

12. Plana vågors fortskridande i oändliga media

[RMC]

Permittivitetsens frekvensberoende

Då en elektromagnetisk våg passerar ett medium är responsen på vågen i allmänhet beroende på dess vinkelfrekvens ω . Detta ger upphov till ett frekvensberoende i permittiviteten och konduktiviteten: $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ och $g = g(\omega)$.

Frekvensberoendet är lätt att förstå ur ett kvantmekaniskt perspektiv. En elektromagnetisk våg motsvarar ju en ström av fotoner. En fotonens energi är $h\nu = \hbar\omega$ där h är Plancks konstant och $\hbar = h/(2\pi)$.

Ett material består av atomer och molekyler med diskreta energinivåer, och om materialet är en kristall så har det en elektronisk bandstruktur. Om fotonens energi motsvarar skillnaden $\Delta E = E_n - E_{n-1}$ mellan energinivåerna $n - 1$ och n går fotonens energi åt till att excitera elektronen från den ena nivån till den andra.

En ändlig tid går åt för excitationen och de-excitationen, vilket gör att dessa fotoner transporteras långsammare genom mediet. De motsvarande elementarvågorna saktas alltså ner.

Dylika frekvensberoende fenomen går under namnet **dispersiva effekter**.

Dispersionen är kanske mest synbar om vågen är en puls bestående av en summa av delvågor med olika frekvenser. I detta fall påverkas delarna olika mycket, så att vågens form kan förvridas avsevärt.

12.1. Introduktion

Ny notation för den relativa permittiviteten

I detta kapitel granskas hur monokromatiska elektromagnetiska vågor rör sig i ledande och icke-ledande media.

Vi kommer att granska enbart icke-magnetiska media, så att $\mu \approx \mu_0$ till en god approximation. Vi använder nu en modifierad notation för permittiviteten,

$$\varepsilon \equiv K\varepsilon_0 \quad (12.1)$$

så att den relativa permittiviteten (dielektricitetskonstanten) nu betecknas K istället för ε_r som tidigare. Orsaken till denna nya notation är att den reella komponenten av permittiviteten inte skall förväxlas med den relativa permittiviteten.

Å andra sidan, de-exciteringen kan ske via mellannivåer, så att flera fotoner med olika lägre energier avges. Denna förlust av energi medför att några elementarvågors amplituder sjunker.

Vågen förlorar energi också då den orsakar polarisation av molekyler i mediet, t.ex. vattenmolekyler, då den driver fria laddningar, och då den sprids från och bryts genom interna mikroskopiska ytor.

Material i vilka vågen förlorar energi kallas **dissipativa media** (eng. *lossy media*).

Vi återkommer till dispersion i slutet av kapitlet. I det följande räcker det att komma ihåg att ε och g — och de storheter där dessa ingår — är frekvensberoende. Detta leder till att t.ex. synligt ljus och radiovågor bryts eller dämpas olika mycket vid gränssytor och i ledande media.

12.2. Vågor

[Griffiths]

12.2.1. Definition

En våg är en störning som rör sig med en konstant hastighet i ett kontinuerligt medium utan att ändra sin form.

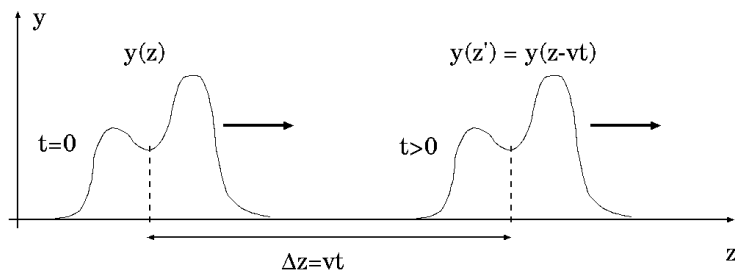
Kravet att vågen skall ha fixerad form är inte alltid uppfyllt. Om vågen är en summa av elementarvågor så bidrar **dispersiva** effekter till att ändra på formen. Detta inträffar p.g.a. mediet gör att olika elementarvågor rör sig olika snabbt.

Kravet att amplituden ska vara konstant bryts i **dissipativa** media. I dessa material förlorar vågen energi då den driver laddningar.

Om dessa effekter inte behöver beaktas, d.v.s. vi har ett **icke-dissipativt och icke-dispersivt medium**, så kommer en våg att bete sig som i figuren:

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 12.5



Vågens form vid tidpunkten $t = 0$ ges av $y_1(z)$.

Vid tidpunkten $t > 0$ har vågen flyttat sig med avståndet $\Delta z = vt$, så att dess form nu ges av $y_2(z) = y_1(z') = y_1(z - vt)$. Samma uttryck gäller vid $t = 0$, eftersom $y_1(z - vt) = y_1(z)$ då.

Om vågen rör sig åt andra hållet ändrar vi $-v$ till $+v$.

Slutsats: **En endimensionell våg längs med z -axeln beskrivs av en form $f(z, t)$ som är en summa av funktioner i $z - vt$ och $z + vt$, där v är vågens hastighet längs med z -axeln:**

$$f(z, t) = g(z - vt) + h(z + vt) \quad (12.2)$$

I fortsättningen granskar vi endast vågor som rör sig i positiva z -axelns riktning, så att $f(z, t) = g(z - vt)$.

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 12.6

Möjliga vågor är

$$f_1 = z - vt \quad (12.3)$$

$$f_2 = \sin(z - vt) \quad (12.4)$$

$$f_3 = \cosh(az - bt) = \cosh(a(z - (b/a)t)) \quad (12.5)$$

$$f_4 = \exp[(z - vt)^2] \quad (12.6)$$

$$f_5 = \exp[z^2] \quad (12.7)$$

Vågen f_3 har hastigheten $v = b/a$.

Vågen f_5 är en **stående våg**, eftersom $v = 0$.

Följande är **inte** vågor:

$$g_1 = z^2 - vt \quad (12.8)$$

$$g_2 = \sin(z - vt^2) \quad (12.9)$$

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 12.7

$$g_3 = \cosh(az) \sin(vt) \quad (12.10)$$

g_3 är dock ett gränsfall. Om v sägs vara vågens hastighet så är g_3 inte en våg. Men om v bara är någon konstant kan g_3 sägas vara en stående våg vars amplitud är tidsmodulerad.

12.2.2. Harmoniska vågor

Den vanligaste formerna av vågor är de **harmoniska**, d.v.s. vågor med de sinusoidala funktionerna

$$\sin(\kappa(z - vt) + \phi_0), \quad \cos(\kappa(z - vt) + \phi_0) \quad (12.11)$$

Faktorn κ har införts för att göra de trigonometriska funktionernas argument dimensionslösa.

Vi fokuserar i det följande på sinusformen. Denna kan skrivas

$$\begin{aligned} f(z, t) &= A \sin(\kappa(z - vt) + \phi_0) \\ &= A \sin(\kappa z - \kappa vt + \phi_0) \\ &\equiv A \sin(\kappa z - \omega t + \phi_0) \end{aligned} \quad (12.12)$$

Vågens maximala värde, A , kallas dess **amplitud**.

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 12.8

Sinus-funktionens argument kallas för vågens **fas**.

ϕ_0 är **faskonstanten**, och ges av

$$f(0, 0) = A \sin(\phi_0) \tag{12.13}$$

Hastigheten v har ett eget namn, **fashastigheten**, och brukar betecknas v_f för tydlighetens skull.

Vid en fixerad tid, t.ex. $t = 0$, gäller

$$f(z, 0) = \sin(\kappa z + \phi_0) \tag{12.14}$$

Vågen upprepar sig då z har växt med $\Delta z = 2\pi/\kappa \equiv \lambda$, vilket motsvarar vågens **våglängd**.

Konstanten κ kallas **vågvektor**.

Om positionen är fixerad och tiden växer, så upprepar vågen sig då t växt med $\Delta t = 2\pi/\omega \equiv T$, som kallas vågens **period**.

Inversen av perioden, $\nu = 1/T = \omega/(2\pi)$, är vågens **frekvens**.

Konstanten ω kallas **vinkelfrekvens**.

Eftersom $\kappa v = \omega$ får vi för fashastigheten att $v = \omega/\kappa = \lambda\omega/(2\pi)$.

12.2.3. Komplex notation

I praktiken är sinus- och cosinus-funktionerna svåra att räkna med, så man använder för det mesta följande komplexa form för sinusoidala vågor:

$$\tilde{f}(z, t) = Ae^{i(kz - \omega t + \phi_0)} = \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)} \tag{12.15}$$

där faskonstanten inkluderas i den komplexa amplituden.

Den verkliga vågen motsvarar

$$\text{Re}(\tilde{f}(z, t)) \tag{12.16}$$

eller

$$\text{Im}(\tilde{f}(z, t)) \tag{12.17}$$

beroende på om man söker cosinus- eller sinus-formen.

12.2.4. Superposition

En godtycklig våg kan alltid skrivas som en summa eller **superposition** av de sinusoidala elementarvågorna

$$\tilde{A}(\kappa)e^{i(\kappa z - \omega t)} \tag{12.18}$$

Vågen blir då

$$\tilde{f}(z, t) = \sum_{\kappa} \tilde{A}(\kappa)e^{i(\kappa z - \omega t)} \tag{12.19}$$

eller mera allmänt

$$\tilde{f}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \tilde{A}(\kappa)e^{-i\omega t} e^{i\kappa z} \tag{12.20}$$

Detta är **Fouriertransformationen** av $\tilde{A}(\kappa)e^{-i\omega t}$.

Den **inversa Fouriertransformationen** är

$$\tilde{A}(\kappa)e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \tilde{f}(z, t)e^{-i\kappa z} \tag{12.21}$$

12.3. Det elektromagnetiska spektret

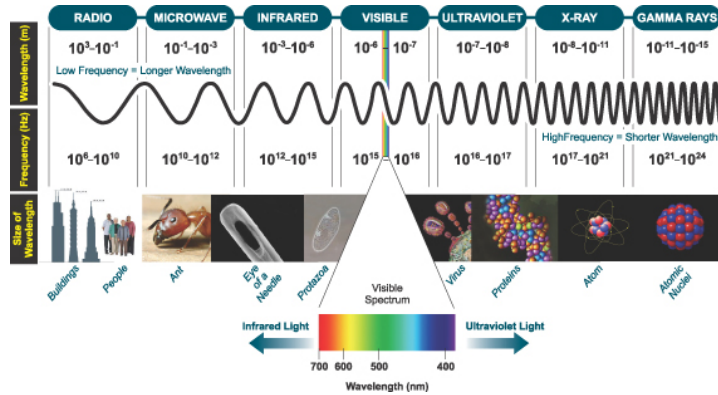
[Griffiths]

Det elektromagnetiska spektrets klassificering ges här för repetitions skull som tabell:

The Electromagnetic Spectrum		
Frequency (Hz)	Type	Wavelength (m)
10^{22}	gamma rays	10^{-13}
10^{21}		10^{-12}
10^{20}		10^{-11}
10^{19}	x rays	10^{-10}
10^{18}		10^{-9}
10^{17}		10^{-8}
10^{16}	ultraviolet	10^{-7}
10^{15}	visible	10^{-6}
10^{14}	infrared	10^{-5}
10^{13}		10^{-4}
10^{12}		10^{-3}
10^{11}		10^{-2}
10^{10}	microwave	10^{-1}
10^9	TV, FM	1
10^8		10
10^7		10^2
10^6	AM	10^3
10^5	RF	10^4
10^4		10^5
10^3		10^6

The Visible Range		
Frequency (Hz)	Color	Wavelength (m)
1.0×10^{15}	near ultraviolet	3.0×10^{-7}
7.5×10^{14}	shortest visible blue	4.0×10^{-7}
6.5×10^{14}	blue	4.6×10^{-7}
5.6×10^{14}	green	5.4×10^{-7}
5.1×10^{14}	yellow	5.9×10^{-7}
4.9×10^{14}	orange	6.1×10^{-7}
3.9×10^{14}	longest visible red	7.6×10^{-7}
3.0×10^{14}	near infrared	1.0×10^{-6}

Samma i vackrare version:



Nu då tidsberoendet är helt i termen $e^{-i\omega t}$ inser man att operatören

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega \quad (12.28)$$

På liknande sätt kan man från nabra-operatorns egenskaper lista ut att för κ -beroende av formen $e^{i\kappa \cdot \mathbf{r}}$ blir

$$\nabla = i\kappa \quad (12.29)$$

Med dessa operationer och genom att förkorta bort kan Maxwells ekvationer för plana vågor skrivas som

$$\kappa \cdot \hat{\mathbf{D}} = 0 \quad (12.30)$$

$$\kappa \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0 \quad (12.31)$$

$$\kappa \times \hat{\mathbf{E}} = \omega \hat{\mathbf{B}} \quad (12.32)$$

$$\kappa \times \hat{\mathbf{H}} = -\omega \hat{\mathbf{D}} \quad (12.33)$$

Ur dessa former ser man klart att elfältet $\mathbf{E}$ och magnetfältet $\mathbf{B}$ är **vinkelräta mot varandra i plana vågor!**

Den komplexvärda amplituden för t.ex. elfältet kan delas upp i två komponenter, båda vinkelräta mot vågens färdriktning:

12.4. Polarisation

För ett laddningsfritt icke-ledande medium gäller $\rho = \mathbf{J} = g = 0$ så att Maxwells ekvationer är

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (12.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (12.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (12.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (12.25)$$

Monokromatiska, plana vågor el- och magnetfält kan skrivas:

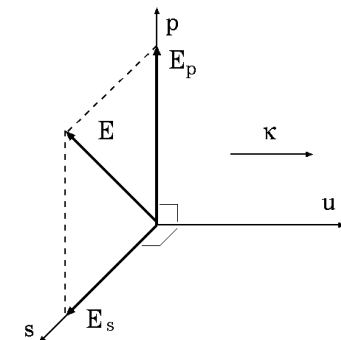
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-i(\omega t - \kappa \cdot \mathbf{r})} \quad (12.26)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{-i(\omega t - \kappa \cdot \mathbf{r})} \quad (12.27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_0 &= \tilde{E}_{0p} \hat{\mathbf{p}} + \tilde{E}_{0s} \hat{\mathbf{s}} \\ &= E_{0p} e^{i\phi} \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} \hat{\mathbf{s}} \end{aligned} \quad (12.34)$$

där vi summerade fasskillnaden i den första termen.

Systemet är orienterat som $\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{u}}$.



Det totala elfältet är nu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-i(\omega t - \kappa \cdot \mathbf{r})}$$

$$= E_{0p} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi)} \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})} \hat{\mathbf{s}} \quad (12.35)$$

Det fysikaliska fältet är

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}, t) = E_{0p} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi) \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{s}} \quad (12.36)$$

Detta ger i det allmänna fallet upphov till en amplitud som ändrar riktning med tiden, istället för att oscillera fram och tillbaka i samma riktning.

(i) Om $\phi = 0$:

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}, t) = (E_{0p} \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} \hat{\mathbf{s}}) \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \quad (12.37)$$

Vågen oscillerar alltid längs med samma linje, och amplituden varierar mellan $\pm \sqrt{E_{0p}^2 + E_{0s}^2}$. Detta kallas **linjär polarisation**.

Om $\phi = \pi$:

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}, t) = (-E_{0p} \hat{\mathbf{p}} + E_{0s} \hat{\mathbf{s}}) \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \quad (12.38)$$

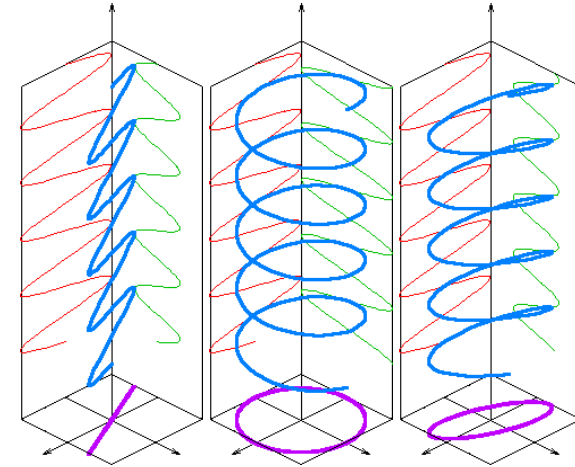
Detta är också linjär polarisation.

(ii) Om $\phi = \pi/2$:

I detta fall ritar elfältsvektorn ut en ellips, så denna våg har en **elliptisk polarisation**.

Om $E_{0p} = E_{0s}$ har vi **cirkulär polarisation**.

De 3 huvudtyperna av polarisation illustreras också i bilderna nedan. Den vertikala axeln är tiden och de nertill är $\hat{\mathbf{s}}$ och $\hat{\mathbf{p}}$: Den blåa tjocka linjen illustrerar banan för $\mathbf{E}$, den violetta projektionen av $\mathbf{E}$ på $\hat{\mathbf{s}}$ och $\hat{\mathbf{p}}$ och de tunnare röda och gröna $\mathbf{E}$:s $\hat{\mathbf{s}}$ och $\hat{\mathbf{p}}$ -komponenter.



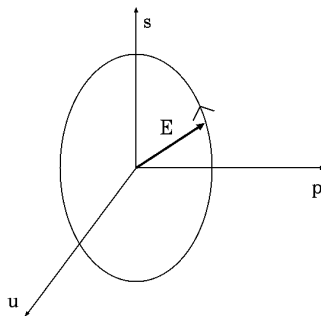
$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}, t) = E_{0p} \hat{\mathbf{p}} \cos(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) + E_{0s} \hat{\mathbf{s}} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \quad (12.39)$$

Om nu t.ex. $\mathbf{r} = 0$ så

$$\mathbf{E}_P(0, t) = E_{0p} \hat{\mathbf{p}} \cos(\omega t) + E_{0s} \hat{\mathbf{s}} \sin(\omega t) \quad (12.40)$$

En observatör som ser vågen komma emot sig ser att elfältsvektorn roterar moturs, se bilden. En dylik våg är **vänsterhands-polariserad** i optiken, och sägs ha **positiv helicitet**.

Polarisationens natur bedöms alltid utifrån en fixerad punkt, och hur elfältsvektorn beter sig i tiden i denna punkt.



[Wikipedia]

Magnetfältet är (jfr. ekv. 12.30) med att använda $\boldsymbol{\kappa} = n\boldsymbol{\omega}/c$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_P &= \frac{n}{c} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_P \\ &= \frac{n}{c} (E_{0p} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi) \hat{\mathbf{s}} - E_{0s} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}}) \end{aligned} \quad (12.41)$$

eftersom koordinatsystemet är orienterat som $\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{u}}$.

Observera:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P \cdot \mathbf{B}_P &= -\frac{n}{c} E_{0p} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi) E_{0s} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \\ &\quad + \frac{n}{c} E_{0s} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) E_{0p} \sin(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12.42)$$

så de verkliga el- och magnetfälten är ortogonala.

12.5. Monokromatiska plana vågor i ledande media

En elektromagnetisk våg i ledande media driver laddningar och förlorar därmed energi. Detta ger upphov till en komplex vågvektor i dispersionsrelationen. Dessutom leder detta till att diverse andra storheter blir komplexa.

Uttrycken för polarisation och energitäthet måste modifieras för att beakta dessa förändringar. I det följande tas detta dock inte upp till behandling.

Detta har delvis behandlats tidigare, men behandlingen här är den utförligaste.

12.5.1. Dispersionsrelationen

Vågekvationen är nu i allmänna fallet

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon \mu \partial_t^2 \mathbf{E} - g \mu \partial_t \mathbf{E} = 0 \quad (12.43)$$

eftersom $g \neq 0$. Gör följande *Ansatz*:

$$E(\mathbf{r}, t) = R(\mathbf{r})T(t) \quad (12.44)$$

för varje komponent av elfältet.

Vågekvationen blir nu separabel. Beteckna separationskonstanten med $\tilde{A}$. Vi har:

$$\varepsilon \mu T'' + g \mu T' + \tilde{A} T = 0 \quad (12.45)$$

$$\nabla^2 R + \tilde{A} R = 0 \quad (12.46)$$

Lösningen till första ekvationen är

$$T(t) = \tilde{T}_1 e^{-i\tilde{\omega}_1 t} + \tilde{T}_2 e^{-i\tilde{\omega}_2 t} \quad (12.47)$$

där de komplexa vinkelfrekvenserna ω_1 och ω_2 är lösningar till ekvationen

$$\varepsilon \mu \tilde{\omega}^2 + i g \mu \tilde{\omega} - \tilde{A} = 0 \quad (12.48)$$

Lösningen till andra ekvationen är

$$R(\mathbf{r}) = \tilde{R}_1 e^{i\tilde{\kappa} \cdot \mathbf{r}} + \tilde{R}_2 e^{-i\tilde{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \quad (12.49)$$

där $\tilde{\kappa}$ satisfierar

$$\tilde{\kappa}^2 - \tilde{A} = 0 \quad (12.50)$$

Vi har nu villkoret

$$\varepsilon \mu \omega^2 + i g \mu \omega - \tilde{\kappa}^2 = 0 \quad (12.51)$$

Detta är den mest allmänna **dispersionsrelationen** för monokromatiska vågor i linjära, homogena, isotropiska media.

Konventionellt låter man ω vara reellt, så att endast vågvektorn κ är komplexvärd. Denna modifikation har redan utförts i ekvationen ovan.

12.5.2. Komplex permittivitet och de optiska konstanterna

Med de monokromatiska vågorna

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{\kappa} \cdot \mathbf{r})} \quad (12.52)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{\kappa} \cdot \mathbf{r})} \quad (12.53)$$

blir Maxwells ekvationer

$$\tilde{\kappa} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0 = 0 \quad (12.54)$$

$$\tilde{\kappa} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_0 = 0 \quad (12.55)$$

$$\tilde{\kappa} \times \tilde{\mathbf{E}}_0 = \omega \tilde{\mathbf{B}}_0 \quad (12.56)$$

$$\tilde{\kappa} \times \tilde{\mathbf{B}}_0 = -\omega \varepsilon \mu \tilde{\mathbf{E}}_0 - i g \mu \tilde{\mathbf{E}}_0 = -\frac{\omega}{c^2} K \tilde{\mathbf{E}}_0 - i g \mu \tilde{\mathbf{E}}_0 \quad (12.57)$$

$$\equiv -\frac{\omega}{c^2} \tilde{K} \tilde{\mathbf{E}}_0 \quad (12.58)$$

där vi definierade en komplex relativ permittivitet:

$$\tilde{K} \equiv K_r + i \frac{g}{\varepsilon_0 \omega} \equiv K + i K_i \quad (12.59)$$

för att få en **formell likhet** med det motsvarande uttrycket för vågor i icke-ledande media.

Observera: De (komplexa) elektriska och magnetiska flödestätheterna är fortfarande

$$\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}} = K \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}} \quad (12.60)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mu \tilde{\mathbf{H}} \approx \mu_0 \tilde{\mathbf{H}} \quad (12.61)$$

eftersom vi använde dessa relationer, med reella materialegenskaper, i Maxwells ekvationer.

Tidigare hade vi

$$\kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{K} = \frac{\omega}{c} n \quad (12.62)$$

Eftersom den relativa permittiviteten nu är komplexvärd, så måste vi definiera ett komplexvärt brytningsindex:

$$\tilde{n} \equiv n + ik \quad (12.63)$$

där n, k kallas **optiska konstanter**.

Dispersionsrelationen ger nu

$$\tilde{\kappa}^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \left(K + i \frac{g}{\varepsilon_0 \omega} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{K} = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{n}^2 \quad (12.64)$$

Den komplexvärda relativa permittiviteten gör att vi måste skriva

$$\tilde{\kappa} = \kappa_r + i\kappa_i \quad (12.65)$$

där κ_r, κ_i är reella vektorer.

Vi får nu den allmänna dispersionsrelationen för ett dissipativt/ledande medium:

$$\tilde{\kappa} = \sqrt{\kappa_r^2 - \kappa_i^2 + i2\kappa_r \cdot \kappa_i} = \frac{\omega}{c} \tilde{n} = \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 - k^2 + i2nk} \quad (12.66)$$

Obs: Om $\tilde{z} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ är en komplex vektor, så gäller

$$\tilde{z}^2 = a^2 - b^2 + 2i\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (12.67)$$

$$\tilde{z} = \sqrt{\tilde{z}^2} = \sqrt{a^2 - b^2 + 2i\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \quad (12.68)$$

$$|\tilde{z}| = \sqrt{\tilde{z}\tilde{z}^*} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (12.69)$$

Elfältet blir nu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-i(\omega t - \kappa \cdot \mathbf{r})} \\ &= \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\kappa_i \cdot \mathbf{r}} e^{-i(\omega t - \kappa_r \cdot \mathbf{r})} \\ &= \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega t - \kappa_r \cdot \mathbf{r})} \end{aligned} \quad (12.70)$$

Detta är en plan våg som fortskrider i riktningen κ_r , men med avtagande amplitud $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$. Avtagandet är snabbast i riktningen κ_i .

12.5.3. Likformiga vågor

Vi tittar nu närmare på specialfallet $\tilde{\kappa}_r \parallel \tilde{\kappa}_i$. Dylka vågor kallas **likformiga** eller **homogena**. Ett konkret exempel då detta gäller är plana vågor som träffar en ledande, plan yta, så att vågfronterna är parallella med planet.

Vi har nu

$$\tilde{\kappa} = (\kappa_r + i\kappa_i)\hat{\mathbf{u}} = \tilde{\kappa}\hat{\mathbf{u}} \quad (12.71)$$

Om inga källor finns i mediet:

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0 = \hat{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \quad (12.72)$$

så att $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{B}}$ är vinkelräta mot vågens färdriktning $\hat{\mathbf{u}}$.

Maxwells IV lag ger

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{\omega} \tilde{\kappa} \times \tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\omega} (\kappa_r + i\kappa_i)\hat{\mathbf{u}} \times (\mathbf{E}_r + i\mathbf{E}_i)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\omega} (\kappa_r \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_r - \kappa_i \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_i) + i \frac{1}{\omega} (\kappa_r \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_i + \kappa_i \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_r) \\ &= \mathbf{B}_r + i\mathbf{B}_i \end{aligned} \quad (12.73)$$

Produkten $\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{B}_r$ blir nu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r \cdot \mathbf{B}_r &= \mathbf{E}_r \cdot \frac{1}{\omega} (\kappa_r \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_r - \kappa_i \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_i) \\ &= \frac{1}{\omega} (\kappa_r \mathbf{E}_r \cdot (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_r) - \kappa_i \mathbf{E}_r \cdot (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_i)) \\ &= -\frac{1}{\omega} \kappa_i \mathbf{E}_r \cdot (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_i) \end{aligned} \quad (12.74)$$

El - och magnetfälten är alltså i detta fall inte ortogonal! (Tidigare då vi konstaterade att de är, gällde det fallet med ickeledande media, medan vi nu behandlar ledande, så det ligger ingen paradox i detta).

12.5.4. Inträngningsdjupet för likformiga vågor

Eftersom

$$\tilde{n} = n + ik \quad (12.75)$$

gäller för likformiga vågor med $\kappa_r = \kappa_r \hat{\mathbf{u}}$, $\kappa_i = \kappa_i \hat{\mathbf{u}}$ att

$$\kappa_r = \frac{\omega}{c} n \quad (12.76)$$

$$\kappa_i = \frac{\omega}{c} k \quad (12.77)$$

och elfältet blir

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{\kappa} \cdot \mathbf{r})} \quad (12.78)$$

$$= \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\kappa_i \cdot \mathbf{r}} e^{-i(\omega t - \kappa_r \cdot \mathbf{r})} \quad (12.79)$$

$$= \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-k\omega u/c} e^{-i(\omega t - n\omega u/c)} \quad (12.80)$$

där $u = \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}$.

Genom att definiera **inträngningsdjupet**

$$\delta = \frac{1}{\kappa_i} = \frac{c}{k\omega} \quad (12.81)$$

fås

(ii) Om $g \neq 0$ och $k \ll n$ — så att dämpningen är mycket svagare än vågens fortskridning — har vi ett imperfekt dielektrikum. Inträngningsdjupet är då stort, och materialet är delvis genomskinligt.

(iii) Om mediet är en god ledare (vid frekvensen ω) så gäller $g \gg |\varepsilon|\omega$. Detta ger $n \approx k = \sqrt{K_i/2}$, så att

$$\delta = \frac{c}{n}\omega = \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{2}{K_i}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega}} \frac{\sqrt{2} \sqrt{\varepsilon_0 \omega}}{\sqrt{g}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 g \omega}} \quad (12.85)$$

(iv) Om mediet är en mycket god ledare, d.v.s. $g = \infty$ fås $\delta = 0$ och $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-u/\delta} e^{-i(\omega t - n\omega u/c)} = 0$, d.v.s. fältet fortplantas inte alls.

En storhet som är nära besläktad med inträngningsdjupet är **absorptionskoefficienten** (som också kan kallas **attenuationskonstanten**):

$$\alpha = \frac{2}{\delta} \quad (12.86)$$

Denna kommer från intensiteten av fälten:

$$I_E \propto |\mathbf{E}|^2 = |\tilde{\mathbf{E}}_0| e^{-2\kappa_i \cdot \mathbf{r}} = |\tilde{\mathbf{E}}_0| e^{-2\kappa_i u} \equiv |\tilde{\mathbf{E}}_0| e^{-\alpha u} \quad (12.87)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-u/\delta} e^{-i(\omega t - n\omega u/c)} \quad (12.82)$$

$$= \tilde{\mathbf{E}}'(u) e^{-i(\omega t - n\omega u/c)} \quad (12.83)$$

d.v.s. en våg vars amplitud avtar i vågens fortskridningsriktning. Detta betyder ju att vågen attenueras eller dämpas i denna riktning, därav namnet inträngningsdjup.

Inträngning i enheter av δ	Relativ dämpning i procent
1	36,8
2	13,5
3	5,0
4	2,8
5	0,7

Vi har också att

$$\delta = \frac{1}{k} c \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{k} c \frac{1}{\nu} \frac{1}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi k} \quad (12.84)$$

(i) Om mediet är icke-ledande har vi $g = 0$, så att $K_i = 0$ och $k = 0$ (jfr. ekv. 12.59). Detta betyder att elektromagnetiska vågor inte dämpas i dessa material, utan att deras inträngningsdjup är oändligt. Mediet är alltså **genomskinligt** eller **transparent**.

Exempel 1: Inträngningsdjupet i silver.

Rent silver har en konduktivitet $g = 3 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ för mikrovågsfrekvenser.

För en frekvens på 10^{10} Hz fås då

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 g \omega}} = 9,2 \times 10^{-5} \text{ cm} \quad (12.88)$$

För silverytor som skall absorbera mikrovågor gäller alltså att det inte är någon skillnad om hela materialet är av silver eller om det bara har en tunn plätering (t.ex. några millimeter). □

Exempel 2: Inträngningsdjupet i koppar.

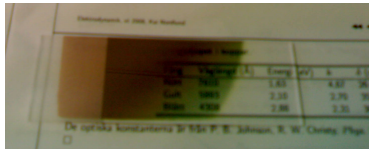
Färg	Våglängd (Å)	Energi (eV)	k	δ (nm)
Rött	7610	1,63	4,67	26
Gult	5893	2,10	2,70	35
Blått	4308	2,88	2,31	30

De optiska konstanterna är från P. B. Johnson, R. W. Christy, *Phys. Rev. B* **6** (1972) 4370-4379.

□

Detta innebär alltså att nanometer-tunna metallfilmer är genomskinliga! Då tjockleken ökas ändrar färgen med tjockleken, och till slut vid några hundra nanometers tjocklek ser de ut som vanliga metaller.

Här är en bild över en koppartunntfilm som är deponerad på en glasskiva. Filmen är några hundra nanometer tjock på vänstra sidan och blir tunnare och därmed dels genomskinlig till höger. Notera hur även färgen ändras!



[Vladimir Touboltsev, Helsingfors Universitet 2010. Bild av Kai Nordlund.].

Exempel 3: Inträngningsdjupet i sjövattnet. Konduktiviteten är $g = 4,3 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Använd formeln ovan.

Radiovågor: $\nu = 10^8 \text{ Hz}$ ger $\delta = 2 \text{ cm}$.

Synligt ljus: $\nu = 10^{14} \text{ Hz}$ ger $\delta = 0,00002 \text{ m}$???

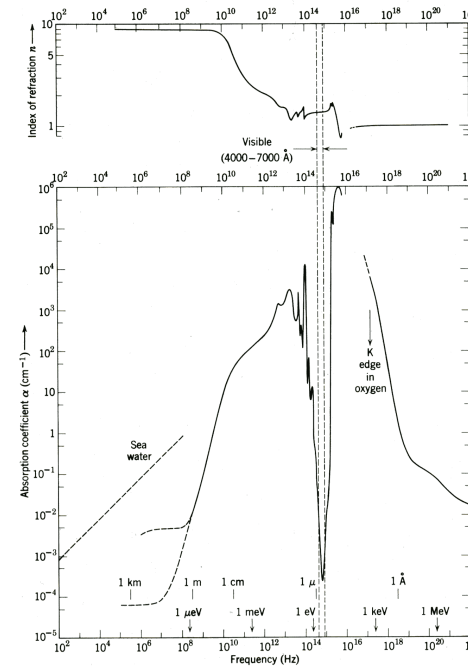
Orimligt svar. Felet finns i antagandet att sjövattnet är en god ledare med $g \gg |\epsilon|\omega$. Faktorn $\epsilon_0\omega \approx 140 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ för synligt ljus, vilket inte är mycket mindre än konduktiviteten !

En noggrannare utredning kräver att vi använder den fullständiga definitionen av δ :

$$\delta = \frac{c}{k\omega} = \frac{2\pi c}{\nu} \sqrt{\frac{2}{-K + \sqrt{K^2 + (2\pi g/(\epsilon_0\nu))^2}}} \quad (12.89)$$

Men nu måste vi veta K för synligt ljus i sjövattnet!

Denna — eller alternativt absorptionskoefficienten — kan vi uppskatta från följande graf, som dock är för vanligt vatten:



Från figuren fås $\alpha \sim 10^{-3} \text{ cm}^{-1} = 10^{-1} \text{ m}^{-1}$
så att $\delta = 2/\alpha \approx 2/(10^{-1} \text{ m}^{-1}) = 20 \text{ m}$. ◻

12.6. Hastighetsbegrepp

Det existerar ett flertal olika hastighetsbegrepp angående elektromagnetisk strålning:

- Fashastighet i vågens fortskridningsriktning, v_f , och $|v_f| \leq c$.
- Fashastighet i annan riktning, v'_f , $|v'_f| \leq c$ eller $|v'_f| \geq c$.
- Grupphastighet
- Hastigheten från väntevärdet av vågens position
- Energins transporthastighet
- . . .

Då man frågar efter en "vågs eller signals hastighet" bör man ha klart för sig vad för slags hastighet man egentligen är intresserad av.