2,t} \quad (7.61)$$

eller (för isotropiskt medium)

$$B_{1,n} = B_{2,n} \quad (7.62)$$

$$\frac{1}{\mu_0} B_{1,t} - M_{1,t} = \frac{1}{\mu_0} B_{2,t} - M_{2,t} \quad (7.63)$$

Om medium 2 motsvarar vakuum:

$$B_{1,n} = B_{2,n} \quad (7.64)$$

$$B_{1,t} = B_{2,t} + \mu_0 M_{1,t} \quad (7.65)$$

För linjärt medium 1:

$$B_{1,n} = B_{2,n} \quad (7.66)$$

$$\begin{aligned} B_{1,t} &= B_{2,t} + \mu_0 \chi_{M,1} H_{1,t} \\ &= B_{2,t} + \mu_0 \chi_{M,1} \frac{B_{1,t}}{\mu_1} \\ &= B_{2,t} + \mu_0 \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) \frac{B_{1,t}}{\mu_1} \\ &= B_{2,t} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1} B_{1,t} \end{aligned} \quad (7.67)$$

Detta ger

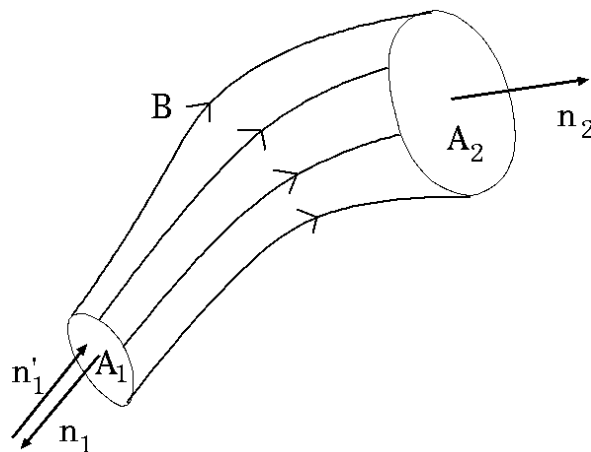
$$B_{1,n} = B_{2,n} \quad (7.68)$$

$$B_{1,t} = \frac{\mu_1}{\mu_0} B_{2,t} \quad (7.69)$$

vid gränssytan.

Om medium 2 inte är vakuum, blir det senare uttrycket mera komplicerat.

7.8. Flödestuber



Volym-integralen av

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.70)$$

över en flödestub ger

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{A_1} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \int_{A_2} d\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} \\
&= - \int_{A_1} d\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} + \int_{A_2} d\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} \\
&= -\Phi(A_1) + \Phi(A_2)
\end{aligned} \tag{7.71}$$

så att

$$\Phi(A_1) = \Phi(A_2) \tag{7.72}$$

där $d\mathbf{A}'$ är riktad ut ur volymen.

Detta betyder att det magnetiska flödet bevaras i en flödestub: det flöde som strömmar in genom ytan A_1 strömmar också ut genom ytan A_2 .

Detta gäller inte för $\mathbf{H}$, eftersom $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ och $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} = \rho_M$, som är volymtätheten av magnetiska poler.

Om magnetiska poler finns inne i en flödestub fås då att

$$\Phi(A_2) - \Phi(A_1) = \int_V dV \rho_M(\mathbf{r}) \tag{7.73}$$

där volymen V omfattar flödestuben mellan ytorna A_1 och A_2 .

7.9. Översikt av magnetostatiska problems lösningsmetoder

Vi kom fram till att magnetfältet i det allmänna fallet att vi har en strömkrets med ett magnetiskt material är

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi_M(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (7.74)$$

där

$$\varphi_M(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_A \frac{d\mathbf{A}' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.75)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\rho_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_A \frac{dA' \sigma_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.76)$$

Flödestätheten är som alltid

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mu_0(\mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}(\mathbf{r})) \quad (7.77)$$

De grundläggande ekvationerna är

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.78)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (7.79)$$

Ekvationernas motsvarande integraler är

$$\oint_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.80)$$

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = \oint_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = I \quad (7.81)$$

Vi har två möjliga metoder att lösa allmänna magnetostatiska problem, beroende på geometrin.

(i) För en situation med stor geometrisk symmetri kan vi använda **Ampères lag**

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = \oint_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = I \quad (7.82)$$

(ii) Den andra metoden är den fulla lösningen för $\mathbf{H}$. . .

I många fall kan vi använda oss av specialfallen att magnetiska material inte är närvarande eller att vi inte har några konventionella strömmar.

Specialfall 1: Inga magnetiska material, $\mathbf{M} = 0$

Nu gäller $\varphi_M \equiv 0$ så att

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (7.83)$$

och vi får tillbaka Biot-Savarts lag.

Specialfall 2: Inga strömmar, $\mathbf{J} = 0$

Nu gäller

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (7.84)$$

så att

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi_M \quad (7.85)$$

Om vi har att (i) det magnetiska materialet är linjärt, d.v.s. inte ferromagnetiskt, $\mu = \text{konstant}$, **eller** (ii) magnetiseringen är divergensfri, $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, så $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ger

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (7.86)$$

d.v.s.

$$\nabla^2 \varphi_M = 0 \quad (7.87)$$

Exempel 1: Magnetiskt klot med radien a och den konstanta magnetiska permeabiliteten μ i ett till början likformigt magnetfält $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0 = -\mu_0 \nabla \varphi_{M,0} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$. Bestäm magnetfältet inne i och utanför sfären.

Vi har ett problem med azimuthal symmetri. Lösningarna är zon-ytfunktionerna i r och θ :

$$\varphi_M(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad (7.88)$$

Låt området innafor sfären betecknas 1, och vakuum 2. Vi har nu

$$\varphi_{M,1}(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (7.89)$$

$$\varphi_{M,2}(r, \theta) = A'_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} C'_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad (7.90)$$

Koefficienten A_0 motsvarar en konstant, som inte ger nåt bidrag till $\mathbf{H} = -\nabla \varphi_M$, så vi kastar bort den.

Långt borta gäller $\nabla \varphi_M = -B_0 \hat{\mathbf{z}}/\mu_0$ så att $\varphi_M = -B_0 z/\mu_0$ och $A'_1 = -B_0/\mu_0$.

För $r = a$ gäller:

$$B_{1,n} = B_{2,n} \quad (7.91)$$

d.v.s.

$$-\mu \frac{\partial \varphi_{M,1}}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_{M,2}}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (7.92)$$

Detta ger

$$\begin{aligned} & \mu \left(A_1 \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} n C_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) \right) \\ &= \mu_0 \left(-\frac{B_0}{\mu_0} \cos \theta - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C'_n a^{-n-2} P_n(\cos \theta) \right) \end{aligned} \quad (7.93)$$

Alla $P_n(\cos \theta)$ -termer måste ta ut varandra, så att

$$\mu A_1 = -B_0 - 2\mu_0 C'_1 a^{-3} \quad (7.94)$$

$$\mu n C_n a^{n-1} = -\mu_0 (n+1) C'_n a^{-n-2}, n \geq 2 \quad (7.95)$$

För $n = 0$ finns det bara en konstant, C'_0 , så den måste vara noll. Den har vi redan plockat bort.

För $r = a$ gäller också:

$$H_{1,t} = H_{2,t} \quad (7.96)$$

d.v.s.

$$-\frac{1}{a} \frac{\partial \varphi_{M,1}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \varphi_{M,2}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} \quad (7.97)$$

så att

$$-A_1 a \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} C_n a^n \frac{dP_n}{d\theta} = -A'_1 a \sin \theta + \sum_{n=0}^{\infty} C'_n a^{-n-1} \frac{dP_n}{d\theta} \quad (7.98)$$

Alla $P_n(\cos \theta)$ -termer måste ta ut varandra, så att

$$A_1 = A'_1 + C'_1 a^{-3} = -\frac{B_0}{\mu_0} + C'_1 a^{-3} \quad (7.99)$$

$$C_n a^n = C'_n a^{-n-1}, n \geq 2 \quad (7.100)$$

Vi har nu

$$\mu A_1 = -B_0 - 2\mu_0 C'_1 a^{-3} \quad (7.101)$$

$$A_1 = -\frac{B_0}{\mu_0} + C'_1 a^{-3} \quad (7.102)$$

$$\mu n C_n a^{n-1} = -\mu_0 (n+1) C'_n a^{-n-2}, n \geq 2 \quad (7.103)$$

$$C_n a^n = C'_n a^{-n-1}, n \geq 2 \quad (7.104)$$

Vi får

$$C'_1 = a^3 \frac{B_0 \mu / \mu_0 - 1}{\mu_0 \mu / \mu_0 + 2} \quad (7.105)$$

$$A_1 = -\frac{B_0}{\mu_0} \frac{3}{\mu / \mu_0 + 2} \quad (7.106)$$

Från ekvationssystemet får vi två *olika* villkor för hur C_n borde bero på C'_n för att bidragen från Legendre-polynoms-termerna ska överensstämma med varandra på gränsytan $r = a$. Detta betyder att vi måste kräva att $C_n = C'_n = 0$ för $n \geq 2$.

Skalärpotentialerna är alltså

$$\varphi_{M,1} = -\frac{B_0}{\mu_0} \frac{3}{\mu/\mu_0 + 2} r \cos \theta \quad (7.107)$$

$$\varphi_{M,2} = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta + a^3 \frac{B_0 \mu/\mu_0 - 1}{\mu_0 \mu/\mu_0 + 2} r^{-2} \cos \theta \quad (7.108)$$

Vi skriver $r \cos \theta = z$ i första ekvationen. I den andra ekvationen finns en term

$$\nabla \frac{\cos \theta}{r^2} = \left(\hat{\mathbf{r}} \partial_r + \frac{1}{r} \partial_\theta \right) \frac{\cos \theta}{r^2} = -\hat{\mathbf{r}} \frac{2 \cos \theta}{r^3} - \frac{\hat{\theta} \sin \theta}{r^3} \quad (7.109)$$

så att magnetfältet är

$$\mathbf{H}_1 = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \hat{\mathbf{z}} \quad (7.110)$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{B_0}{\mu_0} \hat{\mathbf{z}} + B_0 \frac{a^3 \mu/\mu_0 - 1}{r^3 \mu + 2\mu_0} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (7.111)$$

Sfärens magnetisering är

$$\mathbf{M}_1 = \chi_M \mathbf{H}_1 = (\mu_r - 1) \mathbf{H}_1 = 3 \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \hat{\mathbf{z}} \quad (7.112)$$

□

Exempel 2: Bestäm magnetfältet orsakat av en likformigt magnetiserad ferromagnetisk sfär, $M = \chi_M(H)H$, då inga övriga fält är närvarande. Sfärens radie är a och den är centrerad på origo. Låt magnetiseringen vara $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$, så att $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$.

Vi har nu att lösa Laplace-ekvationen för skalärpotentialen: $\nabla^2 \varphi_M = 0$.

Vi vet från tidigare att Laplace-lösningen är

$$\varphi_{M,1}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^{-n-1} P_n(\cos \theta), \quad r > a \quad (7.113)$$

$$\varphi_{M,2}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta), \quad r < a \quad (7.114)$$

Randvillkoren vid $r = a$:

$$B_{1,n} = B_{2,n} \quad (7.115)$$

$$H_{1,t} = H_{2,t} \quad (7.116)$$

$$B_{1,n} = \mu_0 H_{1,r} \quad (7.117)$$

$$\begin{aligned} &= -\mu_0 \partial_r \varphi_{M,1} \\ &= \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_n a^{-n-2} P_n(\cos \theta) \end{aligned} \quad (7.118)$$

$$B_{2,n} = \mu_0 H_{2,r} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (7.119)$$

$$= -\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} n A_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) + \mu_0 M \cos \theta \quad (7.120)$$

$$H_{1,t} = -\frac{1}{a} \partial_\theta \varphi_{M,1} \quad (7.121)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} C_n a^{-n-2} \frac{dP_n}{d\theta} \quad (7.122)$$

$$H_{2,t} = -\frac{1}{a} \partial_\theta \varphi_{M,2} \quad (7.123)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^{n-1} \frac{dP_n}{d\theta} \quad (7.124)$$

Vi har nu att

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)C_n a^{-n-2} + nA_n a^{n-1} \right] P_n(\cos \theta) - M \cos \theta = 0 \quad (7.125)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n a^{-n-2} - A_n a^{n-1} \right] \frac{dP_n}{d\theta} = 0 \quad (7.126)$$

Dessa uttryck ger:

$$C_0 a^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)C_n a^{-n-2} + nA_n a^{n-1} \right] P_n(\cos \theta) - M P_1(\cos \theta) = 0 \quad (7.127)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n a^{-n-2} - A_n a^{n-1} \right] P_n(\cos \theta) = \text{konst} \quad (7.128)$$

Den senare ekvationen ger för $n = 0, 1, 2$:

$$C_0 a^{-2} - A_0 a^{-1} = \text{konst} \quad (7.129)$$

$$C_1 a^{-3} - A_1 = 0 \quad (7.130)$$

$$C_2 a^{-4} - A_2 a = 0 \quad (7.131)$$

eftersom $dP_n/d\theta$ inte är konstant för $n \geq 2$.

För att första ekvationen ska stämma måste alla koefficienter till Legendre-polynomen försvinna.

För $n = 0, 1, 2$:

$$C_0 a^{-1} = 0 \quad (7.132)$$

$$2C_1 a^{-3} + A_1 - M = 0 \quad (7.133)$$

$$3C_2 a^{-4} + 2A_2 a = 0 \quad (7.134)$$

Vi får att $C_0 = 0$, $A_0 = \text{konstant}$. Ekvationerna för C_2, A_2 är inkompatibla, så vi måste kräva $C_2 = A_2 = 0$, och motsvarande för högre n -värden. Vi kan också välja $A_0 = 0$.

För C_1, A_1 har vi systemet

$$C_1 a^{-3} - A_1 = 0 \quad (7.135)$$

$$2C_1 a^{-3} + A_1 - M = 0 \quad (7.136)$$

att lösa. Lösningen är

$$C_1 = \frac{1}{3} a^3 M \quad (7.137)$$

$$A_1 = \frac{1}{3} M \quad (7.138)$$

Problemets lösning är nu

$$\varphi_{M,1}(r, \theta) = \frac{1}{3} a^3 M r^{-2} \cos \theta, \quad r > a \quad (7.139)$$

$$\varphi_{M,2}(r, \theta) = \frac{1}{3} M r \cos \theta, \quad r < a \quad (7.140)$$

Magnetfältet:

$$\mathbf{H}_1(r, \theta) = -\hat{\mathbf{r}} \partial_r \varphi_M + \frac{1}{r} \partial_\theta \varphi_M \quad (7.141)$$

$$= \hat{\mathbf{r}} \frac{2}{3} a^3 M r^{-3} \cos \theta + \hat{\theta} \frac{1}{3} a^3 M r^{-3} \sin \theta \quad (7.142)$$

$$= \frac{1}{3} M \frac{a^3}{r^3} (2\hat{\mathbf{r}} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta) \quad (7.143)$$

$$\mathbf{H}_2(r, \theta) = -\hat{\mathbf{r}} \partial_r \varphi_M + \frac{1}{r} \partial_\theta \varphi_M \quad (7.144)$$

$$= -\hat{\mathbf{r}} \frac{1}{3} M \cos \theta + \hat{\theta} \frac{1}{3} M \sin \theta \quad (7.145)$$

$$= \frac{1}{3} M (-\hat{\mathbf{r}} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta) \quad (7.146)$$

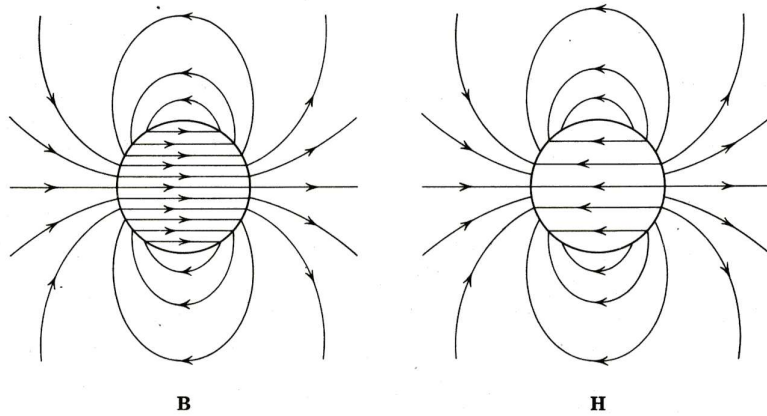
$$= -\hat{\mathbf{z}} \frac{1}{3} M \quad (7.147)$$

med hjälp av Appendix A.

Notera att magnetfältet inne i sfären strävar att av-magnetisera denna, eftersom $\mathbf{H}$ är motsatt riktat $\mathbf{M}$.

Flödestätheten inne i sfären:

$$\mathbf{B}_2(r, \theta) = -\mu_0 \frac{1}{3} M \hat{\mathbf{z}} + \mu_0 M \hat{\mathbf{z}} = \frac{2}{3} \mu_0 M \hat{\mathbf{z}} \quad (7.148)$$

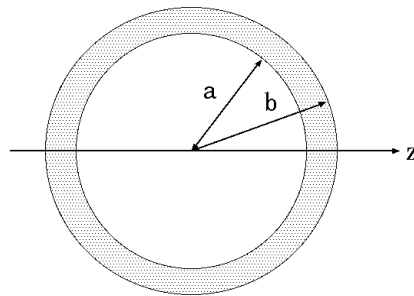


Tätheten av magnetiska poler på sfärens yta är

$$\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{r}} = M \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = M \cos \theta \quad (7.149)$$

Denna fördelning ger upphov till det av-magnetiserande fältet. $\square$

Exempel 3: Ett sfäriskt skal med inre radien a och yttre radien b befinner sig i ett magnetiskt fält som ursprungligen är i z -riktningen, $\mathbf{H}_0 = H_0 \hat{\mathbf{z}}$. Bestäm magnetfältet i alla tre regioner.



Skalärpotentialens lösning är bekant från förut. Vi får:

$$\varphi_{M,1}(\mathbf{r}) = -H_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{-n-1} P_n(\cos \theta), \quad r > b \quad (7.150)$$

$$\varphi_{M,2}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^{-n-1} P_n(\cos \theta), \quad a < r < b \quad (7.151)$$

$$\varphi_{M,3}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^n P_n(\cos \theta), \quad r < a \quad (7.152)$$

Vid gränserna $r = a$ och $r = b$ gäller att $B_n = B_r = -\mu\partial_r\varphi_M$ och $H_t = H_\theta = -\frac{1}{a}\partial_\theta\varphi_M$ ska vara kontinuerliga. Från detta får vi totalt fyra ekvationer.

B_n -villkoren:

$$\begin{aligned} & \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} n D_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) \\ = & \mu \left(\sum_{n=0}^{\infty} n B_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_n a^{-n-2} P_n(\cos \theta) \right) \end{aligned} \quad (7.153)$$

$$\begin{aligned} & \mu \left(\sum_{n=0}^{\infty} n B_n b^{n-1} P_n(\cos \theta) - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_n b^{-n-2} P_n(\cos \theta) \right) \\ = & \mu_0 (-H_0 \cos \theta - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_n b^{-n-2} P_n(\cos \theta)) \end{aligned} \quad (7.154)$$

$$(7.155)$$

H_t -villkoren:

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n a^n \frac{dP_n}{d\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^n \frac{dP_n}{d\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n a^{-n-1} \frac{dP_n}{d\theta} \quad (7.156)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n b^n \frac{dP_n}{d\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n b^{-n-1} \frac{dP_n}{d\theta} = -H_0 b \sin \theta + \sum_{n=0}^{\infty} A_n b^{-n-1} \frac{dP_n}{d\theta} \quad (7.157)$$

Flytta över alla termer i ett led och kombinera koefficienterna för samma Legendre-polynom. Eftersom polynomen är unika och inte kan skrivas som linjärkombinationer av varandra, måste alla koefficienter försvinna för att det andra ledet ska bli noll. Detta ger:

$$\mu_0 n D_n a^{n-1} = \mu (n B_n a^{n-1} - (n+1) C_n a^{-n-2}) \quad (7.158)$$

$$\mu (B_1 - 2C_1 b^{-3}) = \mu_0 (-H_0 - 2A_1 b^{-2}) \quad (7.159)$$

$$\mu (n B_n b^{n-1} - (n+1) C_n b^{-n-2}) = -\mu_0 ((n+1) A_n b^{-n-2}), \quad n \neq 1 \quad (7.160)$$

$$D_n a^n = B_n a^n + C_n a^{-n-1} \quad (7.161)$$

$$B_1 b + C_1 b^{-2} = -H_0 b + A_1 b^{-2} \quad (7.162)$$

$$B_n b^n + C_n b^{-n-1} = A_n b^{-n-1}, \quad n \neq 1 \quad (7.163)$$

För $n = 0$:

$$0 = -\mu C_0 a^{-2} \quad (7.164)$$

$$-\mu C_0 b^{-2} = -\mu_0 A_0 b^{-2} \quad (7.165)$$

$$D_0 = B_0 + C_0 a^{-1} \quad (7.166)$$

$$B_0 + C_0 b^{-1} = A_0 b^{-1} \quad (7.167)$$

Lösningen är $A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = 0$.

För $n = 1$:

$$\mu_0 D_1 = \mu(B_1 - 2C_1 a^{-3}) \quad (7.168)$$

$$\mu(B_1 - 2C_1 b^{-3}) = \mu_0(-H_0 - 2A_1 b^{-3}) \quad (7.169)$$

$$D_1 a = B_1 a + C_1 a^{-2} \quad (7.170)$$

$$B_1 + C_1 b^{-3} = -H_0 + A_1 b^{-3} \quad (7.171)$$

där vi dividerat bort ett b från sista ekvationen.

Beteckna $\mu' = \mu/\mu_0$:

$$\mu' B_1 - 2\mu' a^{-3} C_1 - D_1 = 0 \quad (7.172)$$

$$2A_1 + \mu' b^3 B_1 - 2\mu' C_1 = -H_0 b^3 \quad (7.173)$$

$$B_1 + C_1 a^{-3} - D_1 = 0 \quad (7.174)$$

$$A_1 - b^3 B_1 - C_1 = H_0 b^3 \quad (7.175)$$

(7.172) – $\mu' \cdot$ (7.174) ger

$$C_1 = a^3 \frac{\mu' - 1}{3\mu'} D_1 \quad (7.176)$$

(7.173) – $2 \cdot$ (7.175) ger

$$B_1 = -\frac{3H_0}{\mu' + 2} + \frac{2a^3(\mu' - 1)D_1}{b^3(\mu' + 2)} \quad (7.177)$$

Insättning i (7.174) ger

$$D_1 = \frac{9\mu' H_0}{2\left(\frac{a}{b}\right)^3(1 - \mu')^2 - (\mu' + 2)(2\mu' + 1)} \quad (7.178)$$

Vi får då att

$$B_1 = \frac{3(2\mu' + 1)H_0}{2(\frac{a}{b})^3(1 - \mu')^2 - (\mu' + 2)(2\mu' + 1)} \quad (7.179)$$

$$C_1 = \frac{3a^3(\mu' - 1)H_0}{2(\frac{a}{b})^3(1 - \mu')^2 - (\mu' + 2)(2\mu' + 1)} \quad (7.180)$$

Insättning i (7.175) ger

$$A_1 = \frac{(\mu' - 1)(2\mu' + 1)(a^3 - b^3)H_0}{2(\frac{a}{b})^3(1 - \mu')^2 - (\mu' + 2)(2\mu' + 1)} \quad (7.181)$$

Skalärpotentialerna är alltså

$$\varphi_{M,1}(\mathbf{r}) = -H_0 r \cos \theta + A_1 r^{-2} \cos \theta = (-H_0 r + A_1 r^{-2}) \cos \theta \quad (7.182)$$

$$\varphi_{M,2}(\mathbf{r}) = B_1 r \cos \theta + C_1 r^{-2} \cos \theta = (B_1 r + C_1 r^{-2}) \cos \theta \quad (7.183)$$

$$\varphi_{M,3}(\mathbf{r}) = D_1 r \cos \theta \quad (7.184)$$

Fältena är $\mathbf{H} = -\nabla \varphi_M$:

$$\mathbf{H}_{M,1}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}}(H_0 + 2A_1 r^{-3}) \cos \theta - \hat{\theta}(H_0 - A_1 r^{-3}) \sin \theta \quad (7.185)$$

$$\mathbf{H}_{M,2}(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{r}}(B_1 - 2C_1 r^{-3}) \cos \theta + \hat{\theta}(B_1 + C_1 r^{-3}) \sin \theta \quad (7.186)$$

$$\mathbf{H}_{M,3}(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{r}}D_1 \cos \theta + \hat{\theta}D_1 \sin \theta \quad (7.187)$$

Om $\mu' \gg 1$, d.v.s. om $\mu \gg \mu_0$:

$$A_1 \approx b^3 H_0 \quad (7.188)$$

$$D_1 \approx \frac{9H_0}{2(\frac{a}{b})^3 \mu' - 2\mu'} = \frac{1}{2\mu'} \frac{9b^3 H_0}{a^3 - b^3} \quad (7.189)$$

Obs:

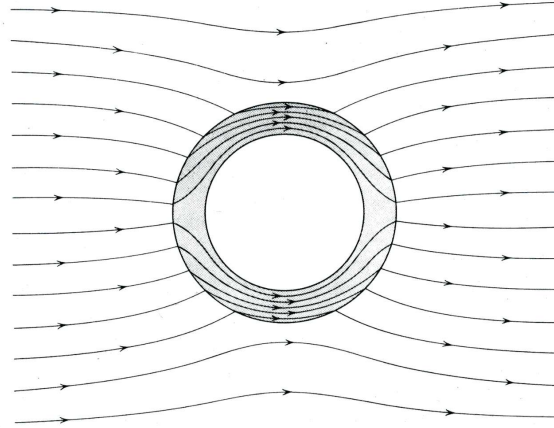
$$\frac{H_0 + 2A_1 r^{-3}}{D_1} = (a^3 b^{-3} - 1 + 2(a^3 - b^3)r^{-3}) \frac{2\mu'}{9} \gg 1 \quad (7.190)$$

p.g.a. $\mu' \gg 1$. Detta betyder att fältet inne i hålrummet är mycket svagare än fältet utanför!

Vi har då att

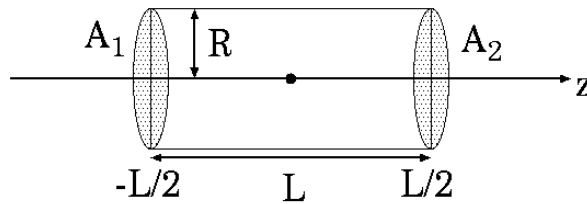
$$\mathbf{H}_{M,1}(\mathbf{r}) \approx \hat{\mathbf{r}}H_0(1 + 2b^3r^{-3})\cos\theta - \hat{\theta}H_0(1 - b^3r^{-3})\sin\theta \quad (7.191)$$

$$\mathbf{H}_{M,3}(\mathbf{r}) \approx -\hat{\mathbf{r}}\frac{9H_0}{2(\frac{a}{b})^3\mu' - 2\mu'}\cos\theta + \hat{\theta}\frac{9H_0}{2(\frac{a}{b})^3\mu' - 2\mu'}\sin\theta \quad (7.192)$$



Motsvarande konstruktioner kan användas för att skydda känslig apparatur mot yttre störande magnetfält. □

Exempel 4: En cylinder med längden L och radien R har sin symmetriaxel parallell med z -axeln och har sin mittpunkt i origo. Cylindern har den likformiga magnetiseringen $\mathbf{M} = M_0\hat{\mathbf{z}}$. Bestäm B_z för en punkt på z -axeln, innanför och utanför cylindern.

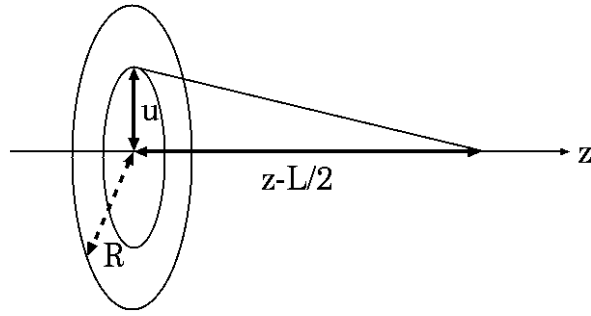


Vi har inga strömmar och en divergensfri magnetisering, så $\mathbf{H} = -\nabla\varphi_M$. Den magnetiska skalärpotentialen är ju

$$\varphi_M(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_A \frac{d\mathbf{A}' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.193)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\rho_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_A \frac{dA' \sigma_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.194)$$

Endast den andra termen överlever, eftersom $\mathbf{M}$ är divergensfri.



Vi får:

$$\begin{aligned}
 \varphi_M(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_A \frac{d\mathbf{A}' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\int_{A_2} \frac{dAM_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int_{A_1} \frac{dAM_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^R \frac{2\pi u du M_0}{\sqrt{u^2 + (z - L/2)^2}} - \int_0^R \frac{2\pi u du M_0}{\sqrt{u^2 + (z + L/2)^2}} \right) \\
 &= \frac{M_0}{2} \left(\sqrt{u^2 + (z - L/2)^2} \Big|_{u=0}^{u=R} - \sqrt{u^2 + (z + L/2)^2} \Big|_{u=0}^{u=R} \right) \quad (7.195)
 \end{aligned}$$

Vidare:

$$\begin{aligned}
 \varphi_M(\mathbf{r}) &= \frac{M_0}{2} \left(\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2} - |z - L/2| - \sqrt{R^2 + (z + L/2)^2} - (-|z + L/2|) \right) \\
 &= \frac{M_0}{2} \left(\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2} - \sqrt{R^2 + (z + L/2)^2} + w(z) \right) \quad (7.196)
 \end{aligned}$$

där

$$w(z) \equiv -|z - L/2| + |z + L/2| \quad (7.197)$$

Om $-L/2 < z < L/2$ fås $w = 2z$. Om $z > L/2$ fås $w = L$, och om $z < -L/2$ fås $w = -L$.

Magnetfältets z -komponent är

$$\begin{aligned} H_z(z) &= -\partial_z \varphi_M(\mathbf{r}) \\ &= \frac{M_0}{2} \left(\frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} - w'(z) \right) \end{aligned} \quad (7.198)$$

Utanför magneten:

$$B_{z,1}(z) = \frac{\mu_0 M_0}{2} \left(\frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} \right) \quad (7.199)$$

Inne i magneten:

$$\begin{aligned} B_{z,2}(z) &= \mu_0 H(z) + \mu_0 M_0 \\ &= \frac{\mu_0 M_0}{2} \left(\frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} - 2 \right) + \mu_0 M_0 \\ &= B_{z,1} \end{aligned} \quad (7.200)$$

så att randvillkoret $B_{1,z} = B_{z,2}$ är uppfyllt vid cylinderns basytor. $\square$

7.10. Strömkretsar innehållande magneter

Vi betraktar nu strömkretsar fyllda med magnetiskt material.

Tidigare hade vi att strömkretsarna — t.ex. cirkulär strömslinga, solenoid — var i vakuum eller luft.

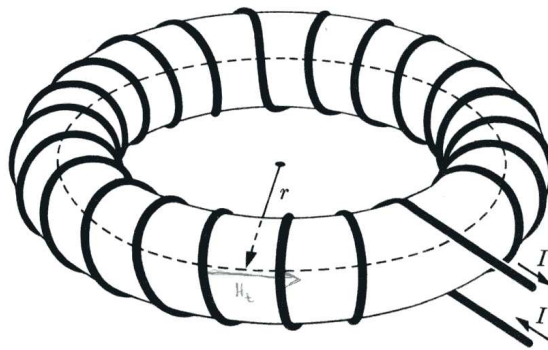
Om vi har en divergens-fri magnetisering, $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, och ingen yt-täthet av magnetiska poler, så gäller att $\varphi_M(\mathbf{r}) = 0$ och

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (7.201)$$

Detta betyder att $\mathbf{H}$ ges direkt av den externa strömmen. Detta medför att $\mathbf{H}$ för de tidigare vakuum-kretsarna gäller också för kretsar fyllda med magnetiskt material.

Exempel 1: Toroid med ferromagnetisk fyllning.

En toroid kan beskrivas som en sluten solenoid, se figur.



I mitten av toroiden, längs med den streckade vägen i figuren, är magnetfältet

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi r} \hat{\psi} \quad (7.202)$$

där $\hat{\psi}$ är enhetsvektorn i den tangentiella riktningen, enligt ett tidigare exempel.

Då ett isotropiskt ferromagnetiskt material läggs in i toroiden uppstår en magnetisering M som är parallell med H , p.g.a. att mediet är isotropiskt.

Vi har då att

$$\mathbf{M} = M\hat{\psi} \quad (7.203)$$

och

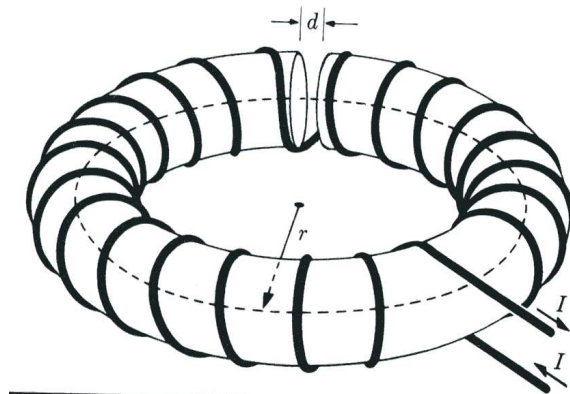
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \hat{\psi} + \mu_0 M \hat{\psi} \quad (7.204)$$

där M beror på H eftersom materialet är ferromagnetiskt. Eftersom H är konstant längs med den tangentiella vägen kommer M också att vara konstant där.

□

Exempel 2: Toroid med ferromagnetisk fyllning, som har ett lutfhål.

Toroiden har N st lindningar, som genomlöps av strömmen I . En skiva med tjockleken d har avlägsnats från den ferromagnetiska fyllningen. Se figur.



Ampères lag:

$$2\pi r H = N I \quad (7.205)$$

eftersom vi har samma ström-krets som tidigare.

Låt fältet vara en summa av fälten $H_1 = NI/(2\pi r)$ i den ursprungliga kretsen då fyllningen var hel, och H_2 som är bidraget från hålet.

Enligt ovan är M likformig, så att $\rho_M \equiv -\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$. Vi har då bara en yt-täthet σ_M av magnetiska poler på materialets ytor i lufthålet.

Vid hållets ytor är $\mathbf{B}$'s normalkomponent kontinuerlig. Vi får:

$$B_f = \mu_0(H_{1,f} + H_{2,f}) + \mu_0 M \quad (7.206)$$

$$= B_v = \mu_0(H_{1,v} + H_{2,v}) \quad (7.207)$$

H_1 är detsamma i ferromagneteen (f) och vakuum (v), så det faller bort ur ekvationen ovan:

$$H_{2,f} + M = H_{2,v} \quad (7.208)$$

Ampères lag:

$$\oint d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) = (2\pi r - d)(H_1 + H_{2,f}) + d(H_1 + H_{2,v}) = NI \quad (7.209)$$

Men vi har ju

$$2\pi r H_1 = NI \quad (7.210)$$

från tidigare, så vi får

$$(2\pi r - d)H_{2,f} + dH_{2,v} = 0 \quad (7.211)$$

Vi bör nu lösa systemet

$$H_{2,f} + M = H_{2,v} \quad (7.212)$$

$$(2\pi r - d)H_{2,f} + dH_{2,v} = 0 \quad (7.213)$$

Lösningen är

$$H_{2,f} = -\frac{Md}{2\pi r} \quad (7.214)$$

$$H_{2,v} = M \left(1 - \frac{d}{2\pi r} \right) \quad (7.215)$$

Flödestätheten är nu

$$B_f = \mu_0(H_{1,f} + H_{2,f}) + \mu M \quad (7.216)$$

$$\begin{aligned} &= \mu_0 \left(\frac{NI}{2\pi r} - \frac{Md}{2\pi r} + M \right) \\ &= \mu_0 \left(\frac{NI}{2\pi r} + M \left(1 - \frac{d}{2\pi r} \right) \right) \end{aligned} \quad (7.217)$$

$$B_v = \mu_0 \left(\frac{NI}{2\pi r} + M \left(1 - \frac{d}{2\pi r} \right) \right) \quad (7.218)$$

Denna är alltså samma i både i vakuum-hålet och det ferromagnetiska materialet!

□