

3. Lösning av elektrostatiska problem för dielektrika

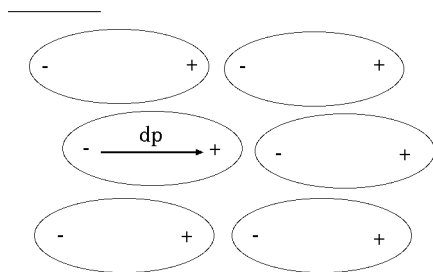
[RMC]

3.1. Dielektrika

Ett perfekt dielektrikum (isolator) är ett material som inte innehåller några fria laddningar alls. Alla elektroner är med andra ord hårt bundna till materialets atomer eller molekyler.

Dielektrika reagerar på yttre elektriska fält så att de **polariseras**, d.v.s. dipoler induceras i materialet. Detta ger upphov till ett elfältsbidrag **innanför och utanför** dielektriket.

Exempel på dielektrika: glas, porslin, keramik, plast, oxider, luft, diverse vätskor och gaser, . . .



Eftersom dielektrika polariseras, så har varje region med volymen dV ett dipolmoment

$$d\mathbf{p} = \int_{dV} dq\mathbf{r}' \quad (3.1)$$

En naturlig volym-oberoende storhet är **polarisationen**

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV}, \quad [P] = \text{C/m}^2, \quad (3.2)$$

som är en funktion av platsen inom dielektriket.

Eftersom de minsta beståndsdelarna i ett dielektrikum är molekyler kan man definiera ett **molekylärt dipolmoment**

$$\mathbf{p}_m = \int_{mol} dq \mathbf{r}' \quad (3.3)$$

Nu gäller

$$d\mathbf{p} = \sum_{m \in dV} \mathbf{p}_m \quad (3.4)$$

3.2. Det elektriska fältet utanför ett dielektrikum

Ett polariserat dielektrikum består av dipoler, så dielektrikets potential är en summa av deras enskilda potentialer

$$d\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.5)$$

Eftersom $d\mathbf{p} = \mathbf{P}dV$ får vi

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{dV' \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.6)$$

Låt oss förenkla integranden genom att göra oss av med $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ -termer.

Vi kan visa att följande gäller:

$$\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.7)$$

Vi har nu att

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.8)$$

Med hjälp av $\nabla(f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$ får vi $\mathbf{F} \cdot \nabla f = \nabla(f\mathbf{F}) - f\nabla \cdot \mathbf{F}$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P} \quad (3.9)$$

Insättning i potentialen:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} dV' \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{dV' \nabla' \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.10)$$

Med Gauss' teorem kan $dV' \nabla' \cdot$ skrivas $dA' \hat{\mathbf{n}} \cdot$ och vi har

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{A_0} \frac{dA' \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{dV' \nabla' \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.11)$$

Vi kan göra följande identifikation:

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.12)$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3.13)$$

där σ_P och ρ_P är täthet av polarisationsladdningar.

Potentialen är nu

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{A_0} \frac{dA' \sigma_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{dV' \rho_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.14)$$

Totala laddningen i och på ett dielektrikum är

$$Q = \int_{V_0} dV \rho + \oint_{A_0} dA \sigma \quad (3.15)$$

Om vi inte har externa laddningar, utan all laddning kommer från polarisationen, så har vi

$$\begin{aligned} Q &= \int_{V_0} dV (0 + \rho_P) + \oint_{A_0} dA (0 + \sigma_P) \\ &= - \int_{V_0} dV \nabla \cdot \mathbf{P} + \oint_{A_0} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \\ &= - \oint_{A_0} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} + \oint_{A_0} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

enligt Gauss' teorem (divergensteoremet)..

Det elektriska fältet är ju

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (3.17)$$

Vi har från tidigare:

$$-\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.18)$$

så vi får nu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{A_0} dA' \frac{\sigma_P(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} dV' \frac{\rho_P(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.19)$$

3.3. Det elektriska fältet innanför ett dielektrikum

Vi vill nu ta reda på det **makroskopiska** elfältet inne i dielektriket, d.v.s. det genomsnittliga fältet i en liten region (som dock innehåller många dipoler).

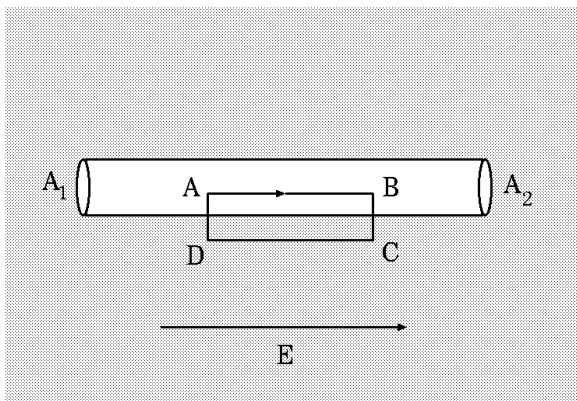
Vi har redan bestämt fältet utanför dielektriket, och vi kan använda detta då vi bestämmer det interna fältet.

Tidigare visades att

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (3.20)$$

d.v.s. att elfältet är irrotationellt. Från detta följde att vägen för fältets kurvintegral mellan punkterna A och B kunde väljas fritt. Låt nu $B = A$, så att

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.21)$$



Vi tillämpar nu detta på kurvan ABCDA i figuren.

Kurvan går genom en vakuum-"nål" placerad i dielektriket.

Kurvintegralen ger, då längden av BC och DA blir infinitesimala, att det vid gränsytan gäller att

$$\Delta r E_{v,t} - \Delta r E_{d,t} = 0 \quad (3.22)$$

Alltså:

$$E_{v,t} = E_{d,t} \quad (3.23)$$

Slutsats: det elektriska fältet inne i ett dielektrikum är lika med fältet i en tunn vakuum-"nål" i dielektriket.

Med hjälp av uttrycket för den externa potentialen får vi nu

$$\varphi_{in}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{A_0+A_1+A_2+A_m} \frac{dA' \sigma_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0-V_c} \frac{dV' \rho_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.24)$$

där A_m är nålens mantelyta och V_c nålens volym.

Låt nu nålens tjocklek bli infinitesimalt tunn, så att A_1, A_2 går mot 0. Om dielektriket är isotropiskt har vi dessutom att $\mathbf{E}$ är parallell med $\mathbf{P}$, vilket gör att $\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ på mantelytan. Detta gör att *ytintegralen* får samma utseende som i uttrycket för det externa elfältet.

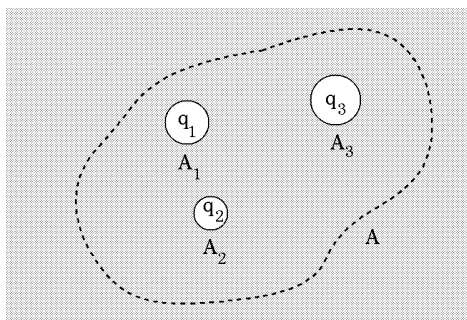
I volymintegralen kan vi låta "nålen" bli infinitesimalt liten, så att $V_0 - V_c \rightarrow V_0$. Men nu måste vi försäkra oss om att detta potentialbidrag inte divergerar! Då "nålens" volym går mot 0:

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'} \frac{dV' \rho_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'} \frac{(x-x')(y-y')(z-z')\rho_P}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \equiv \lim_{s_x \rightarrow 0} \frac{s_x^3 \rho_P}{s_x \sqrt{3}} \sim 0 \quad (3.25)$$

om vi omskriver $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ och har $s_x \sim s_y \sim s_z$ så att $s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} = s_x \sqrt{3}$.

Med andra ord, de tidigare resultaten för φ och $\mathbf{E}$ gäller för observationspunkter $\mathbf{r}$ både innan- och utanför dielektriket!

3.4. Gauss' lag för dielektrika



Låt nu ett antal laddade ledare vara nedsänkta i ett dielektrikum.

Gauss' lag ger

$$\oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + Q_P) \quad (3.26)$$

där den totala laddningens delar är

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 \quad (3.27)$$

$$Q_P = \int_{A_1+A_2+A_3} \mathbf{dA} \cdot \mathbf{P} + \int_V dV (-\nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (3.28)$$

Dielektrikets volym V exkluderar ledarnas volymer.

Den senare ekvationen ger

$$\begin{aligned} Q_P &= \int_{A_1+A_2+A_3} \mathbf{dA} \cdot \mathbf{P} + \int_V dV (-\nabla \cdot \mathbf{P}) \\ &= \int_{A_1+A_2+A_3} \mathbf{dA} \cdot \mathbf{P} - \int_{A+A_1+A_2+A_3} \mathbf{dA} \cdot \mathbf{P} \\ &= - \int_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{P} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Gauss' lag blir

$$\oint_A \mathbf{dA} \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = Q \quad (3.30)$$

Storheten $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ har fått ett eget namn, **elektrisk förskjutning** (*displacement*) eller **elektriskt flödestäthet** (*flux*):

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.31)$$

Enhet: $[D] = [P] = \text{C/m}^2$.

Gauss' lag är nu

$$\oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{D} = Q \quad (3.32)$$

Denna form är en generalisering för situationer med ledare och dielektrika.

Elfältet har ersatts med den relevantare storheten elflödestäthet, och som laddning räknas endast den externa laddningen.

Terminologi:

- Q, Q_{ext} : (extern) laddning på ledares ytor, och i eller på dielektrika
- Q_{ind} : inducerad laddning på ledares ytor
- Q_P : yt- och volym-laddning i dielektrika p.g.a. polarisation, polarisationsladdning

Som tidigare kan vi skriva

$$\oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{D} = \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{D} = \int_V dV \rho \quad (3.33)$$

och identifiera

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.34)$$

Det elektriska fältet kan nu skrivas

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D} - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (3.35)$$

där $\mathbf{D}$ fås utifrån den kända externa laddningsfördelningen ρ med hjälp av Gauss' lag i differentialform, ekv. (3.34), och dielektrikets polarisation $\mathbf{P}$.

Polarisering uppstår p.g.a. av ett yttre elfält, så vi har det allmänna förhållandet

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}) \quad (3.36)$$

För de flesta material försvinner $\mathbf{P}$ då det yttre fältet plockas bort:

$$\mathbf{P}(0) = 0 \quad (3.37)$$

Om dielektriket är isotropiskt, så har $\mathbf{P}$ och $\mathbf{E}$ samma riktning.

Den enklaste lag som uppfyller dessa villkor är

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}) = \chi_e(E) \mathbf{E} \quad (3.38)$$

där χ_e kallas **elektrisk susceptibilitet**.

Flödet kan nu skrivas

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = (\varepsilon_0 + \chi_e(E)) \mathbf{E} \equiv \varepsilon(E) \mathbf{E} \quad (3.39)$$

där ε är det dielektriska materialets **permittivitet**.

I de flesta fall är χ_e, ε oberoende av fältstyrkan. Vi har då **linjära dielektrika**.

Man definierar också den **relativa permittiviteten** ε_r via ekvationen

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (3.40)$$

Men

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \mathbf{E} \quad (3.41)$$

så att

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\chi_e}{\varepsilon_0} \quad (3.42)$$

ε_r kallas också för **dielektricitetskonstanten**. Den har värdet > 1 för övriga media än vakuum.

Vi kan nu skriva polarisationen som

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E} \quad (3.43)$$

För tillräckligt stora värden på $\mathbf{E}$ bryts de elementära dipolerna upp då elektroner börjar dras ut ur dem. Då detta sker uppstår fri laddning och dielektriket blir ledande. Det värde på $\mathbf{E}$ över vilket detta sker kallas **dielektricitetsstyrka**, och kan betecknas E_{ds} .

Dielektrikum	ε_r	E_{ds}
glas	5-10	9×10^6
kvarts	4,3	-
koksalt	6,1	-
trä	2,5-8,0	-
etanol	28,4	-
destillerat vatten, 20-0 Celsiusgrader	80,1-87,8	-
luft, normalt tryck	1,00059	3×10^6
teflon, naturgummi	2,1	-
zinkoxid	3	-
berylliumoxid	6	-
bariumtitanat	≥ 1200	-

[RMC, http://www.eccosorb.com/sales/Dielectric_Chart.pdf,
http://www.ami.ac.uk/courses/topics/0115_cai/]

Exempel : En punktladdning q inne i ett isotropiskt, linjärt dielektrikum med permittiviteten ε .

Flödestätheten är

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 E \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 E \hat{\mathbf{r}} + \chi E \hat{\mathbf{r}} = \varepsilon E \hat{\mathbf{r}} = D \hat{\mathbf{r}} \quad (3.44)$$

Gauss' lag tillämpad på en sfärisk yta centrerad på laddningen:

$$q = 4\pi r^2 D \quad (3.45)$$

d.v.s.

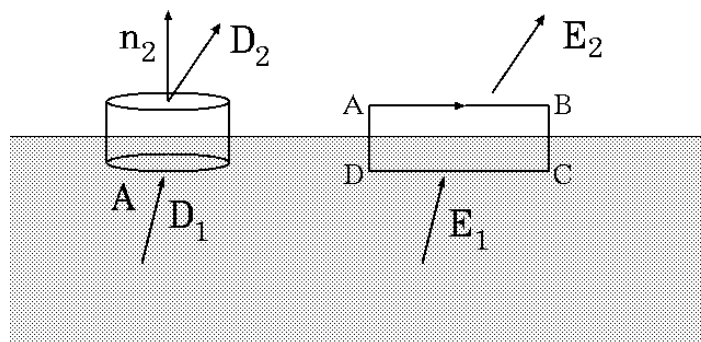
$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r} \quad (3.46)$$

Elfältet:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad (3.47)$$

Då $\varepsilon_r > 1$ är E mindre än om laddningen var i vakuum!

3.5. Randvillkor för fältvektorerna och potentialen



Gauss' lag på pillburken:

$$D_{2,n}A - D_{1,n}A = \sigma A \quad (3.48)$$

där σ är extern laddning.

Detta ger

$$D_{2,n} = D_{1,n} + \sigma \quad (3.49)$$

Flödestäthetens normalkomponent är alltså diskontinuerlig om det finns extern laddning på gränsytan.

Kurvintegralen ABCDA, med BC och DA infinitesimalt små, ger

$$\mathbf{E}_2 \cdot \Delta \mathbf{r} - \mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{r} = 0 \quad (3.50)$$

Eftersom $\Delta \mathbf{r}$ är i tangentens riktning fås

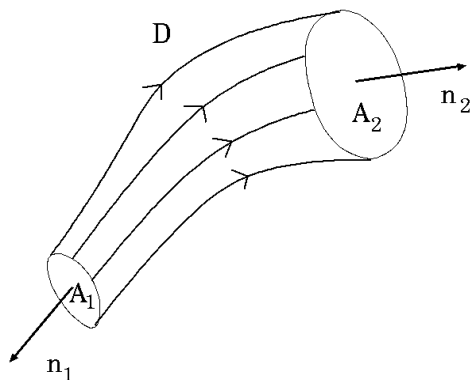
$$E_{2,t} = E_{1,t} \quad (3.51)$$

★ ★ ★

Obs: Enligt föregående ekvation är elfältets tangentiella komponent kontinuerlig. Eftersom $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ måste vi då ha att φ är kontinuerlig, annars får vi ju inte utföra deriveringen!

$$\varphi_1(\mathbf{r}_{\text{rand}}) = \varphi_2(\mathbf{r}_{\text{rand}}) \quad (3.52)$$

Detta strider inte emot diskontinuitetsvillkoret för flödestäthetens normal-komponent. Normal-komponenten är ju en annan derivata än den tangentiella komponenten, så den kan nog vara diskontinuerlig.



Om man bildar en tub av flödeslinjer fås en **flödestub** som i figuren.

Gauss' lag för denna är

$$\int_{A_2} dA \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{D} + 0 - \int_{A_1} dA \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{D} = Q \quad (3.53)$$

Om (extern) ingen laddning i tuben fås att flödet bevaras: flödet genom A_1 och A_2 är detsamma. När (externa) laddningar är närvarande måste vi ha att flödeslinjer startar eller slutar på dessa, eftersom flödet då inte bevaras.

Kraftlinjer, däremot, startar och slutar på extern och polariserad laddning, eftersom $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = q(\mathbf{D}/\epsilon_0 - \mathbf{P})$.

Exempel : Punktladdning q inbäddad i ett neutralt, sfäriskt dielektrikum.

$$D_r = \frac{q}{4\pi r^2} \quad (3.54)$$

$$\varepsilon_0 E_{\text{vakuum},r} = D_r = \varepsilon E_r = \frac{\varepsilon q}{4\pi r^2} \quad (3.55)$$

$$E_{\text{vakuum},r} = \varepsilon_r E_r = \frac{\varepsilon_r q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \equiv \frac{q'}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \quad (3.56)$$

3.6. Poisson-ekvationen och dess randvillkor

Vi kom fram till

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.57)$$

Under antagande att dielektrika är isotropiska, linjära och **homogena** ($\varepsilon \neq \varepsilon(\mathbf{r})$) har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3.58)$$

Om som tidigare $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ så

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3.59)$$

Poissons ekvation för dielektrika är som tidigare, men ε_0 har ersatts av ε .

Laplace-ekvationen

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (3.60)$$

kan användas då man har dielektrika med enskilda punktladdningar, laddade eller neutrala ledare, eller dielektrika med enbart (externa) ytladdningsfördelningar.

Elektrostatiska problem med ledare och (isotropiska, linjära, homogena) dielektrika består därför i lösning av Laplaces ekvation i separata regioner — inne i de dielektriska medierna och i tomrummet mellan dessa och ledare — och foga samman lösningarna med hjälp av randvillkoren.

★ ★ ★

Exempel : Sfäriskt, oladdat dielektrikum med radien a i ett initialt likformigt fält E_0 i vakuum.

Lösningen är från tidigare:

$$\varphi_1(r, \theta) = A_2 r \cos \theta + B_2 r^{-2} \cos \theta, \quad r > a, \quad (3.61)$$

$$\varphi_2(r, \theta) = C_2 r \cos \theta + D_2 r^{-2} \cos \theta, \quad r < a, \quad (3.62)$$

Ett villkor får vi från det att $\varphi_1 = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$ då $r \rightarrow \infty$. Detta ger $A_2 = -E_0$.

Då φ_2 bör vara definierad också i origo måste vi ha $D_2 = 0$.

Tangentiella komponenterna av elfältet ska vara kontinuerliga:

$$E_{1,t}(r = a, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = -E_0 \sin \theta + B_2 a^{-3} \sin \theta \quad (3.63)$$

$$= E_{2,t}(r = a, \theta) \quad (3.64)$$

$$= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} = C_2 \sin \theta \quad (3.65)$$

Detta ger

$$-E_0 + B_2 a^{-3} = C_2 \quad (3.66)$$

Flödets normalkomponenter är kontinuerliga, efterstom ingen extra laddning finns placerad på dielektriket:

$$D_{1,n}(r = a, \theta) = -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_1 E_0 \cos \theta + \varepsilon_1 B_2 2a^{-3} \cos \theta \quad (3.67)$$

$$= D_{2,n}(r = a, \theta) \quad (3.68)$$

$$= -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = -\varepsilon_2 C_2 \cos \theta \quad (3.69)$$

Detta ger

$$E_0 + 2B_2a^{-3} = -\varepsilon_r C_2 \quad (3.70)$$

Summan av de två ekvationer vi nu fått är

$$3B_2a^{-3} = (1 - \varepsilon_r)C_2 \quad (3.71)$$

Detta ger

$$C_2 = \frac{3B_2a^{-3}}{1 - \varepsilon_r} \quad (3.72)$$

Insättning ger

$$B_2 = (-E_0 + C_2)a^3 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}E_0a^3 \quad (3.73)$$

Insättning igen ger

$$C_2 = \frac{3B_2a^{-3}}{1 - \varepsilon_r} = -\frac{3E_0}{\varepsilon_r + 2} \quad (3.74)$$

Slutliga potentialen är alltså

$$\varphi_1(r, \theta) = -E_0r \cos \theta + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}E_0a^3r^{-2} \cos \theta, \quad r > a, \quad (3.75)$$

$$\varphi_2(r, \theta) = -\frac{3E_0}{\varepsilon_r + 2}r \cos \theta, \quad r < a, \quad (3.76)$$

Elfältet inne i dielektriket ?

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla \varphi_2 = \frac{3}{\varepsilon_r + 2}E_0\hat{\mathbf{z}} = \text{konstant} \quad (3.77)$$

Detta är ett konstant fält, som är parallellt med det yttre initialt likformiga elfältet.

Polarisationen är

$$\mathbf{P}_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}_2 = 3\varepsilon_0\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}E_0\hat{\mathbf{z}} = \text{konstant} \quad (3.78)$$

Den radiella polarisationen:

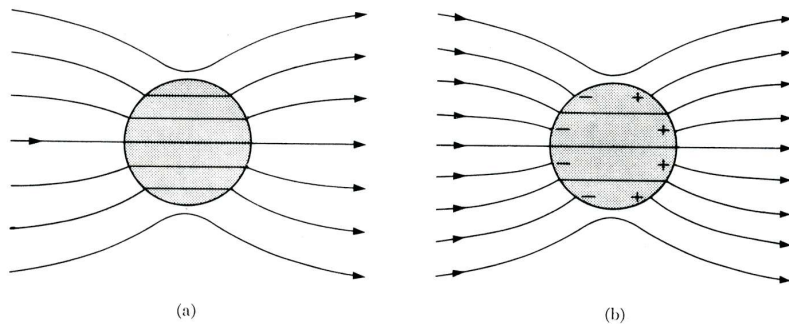
$$P_{2,r} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}_{2,r} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} E_0 \cos \theta \quad (3.79)$$

Polarisations-ytladdningen är

$$\sigma_P = \mathbf{P}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}} = P_{2,r} \quad (3.80)$$

Polarisations-volym-laddningen är

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}_2 = 0 \quad (3.81)$$



(a) Flödet $\mathbf{D}$ (totala flödet bevaras om inga externa laddningar), (b) elfältet $\mathbf{E}$.

3.7. Bildladdningsmetoden för dielektrika

För ledare hade vi tidigare att bildladdningen var inuti eller utanför ledaren, och vi sökte potentialen i den region som inte innehöll bildladdningar.

I de situationer att vi har flera dielektrika kommer vi nu att ha bildladdningar inte bara i ett dielektrika utan i flera.

Exempel : Punktladdning q i platsen $(-d, 0, 0)$ i dielektrikum 1, som fyller regionen $x < d$. Dielektrikum fyller halvrummet $x > 0$.

Avstånden från origo till den verkliga laddningen q och bildladdningen q' är

$$r = \sqrt{(x - (-d))^2 + y^2 + z^2} \quad (3.82)$$

$$r' = \sqrt{(x - d)^2 + y^2 + z^2} \quad (3.83)$$

Potentialen i dielektrikum 1 är

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right) \quad (3.84)$$

Detta är summan av den verkliga laddningens potential och potentialen från bildladdningen i medium 2.

Inne i medium 2 finns ingen verklig laddning. Men fältet från q känns av, och för att ha en möjlighet att forma det enligt randvillkoren uppfinner vi en ny bildladdning q'' , i dielektrikum 1, så att denna har samma position som den ursprungliga laddningen. Vi har nu

$$\varphi_2(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_2 r} + \frac{q''}{4\pi\epsilon_2 r} \equiv \frac{q'''}{4\pi\epsilon_2 r} \quad (3.85)$$

1. Kravet att potentialen ska vara kontinuerlig:

$$\begin{aligned} \varphi_1(0, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{\sqrt{d^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{d^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \varphi_2(0, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q'''}{\sqrt{d^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (3.86)$$

2. Kravet att flödestäthetens normalkomponent ska vara diskontinuerlig med beloppet $\sigma = 0$:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \partial_x \varphi_1(0, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \left(-q \frac{0+d}{((0+d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - q' \frac{0-d}{((0-d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= \epsilon_2 \partial_x \varphi_2(0, y, z) = -\frac{1}{4\pi} q''' \frac{0+d}{((0+d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Dessa villkor ger

$$q + q' = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} q''' \quad (3.88)$$

$$-q + q' = -q''' \quad (3.89)$$

Subtrahera den senare från den förra. Vi får:

$$q''' = q \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad (3.90)$$

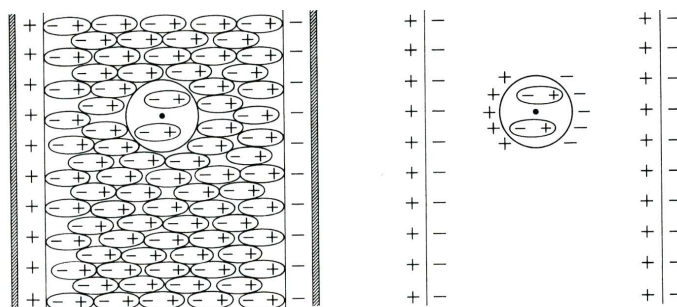
Insättning i ekv. (3.88) ger

$$q' = q \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad (3.91)$$

□

3.8. Molekylärt elfält

Vi såg tidigare att ett polariserat dielektrikum består av inducerade dipoler. Det fält som polariserar en enskild molekyl kallas **molekylärt elfält**. Detta är helt enkelt det totala fältet som påverkar molekylen, p.g.a. av andra dipoler och yttre laddningar. Molekylens eget dipolfält ingår inte i detta fält!



Betrakta en sfärisk kavitet i ett dielektrikum, som befinner sig mellan två parallella ledande plan, vilka ger upphov till ett elfält $\mathbf{E}_{\text{ext}}$. I bilden är detta fält riktat från vänster till höger. I kavitetens mittpunkt finns det en molekyl (inte utritad). Vi vill nu veta det molekylära fältet i denna punkt.

Antag att polarisationen är homogen, så att $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$. Låt det depolariserande fältet från polarisationsladdningarna på de externa ytorna vara $\mathbf{E}_{\text{depol}}$. Detta fält går från höger till vänster (mot det yttre elfältet och mot polarisationsvektorn $\mathbf{P}$).

Det molekylära fältet är

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{depol}} + \mathbf{E}_{\text{pol,yta}} + \mathbf{E}' \quad (3.92)$$

där

$\mathbf{E}_{\text{pol,yta}}$ är fältet från polarisationsladdningarna på kavitetens yta, och $\mathbf{E}'$ är fältet från dipoler innanför kaviteten.

Det makroskopiska (genomsnittliga) elfältet i dielektriket är

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{depol}} \quad (3.93)$$

Med hjälp av Gauss' lag tillämpad på en pillerburk som börjar i dielektriket och slutar i vakuum innan det ledande planet:

$$(\varepsilon_0 E + P)A - \varepsilon_0 E_{\text{ext}} A = 0 \quad (3.94)$$

Detta ger

$$\varepsilon_0(E - E_{\text{ext}}) = -P \quad (3.95)$$

som ger

$$E_{\text{depol}} = \frac{1}{\varepsilon_0} P \quad (3.96)$$

Men eftersom E_{depol} och P är riktade åt olika håll, så gäller

$$\mathbf{E}_{\text{depol}} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{P} \quad (3.97)$$

Fältet från kavitetens ytpolarisation, taget i molekylen position:

$$d\mathbf{E}_{\text{pol,yta}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} dA' \sigma_P \frac{-\mathbf{r}'}{r'^3} \quad (3.98)$$

Laddningstätheten: $\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} = P \cos \theta$.

$$d\mathbf{E}_{\text{pol,yta}} = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0} r'^2 d\phi' d\theta' \sin \theta' \cos \theta' \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \quad (3.99)$$

Polarisationen är parallell med fältet, så enbart bidrag som har från noll avvikande projektion på polarisationens riktningsvektor överlever. Låt polarisationen vara i z -axelns riktning:

$$d\mathbf{E}_{\text{pol,yta}} \cdot \hat{\mathbf{P}} = dE_{\text{pol,yta}} \cos \theta' = \frac{P}{2\epsilon_0} d\theta' \sin \theta' \cos^2 \theta' \quad (3.100)$$

eftersom $\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \theta'$.

Svaret blir

$$\mathbf{E}_{\text{pol,yta}} \cdot \hat{\mathbf{P}} = \frac{P}{3\epsilon_0} \quad (3.101)$$

Eftersom detta är i polarisationens riktning, kan vi skriva

$$\mathbf{E}_{\text{pol,yta}} = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (3.102)$$

Vi kommer att begränsa oss till fall där $\mathbf{E}'$ är noll. Detta gäller om (i) det finns många dipoler inne i kaviteten, och de är alla parallella men slumpmässigt placerade, eller om (ii) dipolerna är arrangerade som i en kristall med kubisk symmetri.

Vi har nu

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{pol,yta}} + \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (3.103)$$

Dielektrikets polarisation är proportionell mot det totala fältet, så då borde vi ha att en molekyls dipolmoment också är proportionellt mot (det molekyllära) fältet. Man definierar den **molekyllära polarisabiliteten** α med hjälp av

$$\mathbf{p}_m = \alpha \mathbf{E}_m \quad (3.104)$$

Vi hade ju i början att

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} \quad (3.105)$$

Detta kan skrivas

$$\mathbf{P} = \frac{dN}{dV} \frac{d\mathbf{p}}{dN} \equiv n \frac{d\mathbf{p}}{dN} = n\mathbf{p}_m \quad (3.106)$$

där N är antalet molekyler i volymen dV där $d\mathbf{p}$ beräknas. n är atomernas nummer-densitet, SI-enheten blir $1/\text{m}^3$.

Vi får nu

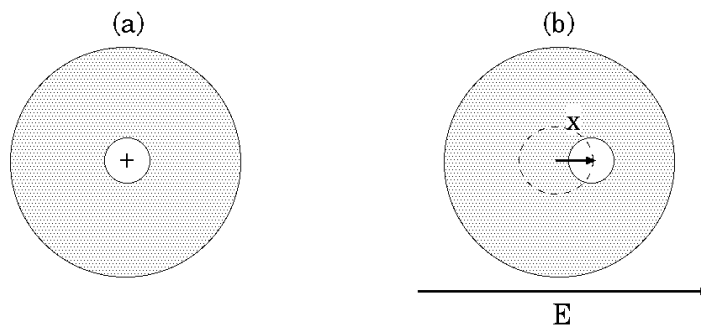
$$\mathbf{P} = n\alpha\mathbf{E}_m = n\alpha\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}\right) \quad (3.107)$$

Eftersom $\mathbf{P} = \chi_e\mathbf{E}$ får vi den så kallade **Clausius-Mossotti-ekvationen**:

$$\alpha = \frac{1}{n} \cdot \frac{3\varepsilon_0\chi_e}{3\varepsilon_0 + \chi} = \frac{3\varepsilon_0}{n} \cdot \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \quad (3.108)$$

Genom att mäta upp n och ε_r kan vi alltså ta reda på polarisabiliteten.

Om vi ännu använder en enkel modell för hur en atom polariseras kan vi dessutom uppskatta atomens radie utifrån α .



Approximera elektronkonfigurationen som en sfärisk, homogen laddningsfördelning. Då ett yttre elfält kopplas på kommer elektronmolnets masscentrum att förskjutas från den positiva kärnan. Beteckna förskjutningen med x .

Kraften på kärnan:

$$F_k = Ze \cdot E_m \quad (3.109)$$

Å andra sidan, enligt Coulombs lag:

$$F_k = Ze \cdot E_C \quad (3.110)$$

E_C ges av Gauss' lag:

$$4\pi x^2 E_C = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_e = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Ze}{4\pi R^3/3} \times \frac{4\pi x^3}{3}, \quad (3.111)$$

där R är elektronmolnets (= atomens) radie.

Vi får:

$$ZeE_m = ZeE_C = Ze \frac{Zex}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (3.112)$$

så att

$$Zex = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_m \quad (3.113)$$

Eftersom

$$\mathbf{p}_m = Z\mathbf{ex} \quad (3.114)$$

$$\mathbf{p}_m = \alpha \mathbf{E}_m \quad (3.115)$$

så har vi

$$p_m = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_m = \alpha E_m \quad (3.116)$$

och

$$\alpha = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \quad (3.117)$$

De värden man får för R med denna modell stämmer relativt bra med experimentella värden, förutsatt att man väljer lämpliga ämnen . . .

R är av storleksordningen 1 Ångström, d.v.s. 0,1 nm eller 10^{-10} m.