8. Elektromagnetisk induktion

[RMC]



8.1. Faradays lag

[Jackson, W. V. Houston: *The laws of electromagnetic induction*, Am. J. Phys. **7** (1939) 373]

År 1831 utförde britten Michael Faraday (1791-1867) en serie experiment med elkretsar och tidsvarierande magnetfält. Han observerade att en strömtransient (tillfällig ström-ökning eller -minskning) löper genom en krets om

(a) den stationära strömmen stängs av eller sätts på,
(b) en annan krets med stationär ström förs förbi kretsen,
(c) en permanent magnet förs in in kretsen.

Faraday tolkade detta så att ett tidsberoende magnetiskt flöde genom en yta (som stängs in av kretsen) skapar ett elfält runt denna yta (leder till att ström flyter i kretsen).

Man definierar detta elfälts kurvintegral som den **inducerade spänningen** $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} \equiv \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}' \tag{8.1}$$

där $\mathbf{E}'$ är elfältet i det koordinatsystem där elementet $d\mathbf{r}$ är i vila.

Om hela kretsen är i vila evalueras integralen hela tiden i vilosystemet. Om en del av kretsen rör sig måste vi för denna del av konturen byta till det koordinatsystem där denna del är i vila.

$\mathcal{E}$ kallas också ofta elektromotorisk kraft, emk ("electromotive force", emf), men detta begrepp är

problematiskt både i att det inte är fråga om en kraft i enheter av Newton, dels för att termen har många olika, delvis inkonsistenta definitioner (se wikipedia:electromotive force). I dessa anteckingar undviker vi därför termen.

Om flödet genom den yta som begränsas av konturen C betecknas

$$\Phi = \int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \tag{8.2}$$

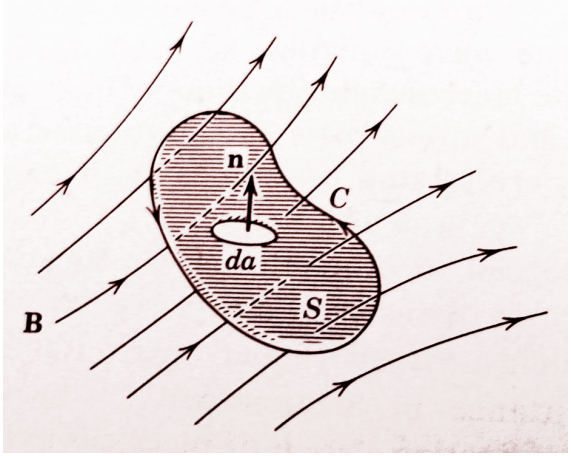
så säger **Faradays induktionslag** att

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{8.3}$$

d.v.s.

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}' = -\frac{d}{dt}\left[\int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\right] \tag{8.4}$$

Minuset kommer från **Lenz' lag**: *Om en förändring sker i ett magnetiskt system, så uppstår en motverkan som motarbetar denna förändring.*



Betrakta kretsen i figuren. Denna är utsatt för ett magnetfält. Strömmens riktning sammanfaller med riktningen för konturen C. Som en följd av detta pekar ytans normal $\widehat{\mathbf{n}}$ uppåt.

(1) Om $\mathbf{B} = B\widehat{\mathbf{n}}$ så fås $\Phi = \int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} > 0$.

(1a) Om $\delta B > 0$, d.v.s. B blir starkare, så gäller $\delta\Phi = \int_A d\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \delta\mathbf{B}) - \int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \int_A d\mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{B} = \int_A dA\delta B > 0$ eller alltså $\delta\Phi > 0$ och $\mathcal{E} < 0$.

Den inducerade spänningen är nu riktad åt motsatt håll som I.

(1b) Om $\delta B < 0$, d.v.s. B blir svagare, så gäller $\delta\Phi < 0$ och $\mathcal{E} > 0$.

Den inducerade spänningen är nu riktad åt samma håll som I.

$\star \qquad \star \qquad \star$

Vi noterar nu att elfältet och magnetfältet är evaluerade i olika system i ekvationerna ovan. $\mathbf{E}'$ var ju i det koordinatsystem där elementet $d\mathbf{r}$ är i vila, medan $\mathbf{B}$ är magnetfältet i laboratoriesystemet.

Vi kan dock ange alla storheter i laboratoriets referenssystem genom att använda oss av den klassiska lagen att naturens lagar skall vara invarianta under byte mellan inertialsystem, d.v.s. under

en Galileitransformation. Inertialsystem är ju koordinatsystem som rör sig relativt mot varandra med en konstant hastighet, så Galileitransformationen är

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_{S_0} + \mathbf{v}t_{S_0} \tag{8.5}$$

$$t_S = t_{S_0} \tag{8.6}$$

där S betecknar ett system som rör sig relativt mot ett system S_0 med hastigheten $\mathbf{v}$.

Galileitransformationen säger att kraften som påverkar t.ex. en punktladdning q ska vara invariant under detta koordinatbyte:

$$\mathbf{F}_S = m\mathbf{a}_S = m\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{r}_S}{dt^2} = m\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{r}_{S_0}}{dt^2} = m\mathbf{a}_{S_0} = \mathbf{F}_{S_0} \tag{8.7}$$

Tillämpa detta på Lorentz-kraften. I en laddnings vilosystem S gäller (eftersom laddningen är i vila där)

$$\mathbf{F}_S = q\mathbf{E}_S \tag{8.8}$$

medan det i laboratoriet — som innehåller en magnet i vila — gäller att kraften på laddningen är

$$\mathbf{F}_{S_0} = q(\mathbf{E}_{S_0} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{S_0}) \tag{8.9}$$

eftersom laddningen där har en hastighet $\mathbf{v}$.

Från detta får vi att

$$\mathbf{E}_S = \mathbf{E}_{S_0} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{S_0} \tag{8.10}$$

Det elfält som påverkar laddningen i dess vilosystem ges av elfältet i laboratoriet med ett bidrag från det att laddningen rör sig relativt mot ett stationärt magnetfält i laboratoriet.

Man kan också härleda ekvationen

$$\mathbf{B}_S = \mathbf{B}_{S_0} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{S_0} \tag{8.11}$$

Vi återgår nu till Faradays lag

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}' = -\frac{d}{dt}\left[\int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\right] \tag{8.12}$$

Vi kan utveckla högra ledet, genom att notera att

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla f \tag{8.13}$$

för en godtycklig funktion f som beror på t och $\mathbf{r}$.

Om kretsen är stel, d.v.s. den ändrar inte sin form, utan har en konstant area, så får vi nu att

$$\frac{d}{dt}\left[\int_A d\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right] = \int_A d\mathbf{A}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\int_A d\mathbf{A}\cdot(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B} \tag{8.14}$$

$$= \int_A d\mathbf{A}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\int_A d\mathbf{A}\cdot[\nabla\times(\mathbf{B}\times\mathbf{v})+\mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{B})] \tag{8.15}$$

$$= \int_A d\mathbf{A}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\int_A d\mathbf{A}\cdot(\nabla\times(\mathbf{B}\times\mathbf{v})) \tag{8.16}$$

$$= \int_A d\mathbf{A}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\oint_C d\mathbf{r}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{v}) \tag{8.17}$$

där vi använde Stokes' teorem.

Vi har nu fått att

$$\int_C d\mathbf{r}\cdot(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = -\int_A d\mathbf{A}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\oint_C d\mathbf{r}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{v}) \tag{8.18}$$

som kan skrivas

$$\oint_C d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E} = -\int_A d\mathbf{A}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\quad C=\text{ stel krets} \tag{8.19}$$

Konturintegralen kan skrivas som en ytintegral med Stokes' teorem, så att vi får:

$$\int_A d\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\int_A d\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{8.20}$$

Detta ska gälla för en godtycklig area A, så vi måste ha att

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{8.21}$$

som är **Faradays lag i differentialform**.

Kravet att kretsen är stel betyder ju att varje punkt av kretsen befinner sig i samma inertialsystem (ingen del rör sig relativt en annan del), så att $\mathbf{E}$ och $\mathbf{B}$ är mätta i samma system.

För att analysera kretsar som ändrar sin form måste vi använda (8.4).

Den egentliga revolutionerande implikationen av Faradays lag är att **längs med vilken som helst sluten kontur** som utsätts för ett föränderligt magnetiskt flöde genom sin yta kommer ett **elektriskt fält att skapas**. Detta gäller alltså också i vakuum! Där kommer förstås ingen ström att flyta, om där inte finns ett ledande material.

$\star \qquad \star \qquad \star$

Exempel : Låt ett magnetfält $\mathbf{B} = B_z\widehat{\mathbf{z}} = B_0 \sin(\omega t)\widehat{\mathbf{z}}$ existera längs med z-axeln. Om vi skriver ut $\nabla \times \mathbf{E}$ i komponentform fås:

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = \partial_y E_z - \partial_z E_y = 0 \tag{8.22}$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_y = \partial_z E_x - \partial_x E_z = 0 \tag{8.23}$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = \partial_x E_y - \partial_y E_x = -\omega B_0 \cos(\omega t) \tag{8.24}$$

Med cylindriska koordinater ger den sista ekvationen

$$\frac{1}{\rho}\left[\partial_\rho(\rho E_\psi) - \partial_\psi E_\rho\right] = -\omega B_0 \cos(\omega t) \tag{8.25}$$

Vi har nu azimutal symmetri, så det borde inte finnas något ψ-beroende:

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho E_\psi) = -\omega B_0 \cos(\omega t) \tag{8.26}$$

Integrera med avseende på ρ:

$$E_\psi(\rho) = -\omega B_0 \cos(\omega t)\frac{1}{2}\rho \tag{8.27}$$

Andra rotor-ekvationen, i cylindriska koordinater, ger

$$\partial_z E_\rho - \partial_\rho E_z = 0 \tag{8.28}$$

P.g.a. symmetri borde vi inte ha nåt z-beroende, så att

$$E_z = \text{konstant i } \rho, z \tag{8.29}$$

Gauss' lag: $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ ger nu då vi inte har några laddningar, att

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{8.30}$$

Detta ger

$$\rho(\partial_\rho(\rho E_\rho)) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_\rho \propto 1/\rho \tag{8.31}$$

Vi bestämmer nu den inducerade spänningen runt en cirkulär kontur:

$$\mathcal{E} = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \oint_C d\psi \rho \cdot E_\psi = -2\pi \frac{1}{2} \rho^2 \omega B_0 \cos(\omega t) = -\pi \rho^2 \omega B_0 \cos(\omega t) \tag{8.32}$$

Å andra sidan,

$$\Phi = \int d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = B_0 \sin(\omega t) \pi \rho^2 \tag{8.33}$$

så att

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\omega B_0 \cos(\omega t)\pi\rho^2 \tag{8.34}$$

En testladdning q (som inte påverkar det inducerade elfältet i någon större utsträckning) skulle alltså föras runt i en cirkel av det inducerade elfältet. Till denna rörelse måste läggas en komponent p.g.a. magnetfältet, som ger ett bidrag till Lorentz-kraften. □

8.2. Begreppet spänning

[International Electrotechnical Commission (`http://domino.iec.ch/iev/iev.nsf/Welcome?OpenForm`), C. H. Page: *Electromotive force, potential difference, and voltage*, Am . J. Phys. **45** (1977) 978]

Med introduktionen av icke-statiska fält blir alltså elfältet:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{8.35}$$

Eftersom rotorn av elfältet inte längre är noll så existerar det **inte** längre en elektrisk potential φ så att $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Därför kan vi inte heller tala om potentialskillnad.

Vi kommer istället att ta i bruk det ersättande begreppet **spänning**.

För statiska fält hade vi

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{8.36}$$

Detta kommer från det faktum att det arbete som utförs på en laddning i en spänningskälla (t.ex. batteri) är lika med det arbete som laddningen utför i kretsen som ligger utanför denna källa.

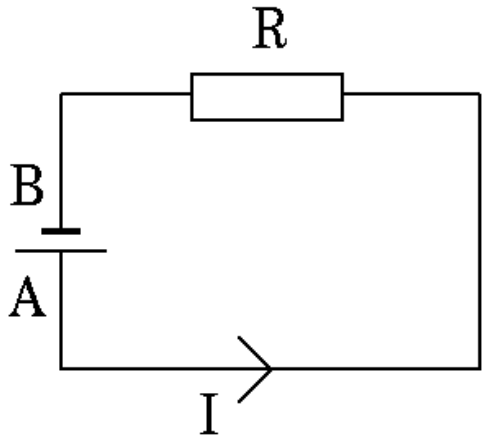
$\star \qquad \star \qquad \star$

En källas spänning, kallad **käll-spänning** definieras som

$$\Delta V_k = \int_A^B d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \tag{8.37}$$

där integralen går från källans anod (pluspol) till katod (minuspol), så att $\Delta V_k > 0$.

Fortfarande används begreppet "elektromotorisk kraft" för denna storhet, men detta begrepp anses idag vara föråldrat.



Vi får nu att

$$0 = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \int_A^B d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} + \int_B^A d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \Delta V_k - \int_A^B d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \Delta V_k + V_{AB} \tag{8.38}$$

där

$$V_{AB} = -\int_A^B d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \tag{8.39}$$

är **spänningen över kretsen**. Detta kallades tidigare för potentialskillnad.

Vi får

$$\Delta V_k = -V_{AB} \tag{8.40}$$

För en krets med ett batteri och en resistor har vi

$$\Delta V_k = -(-RI) \tag{8.41}$$

eftersom spänningen (och laddningarnas potentialenergi) faller över resistorn.

Den inducerade spänningen är som tidigare

$$\mathcal{E} = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \tag{8.42}$$

Antag att C är orienterad som ABA, i strömmens riktning i figuren ovan. Vi får att

$$\mathcal{E} = \int_A^B d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} + \int_B^A d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \Delta V_k - RI \tag{8.43}$$

Låt nu flödet genom kretsen öka (fall (1a) på sidan 8.4). Vi har då att

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} < 0 \tag{8.44}$$

Om $\mathcal{E} = 0$ i början få vi nu att

$$\mathcal{E} = -\delta(RI) = -R\delta I < 0 \tag{8.45}$$

så att en strömökning sker. Men detta förstärker fältet, eftersom strömmen genererar en magnetfältsökning uppåt genom kretsen! Detta strider mot Lenz' lag.

Vi måste alltså korrigera den antagna kontur-riktningen ABA till BAB. Vi får då

$$\mathcal{E} = \int_B^A d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} + \int_A^B d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -\Delta V_k - V_{AB} \tag{8.46}$$

så att i allmänhet gäller **den generaliserade Kirchhoffs II lag**

$$\mathcal{E} + \sum_i \Delta V_{k,i} = -\sum_j \Delta V_j \tag{8.47}$$

$\star \qquad \star \qquad \star$

I det följande granskar vi praktiska exempel på inducerad spänning i öppna konturer, t.ex. ledande stavar. Notera att vi egentligen inte borde få använda detta begrepp då vi inte har slutna konturer.

För att vara korrekta kunde vi i det följande ersätta "inducerad spänning" med "inducerat elfält".

Exempel 1: Låt en rak metallstav med längden L röra sig med den konstanta hastigheten $\mathbf{v}$ i ett homogent magnetfält $\mathbf{B}$ (samma styrka överallt där fältet finns).

(i) En fysikaliskt intuitiv tolkning av problemet kan man göra med följande resonemang.

Laddningarna i staven påverkas av Lorentzkraften

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{8.48}$$

sett från laboratoriets system.

I början existerar inget elfält $\mathbf{E}$, så laddningarna påverkas p.g.a. termen $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}$, så att negativa och positiva laddningar flyttas åt motsatt håll.

Laddningar börjar nu ackumulera i stavens ändpunkter p.g.a. denna kraft. Men allt eftersom dessa laddningssamlingar växer kommer det att uppstå ett elektriskt fält mellan dem. Detta leder till ett fält inne i staven, från den ändpunkt där positiva laddningar finns samlade till den andra ändpunkten där en negativ laddningsamling befinner sig.

Då stationär jämvikt har uppnåtts i denna stav är kraften på laddningarna noll. Elfältet ges då av uttrycket

$$q(\mathbf{E}_s + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_s = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{8.49}$$

Detta betyder ju att det existerar en spänning över stavens ändpunkter. Denna är

$$\begin{aligned} \Delta V &= -\int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_s \\ &= \int d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= (\int d\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{L} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \tag{8.50}$$

(ii) Samma resultat får vi med ett resonemang baserat på inducerad spänning:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}' \\ &= \int d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\
&= \mathbf{L} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (8.51)
\end{aligned}
$$

eftersom inget externt $\mathbf{E}$-fält existerar i laboratoriet.

Låt nu istället magnetfältet röra sig och staven vara i vila. Oprimade storheter är uppmätta i stavens vilosystem (laboratoriet), medan de primade storheterna är uppmätta i magnetens vilosystem. Uppenbarligen gäller $\mathbf{E}' = 0$. Hastigheten $\mathbf{v}$ är magnetens hastighet relativt till staven.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \\
&= \int d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\
&= -\int d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\
&= -\mathbf{L} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (8.52)
\end{aligned}
$$

Observera att $\mathbf{B}$ är magnetens fält som det uppmäts i stavens vilosystem, d.v.s. inte samma som $\mathbf{B}$ i det föregående exemplet, där $\mathbf{B}$ är magnetfältet i magnetens vilosystem.

Vi såg tidigare att

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E} \tag{8.53}$$

där $\mathbf{B}'$ är magnetfältet i magnetens vilosystem, så att

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\mathbf{L} \cdot (\mathbf{v} \times (\mathbf{B}' + \mathbf{v} \times \mathbf{E})) && (8.54) \\ &= -\mathbf{L} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}') && (8.55) \end{aligned}$$

Men $-\mathbf{v}$ motsvarar stavens hastighet relativt till magneten, så vi har fått samma svar som ovan ! □

$\star \qquad \star \qquad \star$

Exempel 2: En ledande stav roterar i xy-planet kring sin ena ändpunkt i ett magnetiskt fält med $\mathbf{B} = B\widehat{\mathbf{z}}$. Rotationen är likformig. Bestäm den inducerade spänningen !

Stavens hastighet är

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} = \omega\widehat{\mathbf{z}} \times \rho\widehat{\rho} = \omega\rho\widehat{\psi} \tag{8.56}$$

Vi har att

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega\rho B\widehat{\psi} \times \widehat{\mathbf{z}} = \omega\rho B\widehat{\rho} \tag{8.57}$$

så att det inducerade elfältet är

$$\mathbf{E} = -\omega\rho B\widehat{\rho} \tag{8.58}$$

Den inducerade spänningen är

$$-\int d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E} = \int_0^R d\rho\widehat{\rho}\cdot(\omega\rho B\widehat{\rho}) = \omega B\frac{1}{2}\rho^2\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} = \frac{1}{2}\omega BR^2 = \frac{1}{2}v_t BR \tag{8.59}$$

där v_t är rotationshastigheten för stavens fria ändpunkt. □

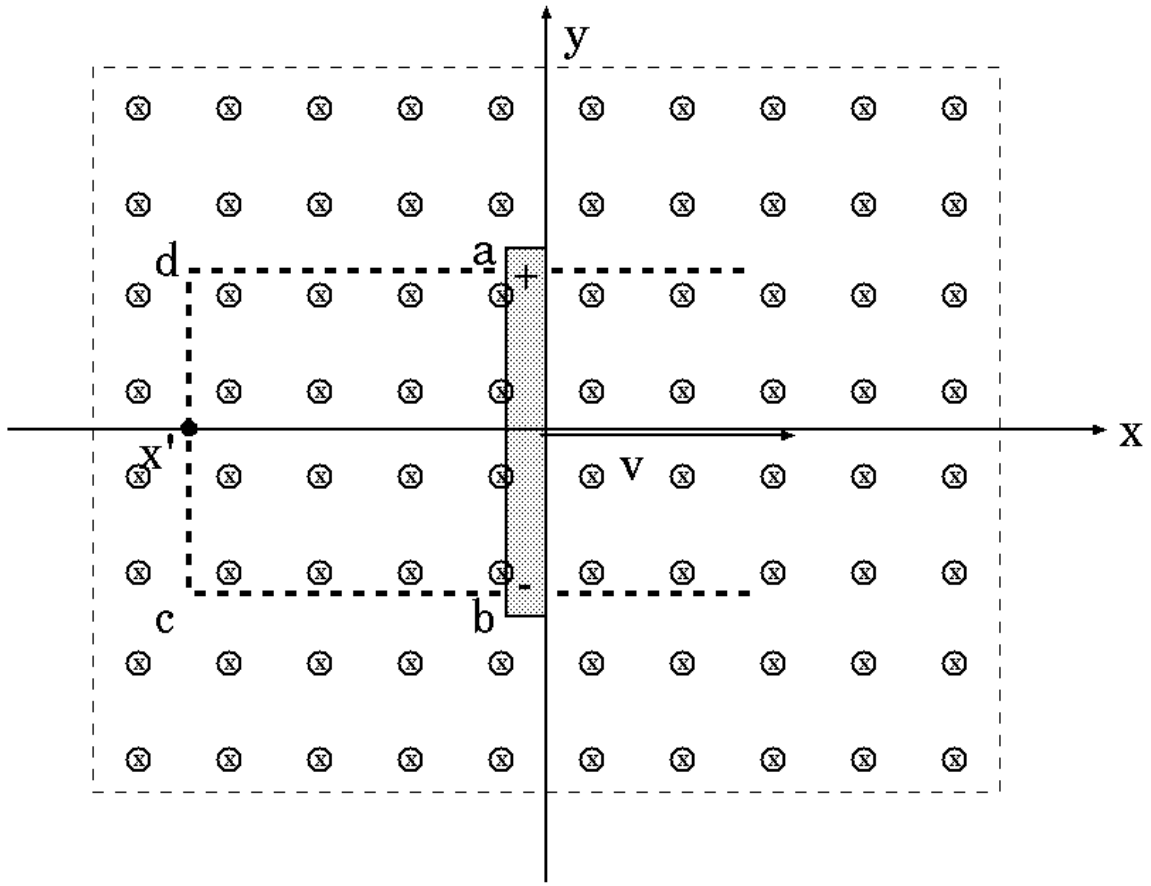
8.3. Induktionskretsar



Största delen av all elström som används för att driva apparater och maskiner i hemmet, på kontoret och i industrin alstras från mekaniskt arbete via elektromagnetisk induktion. Exempel på detta är generatorerna i vatten-, kol- och kärnkraftverk, där fallande vatten eller het vattenånga driver turbiner. Bara en liten del genereras på kemisk väg med hjälp av batterier.

I följande exempel ser vi på några sätt att generera användbar spänning.

Exempel 1: Fortsättning på tidigare exmpel. Låt en ledande stav med längden L glida på en stationär ledare som i figuren. Antag för enkelhets skull att $\mathbf{v} = v\widehat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{B} = -B\widehat{\mathbf{z}}$.



Enligt $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ kommer positiva laddningar att samlas i a och negativa i b då staven är isolerad från ledningen $abcda$.

Faradays lag i den ursprungliga formen

$$\mathcal{E} = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}' = -\frac{d}{dt}\left[\int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\right] \tag{8.60}$$

ger då magnetfältet är konstant:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\left[\int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\right] &= -\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \\ &= -B\frac{dA}{dt} \\ &= -B\frac{d}{dt}\left(L(x(t) - x')\right) \\ &= -BLv \end{aligned} \tag{8.61}$$

så att

$$\mathcal{E} = -BLv \tag{8.62}$$

Fysikaliskt sett, vad händer i denna krets ?

Då den neutrala staven sätts i rörelse kommer elektroner att dras i $-\widehat{\mathbf{y}}$-riktningen, eftersom $\mathbf{F} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -ev(-B)(\widehat{\mathbf{x}} \times \widehat{\mathbf{z}}) = -evB\widehat{\mathbf{y}}$. Elektronerna får nu en hastighet i $-\widehat{\mathbf{y}}$-riktningen, så att de också påverkas av kraften $\mathbf{F} = -e((-v_y)(-B)(\widehat{\mathbf{y}} \times \widehat{\mathbf{z}})) = -ev_yB\widehat{\mathbf{x}}$ i

$-\widehat{\mathbf{x}}$-riktningen. Detta leder till att elektronerna strömmar ut i den stationära ledaren, mot punkten c. Vid c går de upp mot d och därifrån mot a.

Elektronernas rörelse är alltså i $abcd$-riktningen, vilket medför att den verkliga strömmen går i $dcba$-riktningen.

Denna skeende kan man snabbast fundera ut med hjälp av Lenz' lag. Flödet genom den slutna slingan $abcda$ ökar då staven rör på sig. Detta ger upphov till en ström som försöker minska ökningen av det magnetiska flödet. Om en (positiv) ström flyter i $dcba$-riktningen motverkas ju flödesökningen av det inducerade magnetfältet.

Kirchhoffs II lag

$$\mathcal{E} + \sum_i \Delta V_{k,i} = -\sum_j \Delta V_j \tag{8.63}$$

då vi placerar en resistor R mellan t.ex. c och d, ger

$$-BLv = -(-RI) = RI \tag{8.64}$$

så att strömmen är

$$I = -\frac{BLv}{R} \tag{8.65}$$

Strömmen antogs vara i $abcd$-riktningen (samma riktning som användes för att bestämma $\mathcal{E}$), men eftersom vi får ett minustecken betyder detta att strömmen går i riktningen $dcba$. Detta överensstämmer med vad vi kom fram till ovan !

Istället för en resistor R kan vi ansluta en yttre belastande krets mellan c och d. □

Exempel 2: En rektangulär krets innehållande enbart en resistor rör sig i ett likformigt magnetfält. Bestäm den inducerade strömmen.

Kirchhoffs II lag:

$$\mathcal{E} = RI \tag{8.66}$$

där

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}' \\
&= \oint_C d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \oint_C d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\
&= (\oint_C d\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\
&= 0 \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0
\end{aligned} \tag{8.67}$$

Ingen ström går i denna krets!

Detta är också klart från tidsderivatan av flödet genom kretsen.

Obs: Då slingan kommer in i fältet eller lämnar det så kommer det magnetiska flödet att ändra, och i dessa fall går nog ström i kretsen. □

Exempel 3: Låt en cirkulär ledande slinga rotera runt sin diameter runt x-axeln i ett magnetfält $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. Slingan har N st lindningar och arean A.

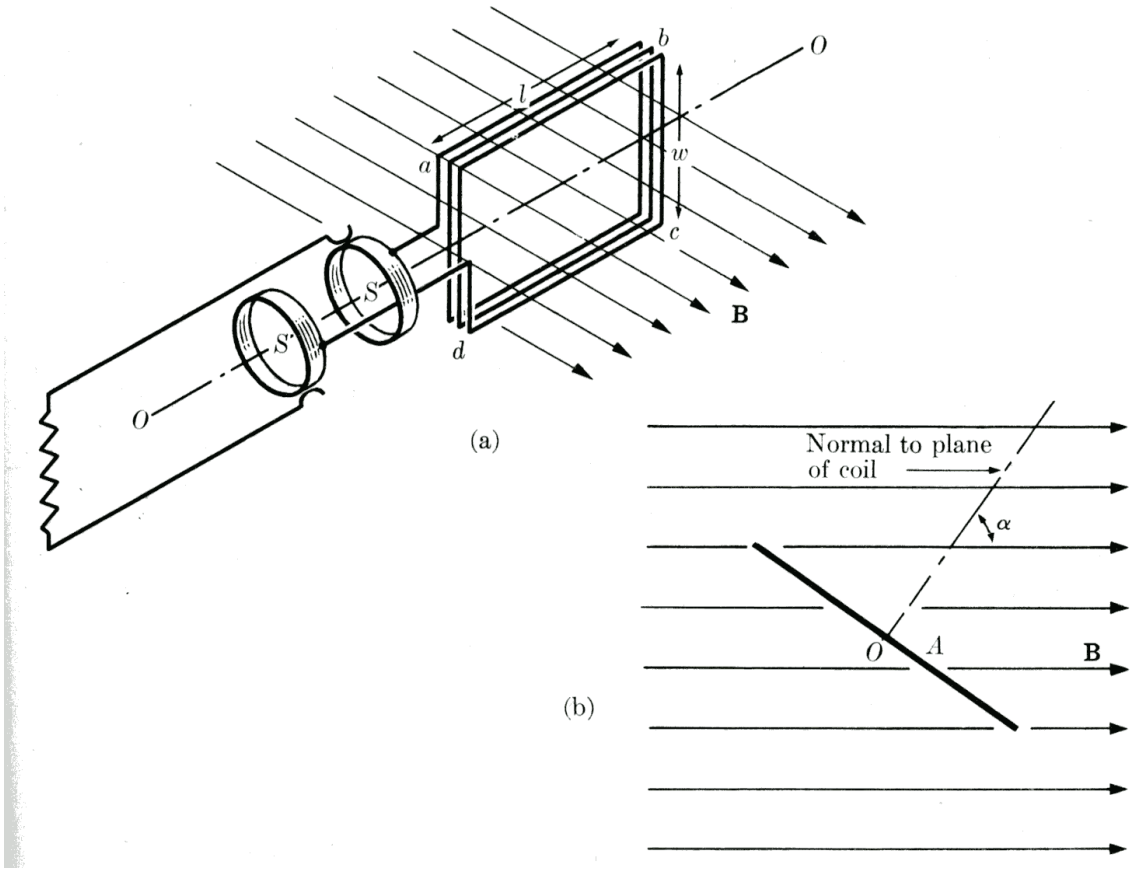


Bild: J. A. Richards, F. W. Sears, M. R. Wehr, M. W. Zemansky: *Modern University Physics: Fields, waves, and particles*, Addison-Wesley, 1960.

Flödet genom slingan är

$$\Phi = \int d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = BNA\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = BNA\cos\theta \tag{8.68}$$

Den inducerade spänningen är

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}BNA\cos\theta = NBA\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \tag{8.69}$$

Om slingan t.ex. är ansluten till ett skovelhjul som träffas av fallande vatten så att slingan roterar likformigt:

$$\mathcal{E} = NBA\omega\sin(\omega t + \theta_0) \tag{8.70}$$

där θ_0 är vinkeln mellan ytans normal och magnetfältet vid tiden $t = 0$.

Denna konstruktion är en enkel variant av en generator för växelström, och kallas **alternator** från det engelska uttrycket *alternating current generator*. □

8.4. Induktans

8.4.1. Själv-induktans

Vi såg tidigare hur magnetfältet från en sluten strömkrets kan bestämmas. Om nu strömmen i kretsen — istället för ett externt magnetiskt flöde — förändras med tiden kommer detta magnetfält att ändra. Detta resulterar i ett varierande magnetiskt flöde och en inducerad spänning över kretsen.

För en stel krets i vila kan vi skriva

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI}\frac{dI}{dt} \tag{8.71}$$

även då Biot-Savarts lag inte kan användas, förutsatt att Φ bara beror på I.

Man definierar **självinduktansen** för en krets som

$$L \equiv \frac{d\Phi}{dI} \tag{8.72}$$

Enheten för självinduktans är Wb/A = T m^2/A = H, **henry**.

Självinduktansen är en egenskap hos själva kretsens geometri.

Den inducerade spänningen som kretsen själv genererar är då

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt} \tag{8.73}$$

Exempel 1: Bestäm L för en tom toroid. Låt $2a$ vara torusens tjocklek, N antalet lindningar av strömledningen, och I strömmen i ledningen.

Vi antar nu att den övriga kretsen utanför toroiden inte producerar nåt nämnvärt magnetiskt flöde, så att integralen för $\mathcal{E}$ kan begränsas till enbart toroiden.

Från Ampères lag:

$$2\pi r H = NI \tag{8.74}$$

så att

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \tag{8.75}$$

Om vi nu approximerar att denna flödestäthet gäller över hela den toroidala tvärsnittsytan så blir flödet

$$\Phi = B \cdot A_{\text{total}} = B \cdot N\pi a^2 = \frac{\mu_0 N^2 I a^2}{2r} \tag{8.76}$$

Observera A_{total} i ekvationen ovan !

Självinduktansen är nu

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2r} \tag{8.77}$$

□

8.4.2. Ömsesidig induktans

Då vi har N st kretsar som alla bidrar till flödet genom en krets i, så skriver vi detta flöde som

$$\Phi_{i,\mathrm{tot}} = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{ij} \tag{8.78}$$

där Φ_{ij} är flödet genom krets i p.g.a. magnetfältet från krets j, och Φ_{ii} är flödet genom krets i p.g.a. en föränderlig ström i denna krets.

Den inducerade spänningen i krets i är

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_{i,\mathrm{tot}}}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{d\Phi_{ij}}{dt} \tag{8.79}$$

Om kretsarna är stela och i vila kan en flödesförändring orsakas bara av en variabel ström, så att

$$\mathcal{E}_i = -L\frac{dI_i}{dt} - \sum_{j=1, j\neq i}^{N} M_{ij}\frac{dI_j}{dt} \tag{8.80}$$

där vi definierade den **ömsesidiga induktansen** mellan kretsarna i och j som

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \tag{8.81}$$

Vi kommer senare att visa att $M_{ij} = M_{ji}$.

Obs: För **linjära magnetiska media** gäller att M_{ij} är oberoende av strömmen I_j.

Exempel 1: Låt en ledning med N_1 st varv och strömmen I_1 vara lindad som en toroid. En annan ledning med N_2 st varv och strömmen I_2 är lindad runt denna, så de två ledningarnas lindningar har samma tvärsnittsyta.

Strömmen I_1 ger flödestätheten

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi r} \tag{8.82}$$

Flödet genom ledning 1 är

$$\Phi_{11} = N_1 A_1 \cdot B_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 I_1 a^2}{2r} \tag{8.83}$$

Flödet från ledning 1 som ledning 2 "ser" är

$$\Phi_{21} = N_2 A_2 \cdot B_1 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_1 a^2}{2r} \tag{8.84}$$

Motsvarande, strömmen I_2 ger flödestätheten

$$B_2 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{2\pi r} \tag{8.85}$$

Flödet från ledning 2 som ledning 1 "ser" är

$$\Phi_{12} = N_1 A_1 \cdot B_2 = \frac{\mu_0 N_2 N_1 I_2 a^2}{2r} \tag{8.86}$$

Vi får de ömsesidiga induktanserna



$$M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 a^2}{2r} \tag{8.87}$$

$$M_{12} = \frac{\mu_0 N_2 N_1 a^2}{2r} \tag{8.88}$$

d.v.s. $M_{12} = M_{21}$.

Självinduktanserna är som tidigare



$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 a^2}{2r} \tag{8.89}$$

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 a^2}{2r} \tag{8.90}$$

så att man får $M_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$.

I allmänhet gäller att för en dylik koppling att

$$M_{12} = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad 0 \leq k \leq 1 \tag{8.91}$$

där k kallas kopplingskoefficient. Detta kan förklaras t.ex. med att lindningarna kan ha lite olika tvärsnittsytor. □

8.4.3. Neumanns formel

För två stela kretsar i vila gäller att

$$\Phi_{ij} = \int_{A_i} d\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}_j = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{A_i} d\mathbf{A}_i \cdot \left[I_j \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_j \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \right] \tag{8.92}$$

enligt Biot-Savarts lag. Men:

$$\oint_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_j \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} = \nabla_i \times \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \tag{8.93}$$

så att

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{A_i} d\mathbf{A}_i \cdot \left[\nabla_i \times \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right] \tag{8.94}$$

Stokes' teorem på detta ger **Neumanns formel**

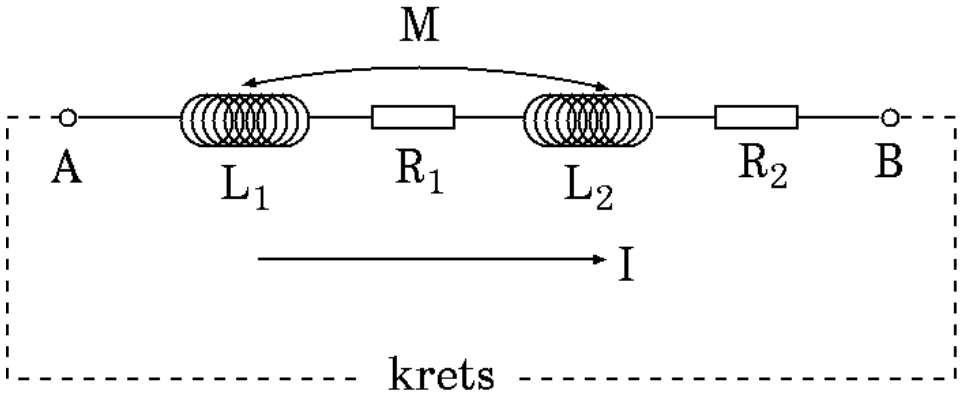
$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_j \cdot d\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \tag{8.95}$$

Från detta är det uppenbart att $M_{ij} = M_{ji}$.

8.4.4. Induktanser kopplade i serie och parallellt

För induktans-kopplingar måste vi för det mesta beakta de interna motstånden.

Seriekoppling



Om vi har två induktanser i serie har vi då enligt Kirchhoffs II lag att

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = R_1 I + R_2 I - \Delta V \tag{8.96}$$

där $\Delta V < 0$ är potentialskillnaden över den externa kretsen som ligger mellan B och A.

Å andra sidan

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -L_1 \frac{dI}{dt} - M\frac{dI}{dt} - L_2\frac{dI}{dt} - M\frac{dI}{dt} \tag{8.97}$$

Vi får:

$$\Delta V = R_1 I + R_2 I - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = (R_1 + R_2) I + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt} \qquad (8.98)$$

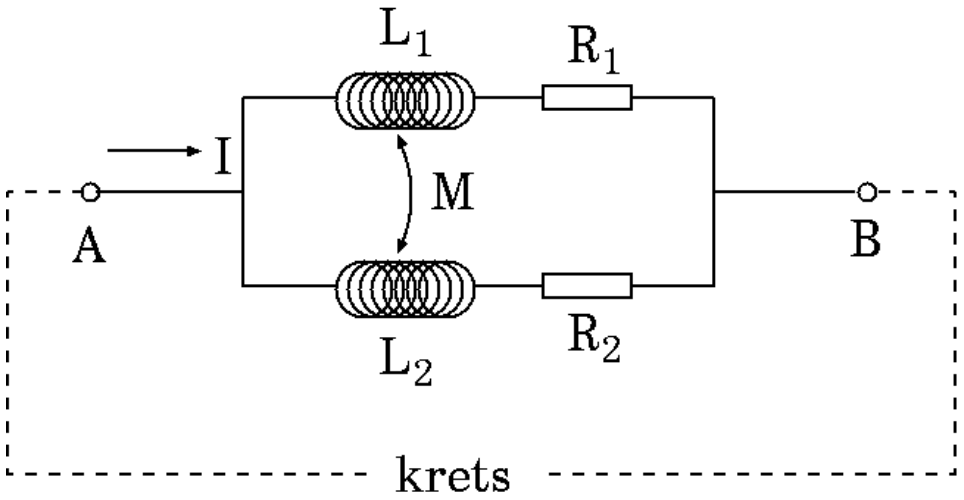
Om flödena i induktanserna är åt samma håll, så gäller att $M > 0$, annars $M < 0$.

Seriekopplingen ser alltså ut som två resistorer i serie plus en summa av induktanserna. Kopplingens induktans är

$$L = L_1 + L_2 + 2M \qquad (8.99)$$

med motsvarande tecken som för en resistor.

Parallellkoppling



För en parallellkoppling måste vi approximera bort resistanserna för att få en relativt enkelt uttryck för den sammansatta kretsens induktans. Vi har:

$$\Delta V \approx L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \tag{8.100}$$

$$\Delta V \approx L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \tag{8.101}$$

Lös ut dI_2/dt genom att multiplicera första ekvationen med M och den andra med $-L_1$ och addera dem. Insättning i första ekvationen ger sedan dI_1/dt.

$$I_1' = \Delta V \cdot \frac{M - L_2}{M^2 - L_1 L_2} \tag{8.102}$$

$$I_2' \quad = \quad \Delta V \cdot \frac{M - L_1}{M^2 - L_1 L_2} \tag{8.103}$$

Totala strömmens tidsderivata är

$$I' = \frac{d}{dt}(I_1 + I_2) = \Delta V \cdot \frac{2M - L_1 - L_2}{M^2 - L_1 L_2} \tag{8.104}$$

så att vi får

$$\Delta V = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \cdot \frac{dI}{dt} \tag{8.105}$$

Kopplingens induktans är alltså

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \tag{8.106}$$

med motsvarande tecken som för en resistor.