

1. Elektrostatik

[RMC]

1.1. Introduktion

[http://www.encyclopedia.com/html/section/electicity_HistoryofElectricity.asp,
http://en.wikipedia.org/wiki/Electric_charge]

Det första skriftliga tecknet på upptäckten av elektriska fenomen härstammar från Thales av Miletus. Enligt honom visste grekerna på 600-talet f.Kr. att om man gnider bärnsten (förstenad kåda) med skinn kommer bärnstenen att attrahera lätta föremål som hårstrån. Tillräckligt lång gnidning kunde resultera i gnistor. Dylik uppladdning av föremål kallas idag **statisk elektricitet**.

Britten William Gilbert beskrev på 1600-talet motsvarande beteenden hos flertal substanser, och hittade på ordet **elektricitet** för att beskriva fenomenet. Gilbert räknas därmed som elektricitetens och magnetismens fader. Ordet 'elektricitet' kommer från grekiskans ord för bärnsten.

Den första maskinen för produktion av statisk elektricitet byggdes år 1660 av Otto von Guericke: den bestod av en svavelboll med en vev, som man kunde hantera med ena handen medan man vidrörde bollen med den andra. Man utvecklade snart andra friktionsmaskiner som var mera avancerade . . .

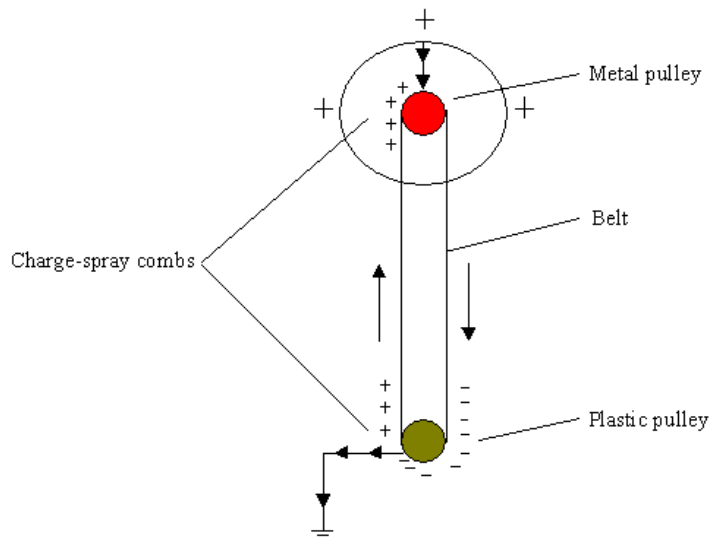


Figure 1: Internal construction of Van de Graaff Generator



Dagens modernaste version är en van de Graaff-generator (utvecklingen av denna började 1929 med Robert J. Van de Graaff [http://en.wikipedia.org/wiki/Van_de_Graaff_generator]).

Bild: <http://www.engr.uky.edu/~gedney/courses/ee468/expmnt/vdg.html>

Detaljerad förklaring: <http://www.amasci.com/emotor/belt.html>

Seventhly, Chance has thrown in my Way another Principle, more universal and remarkable than the preceding one, and which casts a new Light on the Subject of Electricity. This Principle is, that there are two distinct Electricities, very different from one another; one of which I call *vitreous Electricity*, and the other *resinous Electricity*. The first is that of Glafs, Rock-Cryftal, Precious Stones, Hair of Animals, Wool, and many other Bodies: The second is that of Amber, Copal, Gum-Lack, Silk, Thread, Paper, and a vast Number of other Substances.

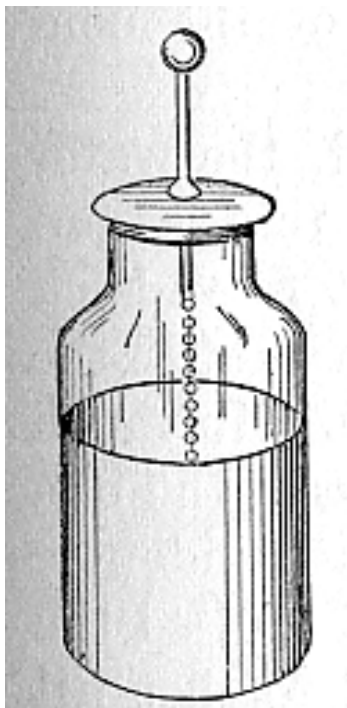
Excerpt from "A Discourse concerning Electricity" from *Philosophical Transactions*

Charles François de Cisternay DuFay
1734

År 1733 föreslog C. F. Du Fay att elektricitet förekommer i två varianter, vilka neutraliserar varandra [www.sparkmuseum.com/BOOK_DUFAY.HTM].

Idag kallas dessa positiv och negativ elektricitet/laddningar.

År 1745 hittade Ewald Georg von Kleist på ett sätt att lagra elektricitet [http://encyclopedia.laborlawtalk.com/Leyden_jar]. Han lindade silverfolie runt en glasflaska, som laddades med en friktionsmaskin. Eftersom han fick en ordentlig stöt från hela manicken drog han slutsatsen att dylika flaskor borde kunna användas för att lagra betydande mängder med elektricitet.



Den person som fått äran att uppfinna dylika flaskor eller behållare är holländaren Pieter van Musschenbroek. Han konstruerade sin version året efter von Kleist — men Musschenbroek var först med att göra sin uppfinning känd. Flaskan ifråga kallas **Leyden-flaska**, efter universitetet (och orten) där Musschenbroek arbetade.

Tack vara Leydenflaskan kunde man nu lagra större mängder statisk elektricitet och med den utföra kontrollerade urladdningar. Detta medförde att man på allvar kunde börja undersöka fenomenet elektricitet och dess effekter på olika material.

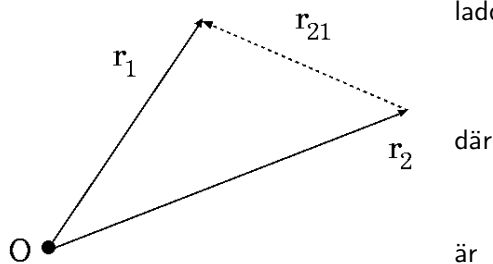
1.2. Coulombs lag

[Jackson, <http://www.bookrags.com/sciences/physics/coulombs-law-wop.html>]

Från slutet av 1700-talet till slutet av 1800-talet lades grunden till förståelsen av elektriska fenomen. En central person var Charles Augustin de Coulomb (1736-1806). Han lade år 1785 fram sin lag för växelverkan mellan två laddningar.

Lagen uttrycker kvantitativt följande observationer:

1. Endast två sorters elektriska laddningar existerar.
2. Den kraft som laddningarna utövar på varandra är riktad längs med linjen som passerar båda laddningarnas centrum. Kraftens styrka avtar med kvadraten på avståndet.
3. Kraften beror också på laddningarnas produkt: Lika laddningar repellerar varandra (negativ kraft), olika attraherar (positiv kraft).



Matematiskt skriver vi kraften som laddning 2 utövar på laddning 1 som ("från 2 på 1")

$$\mathbf{F}_1 = C \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}, \quad (1.1)$$

där

$$r_{21} = |\mathbf{r}_{21}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \quad (1.2)$$

är avståndet från laddning 2 till laddning 1, och $\mathbf{r}_i$ är ortsvektorn för laddning i .

Om $q_1 > 0, q_2 > 0$ eller $q_1 < 0, q_2 < 0$ är $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{r}_{21}$'s riktning, d.v.s. q_1 förs bort från q_2 . Kraften är alltså repulsiv.

John Robinson var den förste som mätte upp en exponent på 2 för r -beroendet.

Osäkerheten i exponenten 2 är experimentellt fastställd med en relativ noggrannhet på 10^{-15} . Den förste att mäta osäkerheten i exponenten var Henry Cavendish (1731-1810), år 1772. Han kunde visa att osäkerheten ε i uttrycket $r_{21}^{2+\varepsilon}$ är begränsad till $|\varepsilon| \leq 0.02$.

Värdet på konstanten C bestämmer enhetssystemet som används. I SI-systemet (Système International d'Unités) definierar man kvantiteten Coulomb/sekund, som är den elektriska strömmens enhet, utifrån med hur stor kraft två parallella raka strömledningar påverkar varandra.

Mera exakt, ledningarna sätts på avståndet 1 meter. Sedan skruvar man på strömmen tills kraften mellan ledningarna är 20 microNewton per meter. Den laddningsmängd som då per sekund passerar ett tvärsnitt i ledningarna sätts att motsvara 1 Coulomb.

Detta ger ett exakt värde för vakuums magnetiska susceptibilitet: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N s}^2/\text{C}^2$. Man har också sambandet $c^2 = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)$, där ε_0 är vakuums permittivitet.

SI-enheten för laddning är Coulomb (C).

Från allt detta har man nu bestämt att konstanten i Coulombs lag är

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} c^2}{4\pi} \\ &= 10^{-7} c^2 \\ &\approx 8.98755 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Vakuums permittivitet blir nu $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2)$.

Vi får alltså Coulombs lag i formen

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} \quad (1.4)$$

Om vi antar att superpositionsprincipen håller, blir kraften på laddning i från laddningarna j

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j, j \neq i} \mathbf{F}_{ji} = q_i \sum_{j, j \neq i} \frac{q_j}{r_{ji}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ji}, \quad (1.5)$$

där

$$\hat{\mathbf{r}}_{ji} = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ji}} \quad (1.6)$$

är Ortsvektorn från laddning j till laddning i .

Ännu har vi inte definierat vad laddningarna q_i är eller består av.

I mitten av 1700-talet talade amerikanen Benjamin Franklin för en vätske-teori för elektriska laddningar. Enligt denna teori var elektriska laddningstillstånd helt enkelt brist på ("negativ" laddning [vitreous-elektricitet]) eller överskott ("positiv" laddning [resinous-elektricitet]) av en osynlig vätska. Britten William Watson kom fram till motsvarande idéer vid ungefär samma tid. [http://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_charge]

År 1874 föreslog den irländska fysikern G. Johnstone Stoney att det existerar en laddnings-partikel som spelar den avgörande rollen i elektrokemin. Partikelns namn, elektron, föreslog han 20 år senare.

Elektronens verkliga existens bekräftades experimentellt 1897 av J. J. Thomson. [<http://en.wikipedia.org/wiki/Electron>]

Elektronens laddning bestämdes av amerikanen Robert A. Millikan år 1910 i det välkända oljedroppsexperimentet [http://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Millikan]. Han noterade att laddningen på oljedropparna alltid var en heltalsmultipel av samma tal, **elementarladdningen**, alltså elektronens laddning. Denna betecknas e och har värdet

$$1e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (1.7)$$

1.2.1. Kontinuerliga laddningsfördelningar

En normal ström genom en metalltråd kan vara 1 mA, motsvarande 10^{-3} C/s. Genom tråden flyter då en laddningsmängd på $\sim 10^{16}$ elektroner per sekund.

Om trådens diameter är 1 mm fås en laddningstäthet på $\sim 10^{22}$ elektroner per m^2 och sekund eller $\sim 10^{10}$ elektroner per μm^2 och sekund.

Elektronerna kan i ett dylikt fall alltså till en god approximation anses bilda ett kontinuum. Alltså kan i stället för diskreta laddningar q i stället införa **laddningstätheter** som är kontinuerliga funktioner av koordinater (eller konstanter).

Låt laddningstätheten i en volym V vara $\rho(\mathbf{r})$. Totala laddningen är då

$$Q = \int_V dV \rho(\mathbf{r}). \quad (1.8)$$

Låt motsvarande *yta*-laddningstätheten på en yta A vara $\sigma(\mathbf{r})$:

$$Q = \int_A dA \sigma(\mathbf{r}). \quad (1.9)$$

Laddningstätheterna definieras formellt som

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad (1.10)$$

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} \quad (1.11)$$

Även då laddningarna är diskreta kan vi definiera en täthetsfunktion:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (1.12)$$

där $\mathbf{r}_i$ är laddningarnas positioner och δ är **Diracs delta-funktion**.

1.3. Diracs delta-funktion

Följande grundläggande egenskaper gäller för Diracs delta-funktion $\delta(\mathbf{r})$:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \quad (1.13)$$

$$\int_V dV \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 1, \quad \mathbf{r}_0 \in V \quad (1.14)$$

Om integrationsvolymen V' inte innehåller $\mathbf{r}_0$:

$$\int_{V'} dV \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \quad (1.15)$$

Övriga egenskaper:

$$\int dV F(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = F(\mathbf{r}_0) \quad (1.16)$$

$$\int dV F(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) = F(0) \quad (1.17)$$

Så hur ser då funktionen $\delta(\mathbf{r})$ ut ??

Använd t.ex. Fouriertransformationen:

$$f(\mathbf{r}) = \int dV'_k F(\mathbf{k}') e^{i2\pi \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \quad (1.18)$$

$$F(\mathbf{k}) = \int dV f(\mathbf{r}) e^{-i2\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (1.19)$$

Insättning av första ekvationen i den andra:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{k}) &= \int dV \left(\int dV'_k F(\mathbf{k}') e^{i2\pi \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \right) e^{-i2\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= \int dV'_k F(\mathbf{k}') \left(\int dV e^{i2\pi (\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \right) \end{aligned} \quad (1.20)$$

så att vi måste ha

$$\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) = \int dV e^{i2\pi (\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \quad (1.21)$$

eller efter variabelbyte

$$\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dV_s e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{s}} \quad (1.22)$$

För att se hur Coulombs lag skrivs med hjälp laddningstätheter kan vi göra följande. Kraften på q i punkten $\mathbf{r}$ från en liten laddning dq' i punkten $\mathbf{r}'$ är ju enligt Coulombs lag

$$d\mathbf{F}_q = \frac{q dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.23)$$

Laddningstätheten:

$$\rho(\mathbf{r}') = \frac{dq'}{dV'} \quad (1.24)$$

Kraften på q är nu:

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.25)$$

Om vi istället har en ytladdningsfördelning σ :

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dA' \sigma(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.26)$$

Men vad händer om q befinner sig inne i fördelningen ρ ? Divergerar inte integranden ??

Check: Vi har alltså

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.27)$$

Inför $\mathbf{r}'' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Eftersom nu $x'' = x - x'$ o.s.v. får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_q &\propto \int dV'' \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \frac{\mathbf{r}''}{(\mathbf{r}'')^3} \\ &= \int dV'' \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \frac{r''}{(\mathbf{r}'')^3} \hat{\mathbf{r}}' \\ &= \int dV'' \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \frac{1}{(\mathbf{r}'')^2} \hat{\mathbf{r}}' \end{aligned} \quad (1.28)$$

Då $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, d.v.s. då $\mathbf{r}'' = 0$ får vi problem. Fokusera nu på detta bidrag till integralen.

Övergå nu till sfäriska koordinater:

$$\begin{aligned} dV'' \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \frac{1}{(r'')^2} &\Rightarrow \Delta r'' (r'')^2 \Delta \theta'' \sin \theta'' \Delta \phi'' \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \frac{1}{(r'')^2} \\ &= \Delta r'' \Delta \theta'' \sin \theta'' \Delta \phi'' \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \end{aligned} \quad (1.29)$$

Men detta uttryck kan ju inte divergera, eftersom det inte innehåller 0 i nämnaren — förutsatt att ρ inte "beter sig dåligt" då $\mathbf{r}'' = 0$, d.v.s. det finns inga punktladdningar som överlappar varandra.

1.4. Det elektriska fältet

Uttrycket för kraften på laddningen q är proportionellt mot q .

Om vi tänker oss att $q \Rightarrow 0$ så att den övriga laddningsfördelningen inte påverkas av q :s närvaro, kan vi definiera en storhet som bara beror på själva fördelningen:

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_q}{q} \quad (1.30)$$

Detta är laddningsfördelningens **elektriska fält**.

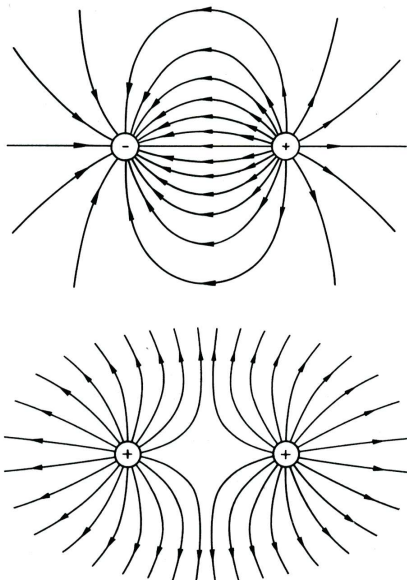
Tolkning: Fältet i en punkt $\mathbf{r}$ ger den kraft som en testladdning i $\mathbf{r}$ skulle känna av, förutsatt att laddningen är "osynlig" för den övriga laddningsfördelningen.

En laddning q i $\mathbf{r}$ påverkas helt allmänt av en kraft som är en summa av tre bidrag:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_q = & \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ & + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A dA' \sigma(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Elfältet i samma punkt är

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A dA' \sigma(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\end{aligned}\quad (1.32)$$



För att kunna illustrera elfält definierade Michael Faraday (1791-1867) begreppet **fältlinjer**. Fältlinjen anger den bana längs med vilken en fri laddning attraheras eller repelleras av en annan stationär laddning.

Av denna anledning är fältlinjens tangentvektor i varje punkt parallell med elfältets vektor i samma punkt.

Obs:

Fältlinjerna går från positiv laddning till negativ laddning.

1.5. Den elektrostatiske potentialen

Vi vet att om $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ kan vi definiera en potential f via $\nabla f = \mathbf{u}$.

Testa detta på elfältet:

$$\begin{aligned}\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot 0 + \left(-3 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \right) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &\propto (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= 0\end{aligned}\tag{1.33}$$

Den potential som ger upphov till elfältet kallas **elektrostatisk potential** och betecknas φ . Vi inkluderar ett minustecken:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}).\tag{1.34}$$

Potentialen själv får vi från uttrycket

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E}\tag{1.35}$$

Eftersom elfältet innehåller termer med

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\tag{1.36}$$

har vi då att

$$-\nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},\tag{1.37}$$

där vi måste bestämma hur f — alltså det radiella beroendet i potentialen — ser ut.

Eftersom $\mathbf{r}'$ är en konstant i denna derivering, kan vi skriva

$$-\nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\tag{1.38}$$

eller

$$-\nabla_s f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{s}}{s^3} \quad (1.39)$$

Efter försök ser man att f måste vara

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{s} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.40)$$

Potentialen blir då

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A dA' \sigma(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A dA' \sigma(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Vi kan alltså definiera nollnivån $\varphi(\mathbf{r}_0) = 0$ med $\mathbf{r}_0 = \infty$! Resultatet:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A dA' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.42)$$

1.5.1. Potentialenergi

Kraften $\mathbf{F}$ på en laddning q fås från laddningens potentialenergi i det yttre fältet:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (1.43)$$

Förändringen i potentialenergin då denna kraft tillåts verka är

$$U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{F} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} &= -q \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}} \\ &= q (\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}_0)) \end{aligned} \quad (1.45)$$

så

$$U(\mathbf{r}) = q\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \quad (1.46)$$

om $U(\mathbf{r}_0) = 0 = \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}_0)$.

1.6. Ledare och icke-ledare

[RMC, Griffiths]

Hur reagerar material på elektriska laddningar och fält? Det finns två huvudklasser av material:

1. ledare
2. dielektrika

Ledare är material som har gott om fria elektroner. Dessa gör att ström flyter relativt fritt, och att materialet lätt kan reagera på yttre fält genom att flytta på laddningar från den ena delen av materialet till den andra.

Exempel: metaller, . . .

Dielektrika (isolatorer) innehåller mycket få fria laddningar. Majoriteten av laddningarna är hårt bundna till materialets atomer och molekyler, dock så att dipoler kan induceras i varierande grad. Dielektrika leder ström med en konduktivitet som är 10^{-20} av en ledares.

Exempel: porslin, trä, glas, . . .

Mellan dessa extremer av bra och dålig elektrisk ledning finns material med måttlig ledningsförmåga.

Exempel: halvledare, . . .

Följande egenskaper gäller för ledare:

(i) Inne i en ledare är elfältet noll.

Ett yttre elfält sätter de fria laddningarna i en ledare i rörelse. Förflyttningen fortsätter tills nettofältet — summan av laddningarnas elfält och det yttre fältet — försvinner. När statisk jämvikt uppnåtts är nettofältet inne i ledaren noll och ledarens yta täckt av inducerad laddning.

(ii) Inne i en ledaren är laddningstätheten noll.

Detta följer direkt från Gauss' lag (behandlas senare).

Om där fanns laddningar skulle där också finnas elfält, vilket strider mot första regeln.

(iii) Nettoladdningar befinner sig på ytan.

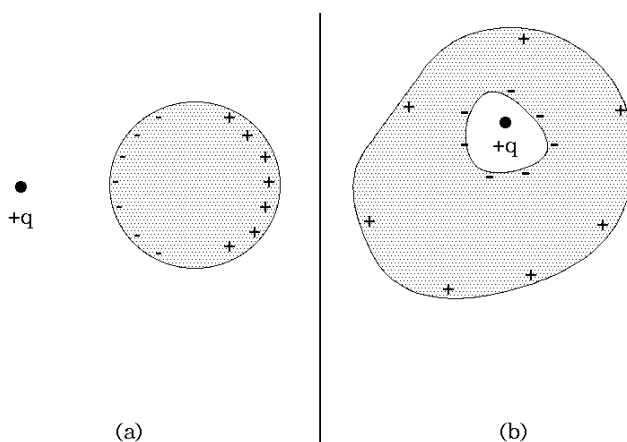
(iv) En ledare utgör en ekvipotentialyta.

Eftersom $\mathbf{E} = 0$ inne i ledaren måste potentialen φ vara densamma överallt. En dylik yta kallas **ekvipotentialyta**.

(v) Elfältet är vinkelrätt mot en ledares yta.

Om det existerade en tangentiell komponent skulle laddningar röra på längs med ytan och ledaren inte befinna sig i statisk jämvikt.

Exempel :



(a) Inducerad laddning på en ledare befinner sig på ytan.

(b) En laddning i en kavitet i en ledare inducerar laddningar på kavitetens och ledarens yta. Inne i ledarens (förutom kaviteten!) är elfältet fortfarande noll.

Om ledaren är sfärisk och centrerad på origo så är elfältet utanför ledaren

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.47)$$

★ ★ ★

Hurdan är situationen om vi har en neutral kavitet (utan laddningar) i en ledare och placerar denna i ett yttre elfält ?

Inducerad laddning samlas på den yttersta ytan och utsläcker det yttre fältet. Nettofältet inne i ledaren är noll.

Gauss' lag garanterar att inget fält uppstår genom kaviteten.

1.7. Gauss' lag

Gauss' lag relaterar en laddningsmängd till ytintegralen av det elfält som laddningen ger upphov till. Ytan måste vara sluten.

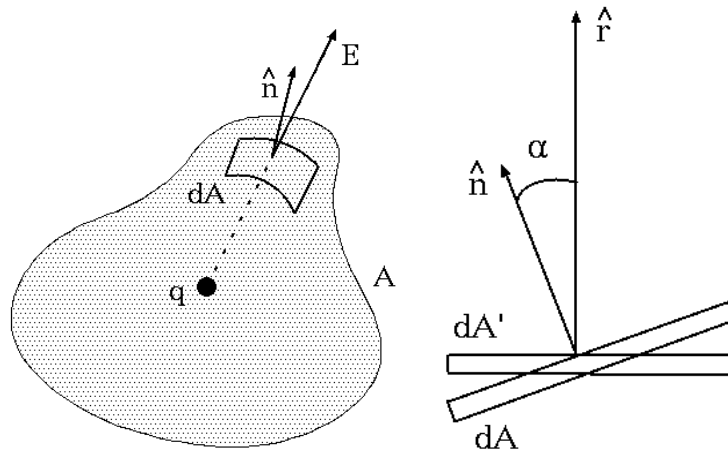
Punktladdning i origo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.48)$$

Ytintegralen:

$$\oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_A \mathbf{dA} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_A dA \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.49)$$

Vi behöver nu veta produkten $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}$!



$$dA \hat{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = dA \frac{\hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2} = dA \frac{\cos \alpha}{r^2} = \frac{dA'}{r^2} \quad (1.50)$$

Obs: dA' är ett sfäriskt segment !

Vi har nu att

$$\frac{dA'}{r^2} = \frac{r^2 d\phi d\theta \sin \theta}{r^2} \quad (1.51)$$

Ytintegralen blir alltså:

$$\oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_A d\phi d\theta \sin \theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.52)$$

Motsvarande för flera laddningar,

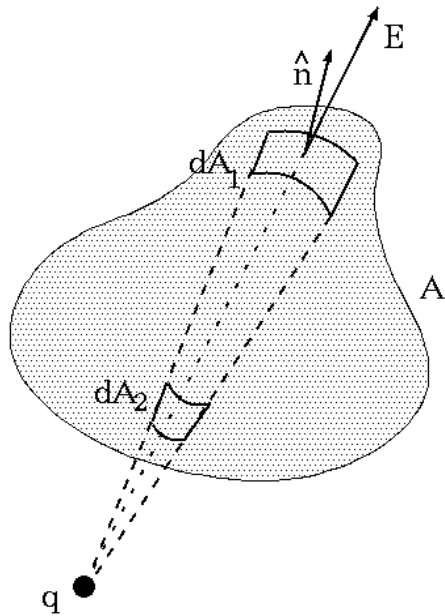
$$\oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i, \quad (1.53)$$

och kontinuerliga fördelningar:

$$\oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \oint dV \rho(\mathbf{r}) \quad (1.54)$$

★ ★ ★

Men om q sitter utanför ytan ??



Vi kan bilda segment-paren i figuren. Hela ytintegralen fås genom att summera upp dessa par. För varje par:

$$\begin{aligned}
 & dA_1 \hat{n}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + dA_2 \hat{n}_2 \cdot \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \\
 = & dA_1 \hat{n}_1 \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}_1}{r_1^2} - dA_2 \hat{n}_2 \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}_1}{r_2^2} \\
 = & dA_1 \frac{\cos \alpha_1}{r_1^2} - dA_2 \frac{\cos \alpha_2}{r_2^2} \\
 = & dA'_1 \frac{1}{r_1^2} - dA'_2 \frac{1}{r_2^2} \\
 = & r_1^2 d\Omega \frac{1}{r_1^2} - r_2^2 d\Omega \frac{1}{r_2^2} \\
 = & 0
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

Här betecknades den gemensamma rymdvinkeln med $d\Omega$.

Det gäller ju att ett sfäriskt segments area är $dA' = r^2 d\Omega = r^2 d\phi d\theta \sin \theta$.

* * *

Enligt Gauss' teorem har vi för ett vektorfält $\mathbf{F}$ att

$$\oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{F} = \oint_V dV \nabla \cdot \mathbf{F} \tag{1.56}$$

där A innesluter volymen V .

Vänstra ledet av Gauss' lag kan alltså skrivas

$$\oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint_V dV \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{1.57}$$

Båda leden av Gauss' lag är nu volym-integraler, så vi kan identifiera integranderna med varandra. Vi får då **Gauss' lag i differentialform**:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$
(1.58)

* * *

Vi kan nu använda Gauss' lag för att verifiera att elfältet är noll inne i en ledare.

Vi kan utgå från den intuitiva uppfattningen att alla fria laddningar repellerar varandra tills de fastnar på ytan.

Gauss' lag ger då omedelbart att $\mathbf{E} = 0$ inne i ledaren, som vi resonerade oss fram till tidigare.

1.7.1. Elfältet på en ledares yta

Vi granskar nu elfältet på en godtycklig ledares yta.

Elfältet $\mathbf{E}$ kan delas upp i en komponent som är normal mot ledarens yta, och en tangentiell komponent:

$$\mathbf{E} = E_n \hat{\mathbf{n}} + E_t \hat{\mathbf{t}} \quad (1.59)$$

Men $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, så

$$\mathbf{E} = -(\nabla\varphi)_n \hat{\mathbf{n}} - (\nabla\varphi)_t \hat{\mathbf{t}} \quad (1.60)$$

Derivatan av potentialen i tangentens riktning är projektionen av derivatan $\nabla\varphi$ på tangentens enhetsvektor $\hat{\mathbf{t}}$:

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla\varphi \equiv (\nabla\varphi)_t \equiv \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.61)$$

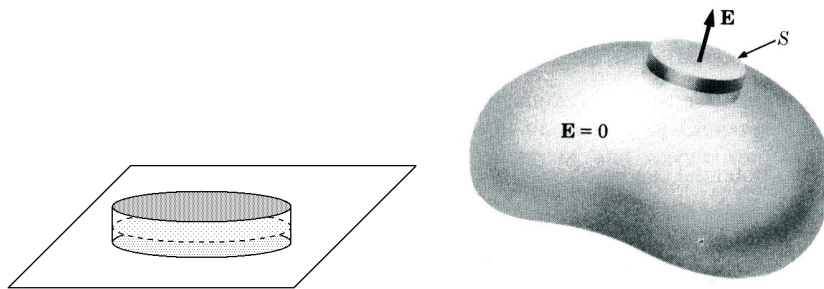
Men eftersom ytan är en ekvipotentialyta (φ konstant över hela ytan) gäller $d\varphi/dt = 0$, och $(\nabla\varphi)_t = 0$. Alltså har vi

$$\mathbf{E} = E_n \hat{\mathbf{n}} \quad (1.62)$$

och **elfältet är normalt mot en ledares yta.**

1.7.2. "Pillerburks"-tekniken

Låt oss nu betrakta en **"pillerburk"** vid ledarens yta:



Pillerburken är i det här fallet en infinitesimal cylindrisk region med topp- och bottencirklarnas normalvektorer parallella med ytans normalvektor. Mantelytan är också parallell med ytnormalen.

Gauss' lag på denna yta ger oss

$$\oint_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = A \cdot E_n - A \cdot 0 \quad (1.63)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \oint_A dA \sigma(\mathbf{r}) = \frac{A\sigma}{\varepsilon_0} \quad (1.64)$$

om ytladdningstätheten är konstant.

Från detta får vi genast att

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (1.65)$$

1.8. Lösning av enkla elektrostatiska problem

(a) Vi har tidigare kommit fram till att elfältet eller potentialen från diskreta laddningar och laddningsfördelningar ges av uttrycken

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ & + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_A dA' \sigma(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_A dA' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.67)$$

(b) I föregående sektion erhöll vi Gauss' lag

$$\oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \oint dV \rho(\mathbf{r}) \quad (1.68)$$

Gauss' lag förenklar elfälts-räkningar avsevärt då man har laddningsfördelningar *med hög symmetri*, t.ex. plan, cylindrar och sfärer.

Exempel 1: En punktladdning q .

Gauss:

$$\oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (1.69)$$

För enkelhetens skull integrerar vi över en sfärisk yta!

$$\mathbf{dA} = dA \hat{\mathbf{r}} \quad (1.70)$$

$$dA = r^2 d\phi d\theta \sin \theta \quad (1.71)$$

Vi får:

$$\begin{aligned} \frac{q}{\varepsilon_0} &= \oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \hat{\mathbf{r}} \cdot (E_r \hat{\mathbf{r}} + E_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + E_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}) \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta E_r \end{aligned} \quad (1.72)$$

Vi utnyttjar nu vår kunskap att E_r är en funktion endast i r , så att

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = r^2 4\pi E_r \quad (1.73)$$

och

$$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (1.74)$$

som väntat. Fältet är nu radiellt utåt från punktladdningen, och r är avståndet från observationspunkten till laddningen.

Om q sitter i punkten $\mathbf{r}'$, hur skriver vi fältet då ?

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.75)$$

Elfältet transporterar en positiv testladdning bort från q ! $\square$

Exempel 2: En tunn, rak och oändligt lång laddningsfördelning med den linjära laddningstätheten λ (C/m).

Gauss:

$$2\pi\rho h E_\rho = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad (1.76)$$

$$E_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho} \quad (1.77)$$

□

Exempel 3: Ett likformigt laddad sfäriskt skal med ytladdningstätheten σ (C/m²). Sfärens radie är d .

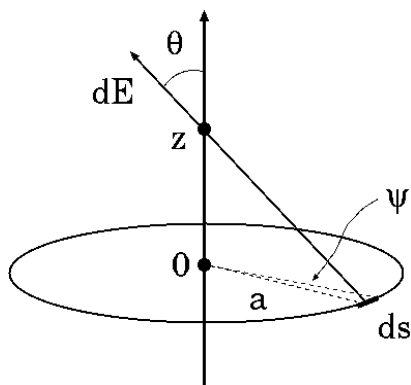
Svar:

$$E_r = \frac{d^2\sigma}{\varepsilon_0 r^2}, \quad r > d, \quad (1.78)$$

och $E_r = 0$ annars. □

Om Gauss' lag inte kan tillämpas är man tvungen att lösa problemet med nån av ekvationerna (1.66) eller (1.67) ! Ofta är man då också tvungen att begränsa sig till ett fåtal punkter, om man vill bestämma $\mathbf{E}$ eller φ analytiskt ("med papper och penna").

Exempel 1: Cirkulär laddningsfördelning.



Elfältsbidraget i punkten P från längdelementet ds är

$$d\mathbf{E} = \frac{\lambda ds}{4\pi\varepsilon_0 (\sqrt{a^2 + z^2})^2} \hat{\mathbf{u}} \quad (1.79)$$

Komponenten i z -led är:

$$dE_z = d\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{\lambda ds}{4\pi\varepsilon_0 (\sqrt{a^2 + z^2})^2} \cos\theta \quad (1.80)$$

Men $ds = a d\psi$ och

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \quad (1.81)$$

så att

$$dE_z = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \frac{z d\psi}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.82)$$

Integralen blir:

$$E_z = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \frac{z 2\pi}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.83)$$

eller uppsnyggat:

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.84)$$

Exempel 2: Laddad cirkelskiva.

Från föregående exempel vet vi att en cirkulär slinga ger upphov till elfältsbidraget

$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.85)$$

i punkten $P = (0, 0, z)$.

Nu gäller $dQ = \sigma 2\pi a da$, så att

$$dE_z = \frac{\sigma 2\pi z}{4\pi\epsilon_0} \frac{ada}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.86)$$

Integralen går från $a = 0$ till $a = r$, där r är skivans radie:

$$E_z = \frac{\sigma 2\pi z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^r \frac{daa}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.87)$$

Variabelbytet $u = a^2 + z^2$, $du = 2ada$ ger oss:

$$E_z = \frac{\sigma \pi z}{4\pi\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+a^2} \frac{du}{u^{3/2}} \quad (1.88)$$

Integralen:

$$\begin{aligned} \int_{z^2}^{z^2+a^2} \frac{du}{u^{3/2}} &= (-2) \frac{1}{\sqrt{u}} \Big|_{u=z^2}^{u=z^2+a^2} \\ &= -2 \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} - \frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{z} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (r/z)^2}} \right) \quad (1.89)$$

Insättning ger:

$$E_z = \frac{\sigma \pi}{2\pi \epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (r/z)^2}} \right) \quad (1.90)$$

Eftersom $\sigma = Q/(\pi r^2)$:

$$E_z = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (r/z)^2}} \right) \quad (1.91)$$

Check: Låt $z \gg r$:

$$E_z \approx \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r^2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{z} \right)^2 \right) \right) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r^2} \frac{1}{2} \left(\frac{r}{z} \right)^2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 z^2} \quad (1.92)$$

OK! ☐

1.9. Den elektriska dipolen

Två motsatta lika starka laddningar som hålls på ett kort fixerat avstånd från varandra bildar en **dipol**.

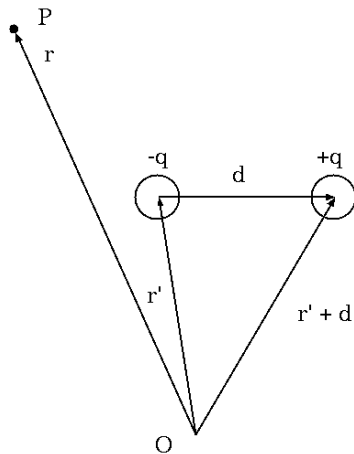
Motsvarande, en **monopol** eller kort **pol**, är en synonym för en elektrisk punktladdning.

Det finns i huvudsak två typer av dipoler [<http://en.wikipedia.org/wiki/Dipole>]: (i) permanenta och (ii) inducerade.

Exempel på permanenta dipoler är polära molekyler, d.v.s. molekyler där nån atom har mycket större elektronegativitet än de andra. Den del av molekylen innehåller då en större mängd elektroner, vilket gör den negativt laddad. Exempel: saltsyra, H-Cl.

Inducerade dipoler är molekyler eller atomer som polariseras, antingen av yttre elektriska fält eller permanenta dipoler.

Låt nu laddningen $-q$ vara i $\mathbf{r}'$ och $+q$ i $\mathbf{r}' + \mathbf{d}$. Elfältet i punkten P med Ortsvektorn $\mathbf{r}$ från dipolen är



$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}|^3} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \quad (1.93) \end{aligned}$$

Vi är intresserad av fältet långt borta från dipolen, så att $|\mathbf{d}| \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ och vi kan använda oss av $|\mathbf{d}|/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx 0$.

Låt oss försöka förenkla första termens nämnare så att den blir samma som i andra termen:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}|^{-3} &= \left((\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d})^2 \right)^{-3/2} \\ &= \left((\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + d^2 - 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{d} \right)^{-3/2} \\ &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} \left(1 + \frac{d^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - 2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right)^{-3/2} \\ &\approx |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} \left(1 - 2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right)^{-3/2} \quad (1.94) \end{aligned}$$

Binomialteoremet:

$$(1 + x)^{p/q} \approx 1 + \frac{p}{q}x, \quad |x| \leq 1 \quad (1.95)$$

Vi får:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}|^{-3} \approx |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} \left(1 + 3 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) \quad (1.96)$$

Insättning i elfältsuttrycket ger oss

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \left(1 + 3 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \\ &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right)\end{aligned}\quad (1.97)$$

efter att termer med $(|\mathbf{d}|/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^2$ dumpats.

Definiera **dipolmomentet**

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i = -q\mathbf{r}' + q(\mathbf{r}' + \mathbf{d}) = q\mathbf{d} \quad (1.98)$$

med enheten C · m (Coulombmeter), så kan vi förenkla till

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right), \quad |\mathbf{d}| \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (1.99)$$

Potentialen skriver vi direkt med hjälp av en punktladdnings potential:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (1.100)$$

Om man upprepar motsvarande som ovan kan man visa att

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad |\mathbf{d}| \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (1.101)$$

Exempel : Dipol i origo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left(\frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{p} \right) \quad (1.102)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.103)$$

1.9.1. Dipol i yttre fält

Från tidigare vet vi att potentialenergin för en laddning q i ett yttre fält är $U(\mathbf{r}) = q\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$.

Tillämpat på en dipol med $-q$ i $\mathbf{r}$ och $+q$ i $\mathbf{r} + \mathbf{s}$ får vi

$$U(\mathbf{r}) = -q\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + q\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r} + \mathbf{s}) \quad (1.104)$$

Notera:

$$\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \equiv \frac{d\varphi_{\text{ext}}}{ds} \approx \frac{\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r} + \mathbf{s}) - \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{s} \quad (1.105)$$

förutsatt att $|\mathbf{s}|/|\mathbf{r} + \mathbf{s}|$ är litet.

Vi får

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &\approx -q\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + q(\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})) \\ &= q\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \\ &\equiv \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.106)$$

Uppsnyggat:

$$U(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \quad (1.107)$$

Exempel : *Dipolens energi* då den befinner sig i fältet från en punktladdning Q i origo är, om dipolens plats är $\mathbf{R}$:

$$U_Q = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{R^3} \quad (1.108)$$

Enligt ekv. (1.101) är *energin för en laddning* Q i fältet från dipolen:

$$U_{\text{dipol}} = Q\varphi_{\text{dipol}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (0 - \mathbf{R})}{|0 - \mathbf{R}|^3} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{R^3} \quad (1.109)$$

Energien blir alltså densamma, oberoende av ur vilken synvinkel man betraktar det hela.

1.10. Elektriska multipoler

Man kan visa att potentialen för en så gott som godtycklig laddningsfördelning kan expanderas i en serie av **multipoler**. Multipoler är en generalisering av dipol-begreppet.

Potentialen i observationspunkten $\mathbf{r}$ från fördelningen $\rho(\mathbf{r}')$ är förstas

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.110)$$

Vi expanderar nämnaren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}} \\ &= \frac{1}{r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right] + \frac{3}{8} \left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right]^2 \right) \\ &= \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3}{8} \left[\frac{r'^4}{r^4} + 4 \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right)^2 - 4 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \frac{r'^2}{r^2} \right] \\ &\approx \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{2r^5} \quad (1.111) \end{aligned}$$

efter dumpning av $(r'/r)^n$ -termer med $n \geq 3$.

Insättning i potentialen ger

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int dV' \rho(\mathbf{r}') + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int dV' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' + \frac{1}{2} \frac{1}{r^5} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \left(3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 \right) \right] \quad (1.112)$$

Första termen:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (1.113)$$

Potentialen från en punktladdning i origo !

Andra termen:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int dV' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \quad (1.114)$$

Men

$$\int dV' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \quad (1.115)$$

kan ses som en generalisering av ekv. (1.98) för dipolmomentet för två diskreta laddningar ! Vi har då

$$\mathbf{p} \equiv \int dV' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \quad (1.116)$$

Alltså har vi

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int dV' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.117)$$

Detta är potentialen från en dipol i origo !

Tredje termen:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{1}{r^5} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \left(3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 \right) \quad (1.118)$$

Integranden dividerad med laddningstätheten kan skrivas:

$$\begin{aligned} & 3(xx' + yy' + zz')^2 - r'^2(x^2 + y^2 + z^2) \\ = & 3(x^2x'^2 + y^2y'^2 + z^2z'^2) + 6xx'yy' + 6xx'zz' + 6yy'zz' - r'^2(x^2 + y^2 + z^2) \\ = & 3(xx'x' + yy'y' + zz'z') + 3xx'yy' + 3yy'xx' + 3xx'zz' \\ & + 3zz'xx' + 3yy'zz' + 3zz'yy' - r'^2 \sum_{ij} x_i x_j \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.119)$$

Obs: $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, och $x_3 \equiv z$.

Det sista ekvationen kan förenklas till

$$\sum_{ij} 3x_i x'_i x_j x'_j - r'^2 \sum_{ij} x_i x_j \delta_{ij} = \sum_{ij} x_i x_j (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \quad (1.120)$$

Insättning ger

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} \int dV' \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij}, \quad (1.121)$$

där

$$Q_{ij} \equiv \int dV' \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \quad (1.122)$$

Q_{ij} är en tensor med 9 element, av vilka paren $Q_{ij} = Q_{ji}$, med $i \neq j$, är samma. Okända är då Q_{11} , Q_{22} , Q_{33} , och t.ex. Q_{12} , Q_{13} , Q_{23} . Tensorn Q_{ij} kallas **kvadrupolmomentstensor**.

Allmänt gäller att alla termer i expansionen (1.111) kan grupperas att motsvara poler av successivt högre ordning, **multipoler**:

Monopol, dipol, kvadrupol, hexapol, octopol, decapol, dodecapol, . . .

(Se t.ex. <http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/greek-prefixes.html> för övriga grekiska prefix . . .).

Dylika multipoler är viktiga inom kärnfysiken. På den här kursen kommer vi knappast att behandla dem igen.

★ ★ ★

Totala potentialen är nu

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij} + \dots, \quad (1.123)$$

där

$$Q = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \quad (1.124)$$

$$\mathbf{p} = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \quad (1.125)$$

$$Q_{ij} = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \quad (1.126)$$

Termerna motsvarar alltså $O((r'/r)^0)$, $O((r'/r)^1)$, $O((r'/r)^2)$, . . .

1.11. Ytterligare egenskaper hos Diracs deltafunktion

Vi härledde tidigare

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.127)$$

För en punktladdning i $\mathbf{r}' = 0$ gäller $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r})$, så att

$$\nabla \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{q\delta(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (1.128)$$

och

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (1.129)$$

Men:

$$\nabla \frac{1}{r} = \hat{\mathbf{r}} \partial_r \frac{1}{r} = -\hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r^2} = -\mathbf{r} \frac{1}{r^3} \quad (1.130)$$

så att vi får

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (1.131)$$

Check:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} 1 \quad (1.132)$$

Om $r \neq 0$ får vi 0, men om $r = 0$ får vi ∞ . Detta överensstämmer med deltafunktionen $\delta(\mathbf{r})$!