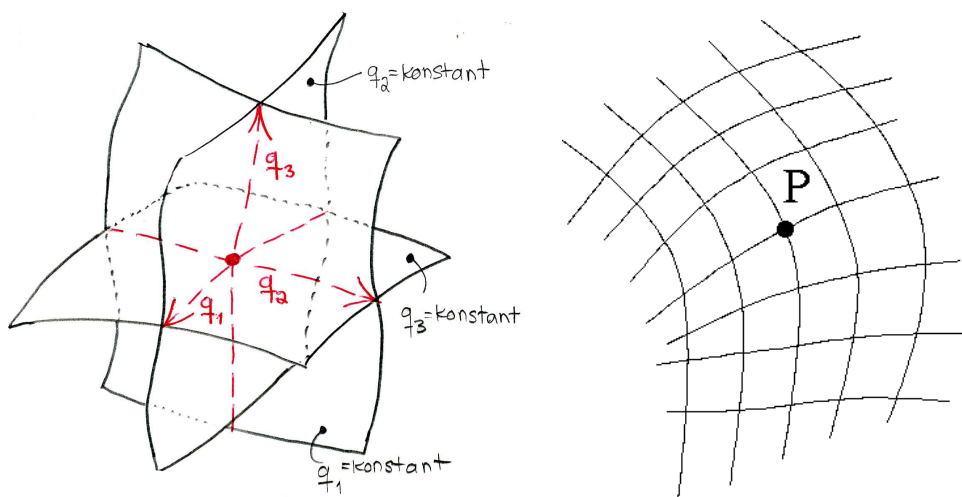


Appendix A: Differentialoperatorer i olika koordinatsystem

[Arfken, BETA, Lahtinen]

A. 1. Kurvilineära koordinatsystem



Antag att i ett Cartesiskt (x, y, z) koordinatsystem med basvektorerna $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ existerar en 1 - till - 1 avbildning mellan (x, y, z) och koordinaterna (q_1, q_2, q_3) i ett kurvilineärt koordinatsystem.

Antag vidare att ytorna $q_i = \text{konstant}$ skär varandra vinkelrätt i punkten $P = (x, y, z)$. Skärningskurvorna mellan dessa plan bildar koordinatlinjerna q_i .

De lokala basvektorer $\hat{\mathbf{u}}_i$ i det kurvilineära koordinatsystemet formar ett lokalt ortonormerat (ON) system om

$$\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}_j = \delta_{ij}. \quad (\text{A-1})$$

Enhetsvektorer definieras som

$$\hat{\mathbf{u}}_i \equiv \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad (\text{A-2})$$

där

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right|, \quad (\text{A-3})$$

kallas **skalfaktor**.

Om vi valt enhetsvektorer så att de bildar ett högerhandssystem, så gäller

$$\hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_2 = \hat{\mathbf{u}}_3, \quad (\text{A-4})$$

och samma för cykliska permutationer (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2). Jämför med Levi-Civitas symbol !

Ortsvektorn för en given punkt är

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{A-5})$$

i det Cartesiska systemet, och

$$\mathbf{r} = q_1\hat{\mathbf{u}}_1 + q_2\hat{\mathbf{u}}_2 + q_3\hat{\mathbf{u}}_3, \quad (\text{A-6})$$

i det kurvilineära systemet.

★ ★ ★

En differentiell sträcka i det kurvilineära systemet skrivs

$$d\mathbf{r} = \sum_i h_i dq_i \hat{\mathbf{u}}_i. \quad (\text{A-7})$$

Efter multiplikation med $\hat{\mathbf{u}}_j$:

$$dr_j = h_j dq_j, \quad (\text{A-8})$$

som alltså är en differentiell sträcka längs med koordinataxeln q_j .

En differentiell yta i riktningen $\hat{\mathbf{u}}_k$ är

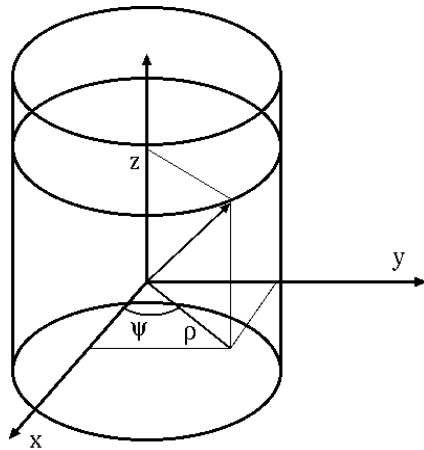
$$d\mathbf{A} = dA\hat{\mathbf{u}}_k = dr_i dr_j \hat{\mathbf{u}}_k = h_i h_j dq_i dq_j \hat{\mathbf{u}}_k, \quad (\text{A-9})$$

där indexen i, j, k kan permuteras cykliskt.

Ett differentiellt volymelement är analogt

$$dV = dr_1 dr_2 dr_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (\text{A-10})$$

A. 1.1. Cylindriska koordinater



$$x = \rho \cos \psi, \quad (\text{A-11})$$

$$y = \rho \sin \psi, \quad (\text{A-12})$$

där $\rho \in [0, \infty)$ och $\psi \in [0, 2\pi)$.

Basvektorena (onormaliserade!) är

$$\mathbf{u}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \psi \hat{\mathbf{x}} + \sin \psi \hat{\mathbf{y}}, \quad (\text{A-13})$$

$$\mathbf{u}_\psi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} = -\rho \sin \psi \hat{\mathbf{x}} + \rho \cos \psi \hat{\mathbf{y}}. \quad (\text{A-14})$$

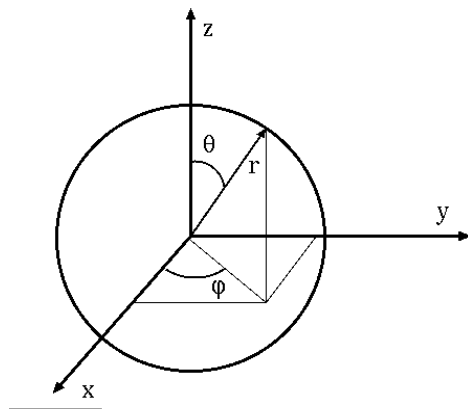
Skalfaktorerna är $h_\rho = 1$ och $h_\psi = \rho$, så enhetsvektorena blir

$$\hat{\mathbf{u}}_\rho = \cos \psi \hat{\mathbf{x}} + \sin \psi \hat{\mathbf{y}}, \quad (\text{A-15})$$

$$\hat{\mathbf{u}}_\psi = -\sin \psi \hat{\mathbf{x}} + \cos \psi \hat{\mathbf{y}}. \quad (\text{A-16})$$

Observera: $\hat{\mathbf{u}}_\rho \times \hat{\mathbf{u}}_\psi = \cos \psi \cos \psi \hat{\mathbf{z}} - (\sin \psi \sin \psi (-\hat{\mathbf{z}})) = \hat{\mathbf{z}}$, d.v.s. systemet är orienterat som (ρ, ψ, z) .

A. 1.2. Sfäriska koordinater



$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad (\text{A-17})$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad (\text{A-18})$$

$$z = r \cos \theta, \quad (\text{A-19})$$

där $r \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ och $\theta \in [0, \pi)$.

Basvektorena är

$$\mathbf{u}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{A-20})$$

$$\mathbf{u}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + r \cos \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{y}}, \quad (\text{A-21})$$

$$\mathbf{u}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \cos \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + r \sin \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{y}} - r \sin \theta \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{A-22})$$

Skalfaktorerna är $h_r = 1$, $h_\varphi = r \sin \theta$ och $h_\theta = r$, så enhetsvektorena blir

$$\hat{\mathbf{u}}_r = \cos \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{A-23})$$

$$\hat{\mathbf{u}}_\varphi = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}, \quad (\text{A-24})$$

$$\hat{\mathbf{u}}_\theta = \cos \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{A-25})$$

Observera:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_r \times \hat{\mathbf{u}}_\varphi &= \cos^2 \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{z}} - (\sin^2 \varphi \sin \theta (-\hat{\mathbf{z}})) - \sin \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \varphi \cos \theta (-\hat{\mathbf{x}}) \\ &= -\cos \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{y}} + \sin \theta \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\hat{\mathbf{u}}_\theta, \end{aligned} \quad (\text{A-26})$$

d.v.s. $\hat{\mathbf{u}}_\varphi \times \hat{\mathbf{u}}_r = \hat{\mathbf{u}}_\theta$ och $\hat{\mathbf{u}}_r \times \hat{\mathbf{u}}_\theta = \hat{\mathbf{u}}_\varphi$ efter en cyklisk permutering. Med andra ord, systemet är orienterat som (r, θ, φ) .

A. 2. Gradient

Gradienten av en skalär funktion f är

$$\nabla f \equiv \sum_i \hat{\mathbf{u}}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\text{A-27})$$

i Cartesiska koordinater.

Derivatan i riktningen $\hat{\mathbf{v}}$ är

$$\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial v} \equiv 1 \cdot |\nabla f| \cos \alpha, \quad (\text{A-28})$$

där α är vinkeln mellan $\hat{\mathbf{v}}$ och gradienten. Från detta ser man att riktningsderivatan är störst i gradientens riktning, eftersom då gäller $\alpha = 0$, och minst (0) i en riktning som är ortogonal mot gradienten.

En generalisering av riktningsderivatans definition ger

$$\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r_i} \equiv \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad (\text{A-29})$$

så att i kurvilineära koordinater

$$\nabla f = \sum_i \hat{\mathbf{u}}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad (\text{A-30})$$

Observera:

$$\nabla q_j = \sum_i \hat{\mathbf{u}}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial q_j}{\partial q_i} = \frac{\hat{\mathbf{u}}_j}{h_j} \quad (\text{A-31})$$

så att

$$\hat{\mathbf{u}}_j = h_j \nabla q_j \quad (\text{A-32})$$

A. 3. Divergens

Divergensen av en vektor $\mathbf{F}$ är

$$\text{div } \mathbf{F} \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{dA} \cdot \mathbf{F}}{V} \quad (\text{A-33})$$

Beräkna denna komponentvis:

$$\nabla \cdot (F_1 \hat{\mathbf{u}}_1) \quad (\text{A-34})$$

Men

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \hat{\mathbf{u}}_j \times \hat{\mathbf{u}}_k, \quad (\text{A-35})$$

då i, j, k är cykliskt permuterade, så

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (F_1 \hat{\mathbf{u}}_1) &= \nabla \cdot (F_1 h_2 h_3 \nabla q_2 \times \nabla q_3) \\ &= \nabla (F_1 h_2 h_3) \cdot (\nabla q_2 \times \nabla q_3) + F_1 h_2 h_3 \nabla \cdot (\nabla q_2 \times \nabla q_3) \\ &= \nabla (F_1 h_2 h_3) \cdot (\nabla q_2 \times \nabla q_3) + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hat{\mathbf{u}}_2 \times \hat{\mathbf{u}}_3}{h_2 h_3} \cdot \nabla (F_1 h_2 h_3) \\
&= \frac{\hat{\mathbf{u}}_1}{h_2 h_3} \cdot \nabla (F_1 h_2 h_3) \\
&= \frac{\hat{\mathbf{u}}_1}{h_2 h_3} \cdot \left[\frac{\hat{\mathbf{u}}_1}{h_1} \frac{\partial (F_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (F_1 h_2 h_3)}{\partial q_1}
\end{aligned} \tag{A-36}$$

Motsvarande för de övriga komponenterna ger

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (F_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (F_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (F_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right]. \tag{A-37}$$

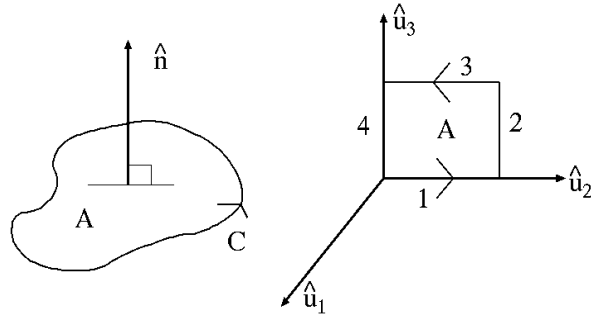
A. 4. Rotor

Rotorn av ett vektorfält $\mathbf{F}$ definieras som

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} \equiv \nabla \times \mathbf{F} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_A \mathbf{dA} \times \mathbf{F}}{V}. \tag{A-38}$$

Man kan visa att komponenten i $\hat{\mathbf{n}}$ -riktningen är

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{F}}{A}. \tag{A-39}$$



Kurvintegralens första term, för $\mathbf{A}$ i riktningen $\hat{\mathbf{u}}_1$, ger

$$\begin{aligned}
 & dr_2 F_2 + dr'_3 F'_3 - dr'_2 F'_2 - dr_3 F_3 \\
 = & h_2 dq_2 F_2 + (h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial s_2} h_2 dq_2) dq_3 (F_3 + \frac{\partial F_3}{\partial s_2} h_2 dq_2) \\
 & - (h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial s_3} h_3 dq_3) dq_2 (F_2 + \frac{\partial F_2}{\partial s_3} h_3 dq_3) - h_3 dq_3 F_3 \\
 \approx & -h_2 dq_2 \frac{\partial F_2}{\partial s_3} h_3 dq_3 - F_2 \frac{\partial h_2}{\partial s_3} h_3 dq_3 dq_2 + h_3 dq_3 \frac{\partial F_3}{\partial s_2} h_2 dq_2 + F_3 \frac{\partial h_3}{\partial s_2} h_2 dq_2 dq_3 \\
 = & -\frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 F_2) dq_2 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 F_3) dq_2 dq_3 \quad (\text{A-40})
 \end{aligned}$$

Division med $dA = h_2 dq_2 h_3 dq_3$ ger

$$\frac{1}{h_2 h_3} \left[-\frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 F_2) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 F_3) \right]. \quad (\text{A-41})$$

Motsvarande för de övriga komponenterna ger slutligen

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\mathbf{u}}_1 & h_2 \hat{\mathbf{u}}_2 & h_3 \hat{\mathbf{u}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{A-42})$$

A. 5. Laplace-operatorn

Laplaceoperatorn av skalärfältet f är

$$\nabla \cdot (\nabla f) \equiv \operatorname{div} (\nabla f) = \operatorname{div} \left(\sum_i \hat{\mathbf{u}}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right). \quad (\text{A-43})$$

Med uttrycket för divergensen fås

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (\text{A-44})$$

A. 6. Sammandrag

A. 6.1. Cylindriska koordinater

Skalfaktorerna: $h_\rho = 1$, $h_\psi = \rho$, och $h_z = 1$.

$$\nabla f = \hat{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\psi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \psi} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{A-45})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &\equiv \nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(F_\rho \rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial(F_\psi)}{\partial \psi} + \frac{\partial(F_z \rho)}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(F_\rho \rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial(F_\psi)}{\partial \psi} \right] + \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{A-46})$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\psi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \psi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\psi & F_z \end{vmatrix} \quad (\text{A-47})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (\text{A-48})$$

A. 6.2. Sfäriska koordinater

Skalfaktorerna: $h_r = 1$, $h_\theta = r$, och $h_\varphi = r \sin \theta$.

$$\nabla f = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (\text{A-49})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &\equiv \nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(F_r r^2 \sin \theta)}{\partial r} + \frac{\partial(F_\theta r \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(F_\varphi r)}{\partial \varphi} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(F_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(F_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (\text{A-50})$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\varphi \end{vmatrix} \quad (\text{A-51})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (\text{A-52})$$