

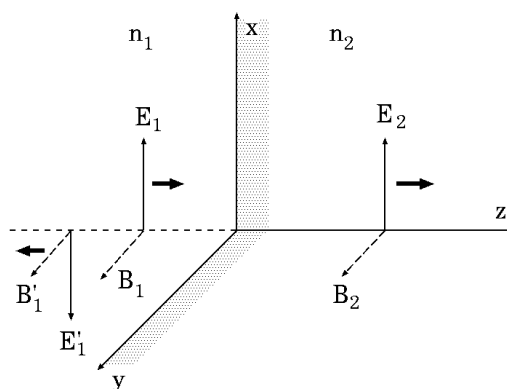
13. Plana vågors reflektion och brytning

[RMC]

Nu skall vi använda resultaten för plana vågors fortskridande och speciellt resultaten för gränsvillkor som härleddes i förra kapitlet för att behandla de praktiskt mycket viktiga fallen av hur vågor reflekteras eller bryts mellan två media.

13.1. Reflektion och brytning av vågor mellan icke-ledande media

13.1.1. Rätvinklig infallsvinkel



Låt färdriktningen för den inkommande vågen vara $\hat{\mathbf{z}}$. Planet vid vilket reflektion och brytning sker är xy -planet vid $z = 0$.

De inkommande, reflekterade och transmittade vågorna är nu

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{x}} E_{1x} e^{-i(\omega t - \kappa_1 z)} \quad (13.1)$$

$$\mathbf{E}'_1 = -\hat{\mathbf{x}} E'_{1x} e^{-i(\omega t + \kappa_1 z)} \quad (13.2)$$

$$\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{x}} E_{2x} e^{-i(\omega t - \kappa_2 z)} \quad (13.3)$$

med

$$\kappa_1 = \omega n_1 / c \quad (13.4)$$

$$\kappa_2 = \omega n_2 / c \quad (13.5)$$

Magnetfältet är

$$\mathbf{B} = \frac{n}{c} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E} \quad (13.6)$$

med $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{z}}$ för vågorna 1 och 2, och $\hat{\mathbf{u}} = -\hat{\mathbf{z}}$ för vågen 1'. Vi får

$$\mathbf{B}_1 = \frac{n_1}{c} \hat{\mathbf{y}} E_{1x} e^{-i(\omega t - \kappa_1 z)} \quad (13.7)$$

$$\mathbf{B}'_1 = \frac{n_1}{c} \hat{\mathbf{y}} E'_{1x} e^{-i(\omega t + \kappa_1 z)} \quad (13.8)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{n_2}{c} \hat{\mathbf{y}} E_{2x} e^{-i(\omega t - \kappa_2 z)} \quad (13.9)$$

De tangentiella komponenterna för $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ är kontinuerliga vid gränsen $z = 0$. Om permeabiliteten är samma för både medierna:

$$E_{1x} - E'_{1x} = E_{2x} \quad (13.10)$$

$$n_1 E_{1x} + n_1 E'_{1x} = n_2 E_{2x} \quad (13.11)$$

Detta ger

$$E'_{1x} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{1x} \quad (13.12)$$

$$E_{2x} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_{1x} \quad (13.13)$$

Om $n_2 > n_1$ så är E_{1x} och E'_{1x} i fas och har samma tecken. Om $n_2 < n_1$ så är den inkommande och reflekterade vågorna fasförskjutna, eftersom då gäller

$$E'_{1x} \propto -E_{1x} = e^{i\pi} E_{1x} \quad (13.14)$$

med fasvinkeln $\pi = 180^\circ$.

Definiera **Fresnel-koefficienterna** för rätvinklig reflektion och transmission:

$$r_{12} = \frac{E'_{1x}}{E_{1x}} \quad (13.15)$$

$$t_{12} = \frac{E_{2x}}{E_{1x}} \quad (13.16)$$

Tidsmedelvärdet av Poynting-vektorn är

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \frac{n}{\mu_0 c} (E_{0p}^2 + E_{0s}^2) \quad (13.17)$$

vilket visas i extra materialet 12x, stycke "Energitäthet och ström".

Nu gäller $E_{0p} = E_x$ och $E_{0s} = 0$ så att

$$\langle S_1 \rangle = \frac{1}{2} \frac{n_1}{\mu_0 c} E_{1x}^2 \quad (13.18)$$

$$\langle S'_1 \rangle = \frac{1}{2} \frac{n_1}{\mu_0 c} E_{1x}'^2 \quad (13.19)$$

$$\langle S_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{n_2}{\mu_0 c} E_{2x}^2 \quad (13.20)$$

Definiera **reflektansen**

$$R = \frac{\langle S'_1 \rangle}{\langle S_1 \rangle} \quad (13.21)$$

och **transmittansen**

$$T = \frac{\langle S_2 \rangle}{\langle S_1 \rangle} \quad (13.22)$$

Dessa blir nu för rätvinklig reflektion och transmission

$$R_n = r_{12}^2 \quad (13.23)$$

$$T_n = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2 \quad (13.24)$$

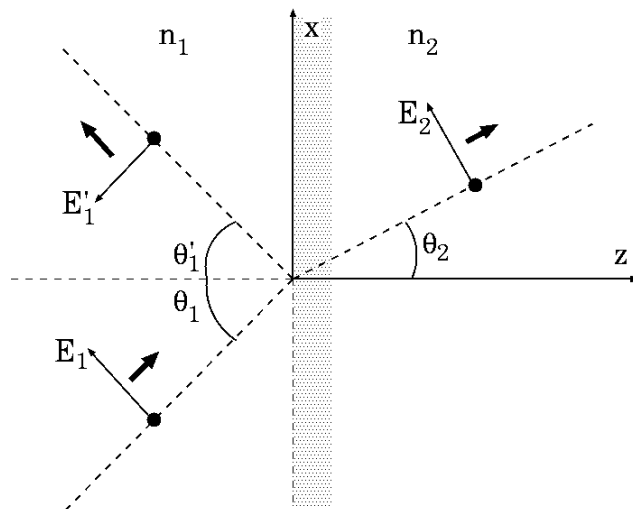
Villkoret

$$R + T = 1 \quad (13.25)$$

är satisfierat, vilket innebär att energin bevaras.

Exempel : Luft har $n_1 \approx 1$ och glas $n_2 = 1,5$. Detta ger $R_n = 0,04$ och $T_n = 0,96$ för en våg i luft som träffar gränssytan luft-glas med en infallsvinkel vinkelrät mot ytan.

13.1.2. Icke-rätvinklig infallsvinkel



De inkommande, reflekterade och transmitterade vågorna är nu

$$\mathbf{E}_1 = \tilde{\mathbf{E}}_1 e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \mathbf{r})} \quad (13.26)$$

$$\mathbf{E}'_1 = \tilde{\mathbf{E}}'_1 e^{-i(\omega t + \boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \mathbf{r})} \quad (13.27)$$

$$\mathbf{E}_2 = \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \mathbf{r})} \quad (13.28)$$

Gränspanets normalvektor betecknas $\hat{\mathbf{n}}$, och är med dessa beteckningar lika med $\hat{\mathbf{z}}$ -vektorn.

Planet som bildas av $\boldsymbol{\kappa}_1$ och $\hat{\mathbf{n}}$ kallas **infalls-planet** (eng. *plane of incidence*). I detta fall motsvaras det av xz -planet, eftersom $\boldsymbol{\kappa}_1$, $\hat{\mathbf{n}}$ båda bara har komponenter i xz -planet. Infallsplanet motsvarar alltså papperets plan.

Elfältens $\hat{\mathbf{p}}$ -komponenter är **per definition** de komponenter som är **parallella** med infallsplanet.

Detta gör att $\hat{\mathbf{s}}$ -komponenterna är **vinkelräta** (ty. *senkrecht*) mot infallsplanet.

De tangentiella komponenterna av $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ -fälten är kontinuerliga vid randytan $\mathbf{r}_0 = (x, y, 0)$. Detta ger att faserna och speciellt vågvektor-komponenterna måste vara kontinuerliga där:

$$\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \boldsymbol{\kappa}'_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \mathbf{r}_0 \quad (13.29)$$

Detta medför att alla vågvektorer ligger i ett plan.

Bevis: Använd identiteten

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}) = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}) - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}) - \mathbf{F} \quad (13.30)$$

Med $\mathbf{r}_0 = \mathbf{F}$ och $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ (planets ytnormal) fås

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_0) = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{z}} \cdot (x, y, 0)) - \mathbf{r}_0 = -\mathbf{r}_0 \quad (13.31)$$

Multiplitera nu med t.ex. $\boldsymbol{\kappa}_1$. Vi får:

$$\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_0)) = (\boldsymbol{\kappa}_1 \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_0) = -\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \mathbf{r}_0 \quad (13.32)$$

Gör samma sak med κ_2 och κ_3 , och använd ekv. (13.29). Vi får:

$$(\kappa_1 \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_0) = (\kappa'_1 \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_0) = (\kappa_2 \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_0) \quad (13.33)$$

Detta ger

$$\kappa_1 \times \hat{\mathbf{n}} = \kappa'_1 \times \hat{\mathbf{n}} = \kappa_2 \times \hat{\mathbf{n}} \quad (13.34)$$

Multiplikation med t.ex. κ_1 ger

$$0 = (\kappa_1 \times \kappa'_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (13.35)$$

som indikerar att $\kappa_1, \kappa'_1, \hat{\mathbf{n}}$ alla ligger i samma plan. Motsvarande för κ_2 . $\square$

(i) Eftersom $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ får vi nu att

$$|\hat{\mathbf{z}} \times \kappa_1| = \kappa_1 \sin \theta_1 \quad (13.36)$$

$$= |\hat{\mathbf{z}} \times \kappa'_1| = \kappa'_1 \sin \theta'_1 \quad (13.37)$$

$$= |\hat{\mathbf{z}} \times \kappa_2| = \kappa_2 \sin \theta_2 \quad (13.38)$$

Men $\kappa = \omega/(c/n)$ så att $\kappa'_1 = \kappa_1$ och

$$\sin \theta_1 = \sin \theta'_1 \quad (13.39)$$

Infalls- och reflektionsvinklarna är samma!

(ii) Vi har också från ovan $\kappa_1 \sin \theta_1 = \kappa_2 \sin \theta_2$ och då detta jämförs med definitionen på κ (ekvationerna 13.4 och 13.5),

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (13.40)$$

som är **Snells lag**.

Följande betraktelse över reflektion specifikt för polariseringsriktningar hoppas över, men ges som referens i anteckningarna. Det krävs inte i mellanförhöret.

För att komma vidare måste randvillkoren tillämpas på de olika fälten. I detta fall räcker det med att fokusera på de tangentiella komponenterna. Villkoren för normalkomponenterna ger inga extra

villkor.

Normalkomponenten av t.ex. elfältet vid gränssytan är

$$\mathbf{E}_n = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E})\hat{\mathbf{n}} \quad (13.41)$$

Vilken är den tangentiella komponenten $\mathbf{E}_t$?

Vi vet att fältet är en summa av normala och tangentiella komponenter, så att

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_t = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E})\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{E}_t \equiv \mathbf{E}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad (13.42)$$

En titt på vektoridentiteterna ger oss att

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E})\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{E}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad (13.43)$$

Jämförelse av dessa två uttryck ger oss genast att den tangentiella komponenten måste vara

$$\mathbf{E}_t = -\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) \quad (13.44)$$

Kontinuitetsvillkoret tillämpat på randen $(x, y, 0)$ ger nu

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 13.11

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (\tilde{\mathbf{E}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}'_1)) = \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{E}}_2) \quad (13.45)$$

Plockar bort den gemensamma faktorn $\hat{\mathbf{n}} \times$:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\tilde{\mathbf{E}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}'_1) = \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{E}}_2 \quad (13.46)$$

Motsvarande villkor har vi för magnetfältet:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\tilde{\mathbf{B}}_1 + \tilde{\mathbf{B}}'_1) = \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{B}}_2 \quad (13.47)$$

Detta kan skrivas om med hjälp av

$$\mathbf{B} = \frac{n}{c} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E} \quad (13.48)$$

så att vi får ett nytt villkor för elfältet:

$$n_1 \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{u}}_1 \times \tilde{\mathbf{E}}_1 + \hat{\mathbf{u}}'_1 \times \tilde{\mathbf{E}}'_1) = n_2 \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{u}}_2 \times \tilde{\mathbf{E}}_2) \quad (13.49)$$

Å andra sidan gäller

$$\mathbf{E} = -\frac{c}{n} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{B} \quad (13.50)$$

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 13.12

så att

$$\frac{1}{n_1} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{u}}_1 \times \tilde{\mathbf{B}}_1 + \hat{\mathbf{u}}'_1 \times \tilde{\mathbf{B}}'_1) = \frac{1}{n_2} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{u}}_2 \times \tilde{\mathbf{B}}_2) \quad (13.51)$$

Expandera trippelprodukten med regeln

$$\mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{H}) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) \quad (13.52)$$

så att

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{E}}) = \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) - \tilde{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \quad (13.53)$$

$$= -\tilde{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \quad (13.54)$$

för elfälten i $\hat{\mathbf{s}}$ -riktningen och motsvarande för magnetfälten $\tilde{\mathbf{B}}_p$ i $\hat{\mathbf{s}}$ -riktningen.

Observera att p.g.a.

$$\mathbf{B}_p = \frac{n}{c} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_p \quad (13.55)$$

så ligger $\mathbf{B}_p$ i $\hat{\mathbf{s}}$ -riktningen.

Detta ger

$$n_1(\tilde{\mathbf{E}}_{1s}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_1) + \tilde{\mathbf{E}}'_{1s}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}'_1)) = n_2 \tilde{\mathbf{E}}_{2s}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_2) \quad (13.56)$$

$$\frac{1}{n_1}(\tilde{\mathbf{B}}_{1p}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_1) + \tilde{\mathbf{B}}'_{1p}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}'_1)) = \frac{1}{n_2} \tilde{\mathbf{B}}_{2p}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_2) \quad (13.57)$$

Obs:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 = \cos \theta_1 \quad (13.58)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}'_1 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{u}}'_1 = \cos(\theta'_1 - \pi) = -\cos \theta'_1 \quad (13.59)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 = \cos \theta_2 \quad (13.60)$$

Detta ger

$$n_1(\tilde{\mathbf{E}}_{1s} \cos \theta_1 - \tilde{\mathbf{E}}'_{1s} \cos \theta'_1) = n_2 \tilde{\mathbf{E}}_{2s} \cos \theta_2 \quad (13.61)$$

$$\frac{1}{n_1}(\tilde{\mathbf{B}}_{1p} \cos \theta_1 - \tilde{\mathbf{B}}'_{1p} \cos \theta'_1) = \frac{1}{n_2} \tilde{\mathbf{B}}_{2p} \cos \theta_2 \quad (13.62)$$

Vi bestämmer nu Fresnel-koefficienterna för reflektionen och brytningen. Vi betraktar skilt p- och s-komponenterna.

p-polarisering

För p-komponenterna som är per definition riktade vinkelrätt mot planet $\hat{s}$ kan vi skriva

$$\hat{n} \times (\tilde{\mathbf{B}}_{1p} + \tilde{\mathbf{B}}'_{1p}) = \hat{n} \times (\tilde{B}_{1p}\hat{s} + \tilde{B}'_{1p}\hat{s}) \quad (13.63)$$

$$\hat{n} \times \tilde{\mathbf{B}}_{2p} = \hat{n} \times \tilde{B}_{2p}\hat{s} \quad (13.64)$$

Enligt det tidigare villkoret 13.47 bör dessa vara lika, så de högra lederna ger

$$\tilde{B}_{1p} + \tilde{B}'_{1p} = \tilde{B}_{2p} \quad (13.65)$$

Ur ekvation 13.62 fås

$$\frac{1}{n_1}(\tilde{B}_{1p} \cos \theta_1 - \tilde{B}'_{1p} \cos \theta'_1) = \frac{1}{n_2} \tilde{B}_{2p} \cos \theta_2 \quad (13.66)$$

Definitionerna för Fresnel-koefficienterna och ekvation 13.50 ger nu

$$r_{12p} = \frac{E'_{1p}}{E_{1p}} = \frac{c/n_1 B'_{1p}}{c/n_1 B_{1p}} = \frac{B'_{1p}}{B_{1p}} \quad (13.67)$$

$$t_{12p} = \frac{E_{2p}}{E_{1p}} = \frac{c/n_2 B_{2p}}{c/n_1 B_{1p}} = \frac{n_1 B_{2p}}{n_2 B_{1p}} \quad (13.68)$$

varur fås

$$r_{12p} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (13.69)$$

$$= \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad (13.70)$$

$$t_{12p} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (13.71)$$

$$= \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (13.72)$$

De sista leden följer med hjälp av Snells lag och några trigonometriska identiteter.

s-polarisering

Nu fås

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\tilde{\mathbf{E}}_{1s} + \tilde{\mathbf{E}}'_{1s}) = \hat{\mathbf{n}} \times (\tilde{E}_{1s} \hat{\mathbf{s}} + \tilde{E}'_{1s} \hat{\mathbf{s}}) \quad (13.73)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{E}}_{2s} = \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{E}_{2s} \hat{\mathbf{s}} \quad (13.74)$$

Enligt det tidigare villkoret 13.46 bör dessa vara lika, så de högra lederna ger

$$\tilde{E}_{1s} + \tilde{E}'_{1s} = \tilde{E}_{2s} \quad (13.75)$$

Ur ekvation 13.61 fås

$$n_1(\tilde{E}_{1s} \cos \theta_1 - \tilde{E}'_{1s} \cos \theta'_1) = n_2 \tilde{E}_{2s} \cos \theta_2 \quad (13.76)$$

Notera att ekv. (13.75) och (13.76) också gäller för fälten i vektoriell form. Detta betyder att

$$\tilde{\mathbf{E}}'_{1s} = r_{12s} \tilde{\mathbf{E}}_{1s} \quad (13.77)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{2s} = t_{12s} \tilde{\mathbf{E}}_{1s} \quad (13.78)$$

så att Fresnelkoefficienternas tecken berättar om fälten har samma riktning eller är motsatt riktade.

De skalära uttrycken ovan är samma som ovan för magnetfältet, men med n_1 och n_2 på ombytta platser. Lösningen av ekvationssystemet ger, med beteckningarna $E'_{1s} = r_{12s}E_{1s}$ och $E_{2s} = t_{12s}E_{1s}$ att

$$r_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (13.79)$$

$$= \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (13.80)$$

$$t_{12s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (13.81)$$

$$= \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (13.82)$$

Reflektanserna och transmittanserna definieras nu som projektionen av Poynting-vektorns tidsmedelvärde på gränsytaens normal:

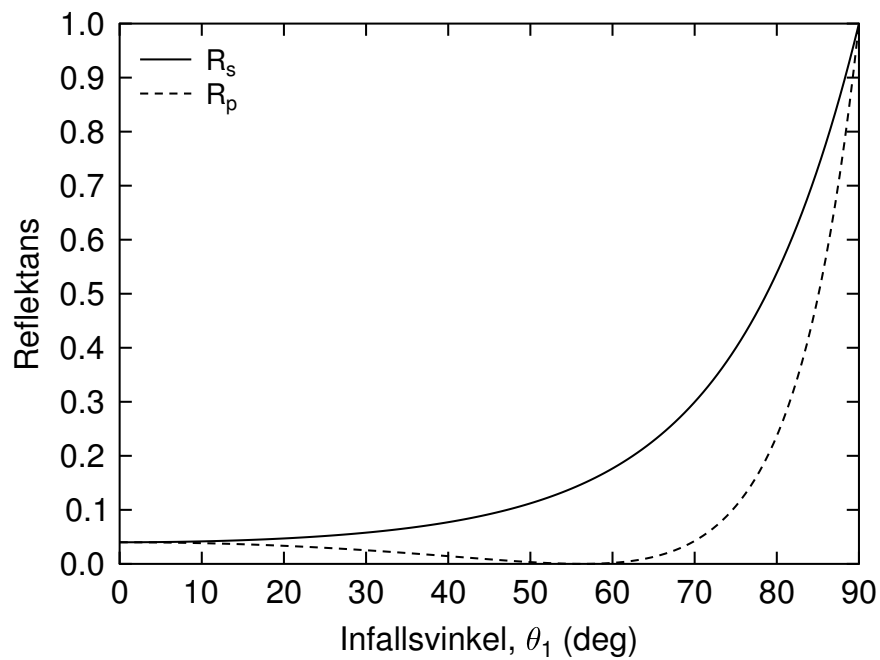
$$R_s = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}'_{1s} \rangle}{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} = r_{12s}^2 \quad (13.83)$$

$$T_s = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}_{2s} \rangle}{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12s}^2 \quad (13.84)$$

$$R_p = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}'_{1p} \rangle}{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}_{1p} \rangle} = r_{12p}^2 \quad (13.85)$$

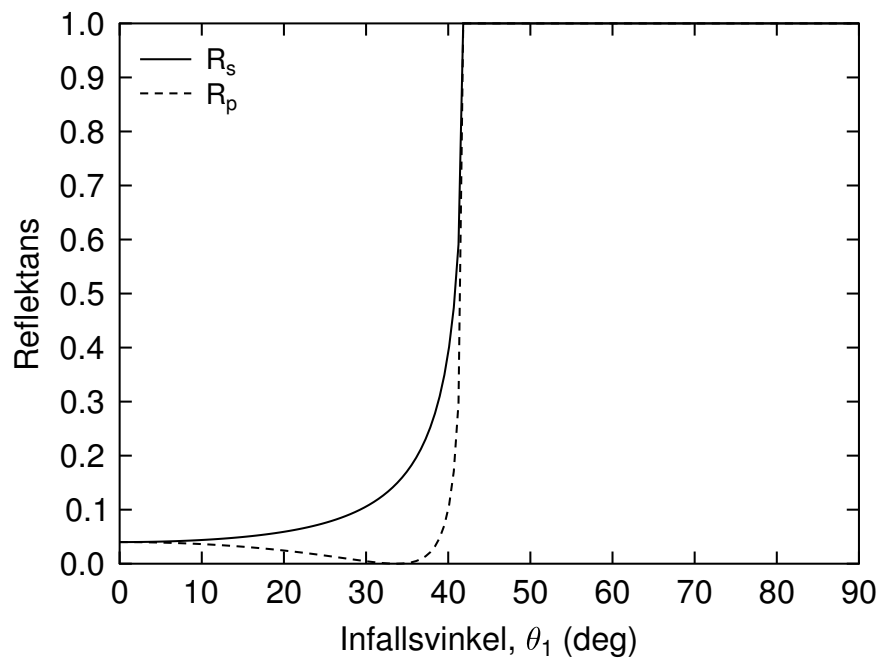
$$T_p = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}_{2p} \rangle}{\hat{\mathbf{n}} \cdot \langle \mathbf{S}_{1p} \rangle} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12p}^2 \quad (13.86)$$

Exempel 1: Ljusstråle i luft som träffar en gränsyta mot glas, $n_1 = 1$ och $n_2 = 1,5$.



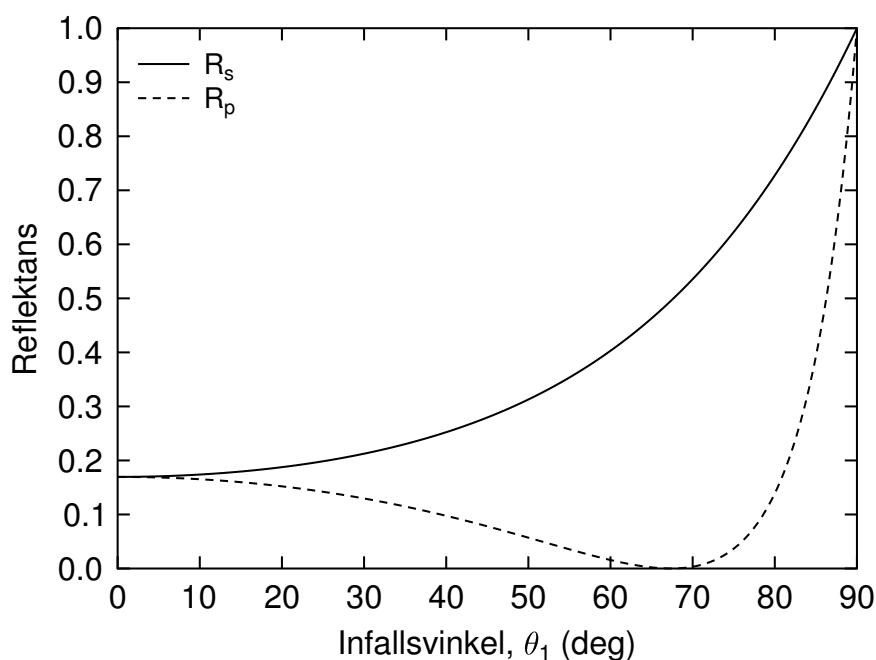
□

Exempel 2: Ljusstråle i glas som träffar en gränsyta mot luften, $n_1 = 1,5$ och $n_2 = 1$.



□

Exempel 3: En gul ljusstråle i luft som träffar en gränsyta mot diaman, $n_1 = 1$ och $n_2 = 2,4$.



□

Slut på det överhoppade området.

13.1.3. Speciella vinklar

Tangentiellt inkommande våg

$\theta_1 = \pi/2$ ger $\sin \theta_2 = n_1/n_2$. Om $n_1 < n_2$ så existerar en reell brytningsvinkel. Från uttrycken för reflektansen och transmittansen ser vi dock att $R_s = R_p = 1$ för $\theta_1 = \pi/2$, d.v.s. allt ljus reflekteras medan inget bryts. Detta kan iakttas i de föregående exemplens grafer.

Brewsters vinkel

Det finns en vinkel θ_B kallad **Brewsters vinkel**, vid vilken den ena av polarisationskomponenterna inte alls reflekteras, men nog den andra.

Genom att kräva t.ex. $R_p = 0$ för $n_1 \neq n_2$ fås att $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ ger $R_s \neq 0$. Den motsvarande infallsvinkeln θ_1 fås med hjälp av Snells lag:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin(\pi/2 - \theta_1) = n_2 \cos \theta_1 \quad (13.87)$$

Detta ger

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (13.88)$$

I och med detta fenomen har man en enkel metod att polarisera ljus!

Exempel : För en ljusstråle som rör sig i luft och träffar en glasyta gäller $n_1 = 1$ och $n_2 = 1,5$, så att Brewsters vinkel är $\theta_B = 56^\circ$ (jämför bilden i exempel 1 ovan). Om ljusstrålen istället rör sig i glas och träffar en yta mot luften fås $\theta_B = 34^\circ$. $\square$

Total intern reflektion

Ytterligare en speciell vinkel (förutom $\theta_1 = \pi/2$) satisfierar villkoret att allt ljus reflekteras och inget bryts, d.v.s. $R = 1$ och $T = 0$. Detta ger att brytningsvinkeln måste uppfylla villkoret $\cos \theta_2 = 0$, vilket ger $\theta_2 = \pi/2$. Den motsvarande infallsvinkeln kallas **kritisk vinkel** och betecknas θ_c .

Snells lag ger

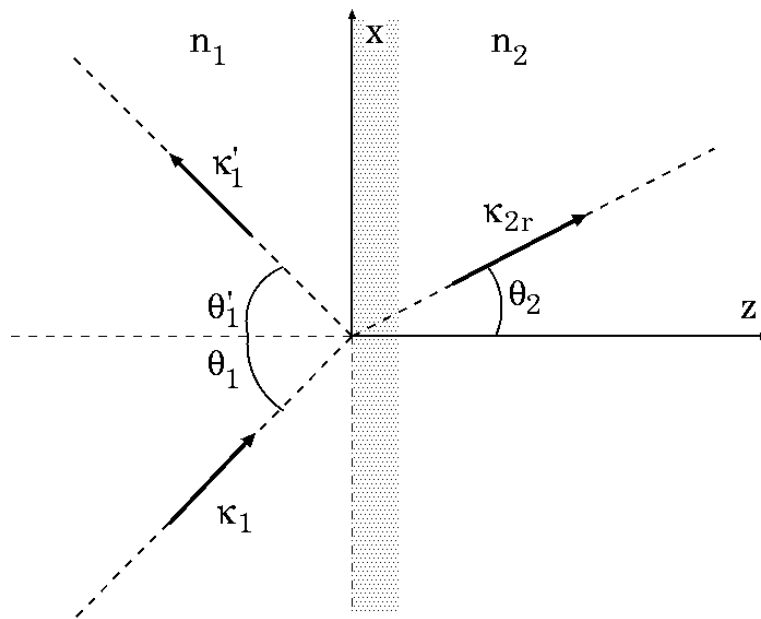
$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (13.89)$$

Den kritiska vinkeln existerar om $n_2 < n_1$!

Fenomenet total intern reflektion utnyttjas t.ex. för att sända ljussignaler genom en optisk fiber.

Exempel : För en ljusstråle som rör sig i glas och träffar en gränsyta mot luften gäller $n_1 = 1,5$ och $n_2 = 1$, så att $\theta_c = 42^\circ$. För en stråle i luft som träffar en glasyta existerar ingen dylik vinkel, eftersom det då gäller att $n_2 > n_1$. Dock har vi fortfarande vinkeln $\theta_1 = \pi/2$ som gör att allt ljus reflekteras. $\square$

13.2. Reflektion och brytning av vågor mellan icke-ledande och ledande media



Vi betraktar nu ett genomskinligt medium 1 och en bra ledare 2.

Då medium 2 är ledande har vi

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 13.27

$$\tilde{\kappa}_2 = \kappa_{2r} + i\kappa_{2i} \quad (13.90)$$

Detta ger

$$\hat{n} \times \kappa_1 = \hat{n} \times \tilde{\kappa}_2 = \hat{n} \times \kappa_{2r} + i\hat{n} \times \kappa_{2i} \quad (13.91)$$

Vänstra ledet är i $\hat{y}$ -riktningen, så högra ledets första term måste också vara det. Vänstra ledet innehåller ingen imaginär term, så vi måste ha $\hat{n} \times \kappa_{2i} = 0$, d.v.s. κ_{2i} är parallell med $\hat{n}$.

Vi har nu

$$\hat{n} \cdot \kappa_{2r} = \kappa_{2r} \cos \theta_2 \quad (13.92)$$

$$\hat{n} \cdot \kappa_{2i} = \kappa_{2i} \cos 0 = \kappa_{2i} \quad (13.93)$$

så att

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \tilde{\kappa}_2 &= \kappa_{2r} \cos \theta_2 + i\kappa_{2i} \\ &\equiv \tilde{\kappa}_2 \cos \tilde{\theta}_2 \end{aligned} \quad (13.94)$$

Detta definierar den komplexa vinkeln $\tilde{\theta}_2$ med hjälp av de reella storheterna θ_2 , κ_{2r} och κ_{2i} .

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 13.28

$$\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\kappa}_1 = \hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\kappa}_{2r} \quad (13.95)$$

ger

$$\kappa_1 \sin \theta_1 = \kappa_{2r} \sin \theta_2 = \kappa_{2r} \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} \quad (13.96)$$

$$\begin{aligned} &= \kappa_{2r} \left[1 - \left(\frac{\tilde{\kappa}_2 \cos \tilde{\theta}_2 - i\kappa_{2i}}{\kappa_{2r}} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[\kappa_{2r}^2 - (\tilde{\kappa}_2^2 \cos^2 \tilde{\theta}_2 - \kappa_{2i}^2 - 2i\tilde{\kappa}_2 \cos \tilde{\theta}_2 \kappa_{2i}) \right]^{1/2} \\ &= \left[\kappa_{2r}^2 + \kappa_{2i}^2 - \tilde{\kappa}_2^2 \cos^2 \tilde{\theta}_2 + 2i\tilde{\kappa}_2 \kappa_{2i} \cos \tilde{\theta}_2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (13.97)$$

Observera:

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_2^2 &= (\kappa_{2r} + i\kappa_{2i})^2 \\ &= \kappa_{2r}^2 - \kappa_{2i}^2 + 2i\kappa_{2r} \cdot \kappa_{2i} \\ &= \kappa_{2r}^2 - \kappa_{2i}^2 + 2i\kappa_{2r}\kappa_{2i} \cos \theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \kappa_{2r}^2 - \kappa_{2i}^2 + 2i\kappa_{2r}\kappa_{2i} \frac{\tilde{\kappa}_2 \cos \tilde{\theta}_2 - i\kappa_{2i}}{\kappa_{2r}} \\ &= \kappa_{2r}^2 - \kappa_{2i}^2 + 2i\kappa_{2i}\tilde{\kappa}_2 \cos \tilde{\theta}_2 + 2\kappa_{2i}^2 \\ &= \kappa_{2r}^2 + \kappa_{2i}^2 + 2i\kappa_{2i}\tilde{\kappa}_2 \cos \tilde{\theta}_2 \end{aligned} \quad (13.98)$$

Vi får nu

$$\kappa_1 \sin \theta_1 = \kappa_{2r} \sin \theta_2 \quad (13.99)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\tilde{\kappa}_2^2 - \tilde{\kappa}_2^2 \cos^2 \tilde{\theta}_2 \right]^{1/2} \\ &= \tilde{\kappa}_2 \sin \tilde{\theta}_2 \end{aligned} \quad (13.100)$$

Resultatet av detta är likheten

$$\kappa_1 \sin \theta_1 = \kappa_{2r} \sin \theta_2 = \tilde{\kappa}_2 \sin \tilde{\theta}_2 \quad (13.101)$$

Vi kan nu skriva om uttrycken för r_{12} och t_{12} för ett ledande medium 2.

(1) Först ersätter vi n_2 med $\tilde{n}_2 = n_2 + ik_2$.

(2) Sedan noterar vi att med

$$\tilde{\kappa}_2 = \frac{\omega}{c} \tilde{n}_2 = \frac{\omega}{c} (n_2 + ik_2) \quad (13.102)$$

fås

$$\sin \tilde{\theta}_2 = \frac{c \kappa_{2r} \sin \theta_2}{\omega n_2 + ik_2} \quad (13.103)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n_2 \sin \theta_2}{n_2 + ik_2} \\ &= \frac{c \kappa_1 \sin \theta_1}{\omega n_2 + ik_2} \\ &= \frac{n_1 \sin \theta_1}{n_2 + ik_2} \\ &= \frac{n_1 n_2 \sin \theta_1 - in_1 k_2 \sin \theta_1}{n_2^2 + k_2^2} \end{aligned} \quad (13.104)$$

$$\cos \tilde{\theta}_2 = \frac{c \kappa_{2r} \cos \theta_2 + i \kappa_{2i}}{\omega n_2 + ik_2} \quad (13.105)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n_2 \cos \theta_2 + ik_2}{n_2 + ik_2} \\ &= \frac{n_2^2 \cos \theta_2 + k_2^2 + in_2 k_2 (1 - \cos \theta_2)}{n_2^2 + k_2^2} \end{aligned} \quad (13.106)$$

Dessa ersätter $\sin \theta_2$ och $\cos \theta_2$ i uttrycken för r_{12} och t_{12} . Dessa blir nu komplexa, så att

$$\tilde{r}_{12s} \equiv |\tilde{r}_{12s}| e^{i\alpha_s} \quad (13.107)$$

$$\tilde{r}_{12p} \equiv |\tilde{r}_{12p}| e^{i\alpha_p} \quad (13.108)$$

och

$$\tilde{\mathbf{E}}'_{12s} = \tilde{r}_{12s} \mathbf{E}_{1s} \quad (13.109)$$

$$\tilde{E}'_{12p} = \tilde{r}_{12s} E_{1p} \quad (13.110)$$

Reflektanserna blir $R_s = |\tilde{r}_{12s}|^2$ och $R_p = |\tilde{r}_{12p}|^2$.

Observera: För ledande media talar man inte om transmittans utan kallar samma storhet för **absorptans**:

$$A = 1 - R \quad (13.111)$$

Uttrycken för absorptanserna blir mera komplicerade. Istället för att ta reda på dessa konstaterar vi att $A = 1 - R$, så att det räcker med att bestämma R , vilket vi gjort.

Användbara identiteter är nu

$$\tilde{r}_{12} = -\tilde{r}_{21} \quad (13.112)$$

$$\tilde{r}_{12}^2 + \tilde{t}_{12}\tilde{t}_{21} = 1 \quad (13.113)$$

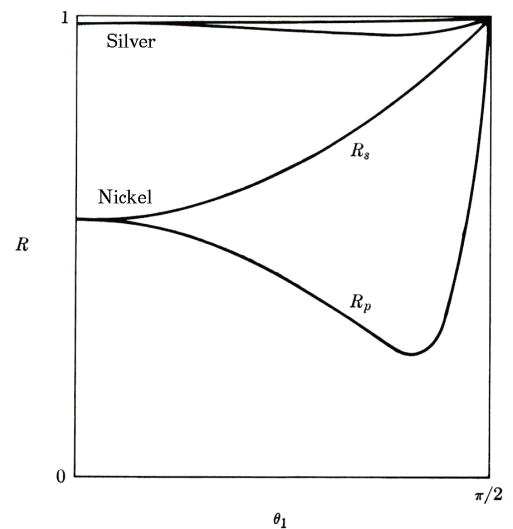
för både s och p .

Vi får för reflektanserna

$$\tilde{r}_{12p} = \frac{\tilde{n}_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \tilde{\theta}_2}{\tilde{n}_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \tilde{\theta}_2} \quad (13.114)$$

$$\tilde{r}_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2}{n_1 \cos \theta_1 + \tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2} \quad (13.115)$$

Bilden visar reflektansen för synligt ljus från silver med $n \approx 0.05$ och $k \approx 3$ samt nickel med $n \approx 2$ och $k \approx 3$



Detta resultat förklara varför metaller är glänsande! Bilden innebär ju att s.g.s allt synligt ljus

reflekteras från silver, och en stor del också från nickel.

13.3. Vågledare

13.3.1. Vågors fortskridande mellan parallella ledande plan

Vi kommer nu att se hur elektromagnetiska vågor kan transporteras genom ihåliga ledare. Detta är ett alternativ till att skicka ut och ta emot dem via antenner.

Vågledare är mycket centrala i nutida telekommunikation för att optiska fibrer är vågledare där centrumet av ledaren är glas. Utvecklingen av optiska fibrer gav Nobelpriset i fysik 2009 till Charles Kao.

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 13.35

Vågledare är också mycket aktuella nu för att man nyligen kommit på att s.k. fotoniska kristaller har egenskapen att de helt hindrar ljusets framfart i dem vid någon viss frekvens. Tack vare detta kan man (analogt med ledare) använda fotoniska kristaller för att styra ljus. Fotoniska kristaller kan tillverkas av halvledare på kiselchips, vilket innebär att detta ger en potential för att integrerar konventionell och optoelektronik på samma kiselchips.

Ämnet behandlas inte mer ingående på denna kurs, för den kräver insikter i halvledarfysik, men en lättfattlig introduktion ges i http://en.wikipedia.org/wiki/Photonic_crystal



Opaler är naturliga fotoniska kristaller. De hindrar framfart av ljus vid vissa bestämda våglängder, vilket ger dem vackra färger. [wikipedia]

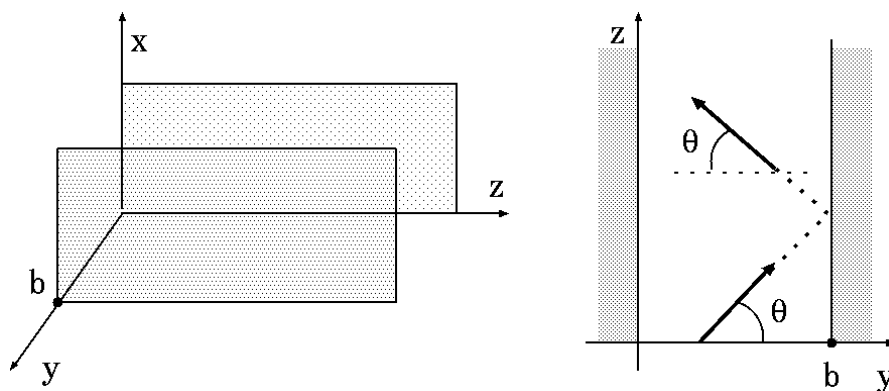
Vi antar att det ledande materialet har en oändlig konduktivitet så att vågen inte attenueras vid reflektion.

Då $g = \infty$ gäller att $K_i = \infty$ och $\delta = 0$, så att $\exp[-u/\delta] = \exp[-\infty] = 0$ och brytning in i ledaren förekommer därför inte.

Vi granskar först fallet att vågorna reflekteras mellan två parallella plan. Senare inkluderas ytterligare

ett par av plan, så att vi får en **rektangulär vågledare**.

Låt transportriktningen vara $\hat{z}$. Situationen ser nu ut som i figuren.



Man definierar två sorters transportmoder: (1) **transversell elektrisk (TE)** mod, och (2) **transversell magnetisk (TM)** mod.

För **TE-moden** gäller det att **elfältet** är parallellt med de reflekterande ytorna ($\hat{x}$ -riktningen) och vinkelrätt mot fortskridningsriktningen ($\hat{z}$ -riktningen).

För TM-moden gäller motsvarande villkor, men för magnetfältet.

I det följande behandlar vi bara TE-moder.

Låt den infallande vågen — alternativt vågen som reflekteras från väggen vid $y = 0$ — ha fasen

$$-\omega t + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} = -\omega t + \kappa y \cos \theta + \kappa z \sin \theta \quad (13.116)$$

Vågen som reflekteras från planet vid $y = b$ har då fasen

$$-\omega t + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} = -\omega t - \kappa y \cos \theta + \kappa z \sin \theta \quad (13.117)$$

Vågens elfält är

$$\tilde{\mathbf{E}}(y, z, t) = \hat{x} \left(\tilde{E}_1 e^{i(-\omega t + \kappa(y \cos \theta + z \sin \theta))} + \tilde{E}'_1 e^{i(-\omega t + \kappa(-y \cos \theta + z \sin \theta))} \right) \quad (13.118)$$

Randvillkoret vid ytan mot det oändligt ledande materialet är $\tilde{\mathbf{E}} = 0$.

(i) För randen $y = 0$ fås

$$0 = \tilde{E}_1 e^{i(-\omega t + \kappa z \sin \theta)} + \tilde{E}'_1 e^{i(-\omega t + \kappa z \sin \theta)} \quad (13.119)$$

Detta skall gälla för alla t och z , så att vi måste ha $\tilde{E}'_1 = -\tilde{E}_1$.

(ii) För randen $y = b$ fås

$$0 = \tilde{E}_1 e^{i(-\omega t + \kappa(b \cos \theta + z \sin \theta))} - \tilde{E}_1 e^{i(-\omega t + \kappa(-b \cos \theta + z \sin \theta))} \quad (13.120)$$

som ger

$$e^{i\kappa b \cos \theta} = e^{-i\kappa b \cos \theta} \quad (13.121)$$

så att vi måste ha

$$\sin(\kappa b \cos \theta) = 0 \quad (13.122)$$

eller

$$\kappa b \cos \theta = m\pi \quad (13.123)$$

där m är ett heltal.

Detta ger

$$\kappa = \frac{m\pi}{b \cos \theta} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (13.124)$$

där λ_0 är den motsvarande **våglängden i vakuum**.

Vi kan också definiera

$$\kappa_y = \kappa \cos \theta \equiv \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad (13.125)$$

$$\kappa_z = \kappa \sin \theta \equiv \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad (13.126)$$

Elfältet blir nu

$$\tilde{\mathbf{E}}(y, z, t) = \hat{\mathbf{x}} \tilde{E}_1 (e^{i\kappa y \cos \theta} - e^{-i\kappa y \cos \theta}) e^{-i\omega t + i\kappa z \sin \theta} \quad (13.127)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{\mathbf{x}} \tilde{E}_1 2i \sin(\kappa y \cos \theta) e^{-i\omega t + i\kappa z \sin \theta} \\ &\equiv \hat{\mathbf{x}} \tilde{E}_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) e^{i2\pi z/\lambda_g - i\omega t} \end{aligned} \quad (13.128)$$

Observera:

$$\kappa b \cos \theta = m\pi = \frac{2\pi b}{\lambda_c} \quad (13.129)$$

ger

$$\frac{b}{\lambda_c} = \frac{m}{2} \quad (13.130)$$

Men:

$$\kappa^2 = \kappa_y^2 + \kappa_z^2 \quad (13.131)$$

Detta ger

$$\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{\lambda_g^2} \quad (13.132)$$

så att

$$\lambda_g^2 = \frac{\lambda_0^2 \lambda_c^2}{\lambda_c^2 - \lambda_0^2} \quad (13.133)$$

Om $\lambda_c \leq \lambda_0$ blir λ_g och κ_z noll eller imaginär, d.v.s. vågen existerar inte eller attenueras istället för att fortskrida.

Vi måste alltså kräva att

$$\lambda_0 < \frac{2b}{m} = \lambda_c \quad (13.134)$$

λ_c kan kallas **bryt-våglängd** (eng. *cutoff wavelength*) och motsvarar den längsta våglängd som kan skickas mellan de parallella planen. Denna våglängd motsvarar ett bestämt värde på m , och kallas för **mod**.

Alternativt, med $\nu_0 = c/\lambda_0$, fås

$$\nu_0 > \frac{mc}{2b} \quad (13.135)$$

Elfältet blir nu

$$\tilde{E}(y, z, t) = \tilde{E}_0 \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i2\pi z/\lambda_g - i\omega t} \quad (13.136)$$

i x -riktningen, där

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (m\lambda_0/(2b))^2}} \quad (13.137)$$

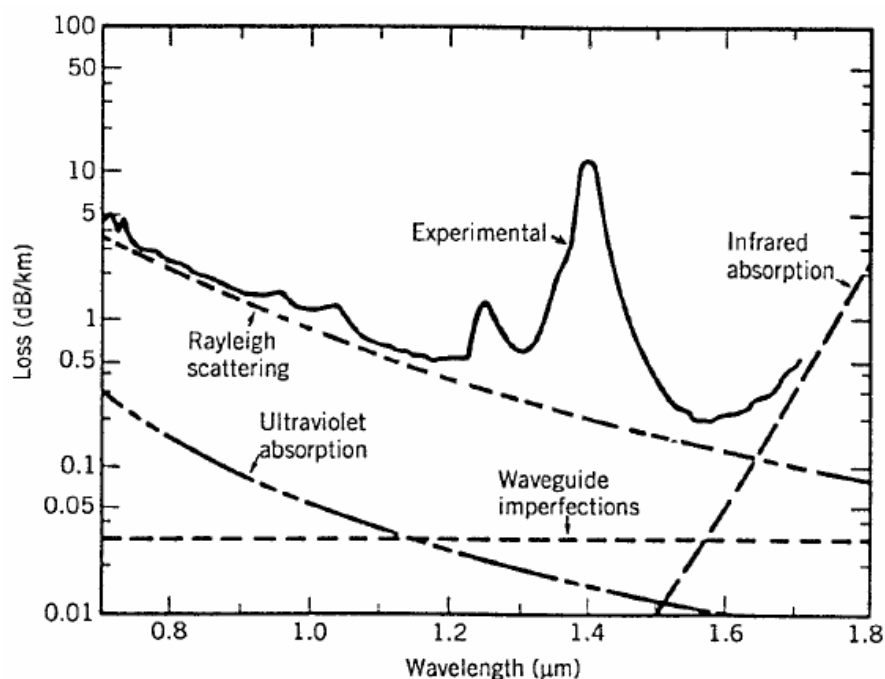
Exempel 1:: Om $m = 0$ fås $\lambda_c = \infty$ så att alla vågor med godtycklig våglängd borde kunna fortskrida. Men å andra sidan, $m = 0$ ger $\tilde{E} \equiv 0$, så att inga vågor förekommer. □

Exempel 2:: Om $m = 1$ fås $\nu_0 > c/(2b)$. Om mikrovågor ($\nu_0 = 10^{10}$ Hz) ska fortskrida så måste vi ha $b > c/(2\nu_0) = \lambda_0/2 \approx 1,5$ cm. □

13.4. Absorption i fiberoptik

I praktiska vågledare är det också givetvis avgörande att ha så låg absorption av ljus som möjligt. I vakuum är absorptionen noll, men vakuum lämpar sig inte för vågledare i praktiskt bruk i vardagslivet.

Dagens hypereffektiva telekommunikation bygger till stor del på s.k. fiberoptik, där man använder kiseldioxid (silika)-baserade kablar som vågledare. Orsaken är att det visar sig att kiseldioxid (som är mycket billigt råmaterial då det kan tillverkas från sand) har ett absorptionsminimum kring den infraröda våglängden $1.55\ \mu\text{m}$.



Absorption av ljus i SiO_2 . Bild från

<http://www.fiberoptics4sale.com/wordpress/optical-fiber-attenuation/>

Därmed har kombinationen av snabba lasrar som genererar ljuspulser snabbt vid denna våglängd och tunna kablar möjliggjort överföring av otroliga datamängder mycket snabbt (tänk på att t.ex. bibelns text är ungefär 4 miljoner tecken, vilket kan komprimeras till grovt sett 10 Mbit data. Så med en modern 1 Gbit/s kabel kan man överföra hela bibelns text på ungefär 1/100 av en sekund.