

5. Elektrisk ström

[RMC]

5.1. Introduktion

Hittills har vi granskat egenskaper hos statiska laddningsfördelningar, d.v.s. laddningar i vila. Vi ska nu undersöka laddningar i **likformig** rörelse.

Vi behöver inte begränsa laddningar till att vara elektroner, utan de kan också vara negativa eller positiva joner. De ledande material utökas då till att omfatta t.ex. elektrolyter och joniserade gaser, förutom metaller och legeringar.

Laddningar i rörelse utgör en **(elektrisk) ström**. Strömmen betecknas I och definieras

$$I \equiv \frac{dQ}{dt}, \quad (5.1)$$

där dQ är den laddningsmängd som passerar en yta A på tiden dt . Enheten: $[I] = \text{C/s} = \text{A}$, kallas **ampère**.

Exempel : Hur många elektroner passerar per sekund ett tvärsnitt av en metalltråd med radien 0,1 mm, som bär en ström på 1 mA ?

Svar: $N_e = \Delta Q = I \Delta t = 1 \text{ mA} \cdot 1 \text{ s} = 1 \text{ mC}$, så att $N = 6,2 \times 10^{15}$ elektroner. $\square$

Exempel : Hur mycket är detta jämfört med totala antalet elektroner i metallen? Anta: tråden har längden 1 cm och består av Cu med en ledningselektron/atom?

Svar:

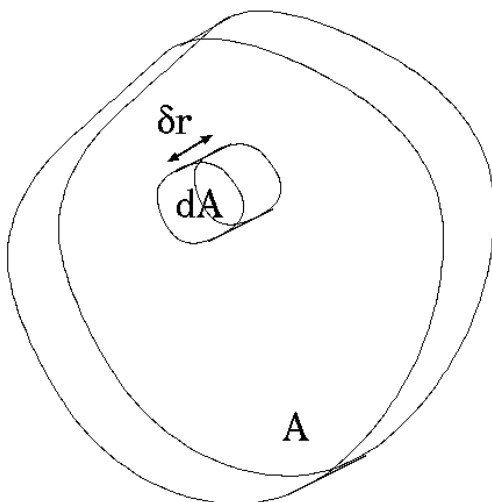
Koppars densitet $\rho = 8.96 \text{ g/cm}^3$ samt atommassa $m = 63.546u$. Alltså blir koppars atomdensitet $\rho_a = 8.49 \times 10^{22} \text{ atomer/cm}^3$ och antalet elektroner i tråden

$$N_{\text{el}} = N_{\text{at}} = \pi 0.01^2 \times 1 \times 8.49 \times 10^{22} = 2.66 \times 10^{19}$$

Alltså är för typiska strömmar antalet elektroner som förflyttas på 1 sekund mycket mindre än det totala antalet elektroner!

5.2. Kontinuitetsekvationen

Betrakta nu en liten tvärsnittsytta dA , genom vilken strömmen dI går:



$$\begin{aligned} dI &= \frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{q \delta N}{\delta t} = \frac{qn \delta V}{\delta t} \\ &= \frac{qn \delta \mathbf{r} \cdot d\mathbf{A}}{\delta t} \\ &= \frac{qn \delta t \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}}{\delta t} = qn \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \\ &\equiv qn \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \end{aligned} \quad (5.2)$$

Vi införde nummertätheten $n = N/V$ och laddningarnas hastigheter $\mathbf{v}$.

Om vi har flera sorters laddningar måste vi summera över dem alla:

$$dI = \sum_i q_i n_i \mathbf{v}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \left(\sum_i q_i n_i \mathbf{v}_i \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (5.3)$$

Parentesen innehåller en laddnings-yttäthet per tid, denna betecknas

$$\mathbf{J} \equiv \sum_i q_i n_i \mathbf{v}_i \quad (5.4)$$

och kallas **ström-täthet**. Enhet: $[J] = \text{A/m}^2 = \text{C}/(\text{m}^2 \text{ s})$.

Totala strömmen genom en yta A är nu

$$I = \int_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{J} \quad (5.5)$$

Strömtätheten kan relateras till laddningstätheten $\rho(\mathbf{r})$ på följande sätt.

Strömmen in genom en sluten yta är

$$I = - \oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{J} = - \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (5.6)$$

eftersom $\mathbf{J} \cdot \mathbf{dA} < 0$ då laddningarna strömmar in i ytan, d.v.s. mot ytnormalen.

Å andra sidan, strömmen kan skrivas

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \quad (5.7)$$

Tidsderiveringen opererar både på V och integranden.

Deriveringen kan skrivas

$$\frac{d}{dt} \sum_i \Delta V_i \rho(\mathbf{r}_i) = \sum_i \Delta V_i \frac{d\rho(\mathbf{r}_i)}{dt} \quad (5.8)$$

om de enskilda elementens volym förblir konstant.

Vidare,

$$\sum_i \Delta V_i \frac{d\rho(\mathbf{r}_i)}{dt} = \sum_i \Delta V_i \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_i} \rho(\mathbf{r}_i) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}_i)}{\partial t} \right) = \sum_i \Delta V_i \frac{\partial \rho(\mathbf{r}_i)}{\partial t} \quad (5.9)$$

om mittpunkten i varje element hålls fixerad.

Detta sista uttryck motsvarar

$$\int_V dV \frac{\partial \rho(\mathbf{r}_i)}{\partial t} \quad (5.10)$$

Vi får

$$I = \int_V dV \frac{\partial \rho(\mathbf{r})}{\partial t} = - \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (5.11)$$

så att

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho(\mathbf{r})}{\partial t} = 0 \quad (5.12)$$

som kallas **kontinuitetsekvationen**. Dess fysikaliska tolkning är enkel: den säger helt enkelt att laddningar inte kan skapas ur intet (eller förintas till intet). Ifall det finns laddningskällor eller -svalg i systemet gäller den inte.

5.3. Konduktivitet

Exzperimentellt kan man visa att vid en fixerad temperatur gäller för de flesta metaller att

$$\mathbf{J} = g(E)\mathbf{E}, \quad (5.13)$$

där g kallas **konduktivitet**. Enheten: $[g] = [J]/[E] = \text{A/m}^2 / (\text{N/C}) = \text{AC}/(\text{Nm}^2) = \text{A}/(\text{Vm})$, eftersom $\varphi = \int \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E}$ och potentialen mäts i enheten $\text{V} = \text{Nm}/\text{C}$ (volt). Kvoten A/V har en egen beteckning, S, för **siemens**. Konduktiviteten kan alltså anges i enheten $\text{A}/(\text{Vm})$ eller S/m .

Ekvationen ovan går också under namnet **Ohms lag**.

För linjära isotropiska — också kallade **ohmiska** — media gäller att $g(E)$ är en materialkonstant, oberoende av E , så att vi har

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E} \quad (5.14)$$

Man definierar också **resistiviteten**

$$\eta = \frac{1}{g} \quad (5.15)$$

Dess enhet är $\text{Vm}/\text{A} = \text{m}/\text{S}$.

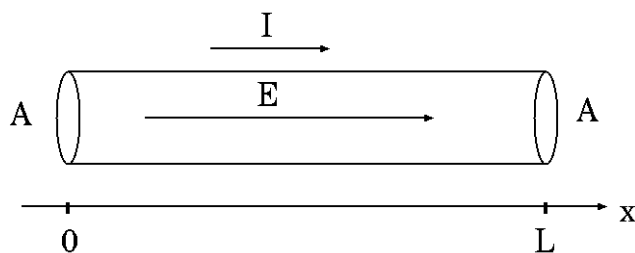
Följande "teckenregler" gäller:

$\begin{array}{c} + \xrightarrow{\mathbf{E}} - \end{array}$	
Negativa laddningar	Positiva laddningar
$\begin{array}{c} \xleftarrow{\mathbf{v}} \\ \xrightarrow{\mathbf{J}, \mathbf{I}} \end{array}$	$\begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{v}} \\ \xrightarrow{\mathbf{J}, \mathbf{I}} \end{array}$

Ström kan också bäras av positiva laddningsbärare. Exempel är positivt laddade joner i en elektrolytvätska eller inne i en jonisk dielektrisk kristall.

I halvledarfysiken har tomma elektrontillstånd, s.k. "hål", en central roll. Dessa kan behandlas som effektivt sätt positivt laddade laddningsbärare!

Betrakta en rak ledare med längden L och den konstanta tvärsnittsarean A . Ledaren har en konstant konduktivitet g .



Antag för enkelhetens skull att elfältet $\mathbf{E}$ är konstant över ledarens tvärsnitt och dess längd. Vi har då att

$$\Delta\varphi = \left| - \int_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E} \right| = EL \quad (5.16)$$

$$I = \left| \int_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{J} \right| = JA = gAE \quad (5.17)$$

Eliminera E :

$$I = g \frac{\Delta\varphi}{L} A \quad (5.18)$$

så att

$$\Delta\varphi = \frac{L}{gA} I = \frac{\eta L}{A} I \equiv RI, \quad (5.19)$$

där R inkorporerar ledarens dimensioner och dess resistivitet.

Denna storhet kallas **resistans** och har enheten $V/A \equiv \Omega$, som kallas **ohm**.

Resistivitetens enhet Vm/A kan alltså också skrivas Ωm .

Notera att den egentliga definition för resistansen mellan punkterna A och B för en allmän ledare är

$$R \equiv \frac{|\varphi_B - \varphi_A|}{I} \quad (5.20)$$

där φ_A, φ_B är potentialerna i A respektive B , och I är den ström som går mellan A och B .

Resistansen är i allmänhet beroende på strömmens styrka, $R = R(I)$, men för **linjära** material är R en konstant.

Då vi går i elfältets riktning sjunker potentialen, eftersom elfältet utför arbete: positiva laddningar förs från hög potentialenergi till lägre potentialenergi.

Det utförda arbetet har effekten

$$P = \frac{d}{dt}(Q\Delta\varphi) = I\Delta\varphi = IRI = RI^2 = \frac{(\Delta\varphi)^2}{R} \quad (5.21)$$

Från detta får vi ett nytt uttryck för resistansens enhet. $[P] = W = J/s = A V = \Omega A^2 = V^2/\Omega$. Detta ger

$$A = W/V = V/\Omega$$

$$V = W/A = J/C = Nm/C$$

$$\Omega = W/A^2 = J/(A^2s) = J/(Cs) = V^2/W$$

Den energi som förloras går åt till att värma upp materialet. Detta kallas **Joule-uppvärmning** eller **Ohmisk uppvärmning** eller **ohmisk (energi)förlust**.

Resistiviteter för några material vid 20°C:

Material	Resistivitet, η (Ωm)
Aluminium	2.65×10^{-8}
Koppar	1.67×10^{-8}
Guld	2.35×10^{-8}
Järn	9.71×10^{-8}
Nickel	6.84×10^{-8}
Silver	1.59×10^{-8}
Zink	5.9×10^{-8}
Wolfram	5.51×10^{-8}
Kol (grafit)	10^{-6}
Germanium*	5×10^{-1}
Kisel*	6×10^2
Trä	$10^8 - 10^{11}$
Gummi	10^{13}
Glas	$10^{10} - 10^{14}$
Kvarts	2×10^{15}
Kol (diamant)	$10^{16} - 10^{18}$

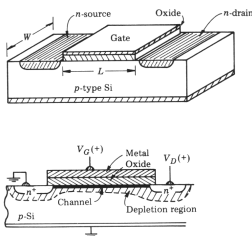
*Halvledares resistiviteter är extremt känsliga till temperatur och orenheter, så värdena ovan är bara riktgivande!

Notera de enorma variationerna över mer än 20 storleksordningar. Å andra sidan, notera också att trots att t.ex. glas ofta betraktas som en perfekt isolator, leder den nog i själva verket lite ström.

Notera också att samma grundämne kan ha enormt olika resistivitet beroende på kristallstruktur

(se värdena för kol).

Exempel : I moderna halvledarkretsar är den viktigaste funktionella komponenten den s.k. MOSFET-transistorn. En av dess avgörande delar är det isolerande oxidlagret under styr-”gaten”, som tills nyligen bestod alltid av kiseldioxid ($\approx$ kvarts). Vad är läckströmmen genom ett oxidlager av storlek $100\text{ nm} \times 100\text{ nm} \times 10\text{ nm}$ under en operationscykeltid på 1 ns (motsvarande en typisk processor-klockfrekvens på 1 GHz)? Spänningen över ”gaten” kan antas vara av storleksordningen 1 V .



$$\begin{aligned}
 \Delta Q &= I \Delta t = A J \Delta t = A g \frac{\Delta \phi}{L} \Delta t = A \frac{1}{\eta} \frac{\Delta \phi}{L} \Delta t \\
 &= (100\text{ nm})^2 \times \frac{1}{2 \cdot 10^{15} \Omega\text{m}} \times \frac{1\text{ V}}{10\text{ nm}} \times 1\text{ ns} \\
 &= 5 \times 10^{-31} \text{ C} = 3 \times 10^{-12} \text{ elektroner}
 \end{aligned}$$

Alltså är läckaet extremt litet!

Dock bör noteras att detta kräver att kvartslagret har perfekt struktur - i verkligheten är det inte det, vilket har lett till att kiseldioxiden har börjat bytas ut mot andra material.

5.4. Stationär jämvikt i kontinuerliga media

Stationär jämvikt betyder nu att laddningsfördelning $\rho(\mathbf{r})$ hålls konstant i varje punkt, trots närvaron av strömmande laddningar.

Kontinuitetsekvationen ger

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot g\mathbf{E} = g\nabla \cdot \mathbf{E} \quad (5.22)$$

så att

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (5.23)$$

Men $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, så att detta ger

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (5.24)$$

Systemet beskrivs alltså av Laplace-ekvationen, trots närvaron av strömmar. Randvillkoren ges av φ eller $\mathbf{J}$ på gränsytor mellan ledarna och övriga icke-ledande media.

Villkoren för gränssytor mellan ledare erhålls på följande sätt.

(1) Tillämpning av $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ på en pillerburk på gränsytan mellan ledare 1 och 2 ger genast att

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 5.15

$$J_{1,n} = J_{2,n} \quad (5.25)$$

Ekvationen $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ är nu viktigare än ekvationen $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, eftersom den senare inte förmår ta strömmen i beaktande.

Ekvationen ovan kan ju också skrivas

$$g_1 E_{1,n} = g_2 E_{2,n} \quad (5.26)$$

(2) Kurvintegrals-ekvationen $\int \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E} = 0$ över gränsytan ger

$$E_{1,t} = E_{2,t} \quad (5.27)$$

som tidigare.

★ ★ ★

Betrakta en situation där två elektroder är nersänkta i ett oändligt ohmskt medium, som kännetecknas av den konstanta konduktiviteten g och resistansen R .

Om potentialskillnaden mellan elektroderna är $\Delta\varphi$ så gäller ju

$$\Delta\varphi = RI, \quad (5.28)$$

Elektrodynamik, vt 2013, Kai Nordlund

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ × 5.16

där I är strömmen mellan elektroderna genom det ohmska mediet.

Men vi har ju att

$$I = \frac{\Delta\varphi}{R} \equiv \oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{J} \equiv g \oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{E} \quad (5.29)$$

där $\mathbf{E}$ är elfältet i mediet.

Om vi kan identifiera detta elfält med det som en laddning Q på elektroden ger upphov till i ett omkringliggande dielektrikum, d.v.s. om vi kan använda förhållandet

$$\oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\varepsilon}, \quad (5.30)$$

så vi får vi i den aktuella situationen att

$$\frac{\Delta\varphi}{R} = g \frac{Q}{\varepsilon} \quad (5.31)$$

Elektroderna bildar då en kondensator, med kapacitansen given av ekvationen

$$Q = C \Delta\varphi \quad (5.32)$$

Kombination av de två senaste relationerna ger oss

$$\frac{\Delta\varphi}{R} = g \frac{C \Delta\varphi}{\varepsilon} \quad (5.33)$$

d.v.s.

$$RC = \frac{\varepsilon}{g} = \varepsilon\eta, \quad (5.34)$$

där η är mediets resitivitet.

Denna ekvation relaterar kapacitansen och permittiviteten för ett dielektrikum till dess resistans och konduktivitet, d.v.s. varje dielektrikum har en förmåga att leda ström.

Alternativt, ekvationen relaterar resistansen och konduktiviteten för ett resistivt medium till dess kapacitans och permittivitet, d.v.s. varje resistivt medium har en kapacitans.

5.5. Uppkomst av elektrostatisk jämvikt

Vi ska nu titta på hur snabbt ett medium uppnår elektrostatisk jämvikt, d.v.s. hur snabbt laddningsfördelningen arrangerar sig själv i ett stabilt tillstånd.

Låt mediet ha konduktiviteten g och permittiviteten ε , och låt det vara fyllt med laddning med fördelningen $\rho(\mathbf{r}, t)$. Vid tiden $t = 0$ släcks det yttre elfältet.

Kontinuitetsekvationen:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + g \nabla \cdot \mathbf{E} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + g \frac{\rho}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Lösningen är, för konstanta g, ε :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) e^{-gt/\varepsilon} \quad (5.36)$$

där

$$t_r = \frac{\varepsilon}{g} = \varepsilon \eta \quad (5.37)$$

är laddningens **tidskonstant** eller **relaxationstid**. Denna är ett mått på hur snabbt fördelningen av fri laddning förändras, i det här fallet hur snabbt laddningen sprids ut då det yttre fältet släcks.

Vi såg tidigare att ledare reagerar mycket snabbt på (förändringar i) yttre elfält. Vi har då att ju mindre tidskonstant ett medium har desto mera liknar det en ledare.

De flesta dielektrika har $\varepsilon = (1 - 10)\varepsilon_0$. Ifall de har $\eta < (10^9 - 10^{10}) \Omega\text{m}$ kan de anses uppvisa ledar-lik beteende, för då har de en tidskonstant $t_r = \varepsilon \eta \lesssim 10^{10} \varepsilon_0 \Omega\text{m} \sim 0, 1 \text{ s}$.

I situationer där det yttre elfältets styrka eller riktning beskrivs av en maximal frekvens f så bör man istället ha att $t_r \ll 1/f$.

Obs: Ekvationen ovan kan inte tillämpas på metaller, eftersom värdet på ε är odefinierat. Vi kan ju inte utnyttja t.ex. en skivkondensator fylld med metalliskt medium för att erhålla C och därefter ε , av uppenbar orsak.

5.6. Ledningens mikroskopiska natur

Laddningar i en ledare påverkas av kraften $q\mathbf{E}$, så att deras hastighet ändrar enligt Newtons II lag:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} \quad (5.38)$$

Då strömmen är konstant har också laddningarna en konstant hastighet, den så kallade **drifhastigheten**. Vi måste då ha att laddningarna också påverkas av en bromsande kraft, som vi kan anta är proportionell mot hastigheten:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - G\mathbf{v} \quad (5.39)$$

Lösningen till denna ekvation är

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q}{G}\mathbf{E}(1 - e^{-Gt/m}) \quad (5.40)$$

Tidskonstanten är

$$\tau = \frac{m}{G} \quad (5.41)$$

Vid stationär jämvikt är accelerationen noll, så att hastigheten då är

$$\mathbf{v}_d = \frac{q}{G}\mathbf{E} = \frac{q\tau}{m}\mathbf{E} \quad (5.42)$$

I början av detta kapitel visade vi att

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d \quad (5.43)$$

så att

$$\mathbf{J} = \frac{nq^2\tau}{m}\mathbf{E} \equiv g\mathbf{E} \quad (5.44)$$

och

$$g = \frac{nq^2\tau}{m} \quad (5.45)$$

För flera sorters laddningar:

$$g = \sum_i \frac{n_i q_i^2 \tau_i}{m_i} \quad (5.46)$$

För ledare där enbart elektronerna är laddningsbärare:

$$g = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (5.47)$$

$$\mathbf{J} = -nev_d \quad (5.48)$$

eftersom $q = -e$, $e > 0$.

Vi kan göra följande tolkning för laddningarnas rörelse i ett ledande material. Efter att laddningen kolliderat med en atom i materialet och kommit till vila accelereras den av elfältet upp till sin drifhastighet, varefter den igen kolliderar i materialet. Vi har då att

$$\mathbf{v}_d = \frac{q\tau}{m}\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{E}}{m}\tau = \frac{\mathbf{F}}{m}\tau = \mathbf{a}\tau \quad (5.49)$$

så att τ kan tolkas som **tiden mellan kollisioner**.

Vi definierar också **medelvärde av den fria vägen** (genomsnittliga fria vägen, *mean free path*) λ för laddningen, med ekvationen

$$\lambda = v_T\tau \quad (5.50)$$

där v_T är laddningarnas termiska hastighet. För elektroner gäller $v_T \gg v_d$.

$\lambda \sim 10^{-8}$ m vid rumstemperatur, för (elektroner i) metaller och halvledare.

För metaller: $v_d \lesssim 10^{-2}$ m/s, $v_T \sim 10^6$ m/s, $\tau \sim 10^{-14}$ s.

För halvledare: $v_T \sim 10^5$ m/s vid rumstemperatur, $\tau \sim 10^{-13}$ s.

Perfekta ledare har ingen resistans, så i dessa måste gälla att $\eta = 0$. Men detta betyder att $g = \infty$, så att τ och λ båda är oändligt stora. Detta betyder att elektronerna aldrig kolliderar med ledaren.

Man kan med en kvantmekanisk behandling visa att elektroner i tredimensionella periodiska gitter (kristaller med regelbundna atompositioner) rör sig utan att kollidera med materialet de rör sig i.

Perfekta ledare består alltså av perfekta gitter vid 0 K.

Varifrån kommer då ändliga relaxationstider och en ändlig konduktivitet? De kommer från elektronernas växelverkan med defekter, orenheter och vibrationskvanta (fononer) i gitter. För mer om detta, se kursen i Fasta tillståndets fysik.

Det är också viktigt att veta att begreppen **perfekt ledare** och elektrisk **supraledare** inte är samma sak - supraledare har visserligen nollresistivitet, men annars beter de sig i de flesta hänseenden inte på samma sätt som en klassisk perfekt ledare skulle väntas bete sig.

“Perfekt ledare” är ett inbillat klassiskt material för gränsvärdet $\eta \rightarrow 0$, medan supraledare är

verkliga material vars existens och egenskaper beror helt på komplicerad kvantmekanik.

För mer om detta, se kursen i Fasta tillståndets fysik.

5.7. Kirchhoffs lagar

Upp till nu har vi betraktat vad som händer på den mikroskopiska nivån i ledande material. I praktiken använder man ledare med enkel geometri — t.ex. en tråd — så att laddningarna tvingas röra sig en bestämd väg. Dyliga system eller nätverk av ledna strömmar bildar en **(elektrisk) krets**.

I dyliga fall kan man nöja sig med att undersöka strömmarna i ledningarna istället för de enskilda laddningarna.

I allmänhet består kretsen av flera delar eller förgreningar. Ändamålet med **kretsanalys** är då att bestämma de strömmar som går genom de olika delarna, förutsatt att egenskaperna hos elementen (resistorer, kondensatorer, batterier, . . .) i kretsen är givna.

I en sluten passiv krets gäller

$$\oint \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (5.51)$$

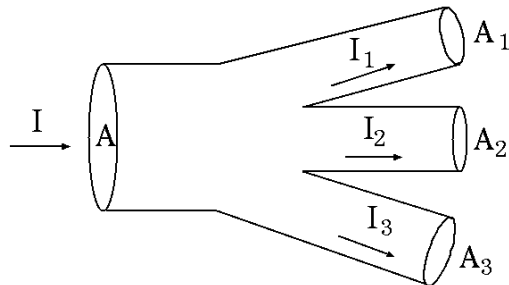
d.v.s. den totala potentialskillnaden är noll. Eftersom potentialen sjunker t.ex. över en resistor måste det då finnas en **källa till potentialskillnad** eller **spänningskälla** nånstans i kretsen. En mycket vanlig sådan är ett batteri.

Potentialskillnaden eller spänningen som batteriet genererar beror i det allmänna fallet på strömmen som batteriet får att uppkomma i kretsen: $V = V(I)$. En enkel approximation är

$$V = V_0 - R_i I \quad (5.52)$$

där V_0 kallas **den öppna kretsens spänning** och R_i **intern resistans**. Spänningen om batteriet ger ut är alltså mindre än den som rapporteras på det, p.g.a. termen $-R_i I$.

Betrakta en krets där en ledning med strömmen I förgrenar sig i N st ledningar som bär strömmarna I_i .



Kontinuitetsekvationen tillämpad på en yta som innesluter ledningarna och går över de olika ledningarnas tvärsnittsytor ger

$$\oint_A \mathbf{dA} \cdot \mathbf{J} = \oint_A dI = I = \sum_{i=1}^N \oint_{A_i} \mathbf{dA} \cdot \mathbf{J}_i = \sum_{i=1}^N I_i \quad (5.53)$$

då laddning inte t.ex. ackumuleras nånstans inne i dessa ledningar.

Detta ger

$$I = \sum_{i=1}^N I_i \quad (5.54)$$

vid en förgreningspunkt.

Vidare,

$$0 = \oint \mathbf{dr} \cdot \mathbf{E} = \sum_i V_i - \sum_j R_j I_j \quad (5.55)$$

där spänningarna V_i "äts upp" av potentialskillnaderna $R_j I_j$ över resistorerna i kretsen.

Vi har nu härlett **Kirchhoffs lagar** för kretsar som transporterar stationär ström:

I. Den algebraiska summan av strömmar som går in i en förgreningspunkt är noll:

$$\sum_i I = 0 \quad (5.56)$$

II. Den algebraiska summan av potentialskillnader runt en sluten krets är noll:

$$\sum_i V_i = \sum_j R_j I_j \quad (5.57)$$

Dessa utgör grunden för elektroniken. Nu har de vi alltså härlett dem utgående från grundläggande elektrodynamik!

För information om hur de används i praktiken, se kursen i elektronik.

5.8. Resistorkopplingar

Vi kan nu bestämma resistansen för sammansatta resistorer, d.v.s. resistorer kopplade i serie eller parallellt.

För två resistorer i serie gäller

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 \quad (5.58)$$

Eftersom $\Delta\varphi = RI$ får vi

$$RI = R_1I_1 + R_2I_2 \quad (5.59)$$

I en seriekoppling går samma ström genom varje resistor, $I = I_1 = I_2$, så att

$$R = R_1 + R_2 \quad (5.60)$$

För två resistorer kopplade parallellt gäller

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 \quad (5.61)$$

Strömmen bevaras, så att

$$I = I_1 + I_2 \quad (5.62)$$

Eftersom $\Delta\varphi = RI$ får vi

$$\frac{\Delta\varphi}{R} = \frac{\Delta\varphi_1}{R_1} + \frac{\Delta\varphi_2}{R_2} \quad (5.63)$$

Med hjälp av första ekvationen får vi

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (5.64)$$