

0. Matematisk bakgrund

[RMC, Arfken, Lahtinen]

0.1. Centrala vektorbegrepp

En vektor med storleken F noteras $\mathbf{F}$ eller $\vec{F}$. I komponentform, i Cartesiska koordinater, skriver man

$$\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}} \equiv F_1 \hat{\mathbf{x}} + F_2 \hat{\mathbf{y}} + F_3 \hat{\mathbf{z}} \quad (0.1)$$

Skalärprodukten av vektorerna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i A_i B_i \equiv |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \alpha, \quad (0.2)$$

där α är vinkeln mellan vektorerna.

Skalärprojektionen av $\mathbf{A}$ på vektorn $\mathbf{n}$ är

$$A_n = |\mathbf{A}| \cos \alpha = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}}{n} \quad (0.3)$$

Vektorprojektion är skalärprojektionens längd gånger enhetsvektorn för riktningen:

$$\mathbf{A}_n = A_n \hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}}{n} \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}}{n^2} \mathbf{n} \quad (0.4)$$

Vektorprodukten av vektorerna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{u}}_i A_j B_k = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = AB \sin \alpha \hat{\mathbf{n}}, \quad (0.5)$$

där $\hat{\mathbf{n}}$ är en enhetsvektor vinkelrät mot $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$, och ϵ_{ijk} är **Levi-Civitas symbol**:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & (ijk) = (123), (231), (312) \\ -1, & (ijk) = (132), (213), (321) \\ 0, & i = j, j = k, i = k \end{cases} \quad (0.6)$$

Arean av en parallelogram som spänns upp av vektorerna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

Trippelprodukten av vektorerna $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ är

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (0.7)$$

Volymen av en parallelepiped som spänns upp av vektorerna $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ är $|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$.

0.2. Vektor-identiteter

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (0.8)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad (0.9)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (0.10)$$

0.3. Gradient, divergens, rotor, och Laplaceoperatorn

Gradienten av ett skalärfält $f = f(x, y, z)$ definieras i Cartesiska koordinater som

$$\nabla f = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial f}{\partial z} \equiv \hat{\mathbf{x}} \partial_x f + \hat{\mathbf{y}} \partial_y f + \hat{\mathbf{z}} \partial_z f. \quad (0.11)$$

Divergensen av vektorfältet $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + A_y(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} + A_z(x, y, z)\hat{\mathbf{z}}$ definieras som

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z. \quad (0.12)$$

Rotorn definieras som

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (0.13)$$

Laplaceoperatorn på skalärfältet f definieras som

$$\nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f. \quad (0.14)$$

0.4. Potentialteori

[Lahtinen]

Låt f vara ett skalärfält och $\mathbf{u}$ ett vektorfält.

Om

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (0.15)$$

sägs $\mathbf{u}$ vara **irrotationell**.

Teorem 1:

$\nabla f = \mathbf{u}$ om och endast om $\mathbf{u}$ är irrotationell. Skalärfältet f är nu vektorfältets $\mathbf{u}$ **potential**.

Teorem 2:

$\nabla f = \mathbf{u}$ om och endast om

$$\int_A^B \mathbf{dr} \cdot \mathbf{u} \quad (0.16)$$

är oberoende av kurvan mellan A och B .

Teorem 3:

Om $\nabla f = \mathbf{u}$, så gäller att

$$f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}_0) = \int_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{u}, \quad (0.17)$$

där C är nån kurva från $\mathbf{r}_0$ till $\mathbf{r}$.

★ ★ ★

Teoremen säger att $\nabla f = \mathbf{u}$, $\int_A^B \mathbf{dr} \cdot \mathbf{u}$ oberoende av vägen, och $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ($\mathbf{u}$ irrotationell) är helt ekvivalenta egenskaper.

I klartext: Om vi känner $\mathbf{u}$ kan vi bestämma $\nabla \times \mathbf{u}$. Om detta uttryck är noll vet vi att det existerar en potential f , för vilken gäller att $\int_A^B \mathbf{dr} \cdot \mathbf{u}$ är oberoende av vägen. Potentialen själv ges sedan av teorem 3.

Inom fysiken kallas irrotationella fält **konservativa**.

Exempel : Gravitationsfältet $\mathbf{F} = Gm_1m_2\hat{\mathbf{r}}/r^2$.

Vektorfältet är nu väsentligen faktorn $\hat{\mathbf{r}}/r^2$!

$$\begin{aligned} & \nabla \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{x}} \frac{3}{2} \left(\frac{2yz}{r^5} - \frac{2zy}{r^5} \right) + \hat{\mathbf{y}} \frac{3}{2} \left(\frac{2zx}{r^5} - \frac{2xz}{r^5} \right) + \hat{\mathbf{z}} \frac{3}{2} \left(\frac{2xy}{r^5} - \frac{2yx}{r^5} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{0.18}$$

Alltså gäller att gravitationsfältet är konservativt (irrotationellt), och t.ex. kurvan C i arbetsintegralen $\int_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{F}$ mellan två punkter kan väljas fritt. Den motsvarande potentialen har inget eget namn, kallas gravitationspotential. $\square$

0.5. Nabla-formler

Motsvarande som i exemplet ovan kan vi lätt visa att

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0. \tag{0.19}$$

★ ★ ★

Låt oss testa några motsvarande uttryck:

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 3. \tag{0.20}$$

★ ★ ★

$$\nabla^2 \mathbf{r} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{r}) = 0. \tag{0.21}$$

★ ★ ★

$$\begin{aligned}
\nabla^2 r &= \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right) \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2} \\
&= \partial_x \frac{x}{r} + \partial_y \frac{y}{r} + \partial_z \frac{z}{r} \\
&= \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{1}{r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{1}{r} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial r}{\partial z} \\
&= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \\
&= \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}
\end{aligned} \tag{0.22}$$

så att

$$\nabla^2 r = \frac{2}{r} \tag{0.23}$$

★ ★ ★

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{r} &= (A_x \partial_x + A_y \partial_y + A_z \partial_z) (x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}) \\
&= A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}} \\
&= \mathbf{A}.
\end{aligned} \tag{0.24}$$

Detta ger

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{A}. \tag{0.25}$$

★ ★ ★

Låt skalärfältet f bero endast på avståndet r :

$$\nabla f(r) = \hat{\mathbf{r}} \frac{df(r)}{dr}. \tag{0.26}$$

Följer direkt från uttrycket för ∇ i sfäriska koordinater.

★ ★ ★

Om vi i stället har ett vektorfält $\mathbf{A} = \mathbf{A}(r)$:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{A}(r) &= \partial_x A_x(r) + \partial_y A_y(r) + \partial_z A_z(r) \\
 &= \partial_x r \frac{dA_x}{dr} + \partial_y r \frac{dA_y}{dr} + \partial_z r \frac{dA_z}{dr} \\
 &= \hat{\mathbf{x}} \partial_x r \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dr} + \hat{\mathbf{y}} \partial_y r \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dr} + \hat{\mathbf{z}} \partial_z r \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dr} \\
 &= (\hat{\mathbf{x}} \partial_x r + \hat{\mathbf{y}} \partial_y r + \hat{\mathbf{z}} \partial_z r) \cdot \frac{d\mathbf{A}(r)}{dr} \\
 &= \frac{1}{r} (\hat{\mathbf{x}} x + \hat{\mathbf{y}} y + \hat{\mathbf{z}} z) \cdot \frac{d\mathbf{A}(r)}{dr} \\
 &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{A}(r)}{dr}.
 \end{aligned} \tag{0.27}$$

Detta ger

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(r) = \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{A}(r)}{dr}. \tag{0.28}$$

* * *

Låt skalärfältet f bero endast på $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$, där $\mathbf{c}$ är en konstant vektor:

$$\begin{aligned}
 \nabla f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) &= \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
 &= \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}{\partial x_i} \frac{df}{d(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})} \\
 &= \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i c_i \frac{df}{d(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})} \\
 &= \mathbf{c} \frac{df}{d(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})},
 \end{aligned} \tag{0.29}$$

som ger

$$\nabla f(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c} \frac{df}{d(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}. \tag{0.30}$$

Motsvarande för ett vektorfält $\mathbf{A}$ som beror endast på $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{d(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}. \tag{0.31}$$

Beteckna

$$\nabla_{\mathbf{R}+\mathbf{r}} \equiv \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial(X+x)} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial(Y+y)} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial(Z+z)}. \quad (0.32)$$

Om nu $\mathbf{R}$ är en konstant vektor:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{R}+\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial x}{\partial(X+x)} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial y}{\partial(Y+y)} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial z}{\partial(Z+z)} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \nabla_{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (0.33)$$

Kan utnyttjas t.ex. vid byte av koordinatsystem, om $\mathbf{R}$ är en konstant translation.

0.6. Vektoroperator-identiteter

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (0.34)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (0.35)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad (0.36)$$

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g \quad (0.37)$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) \quad (0.38)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f\nabla \cdot \mathbf{F} \quad (0.39)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f\nabla \times \mathbf{F} \quad (0.40)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F} \quad (0.41)$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \quad (0.42)$$

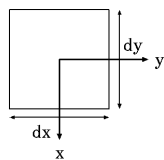
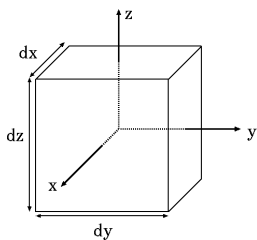
Bevis av dessa: Expandera vänstra och högre leden i komponentform.

0.7. Integralteorem

0.7.1. Gauss' teorem

$$\oint_S \mathbf{dA} \cdot \mathbf{F} = \oint_V dV \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (0.43)$$

Bevis:



$$\begin{aligned} \mathbf{dA} \cdot \mathbf{F} = & dydz \left(F_x\left(\frac{dx}{2}, 0, 0\right) - F_x\left(-\frac{dx}{2}, 0, 0\right) \right) \\ & + dx dz \left(F_y\left(0, \frac{dy}{2}, 0\right) - F_y\left(0, -\frac{dy}{2}, 0\right) \right) \\ & + dx dy \left(F_z\left(0, 0, \frac{dz}{2}\right) - F_z\left(0, 0, -\frac{dz}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Expandera F kring centret av det infinitesimala rätblocket:

$$\begin{aligned} \mathbf{dA} \cdot \mathbf{F} \approx & dydz \left(F_x(0, 0, 0) + \partial_x F_x \frac{dx}{2} - \left(F_x(0, 0, 0) - \partial_x F_x \frac{dx}{2} \right) \right) \\ & + dx dz \left(F_y(0, 0, 0) + \partial_y F_y \frac{dy}{2} - \left(F_y(0, 0, 0) - \partial_y F_y \frac{dy}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + dxdy \left(F_z(0,0,0) + \partial_z F_z \frac{dz}{2} - \left(F_z(0,0,0) - \partial_z F_z \frac{dz}{2} \right) \right) \\
& = dxdydz (\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z) \\
& = dV \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad \square
\end{aligned} \tag{0.44}$$

Obs: Ytans normalvektor pekar ut ur volymen !

Korollarium:

Låt nu $\mathbf{F} = \mathbf{a}F$, där $\mathbf{a}$ är en konstant vektor i någon riktning.

$$\oint d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{a} \cdot \oint d\mathbf{A} F \tag{0.45}$$

$$\begin{aligned}
\oint dV \nabla \cdot \mathbf{F} &= \oint dV \nabla \cdot (\mathbf{a}F) \\
&= \oint dV (F \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla F)
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{a} \cdot \oint dV \nabla F \tag{0.46}$$

Detta ger

$$\mathbf{a} \cdot \left[\oint d\mathbf{A} F - \oint dV \nabla F \right] = 0 \tag{0.47}$$

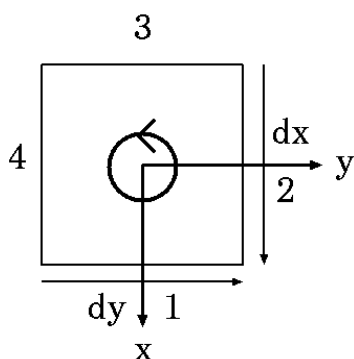
så att

$$\oint d\mathbf{A} F = \oint dV \nabla F \tag{0.48}$$

0.7.2. Stokes' teorem

$$\oint_S \mathbf{dA} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \oint_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{F}. \quad (0.49)$$

Bevis:



Låt den infinitesimala ytans normal vara i z -riktningen:

$$\mathbf{dA} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = dxdy(\partial_x F_y - \partial_y F_x) \quad (0.50)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{F} &= dy \left(F_y\left(\frac{dx}{2}, 0, 0\right) - F_y\left(-\frac{dx}{2}, 0, 0\right) \right) \\ &\quad + dx \left(-F_x\left(0, \frac{dy}{2}, 0\right) + F_x\left(0, -\frac{dy}{2}, 0\right) \right) \end{aligned} \quad (0.51)$$

Expandera $\mathbf{F}$ i centret av den infinitesimala rektangeln:

$$\begin{aligned} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{F} &\approx dy \left(F_y(0, 0, 0) + \partial_x F_y \frac{dx}{2} - \left(F_y(0, 0, 0) - \partial_x F_y \frac{dx}{2} \right) \right) \\ &\quad + dx \left(-F_x(0, 0, 0) - \partial_y F_x \frac{dy}{2} + F_x(0, 0, 0) - \partial_y F_x \frac{dy}{2} \right) \\ &= dxdy(\partial_x F_y - \partial_y F_x). \quad \square \end{aligned} \quad (0.52)$$

Obs: Ytans normalvektor och kurvans riktning bildar ett högerhandssystem !

Korollarium:

Låt nu $\mathbf{F} = \mathbf{a}F$.

$$\oint \mathbf{dr} \cdot \mathbf{F} = \oint \mathbf{dr} \cdot (\mathbf{a}F) = \mathbf{a} \cdot \oint \mathbf{dr} F \quad (0.53)$$

$$\oint \mathbf{dA} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \oint \mathbf{dA} \cdot (\nabla \times [\mathbf{a}F])$$

$$\begin{aligned}
&= \oint \mathbf{dA} \cdot (F \nabla \times \mathbf{a} + (\nabla F) \times \mathbf{a}) \\
&= \oint \mathbf{dA} \cdot (\nabla F) \times \mathbf{a} \\
&= \oint \mathbf{dA} \times (\nabla F) \cdot \mathbf{a} \\
&= \mathbf{a} \cdot \oint \mathbf{dA} \times (\nabla F) \tag{0.54}
\end{aligned}$$

Från detta följer

$$\oint \mathbf{dr} F = \oint \mathbf{dA} \times (\nabla F) \tag{0.55}$$