

## 6. Magnetostatik I: Magnetfältet från tidsoberoende strömmar

[RMC]

### 6.1. Magnetisk flödestäthet

Man kan visa att om två laddningar  $q$  och  $q'$  rör sig med de *konstanta hastigheterna*  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{v}'$  så utövar  $q'$  en **magnetisk kraft** på  $q$  som är

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{v} \times \left( \mathbf{v}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (6.1)$$

där  $\mathbf{r}'$  är  $q'$ :s position och  $\mathbf{r}$  är  $q$ :s position.

I kapitel 1 hade vi att

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \equiv 10^{-7} \text{ N s}^2/\text{C}^2 \equiv 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad (6.2)$$

Laddningen  $q$  kan anses befinna sig i ett **magnetiskt fält** orsakat av laddning  $q'$ . Detta stöds av faktumet att vi kan separera ut en faktor som inte beror på  $q$ :s laddning eller hastighet:

$$\mathbf{B} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \left( \mathbf{v}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (6.3)$$

så att

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (6.4)$$

Man kallar  $\mathbf{B}$  för **magnetisk flödestäthet** eller **magnetisk induktion**. Dess enhet är  $\text{N}/(\text{Cm/s}) = \text{Ns}/(\text{Cm}) = \text{N}/(\text{Am}) \equiv \text{T}$ , som kallas **tesla**.

Ekv. (6.3) ger flödestätheten i punkten  $\mathbf{r}$  orsakad av en punktladdning  $q'$  i  $\mathbf{r}'$  som rör sig med den konstanta hastigheten  $\mathbf{v}'$ .

I dessa ekvationer måste vi kräva att  $q$  betecknar sig som en *testladdning*, eftersom dess effekt på  $q'$  inte har tagits i beaktande.

Om en laddning  $q$  påverkas av både el- och magnetfält känner den av den totala kraften

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (6.5)$$

som kallas **Lorentz-kraften**.

Obs 1:  $\mathbf{F}_m$  är vinkelrät mot  $\mathbf{v}$ , men befinner sig i planet som spänns upp av  $\mathbf{v}'$  och  $\mathbf{d} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ .

Obs 2:  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_m = 0$  så att arbetet som  $\mathbf{F}_m$  utför är  $\int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_m = \int dt \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_m = 0$ , d.v.s. den magnetiska kraften utför inget arbete på den laddning som den påverkar.

Vi kommer senare att se att

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (6.6)$$

där  $c$  är ljusets hastighet. Vi kan då skriva

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \left( \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (6.7)$$

Det är enkelt att visa att vi nu får

$$\frac{F_m}{F_e} \leq \frac{v v'}{c c} \quad (6.8)$$

där  $F_e$  är storleken av den elektrostatiska växelverkan mellan laddningarna.

Om laddningarnas hastigheter är icke-relativistiska så gäller att  $v \ll c$  och  $v' \ll c$ , så att  $F_m/F_e \ll 1$ , d.v.s. den magnetiska kraften borde kunna ignoreras jämfört med den elektriska.

I de flesta situationer har vi dock strömmar som växelverkar (i) med varandra via sina magnetfält, eller (ii) med ett yttre, fixerat magnetfält. I det senare fallet kan jämförelsen ovan inte göras. I det förra fallet krävs i allmänhet en explicit beräkning för att avgöra vilken kraft som dominerar.

## 6.2. Kraften på en strömledare

Låt oss bestämma den magnetiska kraften på ett strömförande element med längden  $d\mathbf{r}$ , vars riktning sammanfaller med strömmen  $I$  i elementet. Det gäller då att  $d\mathbf{r}$  har samma riktning som laddningarnas hastigheter  $\mathbf{v}$ . Låt  $\mathbf{B}$  representera *magnetfältet som laddningarna påverkas av, inte producerar*. Vi har nu att

$$d\mathbf{F} = dNq\mathbf{v} \times \mathbf{B} = nAd\mathbf{r}q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (6.9)$$

där  $dN$  är antalet laddningar i elementet  $d\mathbf{r}$ ,  $n$  är laddningarnas nummertäthet och  $A$  ledarens tvärsnittsarea.

$d\mathbf{r}$  och  $\mathbf{v}$  är parallella, så vi kan också skriva

$$d\mathbf{F} = nAvq d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = Anqv d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = AJ d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B} \quad (6.10)$$

Totala **kraften** på en strömförande ledare  $C$  är

$$\mathbf{F} = \int_C d\mathbf{r} \times \mathbf{B} I \quad (6.11)$$

För en *sluten slinga*:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= I \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{B} \\ &= I \oint_C (\hat{\mathbf{x}}(dyB_z - dzB_y) + \hat{\mathbf{y}}(dzB_x - dxB_z) + \hat{\mathbf{z}}(dxB_y - dyB_x)) \\ &= I \left( \oint_C dx(B_y\hat{\mathbf{z}} - B_z\hat{\mathbf{y}}) + \oint_C dy(B_z\hat{\mathbf{x}} - B_x\hat{\mathbf{z}}) + \oint_C dz(B_x\hat{\mathbf{y}} - B_y\hat{\mathbf{x}}) \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

om flödestätheten  $\mathbf{B}$  är homogen.

Varför blir t.ex. integralen  $\oint_C dx$  noll?

Detta är enkelt att förstå i en dimension: Kurvan  $C$  kan vara linjen från 0 till 1 och tillbaka till 0. Integralen blir då  $\oint_C dx = \int_0^1 dx + \int_1^0 dx = (1 - 0) + (0 - 1) = 0$ .

I tre dimensioner, och mera formellt:

$$\oint_C dx_i = \int_0^1 dt \frac{dx_i}{dt} = x_i(t) \Big|_{t=0}^{t=1} \quad (6.13)$$

Kurvan  $C$  består av punkterna  $(x(t), y(t), z(t))$ , och är parametriserad med den reella variabeln

$t$ , som går från 0 till 1.

Eftersom kurvan är sluten gäller  $C(t = 0)$  motsvarar samma punkt som  $C(t = 1)$ , och  $x_i(t = 0) = x_i(t = 1)$ , så att integralen ovan är noll.

### 6.3. Vridmomentet på en strömledare

**Vridmomentet** på ett strömelement är

$$d\tau = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = I \mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \quad (6.14)$$

Då  $\mathbf{r}$  utgår från origo ger detta uttryck vridmomentet för en vridning runt origo.

Vridmomentet på en strömförande ledare är alltså

$$\tau = \int_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) I \quad (6.15)$$

Vi övergår nu till att betrakta en *sluten strömslinga*. Vridmomentet på denna är:

$$\tau = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \quad (6.16)$$

Antag att  $\mathbf{B}$  är homogen, d.v.s. inte beror på platsen. BAC-CAB-regeln

$$\mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = d\mathbf{r}(\mathbf{r} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r})$$

$$= d\mathbf{r}(xB_x + yB_y + zB_z) - \mathbf{B}(xdx + ydy + zdz) \quad (6.17)$$

ger

$$\tau = I \oint_C d\mathbf{r}(xB_x + yB_y + zB_z) - I\mathbf{B} \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \quad (6.18)$$

Integralerna innehåller termer som  $\hat{\mathbf{u}} \oint_C duv$  och  $\oint_C duu$ , där  $u, v$  står för  $x, y$  eller  $z$ . Vi använder nu ett symboliskt Cartesiskt koordinatsystem  $(u, v, w)$ .

(i)

$$\oint_C duu \equiv \oint_C dt \frac{du}{dt} u = \oint_C dt u'(t) u = \oint_C dt \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = \frac{1}{2} u^2 \Big|_{t=0}^{t=1} = 0 \quad (6.19)$$

eftersom  $u(t=0) = u(t=1)$  då kurvan är sluten, d.v.s. startpunkten är ju lika med slutpunkten.

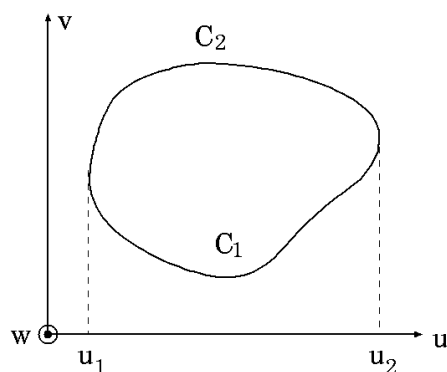
Den andra integralen innehåller enbart dylika termer, så den blir noll.

(ii) Integralen

$$\oint_C duv \quad (6.20)$$

äger rum i  $uv$ -planet, och integrationskurvan är därför  $C$ :s projektion i detta plan, t.ex. för  $w = 0$ .

Integralen blir



$$\begin{aligned} \oint_C duv &= \int_{C_1} duv + \int_{C_2} duv \\ &= \int_{u_1}^{u_2} duv + \int_{u_2}^{u_1} duv \\ &\equiv -A_w \end{aligned} \quad (6.21)$$

som är kurvans area i  $uv$ -planet. Indexet  $w$  kommer från att ytans normal är i  $w$ -axelns riktning.

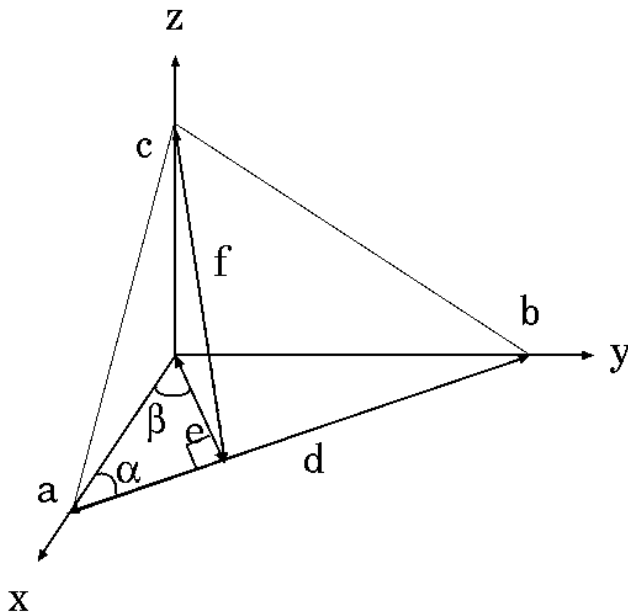
Teckenregler: Integration i  $uv$ -planet ger  $-A_w$ , så integration i  $vu$ -planet ger  $A_w$ . Vi har också att integration i  $vw$ -planet ger  $-A_u$ , så integration i  $wv$ -planet ger  $A_u$ , integration i  $wu$ -planet ger  $-A_v$ , och integration i  $uw$ -planet ger  $A_v$ .

Vi får nu att

$$\begin{aligned}
\tau &= I \oint_C d\mathbf{r} (x B_x + y B_y + z B_z) \\
&= I(-\hat{\mathbf{x}} A_z B_y + \hat{\mathbf{x}} A_y B_z + \hat{\mathbf{y}} A_z B_x - \hat{\mathbf{y}} A_x B_z - \hat{\mathbf{z}} A_y B_x + \hat{\mathbf{z}} A_x B_y) \\
&= I(\hat{\mathbf{x}}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{\mathbf{y}}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{\mathbf{z}}(A_x B_y - A_y B_x)) \\
&\equiv I \mathbf{A} \times \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Här gäller att  $\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$ , där  $A_x$  är (absolutbeloppet av) arean av kurvans projektion in  $yz$ -planet,  $A_y$  är (absolutbeloppet av) arean av kurvans projektion in  $xz$ -planet,  $A_z$  är (absolutbeloppet av) arean av kurvans projektion in  $xy$ -planet,

Vi visar nu att tolkningen att  $\mathbf{A}$  är lika med ytans projektioner i koordinatplanen är konsistent med tolkningen att  $\mathbf{A}$  är lika med arean räknad över den kurviga ytan i 3 dimensioner gånger ytans riktningsvektor.



$$\begin{aligned}
\cos \beta &= \frac{e}{a} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\
&= \sin \alpha \\
&= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Rymdtriangelns area är

$$\begin{aligned}
A' &= \frac{1}{2} df = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} f = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + e^2} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{c^2(a^2 + b^2) + a^2 b^2}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Projektionernas areor är

$$A_x = \frac{1}{2}bc \quad (6.25)$$

$$A_y = \frac{1}{2}ac \quad (6.26)$$

$$A_z = \frac{1}{2}ab \quad (6.27)$$

Arean är alltså  $\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}} \equiv A \hat{\mathbf{n}}$ , där

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2} = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 (a^2 + b^2 + a^2 b^2)} = A' \quad (6.28)$$

d.v.s arean av rymdtriangeln är konsistent med projektionernas areor.

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A} \hat{\mathbf{x}} + \frac{A_y}{A} \hat{\mathbf{y}} + \frac{A_z}{A} \hat{\mathbf{z}} \quad (6.29)$$

T.ex.

$$\hat{\mathbf{n}}_x = \frac{bc}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}} \hat{\mathbf{x}} \quad (6.30)$$

Från figuren ser vi att  $\mathbf{u}_1 = (-a, 0, c)$  och  $\mathbf{u}_2 = (-a, b, 0)$  är två vektorer i ytans plan. Kryssprodukten  $\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_1$  ger ytans onormaliserade riktningsvektor  $\mathbf{u} = (bc, ac, ab)$ , så att

$$\hat{\mathbf{u}}_x = \frac{u_x}{u} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2}} \hat{\mathbf{x}} \quad (6.31)$$

vilket sammanfaller med  $\hat{\mathbf{n}}_x$ !

Detta visar att tolkningen att  $\mathbf{A}$  består av kurvans projektioner på koordinatplanen är konsistent med att  $\mathbf{A} = A \hat{\mathbf{n}}$ , där  $A$  är ytans riktiga area och  $\hat{\mathbf{n}}$  dess normaliserade normalvektor.

En komplicerad yta i 3 dimensioner kan uppdelas i infinitesimala plana ytor, så härledningen ovan gäller också för dem.

Vi får nu att

$$\boldsymbol{\tau} = I \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (6.32)$$

För att upprepa, här är alltså  $\mathbf{A}$  vektorfältet som bildas av arean  $A$  gånger ytnormalens enhetsvektor i varje punkt på arean.

Storheten  $I\mathbf{A}$  har ett eget namn, **magnetiskt dipolmoment**, och betecknas  $\mathbf{m}$ . Dess enhet är  $\text{A m}^2$ .

Eftersom  $\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \oint_C 2d\mathbf{A} = 2\mathbf{A}$  så gäller

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A} = \frac{1}{2}I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \quad (6.33)$$

En tredje form för det magnetiska dipolmomentet får vi med identifikationen

$$I d\mathbf{r} = \mathbf{J} dV \quad (6.34)$$

Detta följer från följande behandling.

Strömmen genom ett litet ytelement  $\delta A$  på ett större infinitesimalt ytelement  $dA$  är

$$\delta I = \mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{A} \quad (6.35)$$

Multiplikation med strömmens tjocklek och riktning  $d\mathbf{r}$  i elementet ger

$$\delta I d\mathbf{r} = (\mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{A}) d\mathbf{r} \quad (6.36)$$

$\mathbf{J}$  or  $d\mathbf{r}$  är parallella, eftersom de båda anger strömmens riktning:

$$\delta I d\mathbf{r} = \mathbf{J}(\delta \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) \equiv \mathbf{J} \delta dV \quad (6.37)$$

Integration med avseende på  $\delta$ -differentialerna ger det eftersökta sambandet.

Det magnetiska dipolmomentet kan alltså också skrivas

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \oint_V dV \mathbf{r} \times \mathbf{J} \quad (6.38)$$

## 6.4. Uttrycket för flödestätheten

[RMC, Jackson]

År 1819 observerade Hans Christian Oersted att magneter som låg nära elektriska ledningar påverkades av strömmen i dessa. År 1820 etablerade Biot och Savart en experimentell lag för hur strömmen påverkade magneterna. Ampère utförde mellan 1820 och 1825 mycket grundligare undersökningar av samma fenomen. Han kom fram till följande grundläggande ekvation:

Ett element med längden  $d\mathbf{r}'$  som bär strömmen  $I'$  alstrar en magnetisk flödestäthet som är

$$d\mathbf{B} \propto \frac{I' d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6.39)$$

där  $\mathbf{r}$  är punkten där flödestätheten mäts och strömelementets position är  $\mathbf{r}'$ . Detta beroende kunde kallas Ampères lag, men detta namn är reserverat för en annan lag som vi tar upp senare. Därför går denna lag istället under namnet **Biot-Savarts lag**.

I SI-systemet är koefficienten i Biot-Savarts lag  $\mu_0/(4\pi)$ , så att

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I' d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6.40)$$

Ett alternativt uttryck är

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 6.17

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6.41)$$

Strömelementet ger upphov till en kraft

$$d\mathbf{F}(\mathbf{r}) = I d\mathbf{r} \times d\mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (6.42)$$

på ett element  $d\mathbf{r}$ , som bär strömmen  $I$ , i punkten  $\mathbf{r}$ .

Kraften på en sluten krets  $C$  med strömmen  $I$  p.g.a. av en sluten krets  $C'$  med strömmen  $I'$  blir nu

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \oint_C \oint_{C'} \frac{d\mathbf{r} \times (d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6.43)$$

Observera:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I' \oint_{C'} dV' \left( -\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot (\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}) + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I' \oint_{C'} dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot (\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}) \end{aligned}$$

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 6.18

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} I' \oint_{C'} dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot (\nabla \times (\nabla \frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|})) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.44}$$

så att

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{6.45}$$

Denna ekvationen säger att magnetfältet inte har några isolerade källor, kallade **monopoler**, på samma sätt som elfältet kan ha det. Magnetfältets källor förekommer alltid i par av negativa och positiva poler, så att summan är noll.

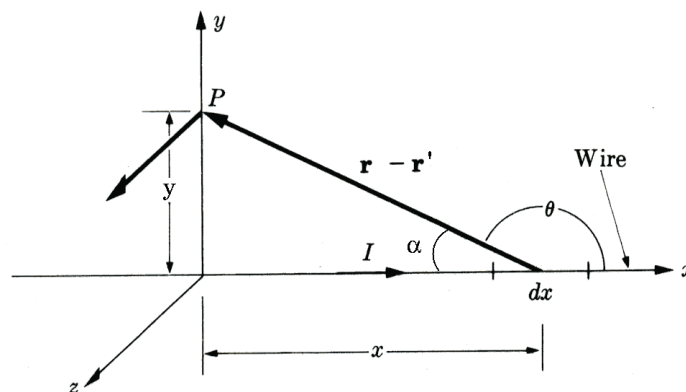
Denna ekvation gäller alltid, också för tidsberoende strömmar.

### 6.4.1. Tillämpningar av Biot-Savarts lag

**Exempel 1:** Flödestätheten från en oändligt lång rak strömförande ledare.

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 6.19



Vi bestämmer  $\mathbf{B}$  i en punkt på  $y$ -axeln.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \hat{\mathbf{x}} \times (-x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}})}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \tag{6.46}$$

Eftersom

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \tag{6.47}$$

får man:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx y \hat{\mathbf{z}}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 6.20

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I' \hat{\mathbf{z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxy}{(y^2/\tan^2 \alpha + y^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I' \hat{\mathbf{z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{y^2 (\cos^2 \alpha / \sin^2 \alpha + 1)^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I' \hat{\mathbf{z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{y^2 (\cos^2 \alpha / \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha / \sin^2 \alpha)^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I' \hat{\mathbf{z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \sin^3 \alpha}{y^2} \tag{6.48}
\end{aligned}$$

Nu kan vi även byta integreringsvariabeln till  $\alpha$ :

$$dx = -\frac{y}{\tan^2 \alpha} \frac{d \tan \alpha}{d\alpha} = -\frac{y}{\tan^2 \alpha \cos^2 \alpha} d\alpha = -\frac{y}{\sin^2 \alpha} d\alpha \tag{6.49}$$

så vi får

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I' \hat{\mathbf{z}} \int_{\pi}^0 \frac{d\alpha \sin \alpha}{y} \\
&= \frac{\mu_0 I'}{2\pi y} \hat{\mathbf{z}} \tag{6.50}
\end{aligned}$$

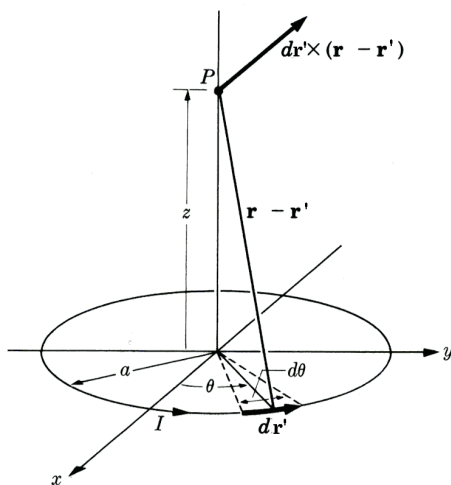
Uppenbarligen har vi symmetri kring  $x$ -axeln, eftersom planet  $yz$ -kan roteras utan att flödestätheten

ändrar.

Från detta exempel har vi nu **högerhandsregeln** för strömmens och flödestäthetens riktningar!

□

**Exempel 2:** Flödestätheten från en cirkulär strömslinga.



Vi bestämmer  $\mathbf{B}$  i en punkt på  $z$ -axeln.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_0^{2\pi} \frac{d\theta a \hat{\theta} \times (-a \hat{\rho} + z \hat{\mathbf{z}})}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I' a \int_0^{2\pi} \frac{d\theta (a \hat{\mathbf{z}} + z \hat{\rho})}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \tag{6.51}
\end{aligned}$$

Vi skrev alltså  $d\mathbf{r}' = a d\theta \hat{\theta}$ , vilket följer från radianens definition.

Eftersom

$$\hat{\rho} = \frac{a \cos \theta \hat{x} + a \sin \theta \hat{y}}{a} \quad (6.52)$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta = 0 = \int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta \quad (6.53)$$

så får vi

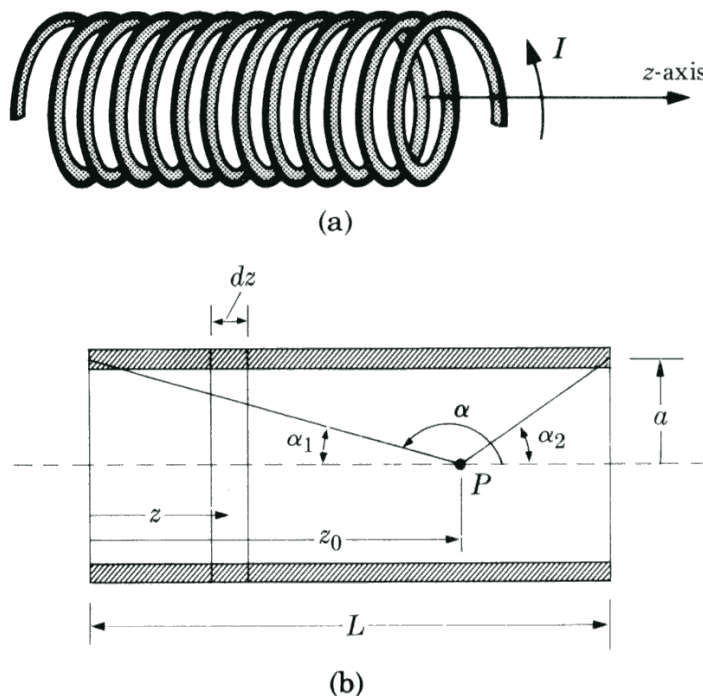
$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I' a \frac{a \hat{\mathbf{z}}}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{2} \frac{I' a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (6.54)$$

□

**Exempel 3:** Flödestätheten på en solenoids symmetriaxel. En solenoid består av  $N$  st cirkulära ledningsvarv så att de bildar en cylindrisk helhet med radien  $a$  och längden  $L$ .

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 6.23



I en kontinuum-approximation kan vi bestämma flödestätheten på symmetriaxeln som en integral av bidraget från cirkulära strömslingor. Med hjälp av föregående exempel får vi nu att

$$\mathbf{B}(z_0) = \frac{\mu_0}{2} a^2 \int dI' \frac{1}{(a^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \quad (6.55)$$

Strömmen genom en differentiell slinga är

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 6.24

$$dI' = \frac{N}{L} dz I' \quad (6.56)$$

där  $N/L$  är slingornas täthet och  $Ndz/L$  deras antal på sträckan  $dz$ . Varje slinga bär strömmen  $I'$ .

Vi får

$$\begin{aligned} B_z(z_0) &= \frac{\mu_0 N I' a^2}{2 L} \int_0^L dz \frac{1}{(a^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 N I' a^2}{2 L} \int_0^L dz \frac{1}{a^3 (1 + (z - z_0)^2/a^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (6.57)$$

För att göra denna integral gör vi variabelbytet  $\cot \alpha = (z - z_0)/a$  som ger för

$$dz = a d \cot \alpha = a d \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -a \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -a \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (6.58)$$

Integreringsgränserna blir nu  $\alpha_1$  och  $\pi - \alpha_2$  (se bilden) så man får

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 N I'}{2 a L} \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} -a \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{(1 + \cot^2 \alpha)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0 N I'}{2 L} \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} \frac{-1}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha})^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 N I'}{2 L} \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} \frac{-1}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha})^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 N I'}{2 L} \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} \frac{-1}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{(\frac{1}{\sin^2 \alpha})^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 N I'}{2 L} \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} -\sin \alpha \\ &= \frac{\mu_0 N I'}{L} \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{2} \end{aligned} \quad (6.59)$$

Om  $L \gg a$  och  $z_0$  inte ligger nära solenoidens ändpunkter gäller

$$\tan \alpha_1 = \frac{a}{z_0} \ll 1 \quad (6.60)$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{a}{L - z_0} \ll 1 \quad (6.61)$$

och vi kan approximera

$$\alpha_1 \approx \frac{a}{z_0} \ll 1 \quad (6.62)$$

$$\alpha_2 \approx \frac{a}{L - z_0} \ll 1 \quad (6.63)$$

så att

$$B_z(z_0) \approx \frac{\mu_0 N I'}{L} \left[ 1 - \frac{a^2}{4z_0^2} - \frac{a^2}{4(L - z_0)^2} \right] \quad (6.64)$$

□

## 6.5. Ampères kretslag

Antag att strömmarna är stationära, d.v.s.  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ .

Rotorn av flödestätheten är

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \left[ \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) - \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \left[ \mathbf{J}(\mathbf{r}') 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \\ &= \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \left[ \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \right] \end{aligned} \quad (6.65)$$

eftersom  $\nabla F(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla' F(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ .

Det gäller att

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot (\nabla f) + f \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (6.66)$$

så att

$$\mathbf{F} \cdot (\nabla f) = \nabla \cdot (f\mathbf{F}) - f \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (6.67)$$

Använd detta:

$$\begin{aligned}\int_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} &= \sum_{i=1}^3 \int_A d\mathbf{A}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{x'_i - x_i}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} - \sum_{i=1}^3 \int_V dV' \frac{x'_i - x_i}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \\ &= 0\end{aligned}\quad (6.68)$$

eftersom ytan  $A'$  kan väljas i oändligheten där strömmarna har dött bort, och  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  för stationära strömmar.

Vi har nu härlett **Ampères lag i differentialform**:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (\text{om } \nabla \cdot \mathbf{J} = 0) \quad (6.69)$$

Ytintegralen av detta är

$$\int_A d\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \quad (6.70)$$

enligt Stokes' teorem, och

$$\int_A d\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \int_A d\mathbf{A} \cdot (\mu_0 \mathbf{J}) \quad (6.71)$$

enligt ekvationen ovan.

Vi har nu härlett **Ampères kretslag**

$$\int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \quad (\text{om } \nabla \cdot \mathbf{J} = 0) \quad (6.72)$$

Denna säger alltså då vi integrerar  $\mathbf{B}$  runt en sluten kurva så får vi  $\mu_0$  gånger den totala strömmen genom den region som denna kurva innesluter.

*Ampères lag möjliggör en snabb bestämning av flödestätheten för enkla geometrier!*

**Exempel :** Magnetfältet runt en lång rak koaxialkabel, där den innersta ledaren har radien  $a$  och den yttre ledaren är en cylindriskt skal med radien  $b$ .

Integrera runt en cirkel:

$$\int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = 2\pi r B \quad (6.73)$$

eftersom  $d\mathbf{r}$  är i den tangentiella riktningen och det är också  $\mathbf{B}$ , enligt högerhandsregeln.

För  $r < a$  och  $r > b$ :  $\int d\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = 0$  och alltså  $B = 0$ .

---

För  $a < r < b$ :  $\int d\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = I$ , och vi får

$$B = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r} \quad (6.74)$$

□

## 6.6. Magnetisk vektorpotential

[RMC, Jackson]

Vi såg tidigare att  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  alltid. Detta medför att  $\mathbf{B}$  kan skrivas som

|                                                      |
|------------------------------------------------------|
| $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.75)$ |
|------------------------------------------------------|

där  $\mathbf{A}$  kallas **magnetisk vektorpotential**. Dess enhet är N/A.

Notera att  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  gäller även om vi adderar gradienten av en godtycklig skalärfunktion  $\Psi$  till  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Psi \quad (6.76)$$

Detta kallas för en **mått-transformation**.

---

Eftersom  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  får vi nu att

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (6.77)$$

Genom att välja  $\Psi$  så att  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , d.v.s. genom att välja **Coulomb-mättet**, så får vi

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (6.78)$$

Detta påminner ju om Poissons ekvation, så kopiering och anpassning av dess lösning ger oss

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.79)$$

förutsatt att  $\Psi$  är en konstant.

Vektorpotentialen  $\mathbf{A}$  förenklar i själva verket *inte* våra räkningar för att bestämma  $\mathbf{B}$ . Den är dock till en viss nytta i problem relaterade till strålning, och i vissa approximativa behandlingar.

## 6.7. Flödestätheten från en avlägsen krets

Vektorpotentialen för en sluten krets är

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.80)$$

där  $\mathbf{r}$  är punkten där potentialen sökes och  $\mathbf{r}'$  löper över kretsen.

Då kretsen är avlägsen kan nämnaren approximeras som

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right] \quad (6.81)$$

till första ordningen i  $r'/r$ . Det här betyder att kretsen måste vara mycket närmare origo än den punkt där vi vill bestämma  $\mathbf{B}$ . Vi får:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \left( \frac{1}{r^2} \oint_C d\mathbf{r}' + \frac{1}{r^3} \oint_C d\mathbf{r}' \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \right) = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \frac{1}{r^3} \oint_C d\mathbf{r}' \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \quad (6.82)$$

Notera:

$$(\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \mathbf{r} = -\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}') + d\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) \quad (6.83)$$

$$d(\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')) = \mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}') + d\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \quad (6.84)$$

Summering av dessa ger

$$d\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') = \frac{1}{2}(\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \mathbf{r} + \frac{1}{2}d(\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')) \quad (6.85)$$

Vi får

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \frac{1}{2} \left( \oint_C (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \right) \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (6.86)$$

Men vi hade ju tidigare att

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \quad (6.87)$$

så vi får nu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (6.88)$$

Flödestätheten är

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right] \quad (6.89)$$

Detta uttryckt är analogt med det vi fick för en elektrisk dipols fält. Av denna anledning kallas detta flödestätheten från en **magnetisk dipol**.

Denna ekvation kan skrivas i den alternativa formen

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \left( \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \right) \quad (6.90)$$

## 6.8. Magnetisk skalärpotential

Ampères lag säger att  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  i de regioner där strömmen är noll, d.v.s.  $\mathbf{B}$  är ett konservativt fält i dessa regioner. Detta betyder att  $\mathbf{B}$  har en skalärpotential där.

Man definierar den **magnetiska skalärpotentialen**  $\varphi_M$  enligt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \varphi_M(\mathbf{r}) \quad (\text{där } \mathbf{J} = 0) \quad (6.91)$$

Divergensen:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.92)$$

från Biot-Savart-lagen. Detta betyder att

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla^2 \varphi_M = 0 \quad (6.93)$$

och alltså

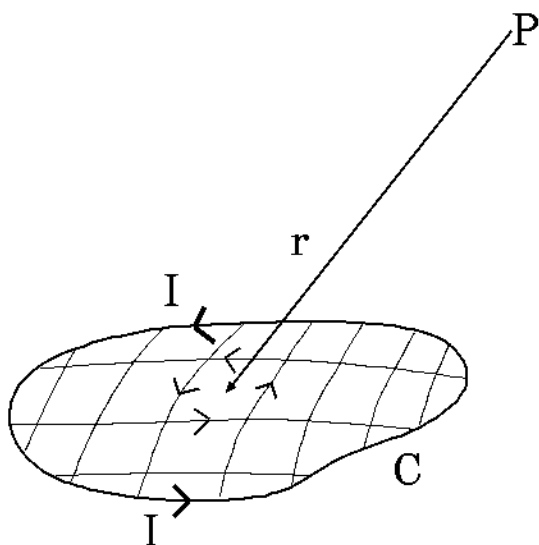
$$\nabla^2 \varphi_M = 0 \quad (6.94)$$

så att  $\varphi_M$  kan erhållas med de tekniker vi lärt oss för att lösa Laplace-ekvationen. Skalärpotentialens enhet är A.

Jämförelse med föregående kapitel ger för den magnetiska dipolen

$$\varphi_M(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (6.95)$$

En sluten slinga  $C$  som bär strömmen  $I$  kan indelas i många små strömbärande slingor:



Nettoströmmen i de "ben" som är gemensamma för angränsande slingor är noll. Det betyder att ström löper enbart i den yttre slingan  $C$ , så som det bör vara i denna situation.

För de mindre slingorna gäller  $d\mathbf{m} = I d\mathbf{A}$ .

Vi får

$$\varphi_M(P) = \frac{1}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}}{v^3} = \frac{I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}}{v^3} \quad (6.96)$$

Vi tog i bruk en ny symbol  $\mathbf{v}$  för vektorn som går från origo till observationspunkten  $P$  där vi vill veta skalärpotentialen. Eftersom  $r' \ll v$  kan  $\mathbf{v}$  approximeras som vektorn från kretsen till  $P$ . Om vi istället vill dra vektorn från  $P$  till kretsen, så måste vi alltså byta  $\mathbf{v}$  mot  $-\mathbf{v} \equiv \mathbf{r}$  och  $v$  mot  $r$ :

Vi får då:

$$\varphi_M(P) = -\frac{I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \equiv -\frac{I}{4\pi} \Omega_C \quad (6.97)$$

där  $\Omega_C$  är den rymdvinkel som ytan begränsad av kurvan  $C$  upptar, sett från punkten  $P$ .

## 6.9. Magnetiskt flöde

Man definierar det **magnetiska flödet** genom en yta  $A$  som

$$\Phi_M \equiv \int_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (6.98)$$

SI-enheten är  $[\Phi_M] = \text{Tm}^2 = \text{m}^2\text{N}/(\text{Am}) = \text{Nm}/\text{A} = \text{Wb}$ , som kallas **weber**.

Flödet genom en sluten yta är

$$\Phi_M = \oint_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{B} = \int_V dV 0 = 0 \quad (6.99)$$

enligt divergensteoremet och lagen om magnetiska monopolars icke-existens.

Detta betyder att magnetiska fältlinjer som går in en volym också måste komma ut därifrån.