

15. Strålande system

[Griffiths,RMC]

15.1. Introduktion

Laddningar i vila eller i likformig rörelse skapar inte elektromagnetiska vågor för detta krävs att laddningarna befinner sig i **accelererad rörelse**. Endast i detta fall genererar de strålning.

Strålning karaktäriseras av en irreversibel förlust av energi (för laddningen), då denna förloras ut till oändligheten.

Den utstrålade effekten beräknas över en yta tagen i oändligheten, enligt

$$P_s = \lim_{r \rightarrow \infty} P(r) \quad (15.1)$$

där

$$P(r) = \oint d\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = \oint d\mathbf{A} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (15.2)$$

Räkningarna är i allmänhet enklast att utföra över en sfärisk yta.

I detta fall ser vi att en laddningsfördelning genererar strålning förutsatt att produkten av $\mathbf{E}$ och $\mathbf{H}$ innehåller termer som är proportionella mot $1/r^2$.

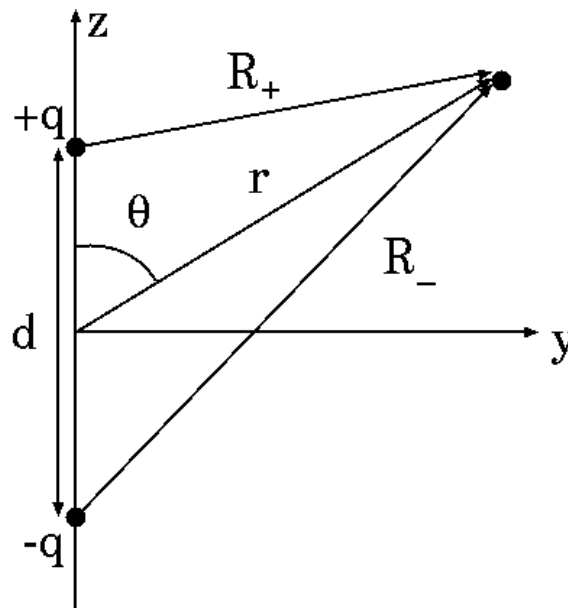
Termer i produkten som är proportionella mot $1/r^n$, $n < 2$ är inte strålning för de leder till ett fält vars effektintegral växer mot oändligt då ytan väljs på ökande avstånd, vilket inte är fysikaliskt (integralen över dA har ju i sfäriska koordinater en term r^2). Termer som är proportionella mot

$1/r^n, n > 2$ försvinner då man väljer ytan tillräckligt långt borta.

Med andra ord, *endast de termer i el- och magnetfälten som är inverst proportionella mot avståndet ansvarar för produktion av strålning.*

15.2. Strålning från kontinuerliga laddningsfördelningar

15.2.1. Elektrisk dipol



Betrakta en dipol med tidsberoende laddningar $-q(t)$ och $q(t)$. Låt laddningen drivas fram och tillbaka mellan ändpunkterna, så att laddningen i ändorna är

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) \quad (15.3)$$

Dipolmomentet blir då

$$\mathbf{p}(t) = q d \hat{\mathbf{z}} \equiv p_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}} \quad (15.4)$$

Den retarderade skalärpotentialen är nu

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{+q_0 \cos(\omega t_{r1})}{R_+} + \frac{-q_0 \cos(\omega t_{r2})}{R_-} \right] \\ &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos(\omega(t - R_+/c))}{R_+} - \frac{\cos(\omega(t - R_-/c))}{R_-} \right] \end{aligned} \quad (15.5)$$

enligt receptet

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{Rc - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}} \quad (15.6)$$

för en punktladdning q . Vi har nu $\mathbf{v} = 0$.

Figuren ger oss

$$R_+^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - 2r\frac{d}{2}\cos\theta \quad (15.7)$$

$$R_-^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - 2r\frac{d}{2}\cos(\pi - \theta) \quad (15.8)$$

$$= \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 + 2r\frac{d}{2}\cos\theta \quad (15.9)$$

så att

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{\pm}} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 \mp rd\cos\theta + (d/2)^2}} \\ &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 \mp (d/r)\cos\theta + (d/2r)^2}} \end{aligned} \quad (15.10)$$

Observera: Vi söker för enkelhetens skull en **punktdipol**. För denna gäller att

Approx. 1 : $d \ll r$ (15.11)

men så att d inte helt försvinner från uttrycken.

En alternativ tolkning är ju att observationspunkten är mycket långt borta från dipolen.

Vi får nu med Taylorserien $(1 + x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x$

$$\frac{1}{R_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \quad (15.12)$$

$$R_{\pm} \approx r \left(1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \quad (15.13)$$

Vidare:

$$\begin{aligned} \cos(\omega(t - R_{\pm}/c)) &\approx \cos(\omega(t - r/c \left[1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta \right])) \\ &= \cos(\omega t - \frac{\omega r}{c} \left[1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta \right]) \\ &= \cos(\omega(t - \frac{r}{c}) \pm \frac{\omega d}{2c} \cos \theta) \\ &= \cos(\omega(t - \frac{r}{c})) \cos(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta) \\ &\quad \mp \sin(\omega(t - \frac{r}{c})) \sin(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta) \end{aligned} \quad (15.14)$$

där vi använt oss av en trigonometrisk relation för $\cos(a + b)$.

Vi analyserar nu fallet

$$\text{Approx. 2 : } d \ll \frac{c}{\omega} = \lambda \quad \text{och} \quad d \ll r \quad (15.15)$$

d.v.s. dipolen är mycket mindre än den (möjligtvis) utsända strålningens våglängd.

Detta betyder att $\omega d/c \ll 1$ eller $c/(\omega d) \gg 1$, som ger $\sin(A\omega d/c) \approx A\omega d/c$ och $\cos(A\omega d/c) \approx 1$.

Vi får nu

$$\begin{aligned} \cos(\omega(t - R_{\pm}/c)) &= \cos(\omega(t - \frac{r}{c})) \cos(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta) \\ &\quad \mp \sin(\omega(t - \frac{r}{c})) \sin(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta) \\ &\approx \cos(\omega(t - \frac{r}{c})) \mp \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \sin(\omega(t - \frac{r}{c})) \end{aligned} \quad (15.16)$$

Insättning i skalärpotentialen och bortkastande av termer som är proportionella mot $\omega d/c$ i kvadrat ger oss

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[-\frac{\omega}{c} \sin(\omega(t - r/c)) + \frac{1}{r} \cos(\omega(t - r/c)) \right] \quad (15.17)$$

Potentialerna och fälten undersökes i två huvudsakliga zoner eller regioner:

(1) *den statiska zonen*

(2) *strålningszonen*

Den statiska zonen definieras som alla punkter vars avstånd r till dipolen är mycket mindre än våglängden $\lambda = c/\omega$, där ω är vinkelfrekvensen för laddningen och strömmen i dipolen.

För strålningszonen gäller det motsatta, d.v.s. den omfattar alla punkter vars avstånd till dipolen är mycket större än λ .

Den statiska zonen

För att analysera den **statiska zonen** gör man alltså approximationen

Approx. 3 : $d \ll r \ll \frac{c}{\omega}$	(15.18)
---	----------------

Detta betyder att $d/r \ll 1$, $\omega d/c \ll 1$, och $\omega r/c \ll 1$, så att

$$\cos(\omega(t - r/c)) = \cos(\omega t - \omega r/c) \quad (15.19)$$

$$= \cos(\omega t) \cos(\omega r/c) + \sin(\omega t) \sin(\omega r/c) \quad (15.20)$$

$$\approx \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \omega r/c \quad (15.21)$$

$$\sin(\omega(t - r/c)) = \sin(\omega t - \omega r/c) \quad (15.22)$$

$$= \sin(\omega t) \cos(\omega r/c) - \cos(\omega t) \sin(\omega r/c) \quad (15.23)$$

$$\approx \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \omega r/c \quad (15.24)$$

Vi återfår våra tidigare resultat, men kan nu ytterligare förenkla uttrycken:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[-\frac{\omega}{c} \sin(\omega(t - r/c)) + \frac{1}{r} \cos(\omega(t - r/c)) \right] \quad (15.25) \\ &\approx \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[-\frac{\omega}{c} \left(\sin \omega t - \frac{\omega r}{c} \cos \omega t \right) + \frac{1}{r} \left(\cos \omega t + \frac{\omega r}{c} \sin \omega t \right) \right] \\ &= \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[-\frac{\omega}{c} \sin \omega t + \frac{\omega^2 r}{c^2} \cos \omega t + \frac{1}{r} \cos \omega t + \frac{\omega}{c} \sin \omega t \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[+\frac{\omega^2 r}{c^2} \cos \omega t + \frac{1}{r} \cos \omega t \right] \\
&\approx \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \omega t
\end{aligned} \tag{15.26}$$

Detta motsvarar en dipols elektrostatiske potential

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \tag{15.27}$$

multipliserat med tidsfaktorn $\cos(\omega t)$!

Potentialen innehåller nu inga sinus- eller cosinus-funktioner med argument av formen $\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}$, som behövs för att ha en fortskridande våg. I själva verket har vi nu $\boldsymbol{\kappa} \equiv 0$ enligt ekvationen ovan, så "vågen" är stationär. Av denna anledning talar man om den "statiska zonen".

Strålningszonen

Vi undersöker nu **strålningszonen**, som motsvarar approximationen

$$\text{Approx. 4 : } d \ll \frac{c}{\omega} \ll r \quad (15.28)$$

Observera: Approximationerna 1-2 gäller också !

Detta betyder att $\omega r/c \gg 1$ eller $c/(\omega r) \ll 1$.

Vidare, så har vi också att $r \gg d$ så att $r/d \gg 1$ eller $d/r \ll 1$.

Andra termen i uttrycket för skalärpotentialen kan nu approximeras bort, så vi får

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \approx -\frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c} \times \frac{\cos \theta}{r} \times \sin(\omega(t - r/c)) \quad (15.29)$$

För att bestämma fälten behöver vi ännu vektorpotentialen!

Laddningen som rör sig fram och tillbaka i dipolen ger upphov till en ström som är

$$I(t)\hat{\mathbf{z}} = \frac{dq(t)}{dt}\hat{\mathbf{z}} = -q_0 \omega \sin(\omega t)\hat{\mathbf{z}} \quad (15.30)$$

Vektorpotentialen blir nu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{dz' I}{R} \quad (15.31)$$

$$= -\hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 q_0 \omega}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{dz' \sin(\omega(t - R/c))}{R} \quad (15.32)$$

där

$$R = |\mathbf{r} - z'\hat{\mathbf{z}}| = r|\hat{\mathbf{r}} - (z'/r)\hat{\mathbf{z}}| \quad (15.33)$$

Eftersom $d \ll r$ gäller att $z'/r \approx 0$ och

$$R \approx r \quad (15.34)$$

och vi får

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx -\hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin(\omega(t - r/c)) \quad (15.35)$$

För el- och magnetfälten behöver vi gradienten av φ , tidsderivatan av $\mathbf{A}$, och rotorn av $\mathbf{A}$.

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) = \partial_r\varphi\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\partial_\theta\varphi\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (15.36)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{p_0\omega}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\cos\theta \left(-\frac{1}{r^2} \sin(\omega(t - r/c)) - \frac{\omega}{rc} \cos(\omega(t - r/c)) \right) \hat{\mathbf{r}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin\theta}{r^2} \sin(\omega(t - r/c)) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \\ &\approx \frac{p_0\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \times \frac{\cos\theta}{r} \times \cos(\omega(t - r/c)) \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (15.37)$$

Första och tredje termerna kunde kastas bort med hjälp av approximationen $r \gg c/\omega$.

För tidsderivatan fås

$$\partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \cos(\omega(t - r/c)) (\cos\theta \hat{\mathbf{r}} - \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (15.38)$$

Dessa uttryck ger nu elfältet som

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{A} \quad (15.39)$$

$$= -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{r} \times \cos(\omega(t - r/c)) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (15.40)$$

Magnetfältet ges nu direkt som

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{r} [\partial_r(r A_\theta) - \partial_\theta A_r] \hat{\boldsymbol{\psi}} \\ &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \left[\frac{\omega}{c} \sin \theta \cos(\omega(t - r/c)) + \frac{\sin \theta}{r} \sin(\omega(t - r/c)) \right] \hat{\boldsymbol{\psi}} \\ &\approx -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \times \frac{\sin \theta}{r} \times \cos(\omega(t - r/c)) \hat{\boldsymbol{\psi}} \end{aligned} \quad (15.41)$$

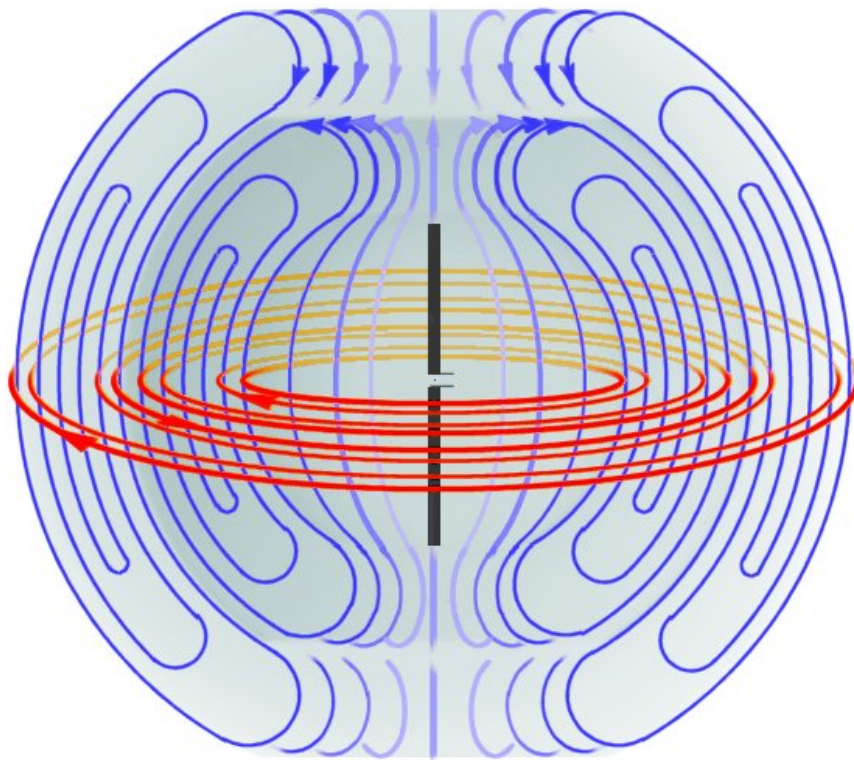
Sammanfattningsvis:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{r} \times \cos(\omega(t - r/c)) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (15.42)$$

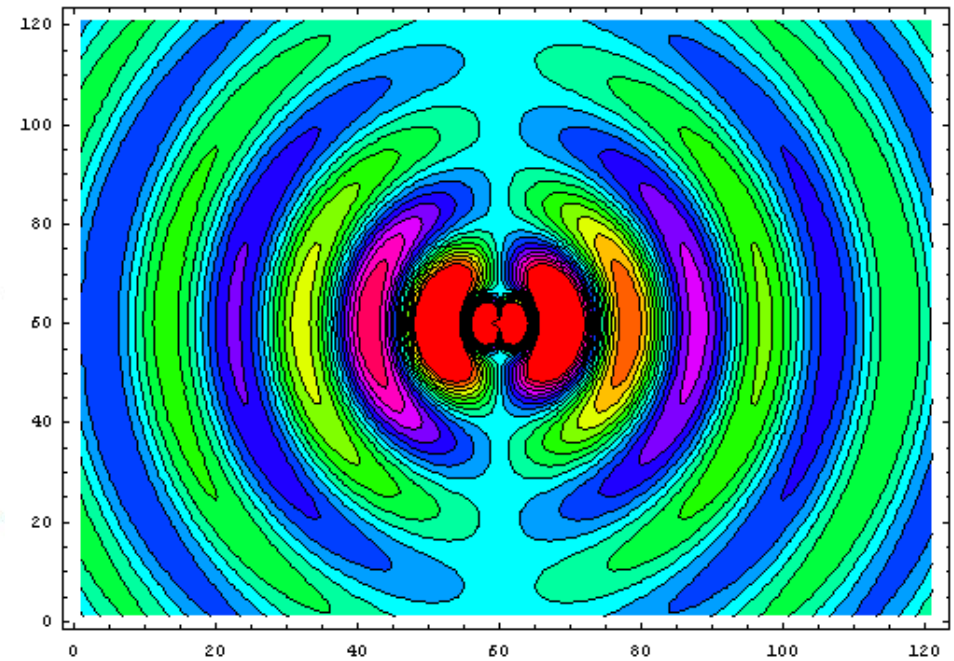
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}}{c} \hat{\boldsymbol{\psi}} \quad (15.43)$$

Observera:

- (1) El- och magnetfälten är vinkelräta mot varandra.
- (2) Kvoten av deras amplituder är c .
- (3) Fälten är i fas.
- (4) Fälten representerar **radiella vågor**, med vågvektorn $\kappa = \omega/c$, eftersom fasen är konstant på sfäriska ytor med radien r .
- (5) Vågorna är **transversella**.



$\vec{E}$
 $\vec{B}$



Vänster: [Wikipedia: Dipole Antenna] Illustration av el- och magnetfältet kring en dipolantenn. Höger: [Wikipedia: Dipole] Magnetiska fältets z-komponent av en dipolantenns strålning. Cyan är noll-magnitud, grön-gul-röd är positiva och blå-pink-röd negative värden i ökande ordning. Den ursprungliga bilden Dipole.gif är en animation.

Poyntingvektorn är

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (15.44)$$

$$= \frac{\mu_0}{c} \left[\frac{p_0 \omega^2}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{r} \times \cos(\omega(t - r/c)) \right]^2 \hat{\mathbf{r}} \quad (15.45)$$

Tidsmedelvärdet av intensiteten (effekt per yta) är

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (15.46)$$

Strålningen går alltså ut radiellt, som vi redan slöt oss till.

För ett givet radiellt avstånd r är intensiteten noll i de polära riktningsarna $\pm \hat{\mathbf{z}}$ och starkast i xy -planet.

Tidsmedelvärdet av den utstrålade effekten är

$$\langle P_s \rangle = \int d\mathbf{A} \cdot \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle \quad (15.47)$$

$$= \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int d\phi d\theta r^2 \sin \theta \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \quad (15.48)$$

$$= \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} \quad (15.49)$$

Denna effekt når ut till oändligheten och är alltså ett verkligt mått på den utstrålade energin.

Man definierar begreppet **strålningsresistans** R_s med relationen

$$\langle P_s \rangle \equiv R_s \langle I^2(t) \rangle \quad (15.50)$$

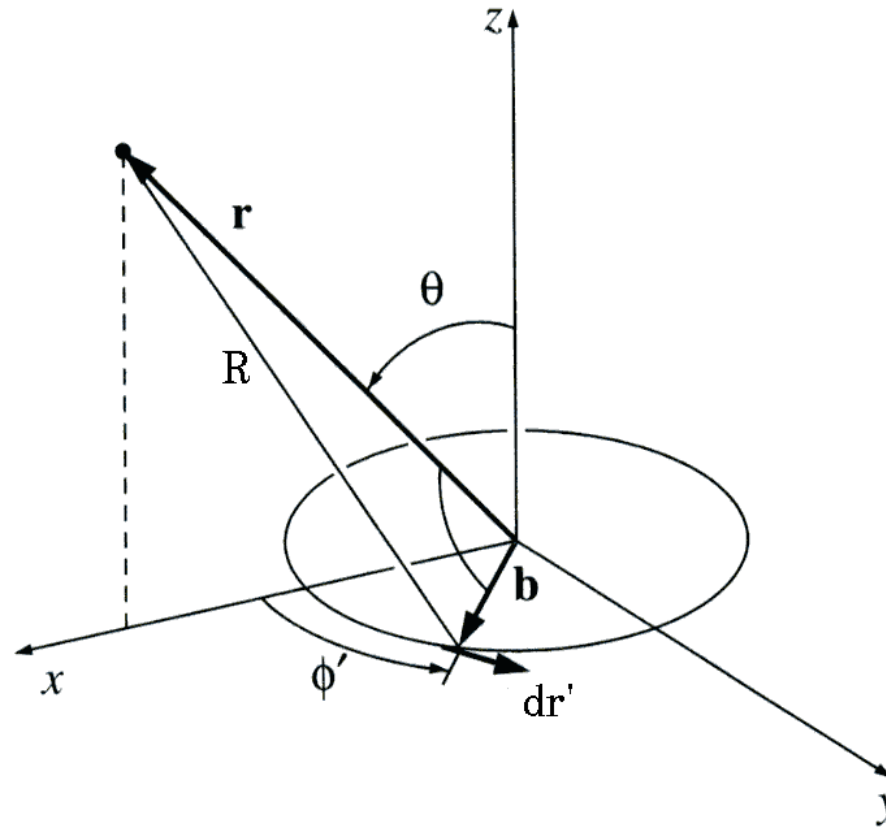
d.v.s. genom att sätta den utstrålade effekten lika med den effekt som skulle förloras i tråden som binder samman dipolens laddningar, om denna hade resistansen R_s .

I fallet ovan kan man lätt visa att

$$R_s \approx 789 \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 \text{ Ohm} \quad (15.51)$$

där $\lambda = c/\nu = 2\pi c/\omega$.

15.2.2. Magnetisk dipol



En ström $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ i en cirkulär slinga som i bilden är en magnetisk dipol med dipolmomentet

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}I = \pi b^2 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}} \equiv m_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}} \quad (15.52)$$

För denna kan man härleda (se anteckningarna för kursen 2008 eller 2005) att tidsmedelvärdet av intensiteten (effekt per yta) är i strålningszonen

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32 \pi^2 c^3} \hat{\mathbf{r}} \quad (15.53)$$

och att tidsmedelvärdet av den utstrålade effekten är

$$\langle P_s \rangle = \int d\mathbf{A} \cdot \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle \quad (15.54)$$

$$= \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12 \pi c^3} \quad (15.55)$$

Strålningen från elektriska och magnetiska dipoler påminner mycket om varandra, som vi kan se genom att jämföra med tidigare resultat.

Men en väsentlig skillnad förekommer i storleken av de utstrålade effekterna:

$$\frac{P_m}{P_e} = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12 \pi c^3} \times \frac{12 \pi c}{\mu_0 p_0^2 \omega^4} = \frac{m_0^2}{p_0^2 c^2} = \frac{\pi^2 b^4 I_0^2}{q_0^2 d^2 c^2} \quad (15.56)$$

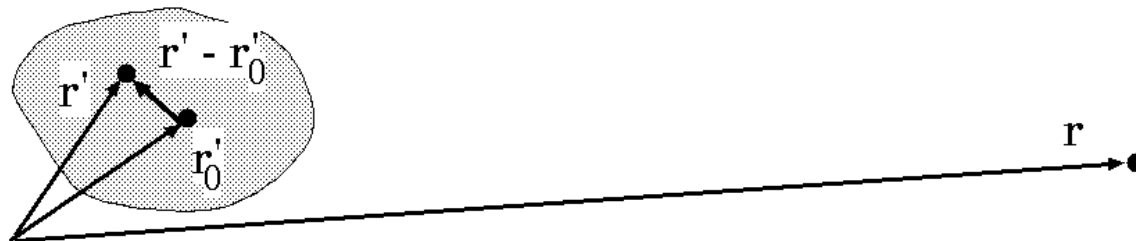
Tidigare hade vi $I_0 = q_0 \omega$, så vi får

$$\frac{P_m}{P_e} = \frac{\pi^2 b^4 \omega^2}{d^2 c^2} = \left(\frac{\omega b}{c} \right)^2 \left(\frac{\pi b}{d} \right)^2 \quad (15.57)$$

För första faktorn har vi redan antagit $b \ll c/\omega$ d.v.s. $\omega b/c \ll 1$. Andra faktorn är av storleksordningen 1 ifall slingans radie och dipolens längd är ungefär lika stora. Detta gör att hela uttrycket är mycket mindre än 1, så att **strålningen från en elektrisk dipol är mycket starkare än den från en magnetisk dipol**, då dessa har jämförbara dimensioner.

15.2.3. Godtycklig fördelning

Vi ska nu se på hur fälten från en godtycklig fördelning av laddning ser ut. "Godtycklig" betyder ju naturligtvis att vi inte ställer några märkvärdiga krav på dess utseende, med ett undantag: Vi kräver att varje punkt i fördelningen är långt borta från observationspunkten.



Detta kan vi skriva som

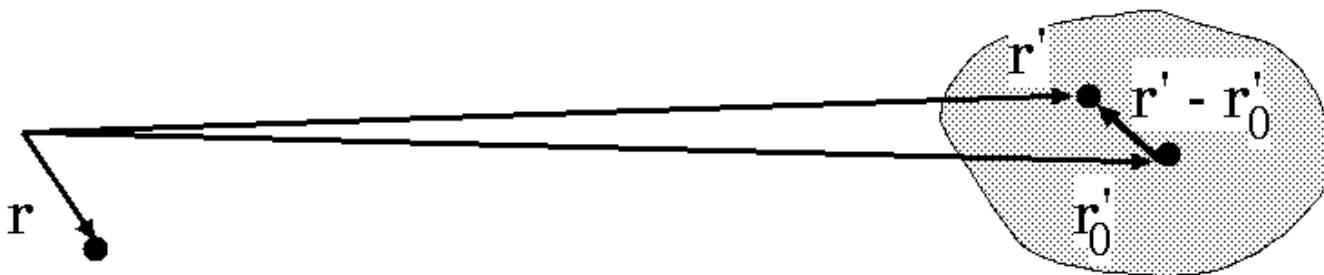
$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0| \gg |\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0| \quad (15.58)$$

där $\mathbf{r}'_0$ är fördelningens masscentrum.

Detta betyder att varje punkt i fördelningen har ett litet avstånd till masscentrum men ett stort avstånd till observationspunkten.

Vi kommer också att utgå från att fördelningen är centrerad på origo, d.v.s. $\mathbf{r}'_0 \equiv 0$, vilket förenklar ekvationerna. Approximationen ovan är då samma sak som

$$r \gg r' \quad (15.59)$$



Med en godtycklig startsituation — där fördelningen t.ex. är långt borta och observationspunkten nära origo — kan detta villkor uppfyllas genom att definiera nya koordinater enligt följande:

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_0 \quad (15.60)$$

$$\mathbf{s}' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0 \quad (15.61)$$

så att

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0| = |\mathbf{s}| = s \quad (15.62)$$

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0| = |\mathbf{s}'| = s' \quad (15.63)$$

och vi får

$$s \gg s' \quad (15.64)$$

Skalärpotentialen är som bekant

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} \quad (15.65)$$

där

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \quad (15.66)$$

Den omtalade approximationen $r' \ll r$ ger oss nu

$$R \approx r \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) \quad (15.67)$$

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) \quad (15.68)$$

$$t_r = t - R/c \approx t - r/c + \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'/c \quad (15.69)$$

så att

$$\rho(\mathbf{r}', t - R/c) \approx \rho(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}) \quad (15.70)$$

Låt oss expandera detta i den retarderade tiden i origo, som är

$$t_0 = t - r/c \quad (15.71)$$

Vi får:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}', t - R/c) &= \rho(\mathbf{r}', t_0) + \partial_t \rho(\mathbf{r}', t_0) \left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) + \frac{1}{2!} \partial_t^2 \rho(\mathbf{r}', t_0) \left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \partial_t^3 \rho(\mathbf{r}', t_0) \left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right)^3 + \dots \end{aligned} \quad (15.72)$$

Vi använder nu igen approximationen $r' \ll r$, som ger att alla termer med faktorn $(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'/c)^n$, med $n \geq 2$, är försvinnande små jämfört med termen med faktorn $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'/c$:

$$\rho(\mathbf{r}', t - R/c) \approx \rho(\mathbf{r}', t_0) + \partial_t \rho(\mathbf{r}', t_0) \left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) \quad (15.73)$$

Själva potentialen blir nu

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\int dV' \rho(\mathbf{r}', t_0) + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \cdot \int dV' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t_0) + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int dV' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t_0) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[Q + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \cdot \mathbf{p}(t_0) + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{c} \cdot \partial_t \mathbf{p}(t_0) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \partial_t \mathbf{p}(t_0)}{rc} \right]\end{aligned}\tag{15.74}$$

där $\mathbf{p}$ är alltså det generaliserade dipolmomentet.

Vektorpotentialen är

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R}\tag{15.75}$$

Man kan visa att

$$\int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}', t_0) = \partial_t \mathbf{p}(t_0) \equiv \frac{d}{dt} \int dV' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t_0)\tag{15.76}$$

som är av första ordningen i r' .

Det borde alltså räcka med att skriva

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial_t \mathbf{p}(t_0)}{r} \quad (15.77)$$

Vi söker nu fälten. Vi är intresserade av strålningszonen, så vi kastar bort alla fälttermer proportionella mot $1/r^n$, med $n \geq 2$.

Eftersom

$$\nabla t_0 = -\frac{1}{c} \nabla r = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \quad (15.78)$$

så får vi nu

$$\nabla \varphi(\mathbf{r}, t) \approx \nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \partial_t \mathbf{p}(t_0)}{rc} \right] \quad (15.79)$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \partial_t^2 \mathbf{p}(t_0)}{rc} \nabla t_0 \quad (15.80)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \partial_t^2 \mathbf{p}(t_0)}{r} \hat{\mathbf{r}} \quad (15.81)$$

och

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \nabla \times \partial_t \mathbf{p}(t_0) \quad (15.82)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} (\nabla t_0 \times \partial_t^2 \mathbf{p}(t_0)) \quad (15.83)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi r c} (\hat{\mathbf{r}} \times \partial_t^2 \mathbf{p}(t_0)) \quad (15.84)$$

och

$$\partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial_t^2 \mathbf{p}(t_0)}{r} \quad (15.85)$$

Elfältet blir nu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} ((\hat{\mathbf{r}} \cdot \partial_t^2 \mathbf{p}(t_0)) \hat{\mathbf{r}} - \partial_t^2 \mathbf{p}(t_0)) \quad (15.86)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} (\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \partial_t^2 \mathbf{p}(t_0))) \quad (15.87)$$

Magnetfältet blir

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi r c} (\hat{\mathbf{r}} \times \partial_t^2 \mathbf{p}(t_0)) \quad (15.88)$$

Dessa är alltså beräknade med antagandet $r' \ll r$. Den retarderade tiden är $t_0 = t - r/c$.

Obs:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -c \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (15.89)$$

I sfäriska koordinater fås

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \partial_t^2 p(t_0) \frac{\sin \theta}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (15.90)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \partial_t^2 p(t_0) \frac{\sin \theta}{r} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (15.91)$$

Poynting-vektorn blir

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} (\partial_t^2 p(t_0))^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (15.92)$$

Den utsända strålningseffekten är

$$\mathbf{P}(t) = \int d\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = \frac{\mu_0}{6\pi c} (\partial_t^2 p(t_0))^2 \quad (15.93)$$

- (1) Fälten är vinkelräta mot varandra.
- (2) Fälten styrkor är sådana att $E/B = c$.
- (3) Vågorna är transversella.

15.3. Strålning från punktladdningar

Vi härledde tidigare att för en punktladdning gäller

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} \left[(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \right] \quad (15.94)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (15.95)$$

där $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{R}}c - \mathbf{v}$.

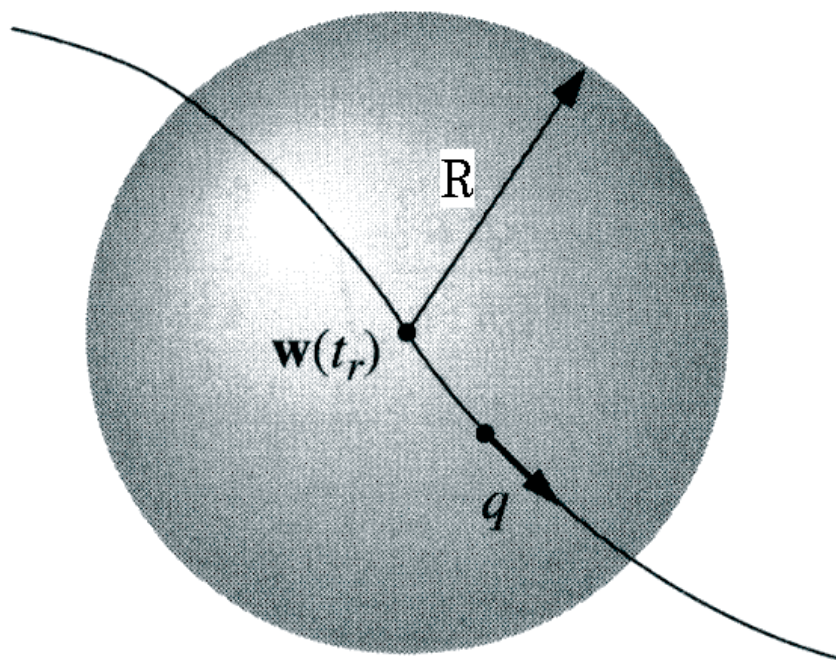
Poyntingvektorn blir nu

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (15.96)$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}) \quad (15.97)$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} (E^2 \hat{\mathbf{R}} - (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E})\mathbf{E}) \quad (15.98)$$

De fälttermer som ansvarar för den utsända strålningen och inte energin som laddningen bär med sig (som inte sänds ut till oändligheten) kan bestämmas med följande resonemang.



Definiera en sfär med radien $R = c(t - t_r)$ kring laddningens retarderade position, d.v.s. dess position vid tiden t_r . Integrera vid tiden $t = t_r + R/c$ Poyntingvektorn över denna sfär, detta ger den utsända effekten. Låt R växa mot oändligt. De termer i effekt-ekvationen som överlever representerar den sanna utsända strålningseffekten.

Uppenberligen överlever endast termer proportionella mot $1/R^2$, så att strålningens elfält är

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} [\mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] \quad (15.99)$$

Poyntingvektorn är

$$\mathbf{S}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0 c} E_s^2 \hat{\mathbf{R}} \quad (15.100)$$

Hur ser strålningsfältet ut ?

Låt laddningen vara momentant i vila: $\mathbf{v} = 0$ och $\mathbf{u} = c\hat{\mathbf{R}}$ vid tidpunkten t' . Strålningens momentana elfält är då

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{a}) \quad (15.101)$$

$$= \frac{\mu_0 q}{4\pi R} [(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a}) \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{a}] \quad (15.102)$$

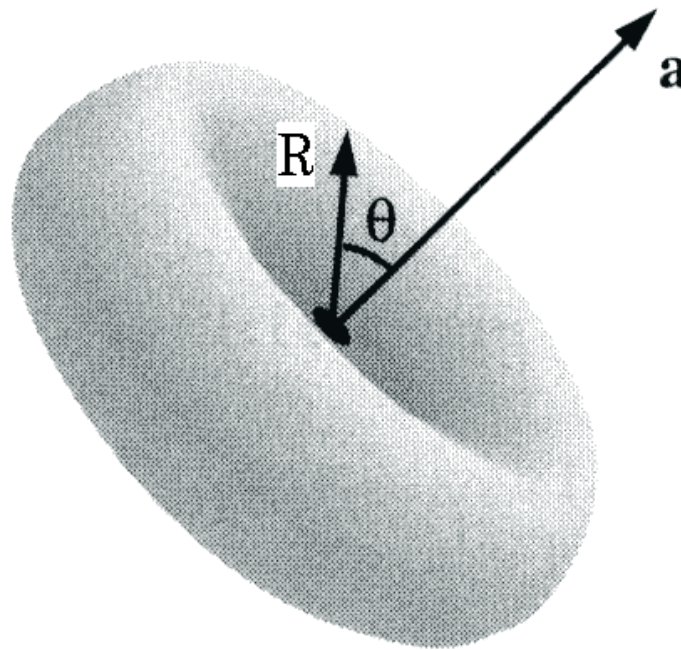
så att

$$\mathbf{S}_s(\mathbf{r}, t') = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 q}{4\pi R} \right)^2 \left[a^2 - (\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a})^2 \right] \hat{\mathbf{R}} \quad (15.103)$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 q}{4\pi R} \right)^2 \left[a^2 (1 - \cos^2 \theta) \right] \hat{\mathbf{R}} \quad (15.104)$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 a^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c R^2} \hat{\mathbf{R}} \quad (15.105)$$

där θ är vinkel mellan $\mathbf{a}$ och $\hat{\mathbf{R}}$. Den utsända effektens geometri kommer att vara "munkrings"-formad:



Effekten/strålningen är **starkast i riktningarna som är vinkelräta mot accelerationsvektorn**, och noll i accelerationens riktning.

Den totala utstrålade effekten är

$$P_s(t') = \oint d\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}_s = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int d\phi d\theta R^2 \sin \theta \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \quad (15.106)$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \quad (15.107)$$

Om laddningen rör sig, d.v.s. $\mathbf{v} \neq 0$, så blir räkningarna mera komplicerade.

I detta fall har vi att den effekt som laddningen sänder ut är

$$P_e = \frac{dW}{dt_r} = \frac{dW/dt}{\partial t_r / \partial t} = \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{Rc} \right) \frac{dW}{dt} = \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{Rc} \right) P \quad (15.108)$$

där P är den effekt som mäts upp på sfären med radien R .

Om $\mathbf{v} = 0$ fås $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{R}}c$ och vi får tillbaka det tidigare resultatet $P_e = P$.

P.g.a. laddningens rörelse kommer den uppmätta effekten nu att avvika från den utsända effekten, uppmätt på den tidigare sfären.

Effekten som laddningen emitterar in i ytan $R^2 d\Omega$ på sfären är

$$dP_e = \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{Rc} \right) \mathbf{S}_s \cdot \hat{\mathbf{R}} R^2 d\Omega \quad (15.109)$$

så att den emitterade effekten per rymdvinkel är

$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{Rc} \right) \mathbf{S}_s \cdot \hat{\mathbf{R}} R^2 \quad (15.110)$$

$$= \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{Rc} \right) \frac{1}{\mu_0 c} E_s^2 R^2 \quad (15.111)$$

så att

$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{|\hat{\mathbf{R}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})|^2}{(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{u})^5} \quad (15.112)$$

Totala emitterade effekten summerad över hela sfärens yta är nu

$$P_e = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega} = \int d\phi d\theta \sin \theta \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{|\hat{\mathbf{R}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})|^2}{(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{u})^5} \quad (15.113)$$

Slutsvaret är

$$P_e = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left(a^2 - \left| \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c} \right|^2 \right) \quad (15.114)$$

där $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Denna faktor gör att den utstrålade effekten blir mycket stor då laddningens hastighet närmar sig ljusets.

Exempel 1:

Låt $\mathbf{v}$ och $\mathbf{a}$ vara tillfälligt parallella. Bestäm strålningens vinkelfördelning $dP_e/d\Omega$ och den totala strålningseffekten P_e .

Vi har nu $\mathbf{u} \times \mathbf{a} = (c\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{v}) \times \mathbf{a} = c\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{a}$ så att

$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{|\hat{\mathbf{R}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})|^2}{(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{u})^5} \quad (15.115)$$

$$= \frac{q^2 c^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{|\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{a})|^2}{(Rc - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v})^5} \quad (15.116)$$

Obs:

$$|\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{a})|^2 = |(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a})\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{a}|^2 \quad (15.117)$$

$$= |(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a})^2 + a^2 - 2(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a})\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a}| \quad (15.118)$$

$$= a^2 - (\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a})^2 \quad (15.119)$$

Om $\mathbf{v}$ ligger på z -axeln har vi $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$ och ännu att $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{z}}$. Då θ är vinkeln mellan $\mathbf{R}$ och $\mathbf{a}$ fås nu $\mathbf{R} \cdot \mathbf{a} = Ra \cos \theta$ och $\mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = Rv \cos \theta$, så att

$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{q^2 c^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{a^2 - (\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a})^2}{(Rc - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v})^5} \quad (15.120)$$

$$= \frac{q^2 c^2}{16\pi^2 \varepsilon_0} \frac{a^2 - a^2 \cos^2 \theta}{(Rc - v \cos \theta)^5} \quad (15.121)$$

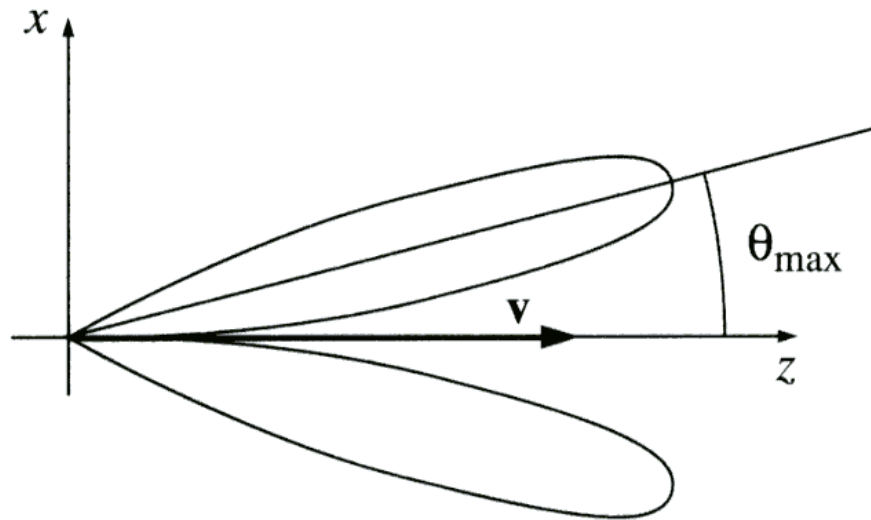
$$= \frac{q^2 c^2}{16\pi^2 \varepsilon_0} \frac{a^2 (1 - \cos^2 \theta)}{c^5 (1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (15.122)$$

$$= \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 c^3 \varepsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (15.123)$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (15.124)$$

där $\beta = v/c$.

För låga hastigheter är effekten maximal i riktningarna $\theta = \pm\pi/2$. Då hastigheten växer spelar nämnaren $(1 - \beta \cos \theta)^5$ en allt större roll:



Totala emitterade effekten:

$$P_e = \int d\Omega \frac{dP_e}{d\Omega} \quad (15.125)$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int d\Omega \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} = \dots = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^6}{6\pi c} \quad (15.126)$$

där $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Observera att detta uttryck gäller oberoende om laddningen accelererar eller decelererar, eftersom

effekten är proportionell mot a^2 . I båda fallen är effekten störst i framåtriktningen, i den polära riktningen $\theta_{\max}$.

Formeln ovan kan vi alltså tillämpa för att räkna ut den strålning som t.ex. en elektron sänder ut då den bromsas i en metall, t.ex. i ett katodstrålerör (elektroner från anoden accelereras över vakuumregion mot katoden och träffar denna).

Om $v \ll c$ så kan vi approximera

$$P_e = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^6}{6\pi c} \approx \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \quad (15.127)$$

Detta uttryck kallas **Larmor-formeln**, och håller också då accelerationen inte är parallell med hastigheten, förutsatt att $v \ll c$. $\square$

Exempel 2: Fortsättning på föregående exempel. Antag att en elektron saktas ned till vila med en konstant rat a , från en starthastighet $v_0 \ll c$. (a) Bestäm hur stor andel av den ursprungliga kinetiska energin som omsätts till strålning. (b) Antag starthastigheten är termisk, så att $v_0 \sim 10^5$ m/s, och att elektronen färdas 30 Å under nedsaktningen, motsvarande vad som sker i en ledning. Kommentera resultatet.

(a) Energin som förloras till strålning är $P_e \Delta t$, där $\Delta t = v_0/a$. Andelen blir nu

$$f = \frac{P_e \Delta t}{E_{k0}} = \frac{\mu_0 q^2 a}{3\pi c m_e v_0} \quad (15.128)$$

Den tillryggalagda sträckan är $s = v_0^2/(2a)$, så

$$f = \frac{\mu_0 q^2 v_0}{6\pi c m_e s} \quad (15.129)$$

(b) Insättning ger $f \approx 2 \times 10^{-10}$, d.v.s. praktiskt taget ingen andel av energin går åt till strålning.

□