

# 14. Potentialer och fält

[Griffiths,RMC]

För att beräkna strålningen från kontinuerliga laddningsfördelningar och punktladdningar måste deras el- och magnetfält vara kända.

Dessa är i de flesta fall enklast att beräkna efter att de retarderade skalär- och vektorpotentialerna bestämts.

I det följande tar vi en närmare titt på potentialerna, och beräknar fälten för punktladdningar i godtycklig (icke-relativistisk) rörelse. De senare kräver en hel del mera matematik än fälten från enkla laddningsfördelningar.

## 14.1. Repetition av potentialerna

Vi visade tidigare att vi kan definiera en magnetisk vektorpotential  $\mathbf{A}$  och en skalär potential  $\varphi$  så att

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (14.1)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_t\mathbf{A} \quad (14.2)$$

Maxwells I och IV lag i vakuum blir för dessa

$$\nabla^2\varphi + \partial_t\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (14.3)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mu_0\varepsilon_0\partial_t\nabla\varphi - \mu_0\varepsilon_0\partial_t^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J} \quad (14.4)$$

Enligt tidigare kan vi addera gradienten av en godtycklig skalärfunktion  $\Psi$  till  $\mathbf{A}$  utan att det ändrar på  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Denna egenskap hos  $\mathbf{A}$  kallades måttinvarians.

I Lorentz-måttet väljs  $\Psi$  så att

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla^2\Psi = -\mu_0\varepsilon_0\partial_t\varphi \quad (14.5)$$

Vågekvationerna för potentialerna reduceras nu till

$$\nabla^2 \varphi - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (14.6)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (14.7)$$

som är av utseendet

$$\square^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (14.8)$$

$$\square^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (14.9)$$

där

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \quad (14.10)$$

kallas **d'Alemberts operator**.

## 14.2. Kontinuerliga laddningsfördelningar

[Griffiths]

Vi argumenterade tidigare oss fram till följande uttryck för de retarderade potentialerna för kontinuerliga laddningsfördelningar:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (14.11)$$

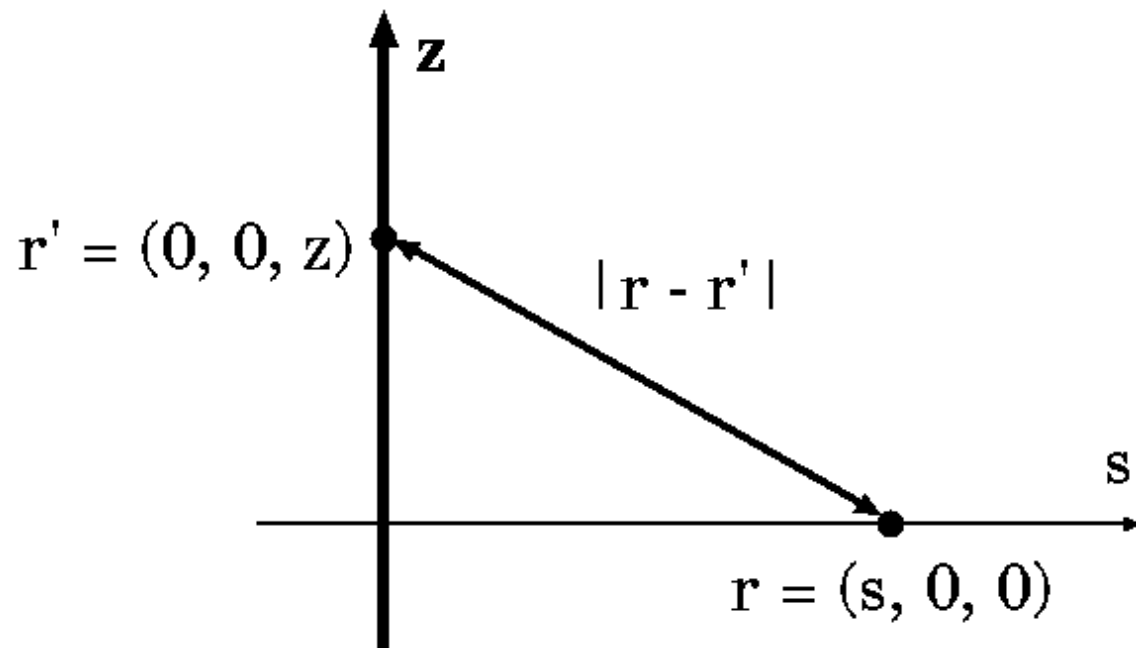
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (14.12)$$

där den retarderade tiden är

$$t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \quad (14.13)$$

Riktigheten i dessa uttryck kan verifieras genom att sätta in dem i vågekvationerna.

**Exempel 1:** Låt strömmen  $I$  i en oändligt lång rak ledning längs med  $z$ -axeln vara 0 då  $t < 0$  och  $I_0$  då  $t \geq 0$ . Bestäm  $\mathbf{E}$  och  $\mathbf{B}$ .



Eftersom ledningen är neutral så gäller  $\rho = 0$  och därför  $\varphi = 0$ .

Vektorpotentialen är

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0 \hat{\mathbf{z}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{I(t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
 &= \frac{\mu_0 \hat{\mathbf{z}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{I(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
 &= \frac{\mu_0 \hat{\mathbf{z}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{I(t - \sqrt{s^2 + z^2}/c)}{\sqrt{s^2 + z^2}}
 \end{aligned} \tag{14.14}$$

Endast för tiden  $t_r = t - \sqrt{s^2 + z^2}/c \geq 0$  gäller  $I \neq 0$ . Tidigare än detta är strömmen noll. Detta ger

$$|z| \leq \sqrt{(ct)^2 - s^2} \quad (14.15)$$

så att

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(s, t) &= \frac{\mu_0 I_0 \hat{\mathbf{z}}}{4\pi} \int_{-\sqrt{(ct)^2 - s^2}}^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} dz \frac{1}{\sqrt{s^2 + z^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I_0 \hat{\mathbf{z}}}{2\pi} \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} dz \frac{1}{\sqrt{s^2 + z^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I_0 \hat{\mathbf{z}}}{2\pi} \left( \ln(\sqrt{s^2 + (\sqrt{(ct)^2 - s^2})^2} + (\sqrt{(ct)^2 - s^2})) \right. \\ &\quad \left. - \ln(\sqrt{s^2 + (0)^2} + 0) \right) \\ &= \frac{\mu_0 I_0 \hat{\mathbf{z}}}{2\pi} \left( \ln(ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}) - \ln(s) \right) \\ &= \frac{\mu_0 I_0 \hat{\mathbf{z}}}{2\pi} \ln \frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s} \end{aligned} \quad (14.16)$$

Elfältet är nu

$$\mathbf{E}(s, t) = -\partial_t \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 c I_0 \hat{\mathbf{z}}}{2\pi \sqrt{(ct)^2 - s^2}} \quad (14.17)$$

Magnetfältet är

$$\mathbf{B}(s, t) = \nabla \times \mathbf{A} = -\partial_s A_z \hat{\boldsymbol{\psi}} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{ct \hat{\boldsymbol{\psi}}}{s \sqrt{(ct)^2 - s^2}} \quad (14.18)$$

---

Check: Då  $t \rightarrow \infty$  är situationen den att en konstant ström flyter i en lång rak ledning. Vi ska då få tillbaka det tidigare resultatet för  $\mathbf{B}$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}(s, t) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 c I_0 \hat{\mathbf{z}}}{2\pi \sqrt{(ct)^2 - s^2}} = 0 \quad (14.19)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{B}(s, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{ct \hat{\boldsymbol{\psi}}}{s \sqrt{(ct)^2 - s^2}} \quad (14.20)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{c \hat{\boldsymbol{\psi}}}{s \sqrt{c^2 - (s/t)^2}} \quad (14.21)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{\hat{\boldsymbol{\psi}}}{s} \quad (14.22)$$

Ampères lag ger  $2\pi s B / \mu_0 = I_0$  så att  $B = \mu_0 I_0 / (2\pi s)$ , och riktningen är  $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ . OK!

□

**Exempel 2:** Som föregående exempel, men för strömmen  $I$  gäller  $I = 0$  då  $t < 0$  och  $I = kt$  då  $t \geq 0$ .

---

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \hat{\mathbf{z}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{kt_r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (14.23)$$

$$= \frac{\mu_0 \hat{\mathbf{z}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{k(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (14.24)$$

För  $t_r = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = t - \sqrt{s^2 + z^2}/c \geq 0$  gäller  $k \neq 0$ . detta ger att

$$|z| \leq \sqrt{(ct)^2 - s^2} \quad (14.25)$$

så

$$\mathbf{A}(s, t) = \frac{\mu_0 k \hat{\mathbf{z}}}{4\pi} 2 \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} dz \frac{t - \sqrt{s^2 + z^2}/c}{\sqrt{s^2 + z^2}} \quad (14.26)$$

$$= \frac{\mu_0 k \hat{\mathbf{z}}}{2\pi c} \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} dz \frac{ct - \sqrt{s^2 + z^2}}{\sqrt{s^2 + z^2}} \quad (14.27)$$

$$= \frac{\mu_0 k \hat{\mathbf{z}}}{2\pi c} \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} dz \left( \frac{ct}{\sqrt{s^2 + z^2}} - 1 \right) \quad (14.28)$$

$$= \frac{\mu_0 k \hat{\mathbf{z}}}{2\pi c} (-\sqrt{(ct)^2 - s^2}) + \frac{\mu_0 k \hat{\mathbf{z}}}{2\pi c} ct \ln \frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s} \quad (14.29)$$

$$= -\frac{\mu_0 k \hat{\mathbf{z}}}{2\pi c} \sqrt{(ct)^2 - s^2} + \frac{\mu_0 k t \hat{\mathbf{z}}}{2\pi} \ln \frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s} \quad (14.30)$$

Vi har inga externa laddningar, så  $\rho(\mathbf{r}', t_r) = 0$  och  $\varphi(s, t) = 0$

□

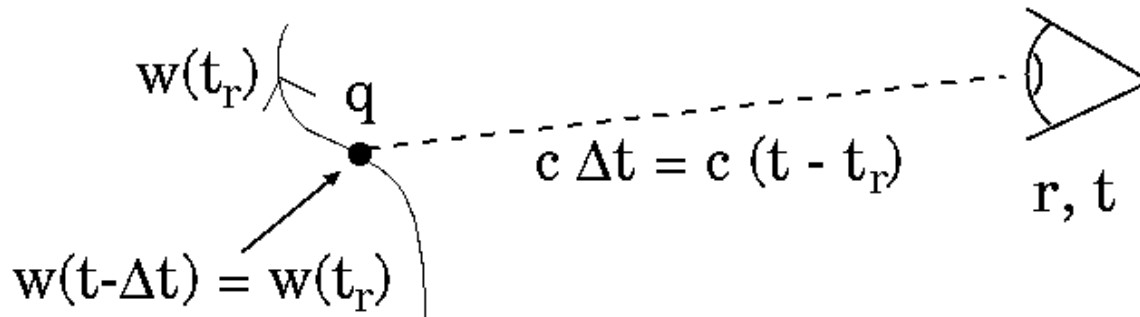
## 14.3. Punktladdningar

### 14.3.1. Liénard-Wiechert-potentialerna

[RMC, Griffiths]

Vi ska nu bestämma de retarderade potentialerna för en punktladdning  $q$ .

Laddningarna antas nu ha stora (icke-relativistiska) hastigheter, vilket komplicerar proceduren att ta reda på den retarderade tiden.



Låt laddningens position vara beskriven av kurvan  $w = w(t)$ , och låt observationspunkten där potentialerna och fälten ska bestämmas vara  $r(t)$ .

Den retarderade tiden  $t_r$  fås från insikten att en förändring i  $w$  vid den retarderade tiden  $t_r$  når observatören i punkten i  $r$  vid tiden  $t$  med ljusets hastighet:

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r) \quad (14.31)$$

Detta är i princip samma relation som tidigare, men nu kan vi inte längre approximera  $w(t_r) \approx w(t)$  för att laddningarna **i det allmänna fallet kan röra sig godtyckligt snabbt** (men så att hastigheterna är icke-relativistiska).

---

Detta ger

$$t_r = t - |\mathbf{r}(t) - \mathbf{w}(t_r)|/c \quad (14.32)$$

---

Skalärpotentialen är nu

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV'_r \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t_r)|} \quad (14.33)$$

där  $\mathbf{r}'$  löper över punktladdningen, som nu tänkes ha en liten utsträckning. Detta gör att följande behandling också är giltig för laddningsfördelningar som är mycket små.

Observera, att laddningstätheten nu beror på laddningselementens olika positioner  $\mathbf{r}'$  som är funktioner av olika retarderade tider. Inte bra!

Vi går nu vidare så att vi väljer en fixerad retarderad tid  $t_{r1}$  och evaluerar positionerna  $\mathbf{r}'$  för denna tid. Dessa blir då  $\mathbf{r}'(t_{r1})$ .

Poängen med detta är att en integral över laddningstätheten **för en och samma fixerade retarderade tid för alla laddningar** ger oss den **korrekta laddningen**.

Laddningstätheten blir

$$\rho(\mathbf{r}'(t_r), t_r) = \rho(\mathbf{r}'(t_{r1}), t_{r1}) \quad (14.34)$$

Positionerna vid den nya tiden  $t_{r1}$  expanderar vi nu i den gamla tiden  $t_r$ :

$$\mathbf{r}'(t_{r1}) = \mathbf{r}'(t_r) + \mathbf{v}(t_r)(t_{r1} - t_r) + \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{t_r} (t_{r1} - t_r)^2 + \dots \quad (14.35)$$

Volymelementet  $dV'_r$  bör nu ändras till  $dV'_{r1}$ . För detta behövs Jakobianen (funktionaldeterminanten)  $J(x_{r1}, y_{r1}, z_{r1}; x_r, y_r, z_r)$ :

$$dV'_{r1} = J(x_{r1}, y_{r1}, z_{r1}; x_r, y_r, z_r) dV'_r \quad (14.36)$$

$$= \begin{vmatrix} \partial_{x_r} x_{r1} & \partial_{y_r} x_{r1} & \partial_{z_r} x_{r1} \\ \partial_{x_r} y_{r1} & \partial_{y_r} y_{r1} & \partial_{z_r} y_{r1} \\ \partial_{x_r} z_{r1} & \partial_{y_r} z_{r1} & \partial_{z_r} z_{r1} \end{vmatrix} dV'_r \quad (14.37)$$

En räkning ger slutsvaret

$$dV'_{r1} = dV'_r \left( 1 - \frac{\mathbf{v}(t_r) \cdot \hat{\mathbf{R}}(t, t_r)}{c} - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \bigg|_{t_r} \cdot \hat{\mathbf{R}}(t, t_r)(t_r - t_{r1}) + \dots \right) \quad (14.38)$$

där

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}'(t_r) \quad (14.39)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (14.40)$$

---

Man kan argumentera att

$$\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \bigg|_{t_r} \cdot \hat{\mathbf{R}}(t_{r1} - t_r) \approx \frac{1}{c^2} \frac{dv}{dt} \bigg|_{t_r} d \ll 1 \quad (14.41)$$

där  $d$  är den punktformade laddningens storlek. På motsvarande sätt ska högre ordningens termer försvinna.

Detta ger

$$dV'_{r1} \approx dV'_r \left( 1 - \frac{\mathbf{v}(t_r) \cdot \hat{\mathbf{R}}}{c} \right) \quad (14.42)$$

---

Vi får slutligen

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV'_{r1}}{1 - \mathbf{v}(t_r) \cdot \hat{\mathbf{R}}/c} \frac{\rho(\mathbf{r}'(t_{r1}), t_{r1})}{R} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(1 - \mathbf{v}(t_r) \cdot \hat{\mathbf{R}}/c)} \int dV'_{r1} \rho(\mathbf{r}'(t_{r1}), t_{r1}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{qc}{Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}} \end{aligned} \quad (14.43)$$

Man kan visa att vektorpotentialen är

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{qc\mathbf{v}(t_r)}{Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}} \quad (14.44)$$

$$= \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{v}(t_r) \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (14.45)$$

$$= \frac{\mathbf{v}(t_r)}{c^2} \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (14.46)$$

---

Sammanfattningsvis:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{qc}{Rc - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}} \quad (14.47)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (14.48)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{w}(t_r) \quad (14.49)$$

$$\mathbf{v}(t_r) = \left. \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} \right|_{t=t_r} \quad (14.50)$$

### Arbetsschema:

- (i) Bestäm den retarderade tiden  $t_r$  från givet uttryck för  $w = w(t)$ .
- (ii) Bestäm  $R = c(t - t_r)$ .
- (iii) Bestäm  $\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{w}(t_r)$ .
- (iv) Bestäm  $Rc - \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{R}$ .
- (v) Skriv ner potentialerna.

**Exempel 1:** Bestäm potentialerna för en punktladdning som rör sig genom origo då  $t = 0$ .

Nu gäller  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{v}t$  där  $\mathbf{v}$  är en konstant.

(i) Bestäm den retarderade tiden.

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r) \quad (14.51)$$

ger

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{v}t_r| = c(t - t_r) \quad (14.52)$$

som ger

$$r^2 + v^2 t_r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}t_r = c^2 t^2 + c^2 t_r^2 - 2ctt_r \quad (14.53)$$

eller

$$(v^2 - c^2)t_r^2 + 2(ct - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})t_r + r^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (14.54)$$

Lösningen är

$$t_r = \frac{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \pm \sqrt{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}}{c^2 - v^2} \quad (14.55)$$

Vilket tecken bör vi använda ?

Då  $v = 0$  reduceras uttrycket till

$$t_r = \frac{c^2 t \pm \sqrt{c^4 t^2 + c^2 r^2 - c^4 t^2}}{c^2} = t \pm r/c \quad (14.56)$$

Vi vet ju från tidigare att den retarderade tiden ser ut som  $t_r = t - |\mathbf{r} - \mathbf{w}|/c$ , så vi måste välja minustecknet:

$$t_r = \frac{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) - \sqrt{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}}{c^2 - v^2} \quad (14.57)$$

\_\_\_\_\_

(ii) och (iii): Bestäm  $R(t_r)$  och  $\mathbf{R}(t_r)$ .

$$R = c(t - t_r) \quad (14.58)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r) \quad (14.59)$$

(iv) Bestäm  $Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}$ . Eftersom hastigheten är konstant har vi  $\mathbf{v}(t_r) = \mathbf{v}$ .

$$Rc - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(t_r) = c^2(t - t_r) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}t_r) \quad (14.60)$$

$$= c^2(t - t_r) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} + v^2 t_r \quad (14.61)$$

$$= c^2 t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} - (c^2 - v^2)t_r \quad (14.62)$$

Insättning av uttrycket för  $t_r$  ger nu

$$Rc - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(t_r) = \sqrt{(c^2 t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)} \quad (14.63)$$

(v) Skriv ner potentialerna.

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(c^2t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}} \quad (14.64)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(c^2t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}} \quad (14.65)$$

$$= \frac{\mu_0 q \mathbf{v} c}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(c^2t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}} \quad (14.66)$$

□

**Exempel 2:** Bestäm potentialerna längs med  $z$ -axeln för en punktladdning som rör sig med likformig vinkelhastighet i en cirkel i  $xy$ -planet. Cirkelns radie är  $a$ . Låt laddningen vara i  $(x, y) = (a, 0)$  vid tiden  $t = 0$ .

---

Nu gäller  $\mathbf{w}(t) = \hat{\mathbf{x}}a \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}a \sin(\omega t)$  och  $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}$ .

(i) Bestäm den retarderade tiden.

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r) \quad (14.67)$$

ger oss

$$t_r = t - \sqrt{a^2 + z^2}/c \quad (14.68)$$

---

(ii) Bestäm  $R(t_r)$  och  $\mathbf{R}(t_r)$ .

$$R = c(t - t_r) \quad (14.69)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r) = z\hat{\mathbf{z}} - a(\hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t_r) + \hat{\mathbf{y}} \sin(\omega t_r)) \quad (14.70)$$

(iii) Bestäm  $Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}$ .

Hastigheten är

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{w}}{dt} = -a\omega\hat{\mathbf{x}}\sin(\omega t) + a\omega\hat{\mathbf{y}}\cos(\omega t) \quad (14.71)$$

så att

$$\begin{aligned} Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R} &= Rc - a^2\omega \cos(\omega t_r) \sin(\omega t_r) + a^2\omega \cos(\omega t_r) \sin(\omega t_r) \\ &= Rc \\ &= c^2(t - t_r) \\ &= c\sqrt{a^2 + z^2} \end{aligned} \quad (14.72)$$

---

(iv) Skriv ner potentialerna.

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c\sqrt{a^2 + z^2}} \quad (14.73)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{a^2 + z^2}} \quad (14.74)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (14.75)$$

$$= -\frac{qa\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\hat{\mathbf{x}} \sin(\omega t) - \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t)}{\sqrt{a^2 + z^2}} \quad (14.76)$$

$$(14.77)$$

---

Check: Då  $a \rightarrow 0$  skall vi få tillbaka situationen för en statisk punktladdning i origo. Gränsvärdena ger

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z} \quad (14.78)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (14.79)$$

OK!  $\square$

### 14.3.2. El- och magnetfälten för punktladdningar i godtycklig rörelse

[Griffiths]

Ända tills nu nöjde vi oss med att bestämma potentialerna, och då endast för laddningar i likformig rörelse. Vi ska nu se hur fälten blir att se ut, speciellt för laddningar i godtycklig (icke-relativistisk) rörelse.

---

Potentialerna är ju

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}} \quad (14.80)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}(t_r)}{c^2} \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (14.81)$$

där

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{w}(t_r) \quad (14.82)$$

Fälten är som bekant

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) - \partial_t\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (14.83)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (14.84)$$

---

Gradienten av skalärpotentialen är

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{-1}{(Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R})^2} \times \nabla(Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}) \quad (14.85)$$

Vi får två termer  $T_1, T_2$  som kräver närmare behandling.

$$T_1 : \quad c\nabla R(t, t_r) = c\nabla(c(t - t_r)) = -c^2\nabla t_r \quad (14.86)$$

$$\begin{aligned} T_2 : \quad \nabla(\mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}(t, t_r)) &= (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{R} \\ &\quad + \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (14.87)$$

Detta ger fyra termer  $t_1, t_2, t_3, t_4$  som måste granskas.

Term  $t_1$ :

$$(\mathbf{R} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (R_x \partial_x + R_y \partial_y + R_z \partial_z) \mathbf{v} \quad (14.88)$$

$$= R_x \partial_x \mathbf{v} + R_y \partial_y \mathbf{v} + R_z \partial_z \mathbf{v} \quad (14.89)$$

$$= R_x \frac{\partial t_r}{\partial x} \frac{d\mathbf{v}}{dt_r} + R_y \frac{\partial t_r}{\partial y} \frac{d\mathbf{v}}{dt_r} + R_z \frac{\partial t_r}{\partial z} \frac{d\mathbf{v}}{dt_r} \quad (14.90)$$

$$= \mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r) \quad (14.91)$$

där accelerationen är

$$\mathbf{a}(t_r) \equiv \frac{d\mathbf{v}(t_r)}{dt_r} \quad (14.92)$$

---

Term  $t_2$ :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{R} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}'(t_r)) \quad (14.93)$$

$$= (v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z)(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{r}'(t_r) \quad (14.94)$$

$$= v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{r}'(t_r) \quad (14.95)$$

$$= \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{r}'(t_r) \quad (14.96)$$

$$= \mathbf{v} - \sum_i v_{x_i} \frac{\partial \mathbf{r}'(t_r)}{\partial x_i} \quad (14.97)$$

$$= \mathbf{v} - \sum_i v_{x_i} \frac{\partial t_r}{\partial x_i} \frac{d\mathbf{r}'(t_r)}{dt_r} \quad (14.98)$$

$$= \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla t_r) \mathbf{v}(t_r) \quad (14.99)$$

---

Term  $t_3$ :

$$\mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{R} \times \left( \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial}{\partial x_j} v_k \right) \quad (14.100)$$

$$= \mathbf{R} \times \left( \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial t_r}{\partial x_j} \frac{d}{dt_r} v_k \right) \quad (14.101)$$

$$= \mathbf{R} \times (\nabla t_r \times \mathbf{a}) \quad (14.102)$$

$$= -\mathbf{R} \times (\mathbf{a} \times \nabla t_r) \quad (14.103)$$

Term  $t_4$ :

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{R}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{r} - \nabla \times \mathbf{r}') \quad (14.104)$$

$$= -\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{r}') \quad (14.105)$$

$$= -\mathbf{v} \times (\nabla t_r \times \mathbf{v}) \quad (14.106)$$

$$= \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \nabla t_r) \quad (14.107)$$

Här tog vi modell av vad vi gjorde för term  $t_3$ .

---

Term  $T_2$  blir nu

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}) &= \mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r) + \mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t_r) \\ &\quad - \mathbf{R} \times (\mathbf{a} \times \nabla t_r) + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \nabla t_r) \end{aligned} \quad (14.108)$$

Med BAC-CAB-regeln fås nu

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}) &= \mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r) + \mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t_r) \\
&\quad - (\mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r) - \nabla t_r(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})) \\
&\quad + (\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t_r) - \nabla t_r(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}))
\end{aligned} \tag{14.109}$$

$$= \mathbf{v} + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a} - v^2) \nabla t_r \tag{14.110}$$

---

Gradienten av potentialen blir slutligen

$$\begin{aligned}
\nabla \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{-1}{(Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R})^2} \\
&\quad \times \left( -c^2 \nabla t_r - (\mathbf{v} + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a} - v^2) \nabla t_r) \right)
\end{aligned} \tag{14.111}$$

$$= \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\mathbf{v} + (c^2 - v^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) \nabla t_r}{(Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R})^2} \tag{14.112}$$

$\nabla t_r$  fås med följande resonemang.

$$-c\nabla t_r = \nabla R(t_r) = \nabla \sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}} \nabla (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) \quad (14.113)$$

$$= \frac{1}{2R} 2(\mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{R}) + (\mathbf{R} \cdot \nabla) \mathbf{R}) \quad (14.114)$$

$$= \frac{1}{R} (\mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{R}) + \mathbf{R} - \mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r)) \quad (14.115)$$

$$= \frac{1}{R} (\mathbf{R} \times (\mathbf{v} \times \nabla t_r) + \mathbf{R} - \mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r)) \quad (14.116)$$

$$= \frac{1}{R} (\mathbf{R} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}(t_r)) \nabla t_r) \quad (14.117)$$

så att

$$\nabla t_r = -\frac{\mathbf{R}}{Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}} \quad (14.118)$$

Detta ger

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\mathbf{v} - (c^2 - v^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\mathbf{R}/(Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R})}{(Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R})^2} \quad (14.119)$$

$$= \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{(Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R})\mathbf{v} - (c^2 - v^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\mathbf{R}}{(Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R})^3} \quad (14.120)$$

En motsvarande räkning ger också att

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R})^3} \left[ (Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R})(-\mathbf{v}(t_r) + R\mathbf{a}/c) \right. \\ & \left. + R(c^2 - v^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}(t_r)/c \right] \end{aligned} \quad (14.121)$$

Introducera hjälpvektorn

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{R}}c - \mathbf{v}(t_r) \quad (14.122)$$

så att vi får

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} \left[ (c^2 - v^2)\mathbf{u} + \mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \right] \quad (14.123)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} \left[ (c^2 - v^2)\mathbf{u} + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\mathbf{u} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a} \right] \quad (14.124)$$

För magnetfältet behövs rotorn av  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \nabla \times (\mathbf{v}(t_r)\varphi(\mathbf{r}, t)) \quad (14.125)$$

$$= \frac{1}{c^2} (\varphi \nabla \times \mathbf{v}(t_r) - \mathbf{v} \times (\nabla \varphi)) \quad (14.126)$$

$$= -\frac{1}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} \mathbf{R} \times \left[ (c^2 - v^2)\mathbf{v} + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a} \right] \quad (14.127)$$

Genom att jämföra med tidigare kan vi omvandla detta till

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{Rc} \mathbf{R} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (14.128)$$

Allmänna slutsatser:

(1) Magnetfältet är vinkelrätt mot elfältet.

(2) Magnetfältet är vinkelrätt mot vektorn som sammanbinder laddningens retarderade position med observationspunkten.

---

Vi ser att första termen i elfältsuttrycket är inverst proportionell mot **kvadraten av avståndet** mellan laddning och observationspunkt, och påminner därför om Coulombs lag. Därför kan denna term kallas det **generaliserade Coulomb-fältet**.

Eftersom denna term inte heller beror på laddningens acceleration kallas den för **hastighetsfältet**.

---

Andra och tredje termerna är inverst proportionella mot avståndet, så att dessa dominerar över första termen vid stora avstånd. Dessa termer ger i själva verket upphov till strålning, som vi ska se senare. Därför kallas dessa termer också **strålningsfältet**.

Eftersom endast de två sista termerna innehåller accelerationen kallas denna del av fältet för **accelerationsfältet**.

Låt oss ännu skriva ner Lorentz-kraften  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  för laddningar i godtycklig rörelse.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = & \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} \left[ (c^2 - v^2)\mathbf{u} + \mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \left( \hat{\mathbf{R}} \times \left[ (c^2 - v^2)\mathbf{u} + \mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \right] \right) \right] \end{aligned} \quad (14.129)$$

där  $Q$  är den andra laddningens storlek,  $\mathbf{V}$  dess hastighet, och  $\mathbf{r}$  dess position.

## Arbetsschema:

- (i) Bestäm den retarderade tiden  $t_r$  med hjälp av relationen  $c(t - t_r) = |\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)|$ , där laddningens position är  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$ .
- (ii) Bestäm  $R = c(t - t_r)$ .
- (iii) Bestäm  $\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{w}(t_r)$ .
- (iv) Bestäm  $\mathbf{u} = c\mathbf{R}/R - \mathbf{v}(t_r)$ , där  $\mathbf{v} = d\mathbf{w}/dt$  är laddningens hastighet vid den retarderade tiden.
- (v) Bestäm  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{u} = Rc - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}$ .
- (vi) Bestäm  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{w}/dt^2$ .
- (vii) Bestäm  $\mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})$ .
- (viii) Skriv ner elfältet och förenkla.
- (ix) Bestäm magnetfältet från  $\mathbf{E}$  och  $\hat{\mathbf{R}}$ .