16. Spridning av elektromagnetisk strålning

[Jackson 9.6-]

Med *spridning* avses mest allmänt processen där strålning (antingen av partikel- eller vågnatur) växelverkar med något objekt så att dess fortskridningsriktning ändrar.

Ifall spridningen sker så att den inkommande partikeln förlorar ingen avsevärd del av sin energi, kallas processen för elektromagnetiska vågor **elastisk spridning**. Motsatsen är **inelastisk spridning**.

Det är dock skäl att notera att p.g.a. bevarelsen av energi och rörelsemängd förlorar en partikel (också en foton) alltid någon energi om dess riktning ändras. Därför måste definitionen på elastisk spridning innehålla termen "ingen avsevärd del".

Här råder dock en smärre begreppsförvirring. Då man diskuterar spridning av partiklar med massa (t.ex. i kärnfysiken), definierar man ofta elastisk spridning som spridning där endast två partiklar deltar. Inelastik spridning avser då spridning där det uppkommer en tredje partikel (t.ex. en atom kolliderar med en annan så att en elektron exciteras och emitteras ut ur systemet, så spridningen innehåller två inkommande men tre utgående partiklar).

På denna kurs behandlar vi givetvis bara spridning av elektromagnetiska vågor, och också detta i bara det enklaste tänkbara fallet. Men det leder till ett trevligt slutresultat.

16.1. Spridning av strålning med lång våglängd

Om elektromagnetisk strålning med lång våglängd eller låg frekvens träffar en massiv kropp, inducerar strålningen oskillerande multipoler i kroppen, som oskillerar med den infallande strålningens frekvens.

Alltså

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} \tag{16.1}$$

antas vara mycket större än strålmålets linjära dimension.

Ekvationerna för en plan monokromatisk våg var ju (se kapitel 12.6):

$$\mathbf{E}_{in}(\mathbf{r}, t) = E_{0p} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi)\widehat{\mathbf{p}} + E_{0s} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})\widehat{\mathbf{s}} \tag{16.2}$$

$$\mathbf{B}_{in} = \frac{n}{c}\widehat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_{in} \tag{16.3}$$

$$= \frac{n}{c}\left(E_{0p} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi)\widehat{\mathbf{s}} - E_{0s} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})\widehat{\mathbf{p}}\right) \tag{16.4}$$

Här avser nu underindexet in att det är fråga om en våg som kommer in på en kropp.

De oskillerande multipolerna i kroppen utstråler en "spridd" våg. De viktigaste komponenterna i den spridda strålningen är i allmänhet strålningen från strålmålets elektriska och magnetiska dipolmoment.

Långt utanför strålmålet är de utstrålade elfälten alltså fälten från en oskillerande elektrisk och magnetisk dipol. Uttrycken för dessa var ju (jfr. kapitel 15):

Elektrisk dipol:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \times \frac{\sin\theta}{r} \times \cos(\omega(t - r/c))\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{16.5}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{E}\cdot\widehat{\boldsymbol{\theta}}}{c}\widehat{\boldsymbol{\psi}} \tag{16.6}$$

Magnetisk dipol:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \times \frac{\sin\theta}{r} \times \cos(\omega t - \omega r/c)\widehat{\boldsymbol{\phi}} \tag{16.7}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \approx -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \times \frac{\sin\theta}{r} \times \cos(\omega t - \omega r/c)\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{16.8}$$

Dessa gällde alltså för en sfärisk våg som framskrider i riktningen $\widehat{\mathbf{r}}$.

De kombinerade utstrålade dipolfälten blir

$$\boldsymbol{E}_{sc} = - \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \times \frac{\sin\theta}{r} \times \cos(\omega(t - r/c))\widehat{\boldsymbol{\theta}} \tag{16.9}$$

$$+ \quad \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \times \frac{\sin\theta}{r} \times \cos(\omega t - \omega r/c)\widehat{\boldsymbol{\phi}} \tag{16.10}$$

$$= \quad \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r} \times \cos(\omega(t - r/c)) \left(-p_0\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{m_0}{c}\widehat{\boldsymbol{\phi}}\right) \tag{16.11}$$

$$\mathbf{B}_{sc} = \frac{1}{c}\widehat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{sc} \tag{16.12}$$

där underindexet sc står för "scattered" (spridd på engelska).

Den inkommande och utstrålade strålningen kan uppdelas i komponenter med olika polarisationsriktning.

Den komponent av den infallande strålningen som har polarisationen $\hat{\epsilon}_0$ är

$$\boldsymbol{E}_{in} \to (\hat{\epsilon}_0^* \cdot \boldsymbol{E}_{in})\hat{\epsilon}_0 \tag{16.13}$$

$$\boldsymbol{B}_{in} \to \frac{1}{c}(\hat{\epsilon}_0^* \cdot \boldsymbol{E}_{in})\hat{k} \times \hat{\epsilon}_0 \tag{16.14}$$

Komplexkonjugeringen behövs ifall polarisationen är cirkulär, då skalärprodukten för rotationskomponenter är definierad $\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$

Den komponent i utdående strålningen som är polariserad $(\boldsymbol{E})$ i riktningen $\hat{\epsilon}$ kan skrivas som

$$\boldsymbol{E}_{sc} \to (\hat{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{E})\hat{\epsilon} \tag{16.15}$$

$$\boldsymbol{B}_{sc} \to \frac{1}{c}(\hat{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{E})\hat{r} \times \hat{\epsilon} \tag{16.16}$$

Den differentiella träffytan $d\sigma$ definieras som

$$d\sigma = \frac{\text{effekt utstrålad i riktningen } \hat{r} \text{ med polarisation } \hat{\epsilon}}{\text{infallseffekt/ytenhet med polarisation } \hat{\epsilon}_0} = \frac{P_{ut} r^2 d\Omega}{P_{in}} \tag{16.17}$$

och ger alltså en (differentiell) tvärsnittsyta för vilken andel av den inkommande strålningen avges i en viss riktning. Riktningen ges oftast som den differentiella rymdvinkeln $r^2 d\Omega$.

Effektutstrålning i riktningen $\hat{r}$ med polarisation $\hat{\epsilon}$ fås med Poyntingvektorn:

$$\begin{aligned} P_{ut} r^2 d\Omega &= \frac{1}{2}\hat{r} \cdot (\boldsymbol{E}_{sc} \times \boldsymbol{H}_{sc}^*) r^2 d\Omega && (16.18) \\ &= \frac{1}{2}\hat{r} \cdot \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}_{sc} \times \boldsymbol{B}_{sc}) r^2 d\Omega && (16.19) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c}|\hat{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{E}_{sc}|^2 \hat{r} \cdot \hat{\epsilon} \times (\hat{r} \times \hat{\epsilon}^*) r^2 d\Omega && (16.20) \end{aligned}$$

Termen med $\hat{r}$ och ϵ kan förenklas då man beaktar att polarisationsvektorn är vinkelrät mot

fortskridningsriktningen $\hat{r}$, så $\hat{\epsilon} \cdot \hat{r} = 0$ samt med BAC-CAB-regeln:

$$\hat{r} \cdot \hat{\epsilon} \times (\hat{r} \times \hat{\epsilon}^*) = \hat{r} \cdot \big(\hat{r}(\hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon}^*) - \epsilon^*(\hat{\epsilon} \cdot \hat{r})\big) = \hat{r} \cdot \hat{r} = 1 \tag{16.21}$$

så man får

$$P_{ut} r^2 d\Omega = \frac{1}{2\mu_0 c} d\Omega r^2 |\hat{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{E}_{sc}|^2 \tag{16.22}$$

Infallseffekt per ytenhet:

$$P_{in} = \frac{1}{2}\hat{k} \cdot (\boldsymbol{E}_{in} \times \boldsymbol{H}_{in}) = \frac{1}{2\mu_0 c}|\hat{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{E}_{in}|^2 \underbrace{\hat{k} \cdot \hat{\epsilon}_0 \times (\hat{k} \times \hat{\epsilon}_0)}_{1} \tag{16.23}$$

där man fått att kryssprodukttermen $= 1$ på samma sätt som ovan då $\hat{k} \perp \hat{\epsilon}_0$.

Alltså fås

$$d\sigma = \frac{r^2 d\Omega |\hat{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{E}_{sc}|^2}{|\hat{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{E}_{in}|^2} \tag{16.24}$$

och därmed

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = r^2 \frac{|\hat{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{E}_{sc}|^2}{|\hat{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{E}_{in}|^2} \qquad (16.25)}$$

Med att sätta in ekvationerna 16.2 samt 16.11 i detta får man det fullständiga uttrycket för spridningen.

Men nu är vi intresserade främst av medeltalet frekvensberoendet av spridningen. Då kan vi lämna bort tidsberoendet ur uttrycken, och skriva inkommande vågen i den enklare formen

$$\boldsymbol{E}_{in} = \hat{\epsilon}_0 E_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{16.26}$$

så man får

$$|\hat{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{E}_{in}|^2 = E_0^2 \tag{16.27}$$

För den spridda vågen fås:

$$\begin{aligned}
r^2|\hat{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{E}_{sc}|^2 &= r^2 \left| \hat{\epsilon}^* \cdot \frac{\mu_0\omega^2}{4\pi}\frac{1}{r} \times \sin\theta\cos(\omega r/c)) \left(-p_0\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{m_0}{c}\widehat{\boldsymbol{\phi}}\right)\right|^2 && (16.28)\\
&= r^2\frac{\mu_0^2\omega^4}{16\pi^2}\frac{1}{r^2} \left| \hat{\epsilon}^* \cdot \sin\theta\cos(\omega r/c)) \left(-p_0\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{m_0}{c}\widehat{\boldsymbol{\phi}}\right)\right|^2 && (16.29)\\
&= \frac{\mu_0^2\omega^4}{16\pi^2} \left| \hat{\epsilon}^* \cdot \sin\theta\cos(\omega r/c)) \left(-p_0\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{m_0}{c}\widehat{\boldsymbol{\phi}}\right)\right|^2 && (16.30)\\
& && (16.31)
\end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu_0^2\omega^4}{16\pi^2 E_0^2}\left|\hat{\epsilon}^* \cdot \sin\theta\cos(\omega r/c))\left(-p_0\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{m_0}{c}\widehat{\boldsymbol{\phi}}\right)\right|^2 \tag{16.32}$$

Denna typ av spridning är känd som Rayleigh-spridning. Det viktigaste i detta resultat är frekvensberoendet:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \omega^4 \qquad (16.33)}$$

vilket är känt som **Rayleighs lag**.

Detta resultat kan jämföras med resultaten i förra kapitlet för strålningen ut från oskillerande elektriska och magnetiska dipoler. Även i dessa fick man resultatet att effekten är $\propto \omega^4$, men denna härledning här ger alltså sambandet mellan inkommande och utgående våg.

Detta förklarar också varför himlen är blå, och solnedgången röd!

Orsaken är att atmosfären kan i första approximation anses vara en tunn gas av dipoler (kväve- och syremolkyler N_2 och O_2) ur vilket soljuset sprids. För att molekylerna är slumpmässigt riktade, försvinner polarisationsfaktorerna i medeltal, och den dominerande effekten är en spridning av ljuset proportionellt mot frekvensens fjärde potens.

För synligt ljus innebär detta att rött ljus (som har lägst frekvens) sprids minst, och blått och violett ljus mest. Dessutom måste man beakta hur effektivt ljuset absorberas i atmosfären. Detta

kan beräknas ur atmosfärens absorptionskoefficient α (jfr. kapitel 12.7).

Här är resultat för inträngningsdjupet $1/\alpha$ i atmosfären samt hur stor andel av soljusets intensitet absorberas från atmosfärens topp till jordytan I_{yta}/I_0 [Jackson sid. 423]:

Färg	Inträngingsdjup (km)	Andel som når ytan	
		Solen i zenith	Soluppgång/nergång
Rött (6500 Å)	188	0.96	0.21
Grönt (5200 Å)	77	0.90	0.024
Violett (4100 Å)	30	0.76	0.000065

Himlen är alltså blå för att då blått ljus sprids mera, och vi ser ljuset som spritts (ögat är mindre känsligt för violett ljus så den blåa färgen ser ut att dominera).

Soluppgången och solnedgången är röda för då måste solstrålarna färdes längre väg i atmosfären, och s.g.s. allt blått ljus hinner absorberas.

Himmel över acceleratortornet
i Canberra, Australien

Solnedgång över Columbia-floden
i Richland, WA, USA