

18. Sammanfattning

18.2. Ursprung och form av fältena

- Elektriska laddningar (monopoler) i vila ger upphov till elfält
 - Elektriska laddningar i rörelse ger upphov till magnetfält
 - Elektriska laddningar i acceleration ger upphov till (elektromagnetisk) strålning
-
- Magnetiska monopoler existerar ej
 - Magnetiska dipoler ger upphov till magnetfält
-
- Tidsföränderliga magnetfält ger upphov till elfält
 - Tidsföränderliga elfält ger upphov till magnetfält
-
- Monopolfält avtar som $1/r^2$
 - Dipolfält avtar som $1/r^3$

18.1. Kraft, fält och potential

Krafter $\mathbf{F}$ är fysikaliskt mätbara storheter

Elfält beror på kraften som

$$\mathbf{F} = E\mathbf{q} \quad (18.1)$$

Potential ϕ är en matematisk konstruktion som definieras av

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (18.2)$$

För punktladdningar i vila gäller Coulombs lag

$$\mathbf{E} = C \frac{q}{r_{21}^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}, \quad (18.3)$$

där C är enheten som definierar det elektriska enhetssystemet.

18.3. Elektrostatik

I en elektrostatisk situation (ingen ström, inget tidsberoende) gäller:

- (i) Inne i en ledare är elfältet noll.
- (ii) Inne i en ledaren är laddningstätheten noll.
- (iii) Nettoladdningar befinner sig på ytan.
- (iv) En ledare utgör en ekvipotentialyta.
- (v) Elfältet är vinkelrätt mot en ledares yta.

18.4. Dielektrika

Ett perfekt dielektrikum (isolator) är ett material som inte innehåller några fria laddningar alls. Dielektrika reagerar på yttre elektriska fält så att de **polariseras**, d.v.s. dipoler induceras i materialet. Detta ger upphov till ett elfältsbidrag **innanför och utanför** dielektriket.

Eftersom dielektrika polariseras, så har varje region med volymen dV ett dipolmoment Detta kan beskrivas med **polarisationen**

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV}, \quad [P] = C/m^2, \quad (18.4)$$

Elektrisk förskjutning (*displacement*) eller **elektriskt flödestäthet** (*flux*) definieras med

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (18.5)$$

Flödet kan skrivas

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = (\varepsilon_0 + \chi_e(E)) \mathbf{E} \equiv \varepsilon(E) \mathbf{E} \quad (18.6)$$

där ε är det dielektriska materialets **permittivitet**.

Man definierar också den **relativa permittiviteten** eller **dielektricitetskonstanten**. ε_r via ekvationen

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (18.7)$$

för vilket gäller

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\chi_e}{\varepsilon_0} \quad (18.8)$$

$\varepsilon_r > 1$ för övriga media än vakuum.

18.5. Elektromagnetisk energi

Energitätheten energi/volym från elfält ges av

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon} D^2 \quad (18.9)$$

Energitätheten för isotropiska linjära magnetiska media är

$$u_M = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2\mu} B^2 \quad (18.10)$$

18.6. Elektrisk ström

Laddningar i rörelse utgör en **(elektrisk) ström** och definieras

$$I \equiv \frac{dQ}{dt}, \quad (18.11)$$

För de flesta metaller gäller **Ohms lag**.

$$\mathbf{J} = g(E) \mathbf{E}, \quad (18.12)$$

där g kallas **konduktivitet**. För linjära isotropiska — också kallade **ohmiska** — media gäller att $g(E)$ är oberoende av E , så att

$$\mathbf{J} = g \mathbf{E} \quad (18.13)$$

Man definierar också **resistiviteten**

$$\eta = \frac{1}{g} \quad (18.14)$$

och resistans R

$$R = \frac{\eta L}{A} \quad (18.15)$$

Dessa ekvationer och energiekvation leder till "minimala elektroniken" "URI-PUI":

$$U = RI \quad (18.16)$$

$$P = UI \quad (18.17)$$

som alla fysiker bör komma ihåg fast de skulle väckas kl. 4 på natten i 3 promilles fylla!

För **paramagnetiska** material gäller att $\chi_M > 0$, så att $\mathbf{B} > \mu_0 \mathbf{H}$, d.v.s. magnetfältet **förstärks** inne i materialet. Detta ger att $\mu > 1$. Materialets dipoler vill alltså ordna sig med det externa fältet.

För **diamagnetiska** material har man att $\chi_M < 0$ och $\mathbf{B} < \mu_0 \mathbf{H}$, d.v.s. magnetfältet **försvagas** inne i materialet. Vi har då att $\mu < 1$. Materialets dipoler ordnar sig motsatt fältet, så att detta försvagas inne i materialet.

I allmänhet gäller att $|\chi_M| \ll 1$ för dessa material.

Ferromagnetiska material har *inte* en konstant susceptibilitet eller permeabilitet, utan dessa varierar med det externa magnetfältet.

Ferromagneter uppvisar en **permanent magnetisering**, d.v.s. de är **magneter**.

Om en ferromagnet har magnetiserats av ett fält till en punkt $H_{\max}, B_{\max}$, och man sedan minskar på det yttre fältet, så kommer (H, B) -punkterna *inte* att ligga på den kurva man fick då materialet magnetiserades. Detta beteende kallas **hysteresis** och ser typiskt ut som:

18.7. Magnetiska material

Man kan skriva magnetiseringen för isotropiska material enligt

$$\mathbf{M} \equiv \chi_M \mathbf{H} \quad (18.18)$$

där χ_M är materialets **magnetiska susceptibilitet**.

Från detta följer att

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_M \mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi_M)\mathbf{H} \quad (18.19)$$

Man definierar ett materials **magnetiska permeabilitet** μ med hjälp av ekvationen

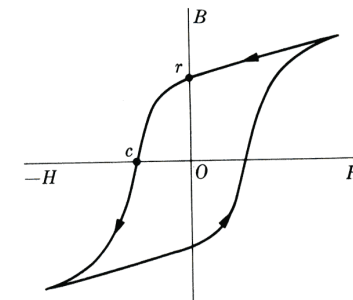
$$\mathbf{B} \equiv \mu \mathbf{H} \quad (18.20)$$

och därmed

$$\mu = (1 + \chi_M)\mu_0 \equiv \mu_r \mu_0 \quad (18.21)$$

där μ_r är den **relativa permeabiliteten**.

För **para- och diamagnetiska** material gäller att χ_M, μ är konstanter, förutsatt att det påverkande magnetfältet inte är för starkt.



18.8. Vågor

Maxwells lagar leder direkt till **vågekvationen för magnetfältet**

$$\nabla^2 \mathbf{H} - g\mu\partial_t \mathbf{H} - \varepsilon\mu\partial_t^2 \mathbf{H} = 0 \quad (18.22)$$

samt **vågekvationen för elfältet**

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\partial_t g\mathbf{E} - \mu\varepsilon\partial_t^2 \mathbf{E} = 0 \quad (18.23)$$

Vågekvationerna gäller för linjära, ledande eller icke-ledande neutrala media.

Monokromatiska vågor betyder detta att endast en vinkelfrekvens ω förekommer. Dessa fortskrider i vakuum som

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{\pm i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t \mp \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})} \quad (18.24)$$

Imaginärdelen (för att få en sinus-funktion) ger det fysikaliskt verkliga fältet

$$\mathbf{E}'_P(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{P,0} \sin(\omega t \mp \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \quad (18.25)$$

Vågen rör sig alltså i riktningen $\pm \hat{\mathbf{u}}$ med hastigheten c

Grundläggande ekvationer för **monokromatiska plana vågor i vakuum**:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad (18.26)$$

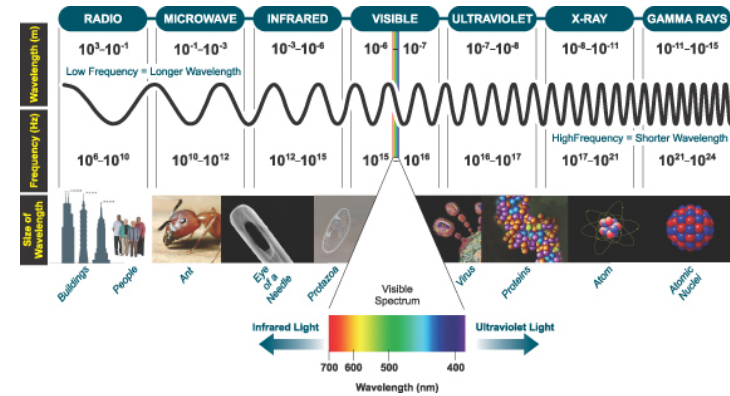
$$\kappa = \frac{\omega}{c} \quad (18.27)$$

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} \quad (18.28)$$

$$= \frac{c2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\kappa} \quad (18.29)$$

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (18.30)$$

där T är perioden (tiden) i en oskillationsfrekvens.



18.9. Spridning av strålning

Ifall

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (18.31)$$

är mycket större än strålmålets linjära dimension gäller att strålningens sprids som **Rayleighs lag**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu_0^2 \omega^4}{16\pi^2 E_0^2} |\text{Komplikerat vektorberoende}|^2 \quad (18.32)$$

Detta förklarar också varför himlen är blå, och solnedgången röd!

18.10. Klassiska elektrodynamikens lag om allting

Fyra grundläggande ekvationer beskriver elektriska och magnetiska fält fullständigt i all situationer som nånsin observerats ovanför kvantmekanikens skala:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (18.33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (18.34)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (18.35)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (18.36)$$

Första ekvationen är Gauss' lag, som följer från Coulombs experimentella lag om kraften mellan laddningar.

Andra ekvationen följer från Biot-Savarts experimentella lag för hur flödestätheten kan bestämmas från givna strömmar.

Tredje ekvationen är Faradays lag, d.v.s. den experimentella observationen att föränderliga magnetiska flöden genererar elfält.

Fjärde ekvationen är en generaliserad form av Ampères lag, som följer från Biot-Savarts experimen-

tella lag.

Tillsammans med de konstitutiva tensorekvationerna

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}) \quad (18.37)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B}) \quad (18.38)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}) \quad (18.39)$$

för allmänna icke-linjära, anisotropiska material och Lorentzkraften

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (18.40)$$

ger Maxwells ekvationer en fullständig klassisk beskrivning av växelverkande elektromagnetiska partiklar och material.

Kontinuitetsekvationen finns inbakad i dessa ekvationer, så den behöver inte räknas upp separat.

18.11. Final: den klassiska elektrodynamikens roll i fysiken

Som en sammanfattning av kursen, kan vi ännu repetera vilken roll den klassiska elektrodynamikens spelar i fysiken?

Den praktiska betydelsen är klar: elektrodynamiken leder till all elektronik och optik som vi känner till i vardagslivet. Via dess roll i växelverkan mellan elektroner och atomkärnor i Schrödingerekvationen har den dessutom en central roll till att leda till all kemi och materialfysik.

Fundamentalt sett konstaterade vi i början av kursen att den elektrodynamiken som baserar sig på Maxwells ekvationer och Lorentz kraftekvation är den klassiska gränsen för kvantelektrodynamiken. Den kvantmekaniska gränsen kommer i de flesta fall fram först innanför atomkärnan och mindre längdsskalor än den. Ovanom gränsen är den klassiska elektrodynamiken verifierad av otaliga experiment och fungerar extremt bra.

I slutet av kursen visade vi att den klassiska elektrodynamiken är helt kompatibel med relativitetsteorin, bara koordinattransformationen görs som Lorentz-transformationen och Einsteins postulat i speciella relativitetsteorin beaktas.

Till slut kan vi konstatera att iom. att kvantmekaniken och relativitetsteorin fortfarande inte är ihopfogade med en "teori över allting", är inte heller den klassiska elektrodynamikens slutgiltiga plats i det fysikaliska pusslet slutgiltigt klart. Men klart är att teorin över allting måste leda till den klassiska elektrodynamiken som ett gränsfall för vardagsnära fysik.

Trevlig elektrodynamisk sommar!!



(Fotnot att grubbla över under semestern: Kan du lista ut från kursens innehåll (jämför med tidigare enkla fysikkurser du tagit) orsaker till varför en bil (eller annan metallbur) inte nödvändigtvis är ett fullständigt bra skydd mot en blixt?)